TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Giải tích số

Phương pháp lặp Seidel và Gauss Seidel

Lớp 125001 Nhóm 12

Ngày 28 tháng 5 năm 2021

Nhóm sinh viên thực hiện

Họ và tên	MSSV
Huỳnh Văn Thuần	20195924
Nguyễn Hải Yến	20195944
Lê Minh Đức	20195857
Nông Thị Thủy	20195926
Nguyễn Mạnh Toản	20195928

Nội dung chính

Yêu cầu

Tìm nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$Ax = b$$

Trong đó $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận cấp $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ là *vector* cho trước, $x \in \mathbb{R}^n$ là *vector* nghiệm cần tìm

- Phương pháp lặp đơn đã chứng tỏ dãy lặp

$$x^{(n)} = Bx^{(n-1)} + d, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ khi } \| B \| < 1$$

thì xấp xỉ sau tốt hơn xấp xỉ trước đó

$$\| x^{(n)} - x^* \| < \| x^{(n-1)} - x^* \|$$

- Ta có

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \ldots + b_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 + 0 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \ldots + 0 + d_n \end{cases}$$

- Từ phương trình lặp Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 0 + b_{12}x_2^{(n)} + b_{13}x_3^{(n)} + \cdots + b_{1m}x_m^{(n)} + d_1 \\ x_2^{(n+1)} = b_{21}x_1^{(n)} + 0 + b_{23}x_3^{(n)} + \cdots + b_{2m}x_m^{(n)} + d_2 \\ x_3^{(n+1)} = b_{31}x_1^{(n)} + b_{32}x_2^{(n)} + 0 + \cdots + b_{3m}x_m^{(n)} + d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^{(n+1)} = b_{m1}x_1^{(n)} + b_{m2}x_2^{(n)} + b_{m3}x_3^{n} + \cdots + 0 + d_n \end{cases}$$

- Ta sẽ dùng các thành phần $x_j^{(n+1)}$ vừa tính được với $j = 1, 2, 3, \dots, i-1$ để tính $x_i^{(n+1)}$

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = 0 + b_{12}x_2^{(n)} + b_{13}x_3^{(n)} + \cdots + b_{1m}x_m^{(n)} + d_1 \\ x_2^{(n+1)} = b_{21}x_1^{(n+1)} + 0 + b_{23}x_3^{(n)} + \cdots + b_{2m}x_m^{(n)} + d_2 \\ x_3^{(n+1)} = b_{31}x_1^{(n+1)} + b_{32}x_2^{(n+1)} + 0 + \cdots + b_{3m}x_m^{(n)} + d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^{(n+1)} = b_{m1}x_1^{(n+1)} + b_{m2}x_2^{(n+1)} + b_{m3}x_3^{n+1} + \cdots + 0 + d_n \end{cases}$$

- Thay ngay khi có giá trị mới

$$x^{(n+1)} = U.x^{(n)} + L.x^{(n+1)} + d$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{ij} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n+1)} = (I - L)^{-1}.U.x^{n} + d$$

Định lý 1

Giả sử B là ma trận vuông cấp m, khi đó các mệnh đề sau đây tương đương:

1. Ma trận B hội tụ, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} B^n = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \| B \|^n = 0$
3. Mọi giá trị riêng đều có modun < 1

$$p(B) = \max_i |\lambda_i| < 1$$

Định lý 2

Cho ma trận B vuông thuộc $\mathbb{R}^{m \times m}$. Khi đó với $\epsilon > 0$ tồn tại một chuẩn trên $\mathbb{R}^m$ sao cho:

$$p(B) \leq \| B \| \leq p(B) + \epsilon$$

Hệ quả

Nếu $\| B \| < 1$ với một chuẩn nào đó thì B hội tụ.

Hệ quả

Nếu $\| B \| < 1$ với một chuẩn nào đó thì B hội tụ.

