TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HOC

o0o

# BÁO CÁO MÔN HỌC GIẢI TÍCH SỐ

# PHƯƠNG PHÁP GAUSS
# GIẢI PHƯƠNG TRÌNH AX = B


**Giáo viên hướng dẫn: TS. Hà Thị Ngọc Yến**

**Sinh viên thực hiện :** Trần Đại Dương - 20195863
Lê Thị Kiều Trang - 20195930
An Việt Trung - 20195936
Nguyễn Văn Thanh Tùng - 20195940
Nguyễn Văn Vũ - 20195942


**Hà Nội - 2021**

# Mục lục

# Lời nói đầu

Cuộc cách mạng công nghiệp 4.0 đã chính thức nổ ra, đánh dấu một kỷ nguyên mới, kỷ nguyên của công nghệ thông tin và dữ liệu lớn. Những thành tựu về học máy, về trí tuệ nhân tạo giờ đây đã len lỏi vào trong từng ngõ ngách của cuộc sống.

Sau khi học một số môn Toán đại cương, Giải tích hàm và Đại số đại cương, dưới sự hướng dẫn của giáo viên bộ môn Giải tích số, giảng viên Hà Thị Ngọc Yến, chúng em đã tiến hành tìm hiểu về phương pháp Gauss để giải phương trình AX = B.

Nội dung của báo cáo được trình bày trong 3 chương. Chương 1 trình bày khái quát chung về hệ phương trình tuyến tính. Chương 2 trình bày chi tiết về phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính. Chương 3 trình bày chi tiết thuật toán và kết quả chi tiết với các bộ test.

Với khả năng có hạn về kiến thức và thời gian nên bản báo cáo không thể tránh khỏi những thiếu sót về mặt nội dung cũng như hình thức. Rất mong giáo viên bộ môn cùng quý bạn đọc lượng thứ và góp ý để bản báo cáo được hoàn thiện hơn. Mọi góp ý xin gửi gửi đến địa chỉ lekieutrang3901@gmail.com Mọi đóng góp mang tính xây dựng đều được hoan nghênh!

Chúng em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS.Hà Thị Ngọc Yến, người đã tận tình giúp đỡ để chúng em có thể hoàn thành báo cáo này. Nếu không có những hướng dẫn, lời góp ý của cô, chúng em khó có thể hoàn thiện bản báo cáo này một cách hoàn chỉnh. Một lần nữa, chúng em xin chân thành cảm ơn.

**PHÂN CÔNG:**

- Lí thuyết: Tất cả cùng tìm hiểu lí thuyết của phương pháp. Vũ chuẩn bị slide cho báo cáo
- Thuật toán: Dương và Tùng chịu trách nhiệm nắm vững lí thuyết.Từ đó viết thuật toán cho phương pháp và thuyết trình phần lí thuyết.
- Code: Trung code chương trình chính (triển khai thuật toán), Dương code chương trình sinh bộ test ngẫu nhiên và Tùng sinh test và kiểm tra bộ test với chương trình chính xem có ra đáp án chính xác không.
- Báo cáo: Trang chịu trách nghiệm viết báo cáo từ slide và bổ sung của giáo viên và bạn đọc.

# Chương 1

# Hệ phương trình tuyến tính

## 1.1 Giới thiệu chung

Trong đại số tuyến tính, phép khử Gauss là một phương pháp nhắm tới việc giải một hệ phương trình tuyến tính. Nó thường được hiểu là quá trình biến đổi trên ma trận hệ số tương ứng. Phương pháp Gauss được đặt tên theo nhà Toán học người Đức, Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Trong phương pháp khử Gauss, các biến đổi sơ cấp trên dòng được thực hiện trên ma trận hệ số mở rộng để đưa về ma trận dạng bậc thang. Phương pháp khử Gauss được nhà Toán học Wilhelm Jordan cải tiến trong năm 1888. Tuy nhiên, phương pháp cũng được tìm thấy trên một bài báo do Clasen viết trong cùng năm. Jordan và Clasen độc lập phát hiện ra phương pháp này.

