TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

o0o

BÁO CÁO MÔN HỌC GIẢI TÍCH SỐ

PHƯƠNG PHÁP LẶP SEIDEL VÀ GAUSS - SEIDEL

Giảng viên hướng dẫn: **TS. Hà Thị Ngọc Yến**

Sinh viên thực hiện: **Nguyễn Hải Yến - 20195944**

Huỳnh Văn Thuần - 20195924

Nông Thị Thủy - 20195926

Lê Minh Đức - 20195857

Nguyễn Mạnh Toản - 20195928

Hà Nội - 2021

Mục lục

Lời nói đầu

Trái Đất đã và đang xoay quanh không ngừng, vạn vật đều sinh sôi phát triển. Đất nước ta ngày càng vươn lên trong công nghệ thông tin và đạt được nhiều thành tích và áp dụng thành công vào nhiều lĩnh vực trong cuộc sống.

Và với môn học Giải tích số, chúng em đã tìm hiểu về phương pháp lặp Seidel và Gauss - Seidel. Và để làm được điều đó, thì không thể thiếu được sự hướng dẫn tận tình của giảng viên Hà Thị Ngọc Yến. Chúng em rất chân thành cảm ơn cô đã hướng dẫn chúng em hoàn thành được báo cáo này.

Nội dung báo cáo bao gồm 3 phần.

- Phần 1 giới thiệu tổng quan và bài toán liên quan đến phương pháp Seidel
- Phần 2 Cách sử dụng phương pháp Gauss - Seidel
- Phần 3 là trình bày chi tiết thuật toán kèm theo các kết quả test

Vì khả năng hạn chế và thời gian có hạn, nên bản báo cáo sẽ có những cho sai sót về nội dung lẫn hình thức. Rất mong người đọc thông cảm và cùng góp ý để cải thiện bản báo cáo này. Mọi góp ý xin gửi về hòm thư tdivam77@gmail.com.

Cuối cùng, chúng em xin được bày tỏ sâu sắc lòng biết ơn đến giảng viên TS.Hà Thị Ngọc Yến, người đã tận tình giúp đỡ chúng em hoàn thành báo cáo này. Chúng em xin chân thành cảm ơn!

PHÂN CÔNG NHIỆM VỤ

- Lý thyết: Tất cả cùng tìm hiểu các phương pháp và nhận xét, đánh giá.
- Thuật toán: Thuần nắm vững lý thuyết chính kết hợp Yến triển khai thuật toán
- Code: Yến thuyết trình code và làm chương trình kèm các bộ test ngẫu nhiên
- Thuyết trình: Thủy, Thuần thuyết trình lý thuyết
- Sile: Đức làm slide, tìm kiếm tư liệu và tổng hợp kiến thức
- Báo cáo: Toản báo cáo dựa trên slide và các tài liệu liên quan.

Phương pháp lặp Seidel

1.1 Giới thiệu chung

Tư tưởng của phương pháp Seidel có thể phát biểu như sau: "Thông tin càng được sử dụng sớm bao nhiêu thì càng tốt bấy nhiêu".

1.2 Bài toán

Tìm nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$\boxed{Ax = b}$$

Trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận cấp $n \times n, b \in \mathbb{R}^n$ là *vector* cho trước, $x \in \mathbb{R}^n$ là *vector* nghiệm cần tìm.

1.3 Ý tưởng

Phương pháp lặp đơn đã chứng tỏ dãy lặp

$$x^{(n)} = Bx^{(n-1)} + d,\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ khi } \| B \| < 1$$

thì xấp xỉ sau tốt hơn xấp xỉ trước đó

$$\| x^{(n)} - x^* \| < \| x^{(n-1)} - x^* \|$$

Ta có

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Biến đổi ta được

$$\begin{cases} x_1 = 0 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \ldots + b_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 + 0 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \ldots + 0 + d_n \end{cases}$$

Từ phương trình lặp Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 0 + b_{12}x_2^{(n)} + b_{13}x_3^{(n)} + \cdots + b_{1m}x_m^{(n)} + d_1 \\ x_2^{(n+1)} = b_{21}x_1^{(n)} + 0 + b_{23}x_3^{(n)} + \cdots + b_{2m}x_m^{(n)} + d_2 \\ x_3^{(n+1)} = b_{31}x_1^{(n)} + b_{32}x_2^{(n)} + 0 + \cdots + b_{3m}x_m^{(n)} + d_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m^{(n+1)} = b_{m1}x_1^{(n)} + b_{m2}x_2^{(n)} + b_{m3}x_3^{(n)} + \cdots + 0 + d_n \end{cases}$$

