Chủ đề: Phương pháp lặp đơn giải f(x)=0

Vũ Thị Tâm
Nguyễn Thị Nga
Nguyễn Thị Thủy
Hoàng Đức Minh Triều
Đoàn Quốc Vĩnh
Nguyễn Thành Đạt

Hà Nội, tháng 3 năm 2021

Nội dung

Bài toán đặt ra

Giải phương trình $f(x) = 0$. (1)
Giả sử (a, b) là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình $f(x) = 0$ (tức là $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $\alpha \in (a, b)$), đồng thời $f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$. Cần một phương pháp để tìm ra nghiệm đúng hoặc gần đúng của phương trình.

Nội dung

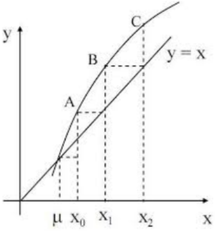
Ý tưởng phương pháp

MỤC TIÊU : Tìm nghiệm gần đúng với sai số cho phép ε.

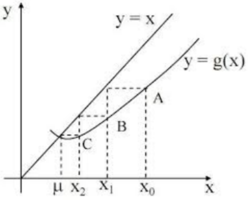
XÂY DỰNG CÔNG THỨC

- Biến đổi tương đương $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$, với $g(x)$ là hàm liên tục trên khoảng (a, b)
- Chọn giá trị $x_0 \in (a, b)$
- Tính $x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), ...x_k = g(x_{k-1}) k \to \infty \Rightarrow$Thu được dãy x_n Nếu x_n hội tụ thì $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- Từ đó ta thu được công thức lặp $x_n = g(x_{n-1})$

Ý NGHĨA HÌNH HỌC: Từ phương trình $x = g(x)$, sử dụng công thức lặp trên, tìm được nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = x$ và $y = g(x)$.



Hình a
Không hội tụ đến nghiệm α



Hình b
Hội tụ đến nghiệm α

Nội dung

Sự hội tụ của phương pháp

- Quá trình lặp lại được gọi là hội tụ, nếu dãy x_n tính theo công thức trên hội tụ, tức là $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.
- Nếu quá trình lặp hội tụ, nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.
- Nhưng do $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$ nên

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1}) = g[\lim_{n\to\infty} x_{n-1}]$$

  Từ đó suy ra $x^* = g(x^*)$
- Vậy khi đó $x^* = \alpha$ là nghiệm của phương trình $x = g(x)$ hay của phương trình $f(x) = 0$.

Điều kiện hội tụ

Định lý 1: Định lý ánh xạ co

Cho không gian mêtric đầy đủ $\mathbb{X}$. Cho $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$.
Nếu $\exists\ 0 \leq \alpha < 1$ sao cho $\forall x, y$ ta có $d(f(x), f(y) \leq \alpha.d(x, y)$. Khi đó $\exists\ x_0$ duy nhất thỏa mãn $f(x_0) = x_0$, và nếu ta xét dãy x_n như sau $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots$ thì x_n hội tụ về x.

Điều kiện hội tụ

Định lý 1: Định lý ánh xạ co

Cho không gian mêtric đầy đủ $\mathbb{X}$. Cho $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$.
Nếu $\exists\ 0 \leq \alpha < 1$ sao cho $\forall x, y$ ta có $d(f(x), f(y) \leq \alpha.d(x, y)$. Khi đó $\exists\ x_0$ duy nhất thỏa mãn $f(x_0) = x_0$, và nếu ta xét dãy x_n như sau $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), ...$ thì x_n hội tụ về x.

Định lý 2

Giả sử (a, b) là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình $f(x) = 0$ hay $x = g(x)$, $g(x)$ là hàm liên tục và có đạo hàm trên $[a, b]$, $g(x) \in [a, b]$. Với bất kỳ $x_n \in [a, b]$, nếu $\exists\ q \geq 0$ không phụ thuộc vào x sao cho:

$$|g'(x)| \leq q < 1,\ \exists x \in [a, b] \quad (1)$$

Thì quá trình lặp hội tụ tới nghiệm đúng α của phương trình.