- Ta có: $A = D_A - L_A - U_A$

  $\Rightarrow I - T.A = T.L_A + T.U_A$

  mà $Ax = b$ nên

  $\Rightarrow TAx = Tb \Leftrightarrow (I - TL_A - TU_A)x = Tb$

  $\Leftrightarrow x = (TL_A + TU_A)x + Tb$

- Xác định phép lặp

$$x^{(k+1)} = T.L_A.x^{(k+1)} + TU_A.x^{(k)} + Tb$$

$$\Leftrightarrow (I - T.L_A).x^{(k+1)} = T.U_A.x^{(k)} + Tb$$

$$\Leftrightarrow (D_A - L_A)x^{(k+1)} = U_A.x^{(k)} + Tb$$

$$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = (D_A - L_A)^{-1}.U_A.x^{(k)} + (D_A - L_A)^{-1}.Tb \qquad (*)$$

- Đặt $M = (D_A - L_A)^{-1}.U_A$, ta sẽ chứng minh $p(M) < 1$

Bổ đề

Nếu $|\lambda| \geq 1$ thì ma trận $\lambda(D_A - L_A) - U_A$ khả nghịch.

Bổ đề

Nếu $|\lambda| \geq 1$ thì ma trận $\lambda(D_A - L_A) - U_A$ khả nghịch.

- Ta có: $\det(\lambda I - M) = \det\left[\lambda I - (D_A - L_A)^{-1}.U_A)\right] = 0$

  Do $\det(D_A - L_A) \neq 0$ nên

  $\det(D_A - L_A).det\left[\lambda I - (D_A - L_A)^{-1}.U_A\right]$

  $= \det\left[\lambda(D_A - L_A) - U_A\right] = 0$

  $\Rightarrow |\lambda| < 1 \Leftrightarrow p(M) < 1$

Bổ đề

Nếu $|\lambda| \geq 1$ thì ma trận $\lambda(D_A - L_A) - U_A$ khả nghịch.

- Ta có: $\det(\lambda I - M) = \det\left[\lambda I - (D_A - L_A)^{-1}.U_A)\right] = 0$

  Do $\det(D_A - L_A) \neq 0$ nên

  $\det(D_A - L_A).det\left[\lambda I - (D_A - L_A)^{-1}.U_A\right]$

  $= \det\left[\lambda(D_A - L_A) - U_A\right] = 0$

  $\Rightarrow |\lambda| < 1 \Leftrightarrow p(M) < 1$

- Do $p(M) < 1$ nên tồn tại một chuẩn nào đó sao cho $\| M \| < 1$ nên $(*)$ hội tụ về nghiệm x^* duy nhất

1. A là ma trận chéo trội hàng

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ với } \forall i$$

Ta đưa hệ $Ax = b$ về dạng $x = Cx + d$ như sau.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad ; d = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad ; d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Dãy lặp

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j \geq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- Xét hiệu

$$x_i^{(k+1)} - x_i^* = \sum_{j=0}^{i-1} C_{ij}(x_j^{(k+1)} - x_j^*) + \sum_{j=i}^{n} C_{ij}(x_j^{(k)} - x_j^*)$$

$$\Rightarrow |x_i^{(k+1)} - x_i^*| \leq \sum_{j=0}^{i-1} |C_{ij}|. \parallel x^{k+1} - x^* \parallel + \sum_{j=i}^{n} |C_{ij}| \parallel x^{(k)} -^* \parallel_\infty$$

- Đặt $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} |C_{ij}|$ và $\gamma_i = \sum\limits_{j=i}^{n} |C_{ij}|$ thì

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^*| \leq \beta_i . \parallel x_i^{(k+1)} - x_i^* \parallel_\infty + \gamma_i \parallel x^{(k)} - x^* \parallel_\infty$$

- Giả sử $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i^{(k+1)} - x_i^*| = |x_{i_0}^{(k+1)} - x_{i_0}^*| = \| x^{(k+1)} - x^* \|_\infty$
  Với $i = i_0$ ta có:

$$\| x^{(k+1)} - x^* \|_\infty \le \beta_{i_0} \| x^{(k+1)} - x^* \|_\infty + \gamma_i . \| x^{(k)} - x^* \|_\infty$$

$$\| x^{(k+1)} - x^* \|_\infty \le \frac{\gamma_{i_0}}{1 - \beta_{i_0}} . \| x^{(k)} - x^* \|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} \| x^{(k)} - x^* \|_\infty$$