Ta sẽ dùng các thành phần $x_j^{(n+1)}$ vừa tính được với $j = 1, 2, 3, \ldots, i-1$ tính $x_i^{(n+1)}$

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 0 + b_{12}x_2^{(n)} + b_{13}x_3^{(n)} + \cdots + b_{1m}x_m^{(n)} + d_1 \\ x_2^{(n+1)} = b_{21}x_1^{(n+1)} + 0 + b_{23}x_3^{(n)} + \cdots + b_{2m}x_m^{(n)} + d_2 \\ x_3^{(n+1)} = b_{31}x_1^{(n+1)} + b_{32}x_2^{(n+1)} + 0 + \cdots + b_{3m}x_m^{(n)} + d_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m^{(n+1)} = b_{m1}x_1^{(n+1)} + b_{m2}x_2^{(n+1)} + b_{m3}x_3^{(n+1)} + \cdots + 0 + d_n \end{cases}$$

Thay ngay khi có giá trị mới

$$x^{(n+1)} = U.x^{(n)} + L.x^{(n+1)} + d$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{ij} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n+1)} = (I - L)^{-1}.U.x^{(n)} + d$$

Phương pháp Gauss - Seidel

2.1 Giới thiệu chung

Trong giải tích số, phương pháp Gauss - Seidel hay còn gọi là phương pháp lặp Gauss - Seidel, phương pháp Liebmann hay phương pháp tự sửa sai là một phương pháp lặp được sử dụng để giải một hệ phương trình tuyến tính tương tự như phương pháp Jacobi. Nó được đặt tên theo hai nhà toán học người Đức Carl Friedrich Gauss và Philipp Ludwig von Seidel. Mặc dù phương pháp này có thể áp dụng cho bất kỳ ma trận nào không chứa phần tử 0 (không) trên các đường chéo, nhưng tính hội tụ chỉ xảy ra nếu ma trận hoặc là ma trận đường chéo trội, hoặc là ma trận đối xứng đồng thời xác định dương.

2.2 Định lý

Định lý 1

Giả sử B là ma trận vuông cấp m, khi đó các mệnh đề sau đây tương đương:

1. Ma trận B hội tụ, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} B^n = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \| B \|^n = 0$
3. Mọi giá trị riêng đều có modun < 1

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i| < 1$$

Định lý 2

Cho ma trận B vuông thuộc $\mathbb{R}^{m\times m}$. Khi đó với $\epsilon > 0$ tồn tại một chuẩn trên $\mathbb{R}^m$ sao cho:

$$\rho(B) \leq \| B \| \leq \rho(B) + \epsilon$$

Hệ quả

Nếu $\| B \| < 1$ với một chuẩn nào đó thì B hội tụ.

Ta có:
$A = D_A - L_A - U_A$
$T = \text{diag}\left(\dfrac{1}{a_{ii}}\right)_{i=\overline{1,n}}$
$\Rightarrow I - T.A = T.L_A + T.U_A$
mà $Ax = b$ nên
$\Rightarrow TAx = Tb \Leftrightarrow (I - TL_A - TU_A)x = Tb$
$\Leftrightarrow x = (TL_A + TU_A)x + Tb$

Xác định phép lặp
$x^{(k+1)} = T.L_A.x^{(k+1)} + TU_A.x^{(k)} + Tb$
$\Leftrightarrow (I - T.L_A).x^{(k+1)} = T.U_A.x^{(k)} + Tb$
$\Leftrightarrow (D_A - L_A)x^{(k+1)} = U_A.x^{(k)} + b$
$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = (D_A - L_A)^{-1}.U_A.x^{(k)} + (D_A - L_A)^{-1}.b \qquad (*)$