## 1.2 Ví dụ mở đầu

Ở chương trình phổ thông, chúng ta đã quen thuộc với việc giải hệ phương trình tuyến tính có hai hoặc ba ẩn. Ta xét một số ví dụ sau:

### 1.2.1 Ví dụ 1

Xét hệ ba ẩn ba phương trình sau:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 && (E_1) \\ x+2y+3z &= 2 && (E_2) \\ x+y+z &= 1 && (E_3) \end{aligned}$$

Ta có thể dùng phương pháp thế để giải phương trình trên. Đầu tiên ta khử đi $x$ ở phương trình $E_2$ bằng cách lấy $E_2 - E_1$ và viết lại vào phương trình $E_2$ và khử đi $x$ ở phương trình $E_3$ bằng cách lấy $E_3 - E_1$ và viết lại vào phương trình $E_3$. Khi đó, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 && (E_1) \\ y+2z &= 0 && (E_2) \\ z &= 0 && (E_3) \end{aligned}$$

Đến đây, chúng ta sẽ tìm nghiệm của hệ bằng cách thế ngược tìm được $z = 0$ từ phương trình $E_3$, thế ngược giá trị của $z$ lên phương trình $E_2$ tìm được $y = 1$, thế ngược giá trị của $y$ và $z$ lên phương trình $E_3$ tìm được $x = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 1, y = 1, z = 0$.

### 1.2.2 Ví dụ 2

Xét hệ ba ẩn ba phương trình sau:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 && (E_1) \\ x + 2y + 3z &= 2 && (E_2) \\ y + 2z &= 1 && (E_3) \end{aligned}$$

Khử đi $x$ ở phương trình $E_2$ bằng cách lấy $E_2 - E_1$ và viết lại vào phương trình $E_2$. Khi đó, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 && (E_1) \\ y + 2z &= 0 && (E_2) \\ y + 2z &= 0 && (E_3) \end{aligned}$$

Tiếp tục khử $y$ ở phương trình $E_3$ bằng cách lấy $E_3 - E_2$ và viết lại vào phương trình $E_3$. Khi đó, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 && (E_1) \\ y + 2z &= 0 && (E_2) \\ 0 &= 0 && (E_3) \end{aligned}$$

Có thể coi đây là hệ phương trình ba ẩn hai phương trình có nghiệm giống với hệ phương trình ban đầu. Nếu đặt $z = t, (t \in \mathbb{R})$ thì từ phương trình $E_2$ suy ra $y = -2t$. Tiếp tục thế $y, z$ vừa tìm được vào phương trình $E_1$ suy ra được $x = 1 + t$.

Dễ thấy, với mỗi giá trị bất kì của t, ta sẽ tìm được bộ ba số $(x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho, suy ra hệ có vô số nghiệm và nghiệm của hệ có dạng $(x, y, z) = (1 + t, -2t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

## 1.3 Biểu diễn ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Qua hai ví dụ ở phần 1.2, chúng ta đã bắt gặp trường hợp nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất và vô số nghiệm. Để tìm hiểu rõ hơn một các có hệ thống về các trường hợp nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính, chúng ta cũng nhắc lại biểu diễn ma trận của một hệ phương trình tuyến tính.

Xét một hệ phương trình gồm $m$ phương trình và $n$ ẩn:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 && (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 && (E_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots && \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m && (E_m) \end{aligned}$$

Ký hiệu:

- $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, cỡ $(m \times n)$, là ma trận hệ số.
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, cỡ $(n \times 1)$, là ma trận biến.
- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, cỡ $(m \times 1)$, là ma trận giá trị
- $[A|b] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$, cỡ $((m+1) \times n)$, là ma trận bổ xung

của hệ $m$ ẩn $n$ phương trình ban đầu.
Khi đó, hệ $m$ phương trình $n$ ẩn có thể viết thành:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

Ví dụ hệ trong phần 1.2.1 có thể viết dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 1.4 Mở rộng bài toán

Bài toán giải hệ phương trình tuyến tính có thể được mở rộng như sau:

Xét hệ $p$ phương trình:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= b_1 \\ Ax_2 &= b_2 \\ \ldots &= \ldots \\ Ax_p &= b_p \end{aligned}$$

Với $A$ là ma trận cỡ $(m \times n)$, $x_i$ là ma trận cỡ $(n \times 1)$, $b_i$ là ma trận cỡ $(m \times 1)$, với $(i = \overline{1,p}; i, p \in \mathbb{N})$

Hệ $p$ phương trình trên có thể viết thành phương trình $AX = B$ có dạng như sau:

$$\underset{m \times n}{\left( \quad \text{A} \quad \right)} \underset{n \times p}{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}} = \underset{m \times p}{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}}$$

Việc tìm ma trận $X$ thỏa mãn phương trình $AX = B$ đồng nghĩa với việc tìm các $x_i$ cho trước ma trận hệ số $A$ và các ma trận giá trị $b_i$, với $(i = \overline{1,p}; i, p \in \mathbb{N})$.

Chương tiếp theo sẽ trình bày chi tiết phương pháp sử dụng phép khử Gauss để tìm ma trận biến $X$.