- Ta có: $\beta_i + \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| \leq \max \sum_{j=1}^{n} |b_i C_{ij}| = \| C \|_\infty < 1$

$$\Rightarrow \beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \frac{\beta_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\beta_i} \geq 0$$

- Ta có: $\beta_i + \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| \leq \max \sum_{j=1}^{n} |b_i C_{ij}| = \| C \|_\infty < 1$

$$\Rightarrow \beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \frac{\beta_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\beta_i} \geq 0$$

- Do đó:

$$\max_{1\leq i\leq n} \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} \leq \max_{1\leq i\leq n} (\beta_i + \gamma_i) = \| C \|_\infty < 1$$

- Ta có: $\beta_i + \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| \leq \max \sum_{j=1}^{n} |b_i C_{ij}| = \| C \|_\infty < 1$

$$\Rightarrow \beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \frac{\beta_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\beta_i} \geq 0$$

- Do đó:

$$\max_{1\leq i\leq n} \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} \leq \max_{1\leq i\leq n} (\beta_i + \gamma_i) = \| C \|_\infty < 1$$

- Hệ số co $\lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\gamma_i}{1-\beta_i} \leq \| C \|_\infty$ nên dãy lặp Gauss - Seidel hội tụ nhanh hơn dãy lặp Jacobi

- Sai số

$$\| x^{(k+p)} - x^{*} \|_{\infty} \leq \lambda \| x^{(k)} - x^{*} \|_{\infty}$$

với p nguyên dương bất kỳ ta có:

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \|_{\infty} \leq \| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \|_{\infty} + \cdots + \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|_{\infty}$$

$$\leq (\lambda^{p} + \lambda^{p-1} + \cdots + \lambda) \cdot \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_{\infty} = \lambda . \frac{1 - \lambda^{p}}{1 - \lambda} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_{\infty}$$

- Cố định k, cho $p \to \infty$ thì $x^{(k+p)} \to x^*$

$$\| x^* - x^{(k)} \|_\infty \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty \qquad (**)$$

- Ta có

Công thức sai số hậu nghiệm

$$\| x^k - x^* \|_\infty \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$$

với $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \dfrac{\gamma_i}{1-\beta_i}$ và $\begin{cases} \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} |C_{ij}| \\ \gamma_i = \sum\limits_{j=i}^{n} |C_{ij}| \end{cases}$

- Tiếp tục xét

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \|_\infty \leq \lambda . \| x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)} \|_\infty$$

- Tiếp tục xét

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \|_\infty \leq \lambda. \| x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)} \|_\infty$$

- Truy hồi bất đẳng thức này ta được:

$$\| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \|_\infty \leq \lambda^p. \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$$

- Cho $k = 1$ ta được:

$$\| x^{(1+p)} - x^{(p)} \|_\infty \leq \lambda^p . \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty$$

- Ta có

Công thức sai số tiên nghiệm

$$\| x^{(k)} - x^{(*)} \|_\infty \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty$$

2. A là ma trận chéo trội cột

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{jj}|$$

Ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Đặt $y_i = a_{ii}.x_i$ với $i = \overline{1, n}$ ta có:

$$\begin{cases} y_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} y_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} & = b_1 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} y_1 + y_2 + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} y_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} y_1 + \dfrac{a_{n2}}{a_{22}} y_2 + \ldots + y_n & = b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{22}}y_2 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} + b_1 \\ y_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}}y_1 + 0y_2 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{nn}}y_n + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}}y_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{22}}y_2 - \ldots + 0y_n + b_n \end{cases}$$

Đặt $C = \begin{bmatrix} 0 - \dfrac{a_{12}}{a_{22}} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} + 0 - \cdots \quad \dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} - \dfrac{a_{n2}}{a_{22}} - \cdots + 0 \end{bmatrix}$

Ta được $y = Cy + b$ với $\| C \|_1 < 1$

Nên y sẽ hội tụ về nghiệm y^* duy nhất

$\Rightarrow x$ sẽ hội tụ về x^* với

$$x^* = y^*.T \text{ với } T = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_{ii}}\right)_{i=\overline{1,n}}$$

Công thức sai số hậu nghiệm

$$\| x^{(k)} - x^* \|_1 \leq \frac{\epsilon}{(1-s)(1-\epsilon)} \cdot \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_1$$