Đặt $M = (D_A - L_A)^{-1}.U_A$, ta sẽ chứng minh $\rho(M) < 1$

Bổ đề

Nếu $|\lambda| \geq 1$ thì ma trận $\lambda(D_A - L_A) - U_A$ khả nghịch.
Ta có:

$$\det(\lambda I - M) = \det\left[\lambda I - (D_A - L_A)^{-1}.U_A)\right] = 0$$

Do $\det(D_A - L_A) \neq 0$ nên

$$\begin{aligned}
&\det(D_A - L_A).det\left[\lambda I - (D_A - L_A)^{-1}.U_A\right] \\
&= \det\left[\lambda(D_A - L_A) - U_A\right] = 0 \\
&\Rightarrow |\lambda| < 1 \Leftrightarrow \rho(M) < 1
\end{aligned}$$

Do $\rho(M) < 1$ nên tồn tại một chuẩn nào đó sao cho $\| M \| < 1$ nên $(*)$ hội tụ về nghiệm x^* duy nhất

2.3 Phương pháp

2.3.1 A là ma trận chéo trội hàng

$$\boxed{\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \ \forall i}$$

Ta đưa hệ $Ax = b$ về dạng $x = Cx + d$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình của $x = Cx + d$

$$\begin{cases} x_1 = 0x_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + 0x_2 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots + 0x_n + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad ; d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Dãy lặp:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j\geq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)}$$

Công thức sai số

Xét hiệu

$$x_i^{(k+1)} - x_i^* = \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij}(x_j^{(k+1)} - x_j^*) + \sum_{j=i}^{n} c_{ij}(x_j^{(k)} - x_j^*)$$

$$\Rightarrow |x_i^{(k+1)} - x_i^*| \leq \sum_{j=0}^{i-1} |c_{ij}|. \parallel x^{k+1} - x^* \parallel + \sum_{j=i}^{n} |c_{ij}| \parallel x^{(k)} - x^* \parallel_\infty$$

Đặt $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}|$ và $\gamma_i = \sum_{j=i}^{n} |c_{ij}|$ thì

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^*| \leq \beta_i. \parallel x_i^{(k+1)} - x_i^* \parallel_\infty + \gamma_i \parallel x^{(k)} - x^* \parallel_\infty$$

Giả sử

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^*| = |x_{i_0}^{(k+1)} - x_{i_0}^*| = \parallel x^{(k+1)} - x^* \parallel_\infty$$

Với $i = i_0$ ta có:

$$\| x^{(k+1)} - x^* \|_\infty \leq \beta_{i_0} \| x^{(k+1)} - x^* \|_\infty + \gamma_{i_0}. \| x^{(k)} - x^* \|_\infty$$
$$\| x^{(k+1)} - x^* \|_\infty \leq \frac{\gamma_{i_0}}{1-\beta_{i_0}}. \| x^{(k)} - x^* \|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} \| x^{(k)} - x^* \|_\infty$$

Ta có:

$$\beta_i + \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| = \| C \|_\infty < 1$$
$$\Rightarrow \beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \frac{\beta_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\beta_i} \geq 0$$

Do đó:

$$\max_{1\leq i\leq n} \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} \leq \max_{1\leq i\leq n} (\beta_i + \gamma_i) = \| C \|_\infty < 1$$

Hệ số co $\lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\gamma_i}{1-\beta_i} \leq \| C \|_\infty$ nên dãy lặp Gauss - Seidel hội tụ nhanh hơn dãy lặp Jacobi

Sai số

$$\| x^{(k+p)} - x^* \|_\infty \leq \lambda \| x^{(k)} - x^* \|_\infty$$

với p nguyên dương bất kỳ ta có:

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \|_\infty \leq \| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \|_\infty + \cdots + \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|_\infty$$
$$\leq (\lambda^p + \lambda^{p-1} + \cdots + \lambda) \cdot \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty = \lambda . \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$$

Cố định k, cho $p \to \infty$ thì $x^{(k+p)} \to x^*$

$$\| x^* - x^{(k)} \|_\infty \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty \qquad (**)$$

Ta có:

Công thức sai số hậu nghiệm

$$\| x^k - x^* \|_\infty \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$$

$$\text{với } \lambda = \max_{1\leq i\leq n} \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} \text{ và } \begin{cases} \beta_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| \\ \gamma_i = \sum\limits_{j=i}^{n} |c_{ij}| \end{cases}$$

Tiếp tục xét

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \|_\infty \leq \lambda . \| x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)} \|_\infty$$

