GIẢI TÍCH SỐ

CHỦ ĐỀ 13
CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM ĐÚNG MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Giảng viên hướng dẫn : TS.Hà Thị Ngọc Yến
Viện : Toán ứng dụng và tin học

Giới Thiệu

CÁC THÀNH VIÊN

1	Nguyễn Thị Duyên	20195866
2	Phạm Thị Hoa	20195874
3	Trần Thị Hồng	20195880
4	Nguyễn Như Thuận	20195925
5	Phạm Thu Trang	20195931
6	Trần Thị Hồng Vân	20195941

Nội Dung

1 Ma trận nghịch đảo

- 1.1 Định nghĩa
- 1.2 Tính chất

2 Phương pháp GAUSS - JORDAN

3 Phương pháp CHOLEVSKY

4 Phương pháp viền quanh

- 1.Ý tưởng phương pháp
- 2.Nội dung phương pháp
- 3.Sơ đồ thuật toán
- 4.Ví dụ minh họa

1. Ma trận nghịch đảo

1.1 Định nghĩa

Cho ma trận A vuông cấp n, $\det(A) \neq 0$. Ma trận X vuông cấp n thỏa mãn :

$$\boxed{A.X = X.A = E_n}$$

- với E_n là ma trận đơn vị cấp n.

Khi đó , ma trận X được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A

Kí hiệu : $X = A^{-1}$

Ta nói : ma trận A khả nghịch.

1. Ma trận nghịch đảo

1.2 Tính chất

1. A khả nghịch $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

2. A khả nghịch thì A^{-1} là duy nhất

3. $(A^{-1})^{-1} = A$

4. $(A.X)^{-1} = X^{-1}.A^{-1}$

5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Vậy có những phương pháp nào để tìm đúng ma trận nghịch đảo ?

Các phương pháp tìm đúng ma trận nghịch đảo

- Trong đại số tuyến tính :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}}$$

Khối lượng tính toán lớn

trong đó : $\det(A) \neq 0$ là định thức ma trận A,
$\tilde{A}$ là ma trận phụ đại số của ma trận A.

- Một số phương pháp có khối lượng tính toán tốt hơn :

• Phương pháp GAUSS – JORDAN
• Phương pháp CHOLEVSKY
• Phương pháp viền quanh

2. Phương pháp GAUSS - JORDAN

2.1 Ý tưởng thuật toán

- Gọi ma trận $X = [x_{ij}]_n$ là ma trận nghịch đảo cần tìm của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$

Ta có : $A.X = E_n$ hay $A.\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ii} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (1)

- Đặt $X_i = (\ x_{1i}\ x_{2i}\ \ldots\ x_{ii}\ \ldots\ x_{ni})^T$ cột thứ i của ma trận X,
  $I_i = (0\ 0\ldots1\ldots0)^T$ cột thứ i của E_n, phần tử hàng thứ i là 1 còn lại là 0, $i = \overline{1, n}$

(1) được viết dưới dạng : $A.X_i = I_i\ , i = \overline{1, n}$ (2)

- Sử dụng phương pháp Gauss – Jordan để giải n hệ (2) và thu được ma trận X.

2. Phương pháp GAUSS - JORDAN

2.2 Nội dung thuật toán

Lập ma trận mở rộng :

$$\overline{A} = (A \mid E_n) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & E_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & \end{array}\right)$$

- Bước 1 : Biến đổi sơ cấp ma trận $\overline{A}$

Chọn phần tử trội

- Ưu tiên chọn 1 hoặc -1
- Nếu không có 1 hoặc -1,chọn phần tử khác 0 có giá trị tuyệt đối lớn nhất

2. Phương pháp GAUSS - JORDAN

Giả sử a_{pq} là phần tử trội của A , ta thực hiện :

- Giữ nguyên hàng p : $a_{pi}^{(1)} = a_{pi}$, $i = \overline{1, n}$
- Các phần tử khác tính theo công thức : $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{iq}a_{pj}^{(1)} \quad \forall i \neq 1, j$ (3)

Khi đó , $\overline{A}$ trở thành :

$$\overline{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \\ a_{p1}^{(1)} & \cdots & a_{pq}^{(1)} = a_{pq} & \cdots & a_{pn}^{(1)} & a_{ij}^{(1)} \quad j = \dfrac{i = \overline{1, n}}{(n+1), (2n)} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}^{(1)} & \end{array}\right]$$

NX : Trên cột q, các phần tử đều bằng 0 trừ phần tử giải.