# Chương 2

# Phương pháp Gauss

## 2.1 Các phép toán trên hàng

Trong quá trình đưa ma trận về dạng đơn giản, chúng ta sử dụng ba phép toán trên hàng sau:

- Nhân một hằng số khác không $\lambda$ vào phương trình $E_i$ và viết lại vào phương trình $E_i$. Phép toán này được kí hiệu là $(\lambda E_i) \to (E_i)$.
- Nhân một hằng số khác không $\lambda$ vào phương trình $E_j$, cộng kết quả đó với phương trình $E_i$, rồi viết lại vào phương trình $E_i$. Phép toán này được kí hiệu là $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$.
- Hai phương trình $E_i$ và $E_j$ có thể hoán đổi vị trí cho nhau. Phép toán này được kí hiệu là $(E_i) \to (E_j)$.

Sau khi áp dụng ba phép toán biến đổi trên hàng nêu ở trên, chúng ta sẽ thu được một hệ phương trình mới đơn giản hơn hệ phương trình ban đầu mà không làm thay đổi nghiệm của hệ ban đầu.

## 2.2 Ma trận bậc thang

Một ma trận gọi là có dạng bậc thang nếu nó thỏa mãn cả hai tính chất sau:

- Nếu có hàng không (tức là các phần tử của hàng đều bằng không) thì nó phải nằm dưới các hàng khác không.
- Với hai hàng khác không, phần tử khác 0 đầu tiên kể từ trái của hàng dưới nằm ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên của hàng trên.

Ví dụ:

- Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ không phải là ma trận bậc thang do có hàng chứa phần tử khác không nằm dưới hàng chứa toàn bộ các phần tử đều bằng không.

- Ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ không phải là ma trận bậc thang do phần tử khác không tính từ trái qua của hàng thứ ba ($B_{33}$) không nằm ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ($B_{23}$) của hàng thứ hai.

- Ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận bậc thang do thỏa mãn cả hai tính chất đã nêu trước đó.

## 2.3 Phần tử trụ

Phần tử trụ của một hàng là phần tử khác không đầu tiên trong hàng tính từ trái sang phải.

- Với ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, hàng thứ nhất, thứ hai, thứ tư có các phần tử trụ lần lượt là $1, 5, 5$, hàng thứ ba không có phần tử trụ.

Với một ma trận bất kì, số lượng phần tử trụ không được vượt quá số hàng và số cột. Gọi $p$ là số lượng phần tử trụ, $m, n$ lần lượt là số hàng và số cột thì:

$$p \leq \min\{m, n\}$$

Phương pháp Gauss sẽ sử dụng phần tử trụ để khử đi các phần tử nằm dưới nó nên việc xác định đúng phần tử trụ là việc làm bắt buộc khi áp dụng phương pháp này.

## 2.4 Nội dung phương pháp

Phương pháp khử Gauss giải đúng hệ phương trình bằng cách loại trừ ẩn và thực hiện theo 2 quá trình thuận và nghịch:

- Quá trình thuận: Đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng ma trận bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

- Quá trình nghịch: Giải nghiệm của hệ phương trình bằng cách giải thế dần các phương trình từ dưới lên của hệ phương trình thu được từ quá trình thuận.

Để đơn giản cho quá trình mô tả phương pháp, xét phương trình $Ax = b$. Trong đó $A$ là một ma trận vuông cỡ $n$, $x$ và $b$ là các véc tơ có $n$ phần tử. Việc tìm $x$ trong phương trình $Ax = b$ tương đương với việc giải hệ:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 && (E_1)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 && (E_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots && \ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n && (E_n) \end{aligned}$$

Với $A^{(1)} = [A|b] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & | & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$ là ma trận bổ xung.

Giả sử $a_{11} \neq 0$, phép toán $E_j - (\frac{a_{j1}}{a_{11}})E_i \to (E_j)$ với mỗi $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ để khử hệ số của biến $x_1$ trong mỗi hàng $j$. Tiếp tục quá trình này cho $i = 2, 3, \ldots, n$ (giả sử $a_{ii} \neq 0$). Quá trình trên sẽ khử (làm cho hệ số thành 0) biến $x_i$ ở mỗi hàng sau hàng thứ $i$ với mỗi $i$ nhận giá trị trong khoảng $[1, n-1]$. Ma trận kết quả sẽ có dạng như sau:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} & | & a_{n,n+1} \end{pmatrix},$$

Trong đó, trừ hàng thứ nhất, giá trị của $a_{ij}$ không chắc chắn bằng giá trị tương ứng trong ma trận $A^{(1)}$ ban đầu. ma trận $A^{(2)}$ biểu diễn hệ phương trình có cùng nghiệm với hệ phương trình ban đầu và vì hệ phương trình mới có dạng tam giác trên,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 && (E_1)\\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 && (E_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots && \ldots\\ a_{nn}x_n &= b_n && (E_n) \end{aligned}$$