Chứng minh định lý 2

Do α là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ nên ta có $\alpha = g(x)$
Theo công thức lặp $x_n = g(x_{n-1})$(2)   ta có $x_1 = g(x_0)$. Theo định lý Lagrange:
$x_1 - \alpha = g'(c_1)(x_0 - \alpha)$
trong đó c_1 là trị trung gian giữa x_0 và α.Từ đó theo điều kiện (1):
$|x_1 - \alpha| \leq q|x_0 - \alpha|$.
Tương tự ta cũng có:
$|x_2 - \alpha| \leq q|x_1 - \alpha|$;
....
$|x_n - \alpha| \leq q|x_{n-1} - \alpha$;
Nhân các bất đẳng thức trên vế với vế:
$|x_n - \alpha| \leq q^n|x_0 - \alpha|$;
Do $0 \leq q \leq 1$ nên khi $n \to \infty$ thì $x_n \to \alpha$
hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$
Vậy với các điều kiện của định lý 2 thì quá trình lặp (2) hội tụ và hội tụ tới nghiệm đúng α của phương trình $f(x) = 0$.

Nội dung

Công thức sai số

Giả sử α là nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$ và $x_n$là nghiệm gần đúng tính theo công thức $x_n = g(x_{n-1})$. Khi $|x_n - \alpha|$ được đánh giá theo công thức:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

hoặc

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Công thức 1 thuận lợi khi tính trên máy tính
Muốn nghiệm gần đúng x_n đạt sai số ε, ta kiểm tra điều kiện dừng:
$|x_n - x_{n-1}| \leq \delta = \dfrac{\varepsilon(1-q)}{q}$
Công thức 2 thuận lợi trong việc tìm nghiệm gần đúng x_n đạt sai số ε cho trước.
Cụ thể, từ đánh giá $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$

Ta suy ra số n nhỏ nhất thỏa mãn:
$n \leq \log_q \dfrac{\varepsilon(1-q)}{q}$

Chứng minh công thức sai số

Công thức sai số hậu nghiệm

Ta xét :$|x_n - \alpha| \leq q|x_{n-1} - \alpha| = q|(x_{n-1} - x_n) + (x_n - \alpha)|$

$\Rightarrow |x_n - \alpha| \leq q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \alpha|$

$\Rightarrow (1 - q)|x_n - \alpha| \leq q|x_{n-1} - x_n|$

$\Rightarrow |x_n - \alpha| \leq \dfrac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$

Trong trường hợp $0 \leq q \leq \dfrac{1}{2}$ ta được:

$|x_n - \alpha| \leq |x_n - x_{n-1}|$

Công thức sai số tiên nghiệm

Ta có $x_n = g(x_{n-1}); x_{n-1} = g(x_{n-2})$.

$$x_n - x_{n-1} = g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})$$

Theo định lý Lagrange:

$$x_n - x_{n-1} = g'(c)(x_{n-1} - g(x_{n-2})$$

Với c là giá trị nằm giữa x_{n-1} và x_{n-2}, hay:

$$|x_n - x_{n-1}| = g'(c)(x_{n-1} - x_{n-2})| \leq q|(x_{n-1} - x_n)|$$

Thay vào công thức 1 và truy hồi ta có:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^2}{1-q}|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq ... \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Nội dung

Gradient Descent

Giới thiệu:

- Điểm local minimum x^* của hàm số là điểm có đạo hàm $f'(x^*)$ bằng 0. Hơn thế nữa, trong lân cận của nó, đạo hàm của các điểm phía bên trái là không dương, đạo hàm của các điểm phía bên phải là không âm.
- Đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số đó tại 1 điểm bất kỳ có hệ số góc chính bằng đạo hàm của hàm số tại điểm đó.

Gradient Descent

Giả sử x_t là điểm ta tìm được sau vòng lặp thứ t. Ta cần tìm một thuật toán để đưa x_t về càng gần x càng tốt:

- Nếu đạo hàm của hàm số tại $x_t : f'(x_t) > 0$ thì x_t nằm về phía bên phải so với x(và ngược lại). Để điểm tiếp theo x_{t+1} gần với x hơn, chúng ta cần di chuyển x_t về phía bên trái, tức về phía âm. Nói các khác, chúng ta cần di chuyển ngược dấu với đạo hàm:

$$x_{t+1} = x_t + \Delta$$

  Trong đó Δ là một đại lượng ngược dấu với đạo hàm $f'(x_t)$

- x_t càng xa x về phía bên phải thì $f'(x_t)$ càng lớn hơn 0 (và ngược lại). Vậy, lượng di chuyển Δ, một cách trực quan nhất, là tỉ lệ thuận với $f'(x_t)$

Thuật toán Gradient Descent

Thuật toán hướng giảm Gradient Descent:

- B1: Khởi tạo biến nội tại.
- B2: Đánh giá model dựa vào biến nội tại và hàm mất mát (Loss function)
- B3: Cập nhật các biến nội tại theo cách tối ưu hàm mất mát (Findingoptimal points)
- B4: Lặp lại bước 2,3 cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng.