2. Phương pháp GAUSS - JORDAN

- Bước 2 : Lặp lại Bước 1 với ma trận $\overline{A}^{(1)}$

• Kết quả cho ma trận $\overline{A}^{(2)}$

• Tiếp tục quá trình ta thu được $\overline{A}^{(3)}$,$\overline{A}^{(4)}$… đến khi không chọn được phần tử trội nữa.

Lưu ý : Không được chọn phần tử trội ở vị trí cùng hàng hoặc cột với các phần tử trội đã được chọn trước đó.

- Bước 3 : Xử lý kết quả

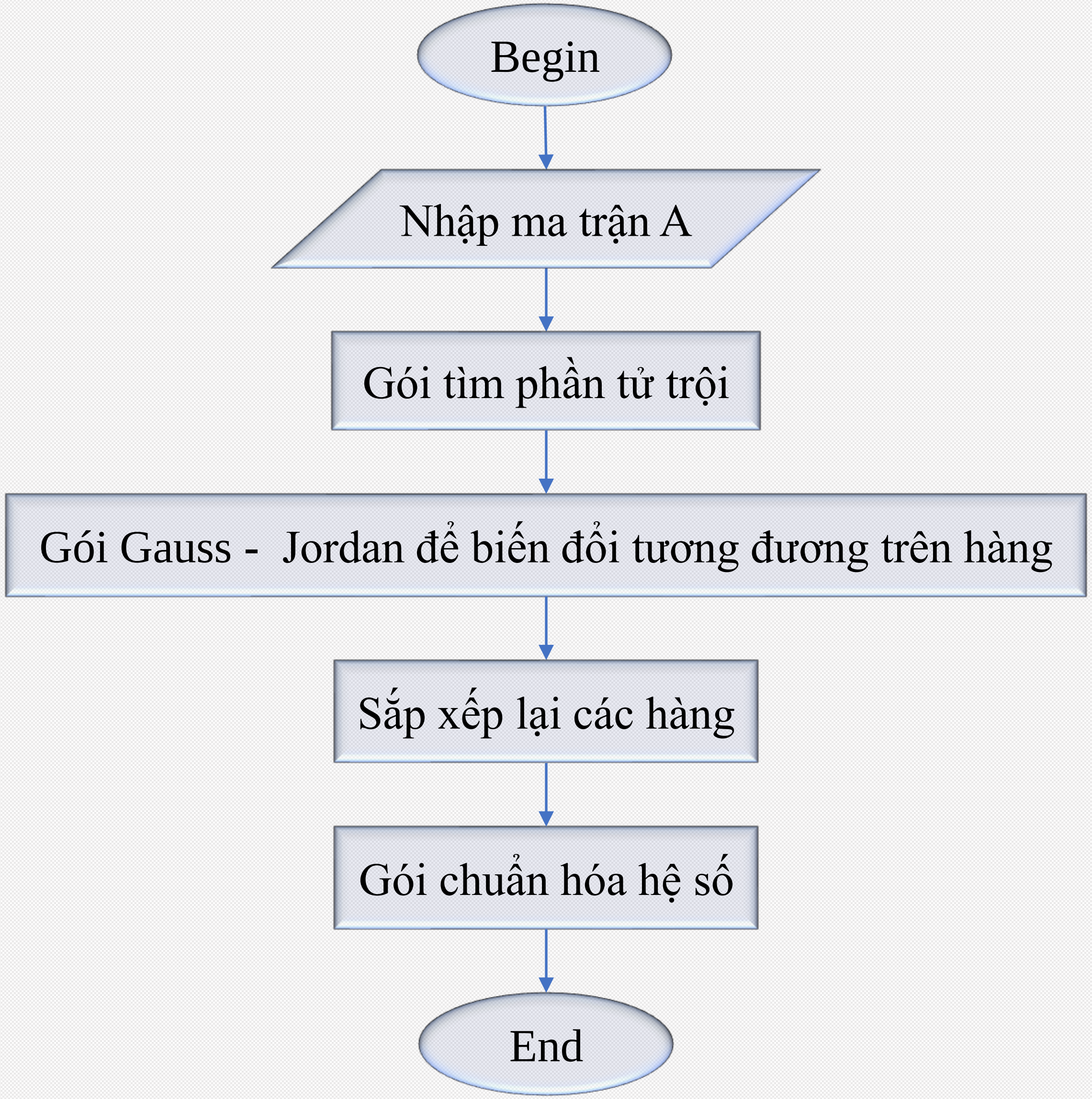
• Nếu có ít nhất 1 hàng toàn phần tử 0 => A không khả nghịch.