Chúng ta có thể thực hiện phép thế ngược để tìm nghiệm của hệ phương trình. Bắt đầu từ phương trình $(E_n)$, tìm được $x_n$:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

Tiếp tục tìm ra $x_{n-1}$ bằng cách giải phương trình $(E_{n-1})$, thế giá trị của $x_n$ vừa tìm được bằng cách giải phương trình $(E_n)$, ta được:

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

Tiếp tục quá trình này, ta tìm được các biến còn lại, ta có:

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \ldots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

với mỗi $i = n-1, n-2, \dots, 1$

Phương pháp Gauss có thể được mô tả theo một cách chính xác hơn (mặc dù có phần phức tạp hơn) bằng việc tạo ra một chuỗi các ma trận bổ xung $\widetilde{A}^{(1)}, \widetilde{A}^{(2)}, \dots, \widetilde{A}^{(n)}$. Với ma trận $\widetilde{A}^{(1)}$ là:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & | & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Và ma trận $\widetilde{A}^{(k)}$, với mỗi $k = 2, 3, \dots, n$ có phần tử $a_{ij}^{(k)}$, trong đó:

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)}, & \text{với } i = 1, 2, \dots, k-1 \text{ và } j = 1, 2, \dots, n+1 \\ 0, & \text{với } i = k, k+1, \dots, n \text{ và } j = 1, 2, \dots, k-1 \\ a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} a_{k-1,j}^{(k-1)}, & \text{với } i = k, k+1, \dots, n \text{ và } j = k, k+1, \dots, n+1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\widetilde{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1,k}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & | & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2,k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & | & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & | & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & & & & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \dots & a_{k,n}^{(k)} & | & a_{k,n+1}^{(k)} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)} & | & a_{n,n+1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

là ma trận biểu diễn hệ phương trình khi biến $x_{k-1}$ vừa bị khử khỏi các phương trình $E_k, E_{k+1}, \dots, E_n$. Dễ thấy, phương pháp trên sẽ không thực hiện được nếu một trong các phần tử $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n)}$ nhận giá trị bằng 0 bởi khi không thể thực hiện được phép toán:

$$\left( E_i - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} E_k \right) \to E_i$$

Hoặc không thể tiến hành thế ngược lại đê tìm ra nghiệm. Trong trường hợp như vậy, hệ phương trình vẫn có thể có nghiệm và cần phải áp dụng kỹ thuật khác khi gặp tình huống như vậy.

Giả sử $a_{kk} = 0$ với $k$ bất kì nằm trong $[1, n-1]$,trong cột thứ $k$ của ma trận $\widetilde{A}^{k-1}$, tìm phần tử khác 0 đầu tiên từ hàng thứ $k$ đến hàng thứ $n$. Nếu không tìm phần tử nào khác 0 thì chuyển tiếp sang cột thứ $k+1$ rồi tiếp tục tìm kiếm từ hàng $k$ đến hàng $n$ phần tử khác 0 đầu tiên trong cột đó. Nếu trong trường hợp đi hết tất cả các cột và tất cả các hàng mà vẫn không tìm được phần tử khác 0 nào, quá trình khử kết thúc.

Nếu tìm được phần tử $a_{pk}^{(k)} \neq 0$, với $p \in [k+1, n]$, ta tiến hành hoán đổi hai hàng $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$. Quá trình khử tiếp tục để hình thành nên ma trận $\widetilde{A}^{(k)}$ và tiếp tục cho tới khi hình thành được ma trận bậc thang thì quá trình khử sẽ kết thúc.

Xét hệ phương trình sau:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8 && (E_1)\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20 && (E_2)\\
x_1 + x_2 + x_3 &= -2 && (E_3)\\
x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 && (E_4)
\end{aligned}
$$

Hệ đã cho có ma trận bổ xung là:

$$
\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & | & -8 \\ 2 & -1 & 3 & -3 & | & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}
$$

Thực hiện phép khử Gauss, biến các phần tử nằm dưới $a_{11} = 1$ (khử hệ số của biến $x_1$) thành 0 bằng việc thực hiện các phép toán sau:

$$
(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - E_1) \to (E_3), \text{và } (E_4 - E_1) \to (E_4)
$$

Được ma trận:

$$
\widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & | & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & | & 12 \end{pmatrix}
$$

Vì phần tử trụ của hàng thứ hai, $a_{22} = 0$, thực hiện tìm kiếm phần tử khác không đầu tiên từ hàng thứ ba đến hàng thứ tư trong cột thứ hai (các phần tử $a_{32}, a_{42}$). Vì $a_{32} \neq 0$ nên hoán đổi $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$, nhận được ma trận mới:

$$
\widetilde{A}^{(2)'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & | & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & | & 12 \end{pmatrix}
$$