Truy hồi bất đẳng thức này ta được:

$$\parallel x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \parallel_\infty \leq \lambda^p . \parallel x^{(k)} - x^{(k-1)} \parallel_\infty$$

Cho $k = 1$ ta được:

$$\parallel x^{(1+p)} - x^{(p)} \parallel_\infty \leq \lambda^p . \parallel x^{(1)} - x^{(0)} \parallel_\infty$$

Ta có:

Công thức sai số tiên nghiệm

$$\parallel x^{(k)} - x^{(*)} \parallel_\infty \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \parallel x^{(1)} - x^{(0)} \parallel_\infty$$

2.3.2 A là ma trận chéo trội cột

$$\boxed{\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{jj}|}$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Đặt $y_i = a_{ii}.x_i$ với $i = \overline{1,n}$ ta có:

$$\begin{cases} y_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{22}}y_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} & = b_1 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}}y_1 + y_2 + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{a_{nn}}y_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}y_1 + \dfrac{a_{n2}}{a_{22}}y_2 + \ldots + y_n & = b_n \end{cases}$$

Biến đổi ta được:

$$\begin{cases} y_1 = 0y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{22}}y_2 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} + b_1 \\ y_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}}y_1 + 0y_2 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{nn}}y_n + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}}y_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{22}}y_2 - \ldots + 0y_n + b_n \end{cases}$$

Đặt

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{22}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ & \vdots & & \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{22}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ta được $y = Cy + b$ với $\parallel C \parallel_1 < 1$
Nên y sẽ hội tụ về nghiệm y^* duy nhất
$\Rightarrow x$ sẽ hội tụ về x^* với

$$\boxed{x^* = y^*.T \text{ với } T = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{ii}}\right)_{i=\overline{1,n}}}$$

Ta có

Công thức sai số hậu nghiệm:

$$\parallel x^{(k)} - x^* \parallel_1 \leq \frac{\zeta}{(1-s)(1-\zeta)} \cdot \parallel x^{(k)} - x^{(k-1)} \parallel_1$$

$$\text{Với } s = \max_j \sum_{i=j+1}^{n} |c_{ij}|, \quad \zeta = \max_j \frac{\sum_{i=1}^{j} |c_{ij}|}{1 - \sum_{i=j+1}^{n} |c_{ij}|} \leq \parallel C \parallel_1 < 1$$

Công thức sai số tiên nghiệm:

$$\parallel x^{(k)} - x^* \parallel_1 \leq \frac{\zeta^k}{(1-s)(1-\zeta))} \cdot \parallel x^{(1)} - x^{(0)} \parallel_1$$

$$\text{Với } s = \max_j \sum_{i=j+1}^{n} |c_{ij}|, \quad \zeta = \max_j \frac{\sum_{i=1}^{j} |c_{ij}|}{1 - \sum_{i=j+1}^{n} |c_{ij}|} \leq \parallel C \parallel_1 < 1$$

2.4 Ví dụ

Xét phương trình $Ax = b$ với các dữ liệu:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}; \quad \epsilon = 0.0001$$

Do A là ma trận chéo trội, ta có thể đưa phương trình trên về dạng sau với ma trận B có chuẩn $\| B \|_\infty < 1$:

$$\begin{cases} x_1 = -0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_2 = -0.2x_1 - 0.1x_3 + 1.3 \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 1.4 \end{cases}$$

Phương pháp Gauss - Seidel có dạng:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0.1x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.2 \\ x_2^{(k+1)} &= -0.2x_1^{(k+1)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.3 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.2x_1^{(k+1)} - 0.2x_2^{(k+1)} + 1.4 \end{aligned}$$

Với $x_1^{(0)} = 1.2; x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ ta có kết quả tính toán trong bảng sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2	0.	0.
1	1.2	1.06	0.948
...	...	...	...
4	1.0000	1.0000	1.0000