• Sắp xếp lại các hàng và chia các phần tử trong hàng cho phần tử đường chéo tương ứng của nó.

Ta thu được ma trận $[E_n|B]$ => Ma trận B là ma trận A^{-1} cần tìm!

2. Phương pháp GAUSS - JORDAN

2.3 Sơ đồ thuật toán



2. Phương pháp GAUSS - JORDAN

2.4 Ví dụ minh họa

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}?

- Kết quả được kiểm tra trên excel:

-186	129	196
95	-66	-100
-24	17	25

3. Phương pháp CHOLEVSKY

3.1 Ý tưởng thuật toán

- Phân tích ma trận đối xứng A thành tích 2 ma trận tam giác trên và tam giác dưới là chuyển vị của nhau.

  Với Q là ma trận tam giác trên thỏa mãn , ta có :

$$
\begin{aligned}
& A = Q \,.\, Q^T \\
\Leftrightarrow\; & A^{-1} = (Q \,.\, Q^T)^{-1} \\
\Leftrightarrow\; & A^{-1} = Q^{-1} \,.\, (Q^T)^{-1} \\
\Leftrightarrow\; & A^{-1} = Q^{-1} \,.\, (Q^{-1})^T
\end{aligned}
$$

- Bài toán quy về tìm Q và Q^{-1} hay tìm ma trận nghịch đảo của ma trận tam giác.

3. Phương pháp CHOLEVSKY

3.2 Nội dung thuật toán

- Cho A là ma trận đối xứng. Ta phân tích : $A = Q^T.Q$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

- Các bước thực hiện :

Tìm Q → Tìm Q^{-1} → Tìm A^{-1} theo $A^{-1} = Q^{-1} . (Q^{-1})^T$

3. Phương pháp CHOLEVSKY

- Bước 1 : Tìm Q bằng công thức :

$$
\begin{cases}
q_{11} = \sqrt{a_{11}} & \\
q_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{q_{11}} & \forall j = \overline{2, n} \\
q_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} q_{ki}^2} & \forall i = \overline{2, n} \\
q_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki}.qk_{j}}{q_{ii}} & \forall i < j \\
q_{ij} = 0 & \forall i > j
\end{cases}
$$

Lưu ý:
Nếu gặp $q_{ii} = 0$ trong quá trình làm thì kết luận ngay "ma trận A không khả nghịch"

3. Phương pháp CHOLEVSKY

- Bước 2 : Tìm Q^{-1}

Đặt $Q^{-1} = [p_{ij}]_n$. Từ $Q^{-1}.Q = E_n$ ta có :

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Áp dụng theo công thức :

$$\begin{cases} p_{ii} = \dfrac{1}{q_{ii}} \\ p_{ij} = -\dfrac{\sum_{k=1}^{j-1} p_{ik}.q_{kj}}{q_{ii}} & \forall i < j \\ p_{ij} = 0 & \forall i > j \end{cases}$$