Với $s = \max\limits_j \sum\limits_{i=j+1}^{n} |a_{ij}|, \quad \epsilon = \max\limits_j \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{j} |a_{ij}|}{1 - \sum\limits_{i=j+1}^{n} |a_{ij}|} \leq \| C \|_1 < 1$

Công thức sai số tiên nghiệm

$$\| x^{(k)} - x^{*} \|_1 \leq \frac{\epsilon^k}{(1-s)(1-\epsilon)} \cdot \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_1$$

Với $s = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=j+1}^{n} |a_{ij}|, \quad \epsilon = \max\limits_{j} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{j} |a_{ij}|}{1 - \sum\limits_{i=j+1}^{n} |a_{ij}|} \leq \| C \|_1 < 1$

Ví dụ: Xét phương trình $Ax = b$ với các dữ liệu:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}; \quad \epsilon = 0,0001$$

- Do A là ma trận chéo trội, ta có thể đưa phương trình trên về dạng sau với ma trận B có chuẩn $\| B \|_\infty < 1$:

$$\begin{cases} x_1 = -0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_2 = -0.2x_1 - 0.1x_3 + 1.3 \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 1.4 \end{cases}$$

- Phương pháp Gauss - Seidel có dạng:

$$x_1^{(k+1)} = -0.1x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.2$$
$$x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k+1)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.3$$

- Với $x_1^{(0)} = 1.2; x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ ta có kết quả tính toán trong bảng sau:

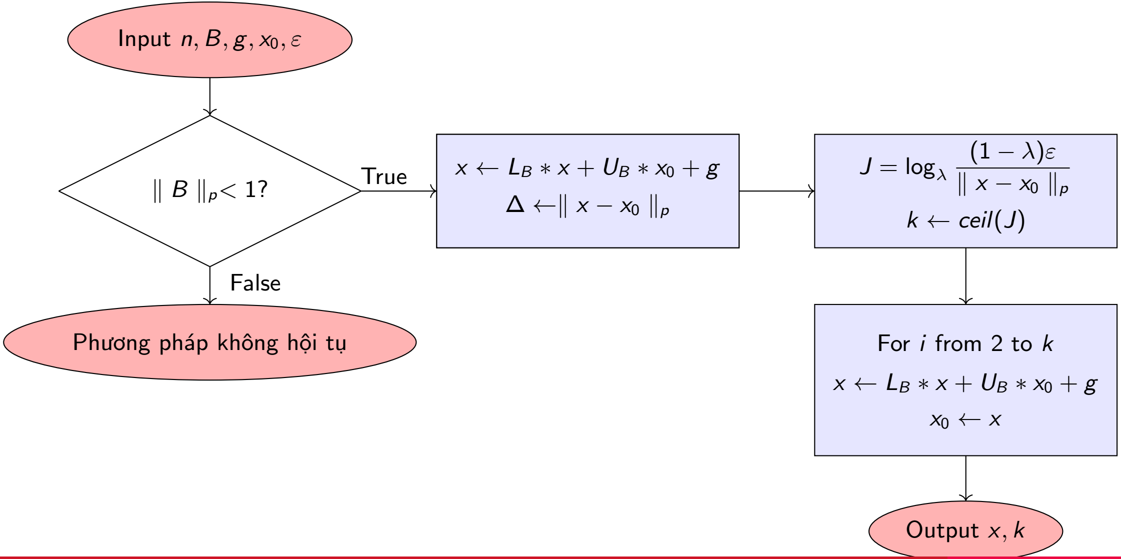
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2	0.	0.
1	1.2	1.06	0.948
...	...	...	...
5	1.0000	1.0000	1.0000

Nghiệm đúng $x^* = (1; 1; 1)^T$.

Phương pháp lặp Seidel và Gauss Seidel

Phương pháp lặp Seidel với sai số tiên nghiệm

Sơ đồ khối


Input $n, B, g, x_0, \varepsilon$
$\| B \|_p < 1?$
True
False
$x \leftarrow L_B * x + U_B * x_0 + g$
$\Delta \leftarrow \| x - x_0 \|_p$
$J = \log_\lambda \dfrac{(1-\lambda)\varepsilon}{\| x - x_0 \|_p}$
$k \leftarrow ceil(J)$
Phương pháp không hội tụ
For i from 2 to k
$x \leftarrow L_B * x + U_B * x_0 + g$
$x_0 \leftarrow x$
Output x, k

Các bước thực hiện:

Bước 1: Nhập các giá trị $n, B, g, x_0, \varepsilon$.