Vì $x_2$ đã bị khử trong cả hai phương trình $E_3$ và $E_4$. Khi đó $\widetilde{A}^{(3)} = \widetilde{A}^{(2)'}$ và quá trình khử tiếp tục với mục đích khử $x_4$ khỏi phương trình $E_4$ bằng việc tiến hành phép toán $(E_4 + 2E_3) \to (E_4)$

$$
\widetilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & | & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix}
$$

Cuối cùng, tiến hành thế ngược lại để tìm ra nghiệm của hệ phương trình đã cho:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= \frac{4}{2} = 2,\\
x_3 &= \frac{[-4 - (-1)x_4]}{-1} = 2,\\
x_2 &= \frac{[6 - x_4 - (-1)x_3]}{2} = 3,\\
x_1 &= \frac{[-8 - (-1)x_4 - 2x_3 - (-1)x_2]}{1} = -7.
\end{aligned}
$$

Vậy hệ đã cho có một nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-7, 3, 2, 2)$.

Sau khi đưa ma trận hệ số ban đầu về dạng ma trận bậc thang, tùy thuộc vào dạng ma trận bậc thang lúc đó mà nghiệm của hệ phương trình có các kết quả khác nhau. Phần tiếp sau đây sẽ trình bày chi tiết về vấn đề này.

## 2.5 Nghiệm của phương trình AX=B

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sẽ nằm trong một trong ba khả năng sau:

- Có một nghiệm duy nhất
- Có vô số nghiệm
- Vô nghiệm

Khi sử dụng phương pháp khử Gauss để đưa ma trận hệ số ban đầu về ma trận bậc thang, nghiệm của hệ sẽ phụ thuộc vào các yếu tố sau: kích thước của ma trận hệ số $A$ (số hàng và số cột), số phần tử trụ của ma trận hệ số $A$, và ma trận giá trị $B$.

**Kí hiệu**:

- m: số hàng của ma trận hệ số $A$
- n: số cột của ma trận hệ số $A$
- p: số phần tử trụ của ma trận hệ số $A$

### 2.5.1 Ma trận vuông, số phần tử trụ bằng cỡ của ma trận

**Trường hợp ma trân hệ số $A$ là ma trận vuông và có $m = n = p$ (số phần tử trụ bằng cỡ của ma trận), phương trình $AX = B$ có nghiệm duy nhất.**

Xét hai hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 & = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = 4 \end{cases}$$

Hai hệ trên có chung hệ ma trận hệ số nên có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1- \\ -x_2- \\ -x_3- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Có ma trận bổ xung như sau:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & | & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & | & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp khử Gauss, khử hệ số $x_1$ ở phương trình $E_2$ và $E_3$ dựa theo phần tử trụ $a_{11} = 1$ bằng phép toán sau:

$$(E_2 - 3E_1) \to (E_2), \text{và } (E_3 - 2E_1) \to (E_3)$$

được ma trận mới:

$$\widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & | & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Khử tiếp hệ số $x_2$ ở phương trình $E_3$ dựa theo phần tử trụ $a_{22} = 1$ bằng phép toán sau:

$$(E_3 - 3E_2) \to (E_3)$$

được ma trận mới:

$$\widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & | & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số trong ma trận $\widetilde{A}^{(3)}$ có dạng bậc thang nên đến đây có thể sử dụng phép thế ngược để tìm ra nghiệm của hệ phương trình ban đầu:
Kí hiệu $x_i$ là véc tơ hàng $i$ của ma trận nghiệm $X$, $b_i$ là véc tơ hàng $i$ của ma trận giá trị $B$.

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{3}b_3 = -\frac{1}{3}(4, -2) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ x_2 &= b_2 - 2x_3 = (-2, 2) - 2\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ x_1 &= b_1 = (2, 0) \end{aligned}$$

Như vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

### 2.5.2 Ma trận có số hàng nhỏ hơn số cột và số phần tử trụ bằng số hàng

**Trường hợp ma trân hệ số $A$ là ma trận có số hàng nhỏ hơn số cột $(m < n)$ và có số phần tử trụ bằng số hàng $(p = m)$, phương trình $AX = B$ luôn có vô số nghiệm.**