3. Phương pháp CHOLEVSKY

- Bước 3 : Tìm A^{-1}

Sau khi tìm được Q^{-1} ta thay vào công thức :

$$\boxed{A^{-1} = Q^{-1} . (Q^{-1})^T}$$

Giải pháp

- Đặt $B = A^T . A$

  Dễ dàng chứng minh : B là ma trận đối xứng

  $B^T=(A^T.A)^T=A^T.(A^T)^T=A^T.A=B$

- Áp dụng cholevsky cho B , tìm được B^{-1}

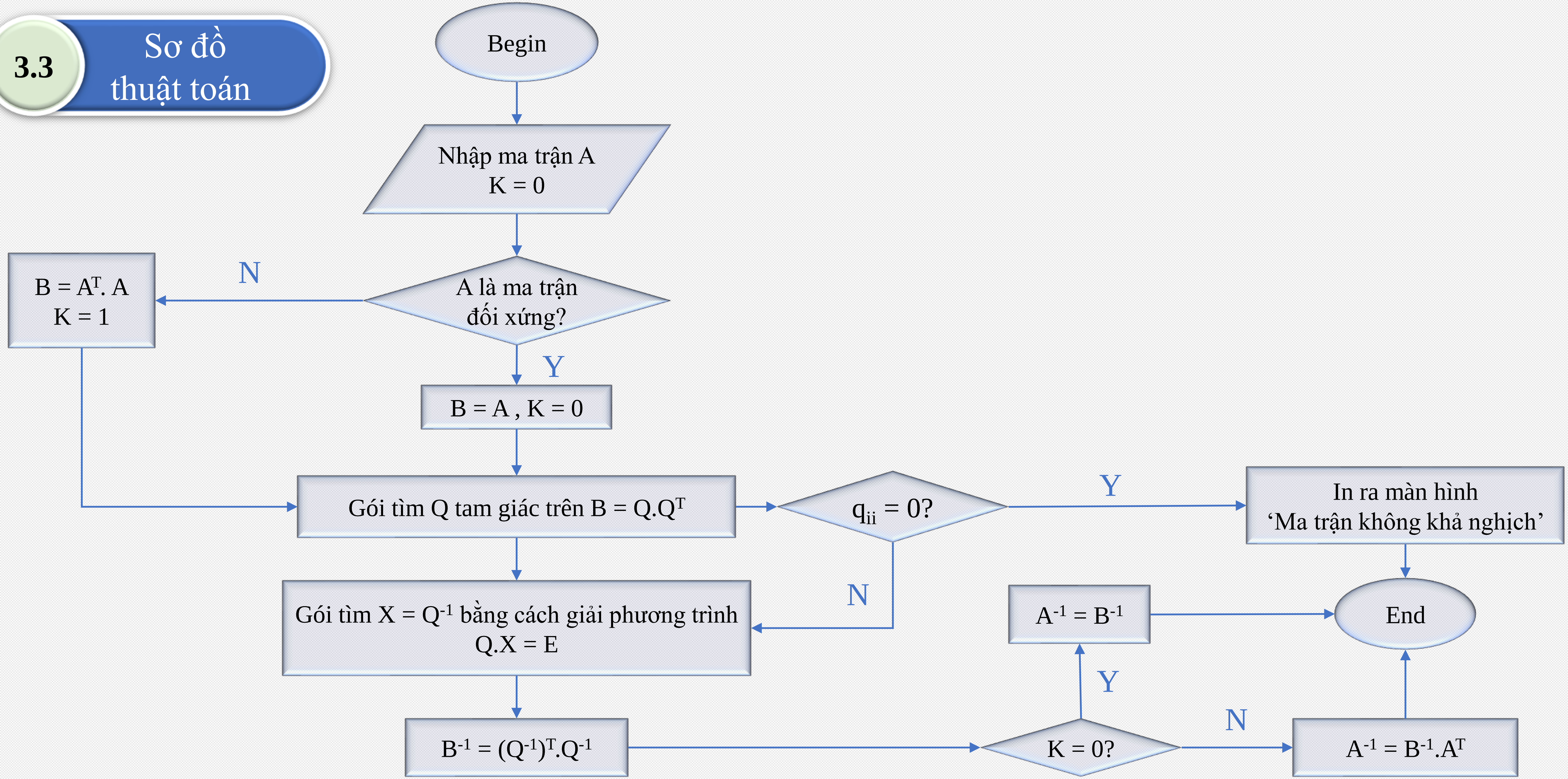
- Tìm $A^{-1} = B^{-1}.A^T$

Trường hợp A không là ma trận đối xứng ?