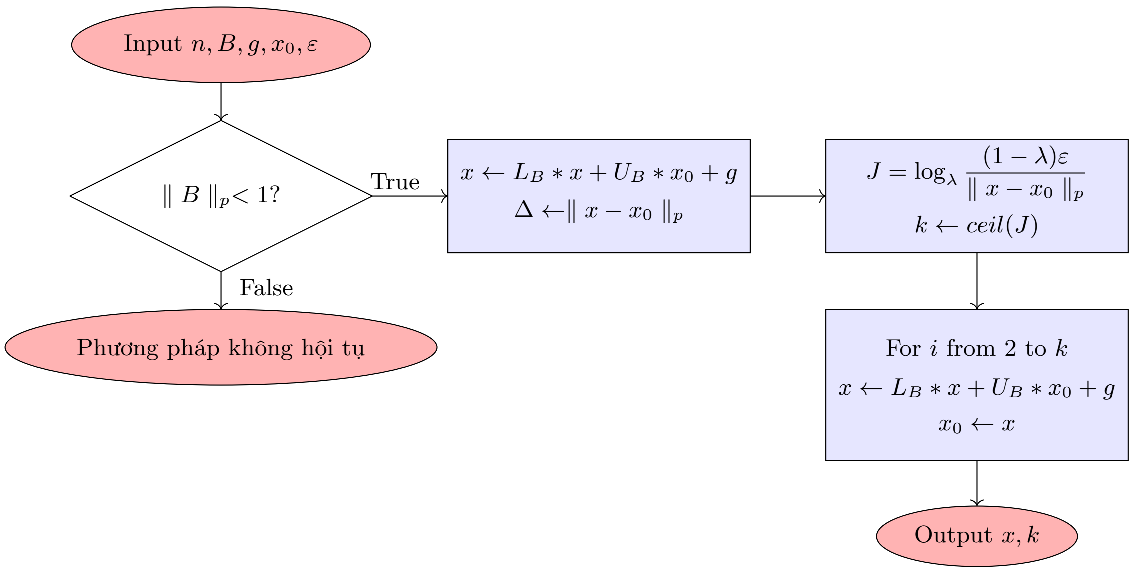
Nghiệm đúng $x^* = (1; 1; 1)^T$.

Cài đặt thuật toán

3.1 Phương pháp lặp Seidel

3.1.1 Phương pháp lặp Seidel với sai số tiên nghiệm

Sơ đồ khối



Các bước thực hiện

Bước 1: Nhập các giá trị $n, B, g, x_0, \varepsilon$.

Bước 2: Nếu $||B||_p < 1$ thì chuyển sang bước 3, 4 và 5, nếu không thì kết luận phương pháp không hội tụ, kết thúc.

Bước 3: $k = 1, x^{(1)} = L_B \times x^{(1)} + U_B \times^{(0)} + g$

Bước 4: Tính được số lần lặp k dự kiến bằng công thức tiên nghiệm $k = ceil\left(\log_\lambda \frac{(1-q)\varepsilon}{||x - x_0||_p}\right)$

Bước 5: Lặp $x^{(i)} = L_B \times x^{(i)} + U_B \times x^{(i-1)} + g$, cho đến khi số lần lặp bằng k thì đến bước 6.

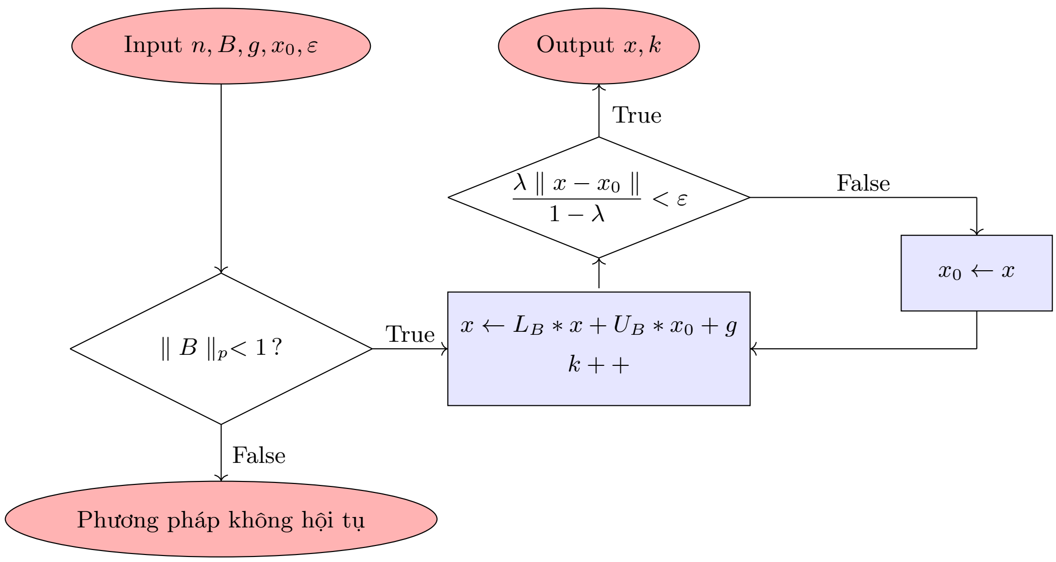
Bước 6: Kết luận nghiệm x và số lần lặp k.