Xét phương trình $AX = B$ có ma trận bổ xung:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & | & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 9 & | & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp khử Gauss, khử hệ số $x_1$ ở phương trình $E_2$ và $E_3$ dựa theo phần tử trụ $a_{11} = 1$ bằng phép toán sau:

$$(E_2 - 2E_1) \to (E_2), \text{và } (E_3 - 0E_1) \to (E_3)$$

được ma trận mới:

$$\widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & | & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & | & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Khử tiếp hệ số $x_2$ ở phương trình $E_3$ dựa theo phần tử trụ $a_{22} = -2$ bằng phép toán sau:

$$\left(E_3 - \frac{(-1)}{2}E_2\right) \to (E_3)$$

được ma trận mới:

$$\widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 & | & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & | & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số trong ma trận $\widetilde{A}^{(3)}$ có dạng bậc thang nên đến đây có thể sử dụng phép thế ngược để tìm ra nghiệm của hệ phương trình ban đầu. Do ma trận hệ số có cỡ $(3 \times 4)$, ma trận giá trị có cỡ $(3 \times 2)$ suy ra ma trận biến có cỡ $(4 \times 2)$.

Từ phương trình thứ 3, dễ dàng tìm được:

$$x_4 = 2b_3 = 2(0, 1) = (0, 2)$$

Thế $x_4$ vào phương trình thứ hai, được phương trình mới:

$$\begin{aligned} -2x_2 - 2x_3 &= b_2 + 5x_4 \\ &= (0, -4) + 5(0, 2) \\ &= (0, 6) \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình trên có vô số nghiệm, có thể chọn $x_2$ hoặc $x_3$ làm biến tự do, tuy nhiên ở đây ta chọn $x_3$ làm biến tự do vì cột thứ ba của ma trận bậc thang $\widetilde{A}^{(3)}$ không chứa phần tử trụ.

Đặt $x_3 = (t, s)$ với $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Khi đó:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{2}(0, 6) - x_3 \\ &= -\frac{1}{2}(0, 6) - (t, s) \\ &= (-t, -s - 3) \end{aligned}$$

Thế $x_4, x_3, x_2$ vừa tìm được vào phương trình đầu tiên, tìm được $x_1$:

$$x_1 = b_1 - 7x_4 - 2x_3 - 3x_2 = (t, s - 9)$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$X = \begin{pmatrix} t & s-9 \\ -t & -s-3 \\ t & s \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Có thể thấy rằng với mỗi bộ số $(t, s)$, ma trận $X$ sẽ nhận những giá trị khác nhau. Do đó có thể kết luận phương trình đã cho có vô số nghiệm và nghiệm của hệ phụ thuộc vào biến $x_3$ (biến có cột tương ứng không chứa phần tử trụ).

### 2.5.3 Ma trận có số hàng lớn hơn số cột và số phần tử trụ bằng số cột

**Trường hợp ma trân hệ số $A$ là ma trận có số hàng lớn hơn số cột $(m > n)$ và có số phần tử trụ bằng số cột $(p = n)$, phương trình $AX = B$ có thể có một nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.**

**Ví dụ 1:** Xét phương trình $AX = B$ có ma trận bổ xung:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & | & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & | & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp khử Gauss, khử hệ số $x_1$ ở phương trình $E_2$ dựa theo phần tử trụ $a_{11} = 1$ bằng phép toán sau:

$$(E_2 - E_1) \to (E_2)$$

được ma trận mới:

$$\widetilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & | & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Khử tiếp hệ số $x_2$ ở phương trình $E_3, E_4, E_5$ dựa theo phần tử trụ $a_{22} = 2$ bằng phép toán sau:

$$(E_3 - E_2) \to (E_3), (E_4 - 2E_2) \to (E_4), (E_5 - 4E_2) \to (E_5)$$

được ma trận mới:

$$\widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Khử tiếp hệ số $x_3$ ở phương trình $E_5$ dựa theo phần tử trụ $a_{33} = 1$ bằng phép toán sau:

$$(E_5 - 2E_3) \to (E_5)$$

được ma trận mới:

$$\widetilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số trong ma trận $\widetilde{A}^{(4)}$ có dạng bậc thang nên đến đây có thể sử dụng phép thế ngược từ phương trình thứ ba để tìm ra nghiệm của hệ phương trình ban đầu:

$$\begin{aligned} x_3 &= b_3 = (0, -1) \\ x_2 &= \frac{1}{2}b_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ x_3 &= b_1 - x_3 - \frac{1}{3}x_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Ví dụ 2:** Xét phương trình $AX = B$ có ma trận bổ xung:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & | & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & | & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp khử Gauss đưa ma trận $\widetilde{A}^{(1)}$ về dạng bậc thang như sau:

$$\widetilde{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy phương trình đã cho vô nghiệm do phương trình thứ năm vô nghiệm.