Nhận xét : Nếu B khả nghịch thì A cũng khả nghịch , ngược lại.

3. Phương pháp CHOLEVSKY

3.3 Sơ đồ thuật toán



3. Phương pháp CHOLEVSKY

3.4 Ví dụ minh họa

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}?

- Kết quả được kiểm tra trên excel:

-3.25	0.25	-1.75
0.25	-0.25	-0.25
-1.75	-0.25	-1.25

4. Phương pháp viền quanh

4.1 Ý tưởng thuật toán

- Cho ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$, $\det(A) \neq 0$. Ta chia ma trận A thành 4 khối :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}(n-1, n-1) & A_{12}(n-1,1) \\ A_{21}(1, n-1) & A_{22}(1,1) \end{bmatrix}$$

trong đó:

$$\begin{cases} A_{11} = \left[a_{ij} \quad \begin{matrix} i = \overline{1,(n-1)} \\ j = \overline{1,(n-1)} \end{matrix}\right] = A_{n-1} \\ A_{12} = [a_{in} \quad i = \overline{1,(n-1)}] \\ A_{21} = [a_{ni} \quad i = \overline{1,(n-1)}] \\ A_{22} = a_{nn} \end{cases}$$

➢ Đây là ma trận dạng viền quanh.

- Tìm A^{-1} trong dạng $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ với giả thiết A_{11}^{-1} tồn tại.

4. Phương pháp viền quanh

4.2 Nội dung thuật toán

- Từ định nghĩa ma trận nghịch đảo : $A^{-1}. A = A . A^{-1} = E$

Ta được : $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

hay $$\begin{cases} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = E & (1) \\ B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} = 0 & (2) \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 & (3) \\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = 1 & (4) \end{cases}$$

4. Phương pháp viền quanh

- Theo giả thiết tồn tại A_{11}^{-1} nên nhân $A_{11}^{-1}A_{12}$ vào bên phải 2 vế của (1) :

$$B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = E$$

➢ $B_{11}A_{12} + B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = A_{11}^{-1}A_{12}$ (5)

Từ (1) (2) (3) (4) (5) ta biến đổi thu được hệ :

$$\begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1} \\ B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \\ B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{cases}$$

4. Phương pháp viền quanh

Ta đặt : $X = A_{11}^{-1}A_{12}$; $Y = A_{21}A_{11}^{-1}$

$\theta = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

- Khi đó :

$$\begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + X\theta^{-1}Y \\ B_{12} = -X\,\theta^{-1} \\ B_{21} = -\,\theta^{-1}Y \\ B_{22} = \theta^{-1} \end{cases} \quad (6)$$

- Vậy, nếu biết A_{11}^{-1} thì ta tìm được A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} = A_{11}^{-1} + X\theta^{-1}Y & B_{12} = -X\theta^{-1} \\ B_{21} = -\theta^{-1}Y & B_{22} = \theta^{-1} \end{bmatrix}$$

Các bước thực hiện phương pháp cụ thể ?

4. Phương pháp viền quanh

- Với giả thiết ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ $(\det(A) \neq 0)$, ta thực hiện như sau :

  - Xét $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tìm được $A_2^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$

  - Xét $A_3 = \left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]$ ta đặt $A_{11} = A_2$, $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$, $A_{21} = [a_{31} \;\; a_{32}]$, $A_{22} = a_{33}$

    Với $A_{11}^{-1} = A_2^{-1}$ áp dụng công thức (6) tìm được A_3^{-1}

  - Tiếp tục áp dụng phương pháp, ta tìm được A_4^{-1}, A_5^{-1}….. A_n^{-1}

4. Phương pháp viền quanh

? Nếu A có định thức con chính bằng 0 ?

- Khi đó , phương pháp này không được thực hiện !!!