Công thức cập nhật GD có thể được viết là:

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \nabla_\theta f(\theta)$$

Trong đó θ là tập các biến cần cập nhật , η là tốc độ học, $\nabla_\theta f(\theta)$ là Gradient của hàm mất mát f theo tập θ.

Thuật toán tìm min(max) của $f(x)$

Đầu vào: Đoạn [a,b], hàm số $f(x)$, Δ (rất nhỏ).
Đầu ra: min-max của f(x)

Ý tưởng:

- Dùng thuật toán GD tìm cực tiểu của $f(x)$ trên đoạn [a, b].
- Sau khi tìm được 1 cực trị thì ta dịch 1 đoạn rất nhỏ Δ, rồi tiếp tục tìm đại của $f(x)$ trên đoạn [a+Δ, b] (gán a:=a+Δ) bằng thuật toán GD.
- Lặp lại cho đến khi không tìm được cực trị nào nữa trên đoạn [a, b].
- Tính $f(x)$ tại các điểm cực trị và tại 2 đầu mút a, b và tìm ra min(max)

Sau khi tìm được min(max) của $f(x)$ trên đoạn [a,b], ta có thể tìm max của $|f(x)|$ bằng cách sử dụng công thức nhanh sau:

$$\max_{[a,b]}|f(x)| = \frac{|max+min|+|max-min|}{2}$$

Ngôn ngữ tự nhiên

Bước 1: Tìm khoảng phân ly nghiệm (a, b) bằng phương pháp đồ thị

Bước 2: Biến đổi hàm $f(x) = 0$ về $x = g(x)$. Đặt $q = \max\limits_{x \in [a,b]} |g'(x)|$

Bước 3: Nếu $q \leq 1$ thì chuyển tới bước 4, ngược lại quay về bước 2.

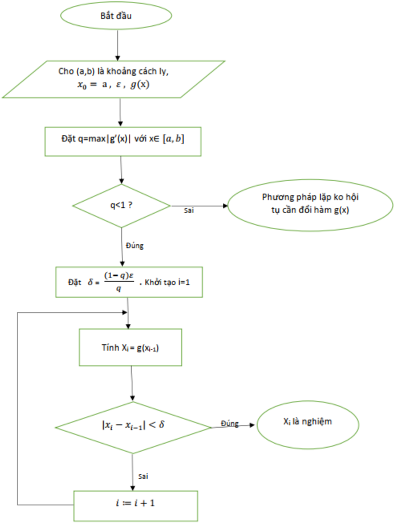
Bước 4: Đặt $\delta = \dfrac{(1-q)\varepsilon}{q}$. Khởi tạo $i = 0$.

Bước 5: Tăng $i = i + 1$, tính $x_i = g(x_{i-1})$.

Bước 6: Nếu $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta$ thì chuyển đến bước 7, ngược lại quay lại bước 5.

Bước 7: Kết luận x_i là nghiệm cần tìm.

Sơ đồ khối


Bắt đầu
Cho (a,b) là khoảng cách ly,
$x_0 = a$, ε, $g(x)$
Đặt q=max|g'(x)| với x∈ $[a, b]$
q<1 ?
Sai
Phương pháp lặp ko hội tụ cần đổi hàm g(x)
Đúng
Đặt $\delta = \frac{(1-q)\varepsilon}{q}$. Khởi tạo i=1
Tính $X_i = g(x_{i-1})$
$|x_i - x_{i-1}| < \delta$
Đúng
X_i là nghiệm
Sai
$i := i + 1$

Pseudo Code

Input: $x_0, \varepsilon, g(x), q = \max\limits_{[a,b]} |g(x)'|$

Output: x_1

```
if q ≥ 1 then return NaN
else
   begin
     δ = (1 − q)/q · ε;
     loop = 1
     while (true)
         begin
            x1 = f(x0)
            if ( abs(x1 − x0) ≤ δ then break;
            x0 = x1
            loop = loop+1
         end
         return x1, loop
  end
```

Nội dung

Chương trình và ví dụ