### 2.5.4 Ma trận cố số phần tử trụ nhỏ hơn số hàng và số cột

**Trường hợp ma trân hệ số $A$ là ma trận có số phần tử trụ nhỏ hơn số hàng và số cột $(p < m, p < n)$, phương trình $AX = B$ có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.**

**Ví dụ 1:** Xét phương trình $AX = B$ có ma trận bổ xung:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 15 & | & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 2 & 12 & | & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Áp dụng phương pháp khử Gauss đưa ma trận $\widetilde{A}^{(1)}$ về dạng bậc thang như sau:

$$\widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & | & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -9 & | & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số trong ma trận $\widetilde{A}^{(3)}$ có dạng bậc thang nên đến đây có thể sử dụng phép thế ngược từ phương trình thứ ba để tìm ra nghiệm của hệ phương trình ban đầu. Chọn

$$\begin{aligned} x_3 &= (s, t) \\ x_4 &= (r, q) \end{aligned}$$

trong đó $(s, t, r, q) \in \mathbb{R}^4$, là các biến tự do vì các cột ba và bốn tương ứng không chứa phần tử trụ. Khi đó thế $x_3, x_4$ vào phương trình thứ hai và thứ nhất, tìm được hai biến còn lại:

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(2 - \frac{4}{3}s - r, -1 - \frac{4}{3}t - q\right) \\ x_1 &= \left(-1 - \frac{2}{3}s - r, 2 + \frac{2}{3}t - q\right) \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc vào hai biến $x_3, x_4$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2}{3}s - r & 2 + \frac{2}{3}t - q \\ 2 - \frac{4}{3}s - r & -1 - \frac{4}{3}t - q \\ s & t \\ r & q \end{pmatrix}$$

**Ví dụ 2:** Xét phương trình $AX = B$ có ma trận bổ xung:

$$\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -8 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

Áp dụng phương pháp khử Gauss đưa ma trận $\widetilde{A}^{(1)}$ về dạng bậc thang như sau:

$$\widetilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 16 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 14 \end{array}\right)$$

Dễ thấy phương trình đã cho vô nghiệm do phương trình thứ tư vô nghiệm.

### 2.5.5 Tổng hợp

Nghiệm của phương trình $AX = B$ có thể chia thành 4 trường hợp dưới đây:

| | $p = m = n$ | $p = m < n$ | $p = n < m$ | $p < n, p < m$ |
|---|---|---|---|---|
| Số nghiệm $AX = B$ | 1 | vô số | 0 hoặc 1 | 0 hoặc vô số |

Trong đó:

- m: số hàng của ma trận hệ số $A$
- n: số cột của ma trận hệ số $A$
- p: số phần tử trụ của ma trận hệ số $A$

Trong trường hợp phương trình có vô số nghiệm, nghiệm của phương trình có thể được biểu diễn thông qua $(n - p)$ biến tự do. Chọn các biến có cột tương ứng không chứa phần tử trụ làm biến tự do.

# Chương 3

# Thuật toán

## 3.1 Thuật toán chi tiết

**INPUT:**

- Các phần tử, số hàng $m$, số cột $n$ của ma trận hệ số $A$.
- Các phần tử, số hàng $m$, số cột $q$ của ma trận giá trị $B$.

**OUTPUT: Một trong ba trường hợp sau**

- "Inconsistent System" (nếu phương trình vô nghiệm)
- "Infinite solution depends on x parameters" (nếu phương trình có vô số nghiệm)
- "Solution to the system" (nếu có nghiệm duy nhất)

**Bước 0:** Khởi tạo ma trận $a$ là ma trận bổ sung của ma trận $A$ và ma trận $B$

**Bước 1:** Khởi tạo mảng index ($m$ phần tử) lưu toạ độ cột của phần tử trụ thứ $p$ ($0 \leq p < m$)
(Ban đầu khởi tạo index[p] $= -1$ với mọi $0 \leq p < m$)
Khởi tạo $j = 0; i = 0$