Giải pháp

- Đặt $B = A^T.A$

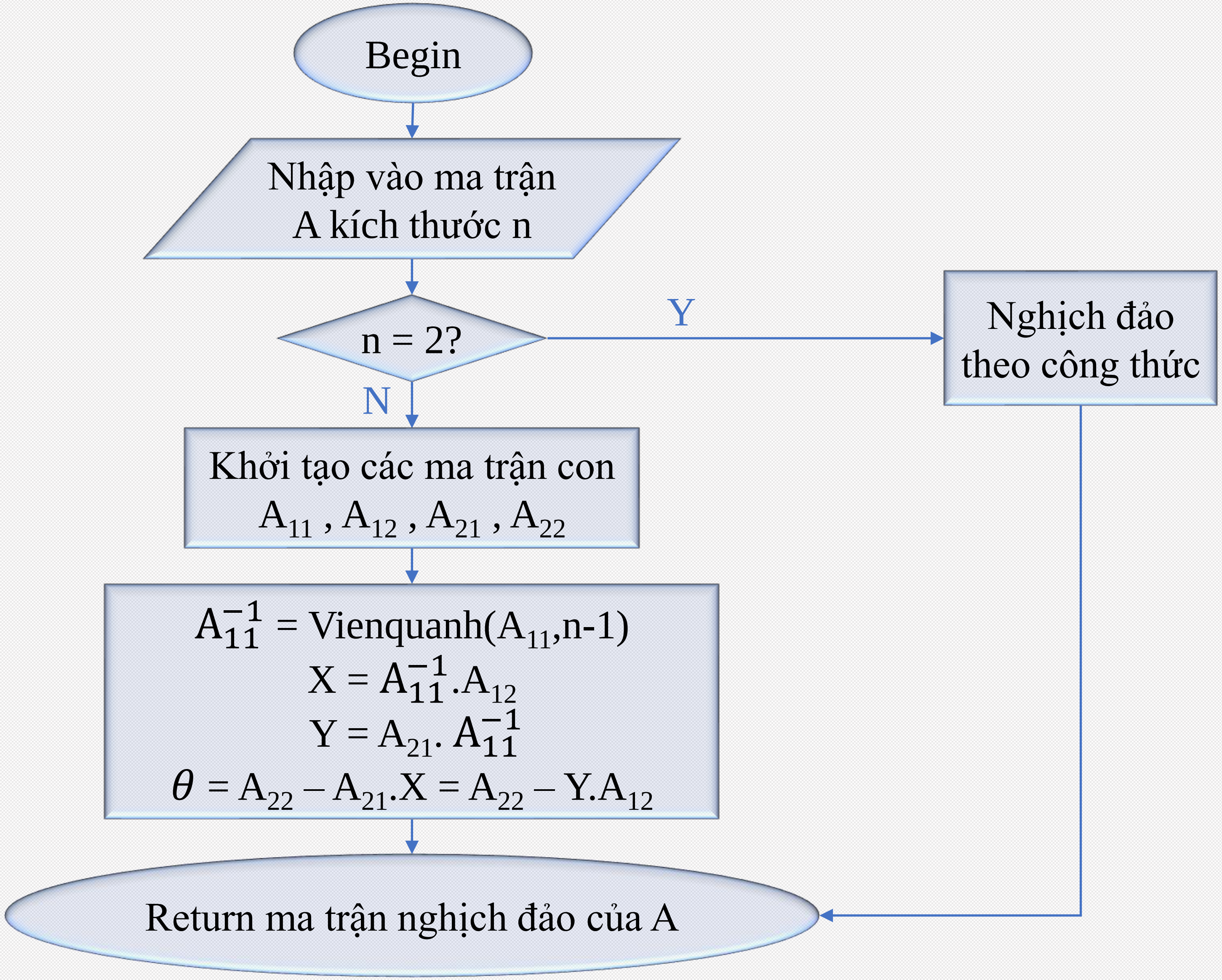
  Ta có : B là ma trận đối xứng xác định dương.