Mã giả

```
Step 1: Input n, B, g, x0, epsi.
Step 2: If ||B|| < 1
                          then go to step 3
                          else end.
Step 3: k = 1;
                 x <— L * x + U * x0 + g;
Step 4: J = ((log(1-q)*epsi)/log lamda)/||x - x0||
                 k <— ceil(J)
Step 5: for k = 2 to k do
                 x <— L * x + U * x0 + g;
                 x0 <- x;
Step 6: Output x, k.
```

3.1.2 Phương pháp lặp Seidel với sai số hậu nghiệm

Sơ đồ khối



Các bước thực hiện

INPUT: cỡ ma trận n, ma trận lặp B, vecto g, vecto x_0, ε
OUTPUT: Nghiệm x và số lần lặp k.

Các bước thực hiện:

Bước 1: Nhập các giá trị $n, B, g, x_0, \varepsilon$.

Bước 2: Nếu $||B||_p < 1$ thì chuyển sang bước 3, nếu không thì kết luận phương pháp không hội tụ, kết thúc.

Bước 3: Lặp $x^{(k)} = L_B \times x^{(k)} + U_B \times^{(k-1)} + g$ cho đến khi $\dfrac{\lambda||x - x_0||}{(1-\lambda)} < \varepsilon$.

Bước 4: Kết luận nghiệm x và số lần lặp k.

Mã giả

```
Step 1: Input n, B, g, x0 epsi.
Step 2: If ||B|| < 1
                    then go to step 3
                    else end.
Step 3: x <— L * x + U * x0 + g;
Step 4: If lamda ||x - x0|| < (1 - lamda) * epsilon
                    then output x, k
                    else
                          x0 <- x;
STEP 3.
```

3.2 Phương pháp lặp Gauss - Seidel

3.2.1 Phương pháp lặp Gauss - Seidel với ma trận chéo trội

Kiểm tra chéo hàng

```
bool row_diag_dom(double temp[N][N]) {
        double sum_row;
        for i from 1 to n do
                sum_row = 0.0;
        for j = 0 to n do
                sum_row = sum_row + fabs(temp[i][j]);
        sum_row = sum_row - fabs(temp[i][i]);
        if(abs(temp[i][i]) < sum_row) return false;
        return true;
}
```

Kiểm tra chéo cột

```
bool col_diag_dom(double temp[N][N]) {
        double sum_col;
        for j = 1 to n do
                sum_col = 0.0;
                for i = 1 to n do
                        sum_col = sum_col + fabs(temp[i][j]);
                sum_col = sum_col - fabs(temp[j][j]);
                if(abs(temp[j][j]) < sum_col) return false;
```

```
        return true;
}
```

Gauss Seidel

```
while(true) {
        k = k + 1;
        z = x;
        for i = 1 to n do {
                temp = 0;
                for j = 1 to n do
                        if (j != i) temp = temp + (a[i][j]/a[i][i])
                x[i] = b[i]/a[i][i] - temp;
        }
        norm = 0;
        for(int i = 0; i < n; i++)
                norm = norm + fabs(x[i] - z[i]);
        if(norm < epsi) {
                cout << "So lan lap: " << k << endl;
                break;
        }
}
```

3.3 Đánh giá phương pháp

1. Độ phức tạp thuật toán $O(kn^2)$
2. Phương pháp Gauss Seidel hội tụ phụ thuộc vào hệ số co $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{\gamma_i}{1 - \beta_i}$
3. Phương pháp Gauss Seidel hội tụ nhanh hơn Jacobi vì hệ số co $\lambda \le \| B \|$
4. Hai phương pháp chéo trội hàng và cột có số lần lặp xấp xỉ nhau.