**Bước 2:** Thực hiện bước 2.1 -> bước 2.7 nếu $i < m$ và $j < n$

**Bước 2.1:** $k = i$

**Bước 2.2 :** $v\_\max = a[k, j]$

**Bước 2.3 :** Nếu $v\_\max = 0$ và $k + 1 < m$ thì:
$k = k + 1$
Quay lại bước 2.2

**Bước 2.4 :** Nếu $v\_\max = 0$ thì:
$j = j + 1$
Quay lại bước 2

**Bước 2.5 :** Nếu $k \neq i$ hoán đổi $(E_k) \leftrightarrow (E_i)$

**Bước 2.6 :** Với mỗi $t = i+1, \ldots, m$:
$p = \frac{a_{tj}}{a_{ij}}$
Thực hiện phép toán $(E_t - pE_i) \to (E_t)$

**Bước 2.7 :** index$[i] = j$

**Bước 2.8 :** $i = i+1, j = j+1$, quay lại bước 2.

**Bước 3 :** correct = 0, incorrect = 0

**Bước 3.1 :** Với mỗi $p = 0, 1, \ldots, m-1$ thực hiện 3.2

**Bước 3.2 :** Nếu $0 \leq$ index$[p] < n$ thì:
correct = correct +1
Nếu index$[p] \geq n$ thì:
incorrect = incorrect +1

**Bước 4 :** Xét các trường hợp

**Bước 4.1 :** Nếu incorrect $> 0$ thì:
OUTPUT: *"Inconsistent System"*
Kết thúc chương trình

**Bước 4.2 :** Nếu correct $= n$ thì:
Có nghiệm duy nhất
Với mỗi $i = p-1, \ldots, 1$, lặp với mỗi $r = n+1, \ldots, q$:

$$x_{i,r-n} = \frac{a_{i,r} - \sum_{j=j+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

OUTPUT ma trận $X$. Kết thúc chương trình

**Bước 4.3 :** OUTPUT *"Infinitely many solutions depends on $(n-correct)$ parameter(s)"*

**Cải tiến thuật toán:**

Ở bước số 2.6, chúng ta sẽ gặp khó khăn khi phần tử trụ $a_{ij}$ quá nhỏ so với $a_{tj}$ . Để khắc phục trường hợp này, ta sẽ chọn phần tử trụ là phần tử khác không lớn nhất trong cột đang xét. Cụ thể bước 2.3 trong phần thuật toán sẽ được thay đổi thành:
**Bước 2.3 :** Nếu $k+1 < m$ thì:
$k = k+1$
Nếu $(a_{kj} > v\_\max)$ thì:
Quay lại bước 2.2
Nếu không thì quay lại bước 2.3

## 3.2 Kết quả thực nghiệm

Nhóm chúng em/mình đã tiến hành cài đặt thuật toán sau khi đã dùng phương pháp cải tiến bằng ngôn ngữ C++, cô và các bạn có thể truy cập vào link `https://github.com/anviettrung/hust-numerical-analysis/tree/master/src` để xem mã nguồn và các bộ test mà nhóm chúng em/mình đã chuẩn bị.

Phần thực thi thuật toán bao gồm ba thư mục:

**1. core**: chứa hai file:

- matrix.h: file chứa các hàm thao tác với ma trận trong đó có hai hàm đáng chú ý là:

  ForwardElimination: Biến đổi một ma trận về dạng bậc thang, thực hiện các bước từ $0 \to 7$ trong thuật toán.

  BackSubstitution: thực hiện phép thế ngược để tìm nghiệm của phương trình trong trường hợp có nghiệm duy nhất.

- random_matrix.py: file chứa các hàm để tạo ra các ma trận với số lượng phần tử trụ tùy ý.

**2. standard_input**: chứa bốn thư mục, tương đương với bốn trường hợp có thể xảy ra khi xét nghiệm của phương trình $AX = B$.

- **full**: chứa hai bộ test cho trường hợp 2.5.1, kết quả của hai bộ test này được hiển thị trong hai file *output1.txt, output2.txt*
- **full_rows**: chứa hai bộ test cho trường hợp 2.5.2, kết quả của hai bộ test này được hiển thị trong hai file *output1.txt, output2.txt*
- **full_cols**: chứa hai bộ test cho trường hợp 2.5.3, trong đó bộ test trong *input1.txt* cho kết quả vô nghiệm, bộ test trong *input2.txt* cho ra nghiệm duy nhất. Kết quả của hai bộ test này được hiển thị trong hai file *output1.txt, output2.txt*
- **free**: chứa ba bộ test cho trường hợp 2.5.4, trong đó bộ test trong *input1.txt* cho kết quả vô nghiệm, các bộ test trong *input2.txt* và *input3.txt* cho vô số nghiệm. Kết quả của ba bộ test này được hiển thị trong hai file *output1.txt, output2.txt, output3.txt*

**3. testing**: chứa thư mục *testm.cpp* là file thực thi chương trình, với đầu vào là file chứa ma trận hệ số $A$ và ma trận giá trị $B$, xuất ra kết quả vào các file output tương ứng.

# Tài liệu tham khảo


[1] Lê Trọng Vinh (2007). *Giáo trình Giải tích số*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[2] Gilbert Strang (2016), *Introduction to Linear Algebra, Fifth Edition*, Wellesley-Cambridge Press

[3] Richard L. Burden, J. Douglas Faires (2005), *Numerical Analysis, eighth Edition*, Brooks Cole