- Áp dụng phương pháp viền quanh cho B tìm được B^{-1}

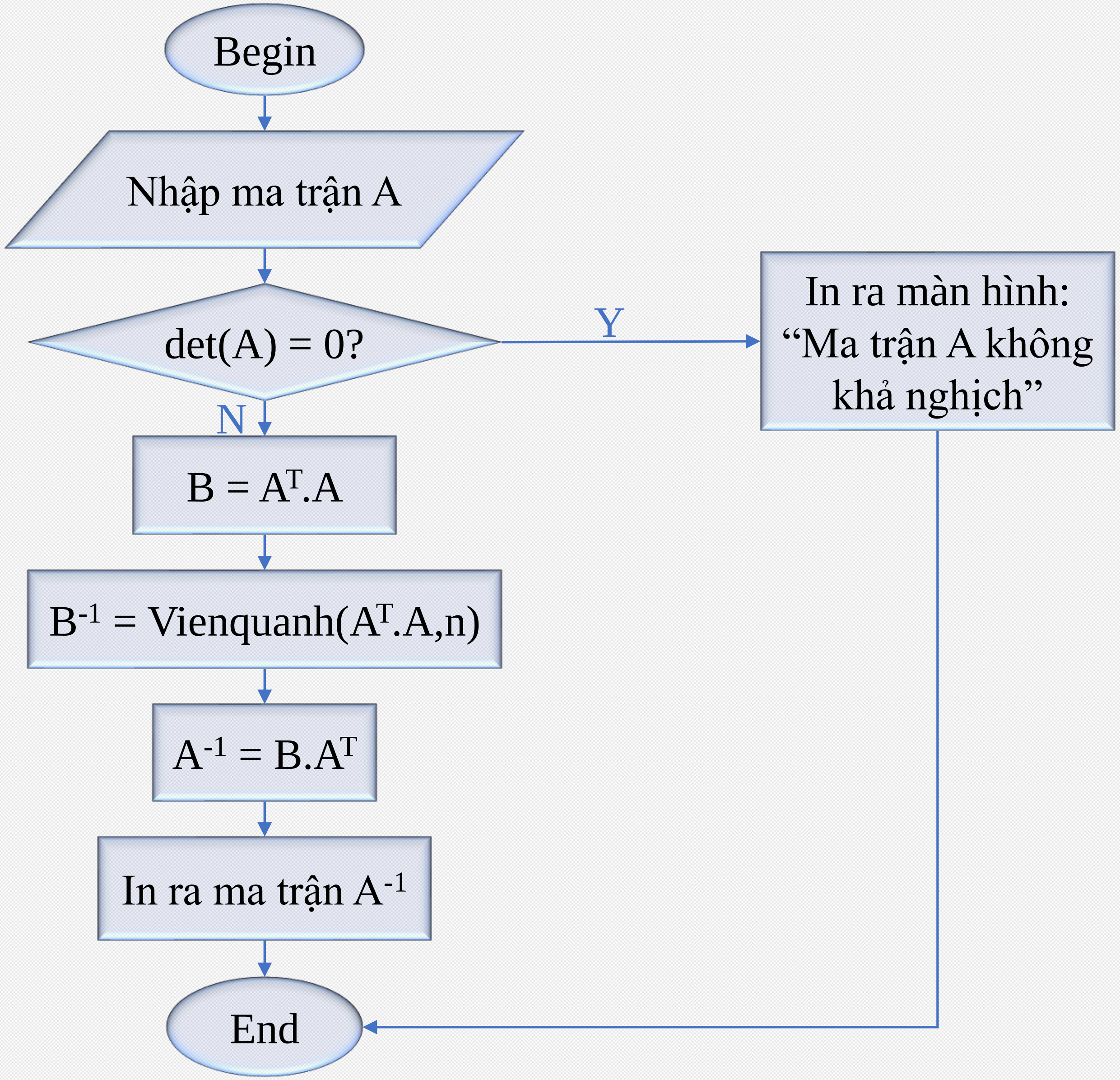
- Tìm $A^{-1} = B^{-1}.A^T$

4. Phương pháp viền quanh

4.3 Sơ đồ thuật toán



4. Phương pháp viền quanh



4. Phương pháp viền quanh

4.4 Ví dụ minh họa

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}?

- Kết quả được kiểm tra trên excel:

0	-0,0833	0,02778	0,36111
0	0,25	-0,0833	-0,0833
0	0,08333	0,30556	-0,0278
1	0	0	0

Hỏi đáp


Thanks