Bước 2: Nếu $||B||_p < 1$ thì chuyển sang bước 3, 4 và 5, nếu không thì kết luận phương pháp không hội tụ, kết thúc.

Bước 3: $k = 1, x^{(1)} = L_B \times x^{(1)} + U_B \times^{(0)} + g$

Bước 4: Tính được số lần lặp k dự kiến bằng công thức tiên nghiệm
$$k = ceil\left(\log_\lambda \frac{(1-q)\varepsilon}{||x - x_0||_p}\right)$$

Bước 5: Lặp $x^{(i)} = L_B \times x^{(i)} + U_B \times x^{(i-1)} + g$, cho đến khi số lần lặp bằng k thì đến bước 6.

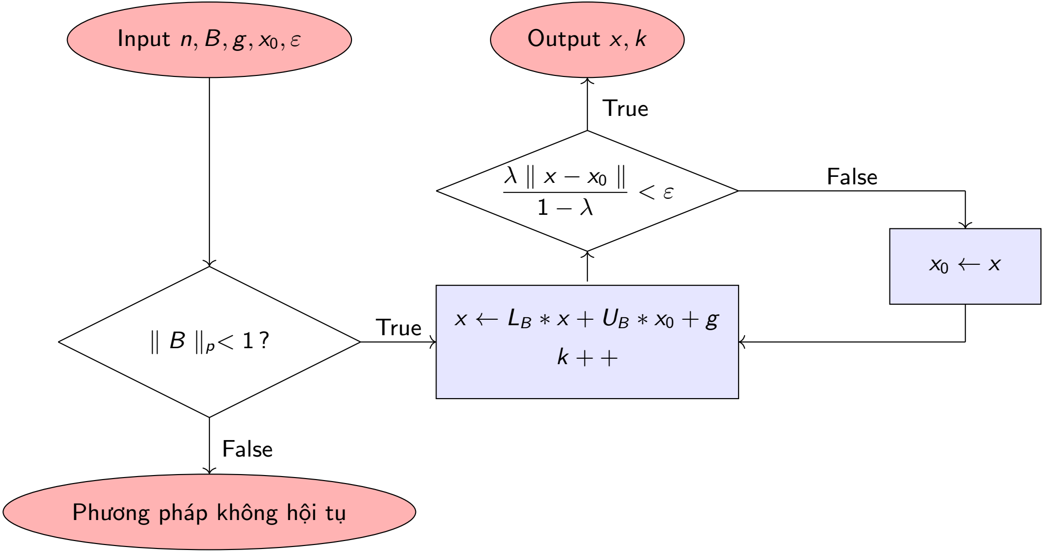
Bước 6: Kết luận nghiệm x và số lần lặp k.

Mã giả

```
Step 1: Input n, B, g, x0, epsi.
Step 2: If ||B|| < 1
            then go to step 3
            else end.
Step 3: k = 1;
        x <— L * x + U * x0 + g;
Step 4: J = ((log(1−q)*epsi)/log lamda)/||x − x0||
        k <— ceil(J)
Step 5: for k = 2 to k do
        x <— L * x + U * x0 + g;
```

Phương pháp lặp Seidel với sai số hậu nghiệm

Sơ đồ khối



Input $n, B, g, x_0, \varepsilon$
Output x, k
True
$\frac{\lambda \parallel x - x_0 \parallel}{1-\lambda} < \varepsilon$
False
$x_0 \leftarrow x$
$\parallel B \parallel_p < 1$?
True
$x \leftarrow L_B * x + U_B * x_0 + g$
$k{+}{+}$
False
Phương pháp không hội tụ

Các bước thực hiện

INPUT: cỡ ma trận n, ma trận lặp B, vecto g, vecto x_0, ε

OUTPUT: Nghiệm x và số lần lặp k.

Các bước thực hiện:

Bước 1: Nhập các giá trị $n, B, g, x_0, \varepsilon$.

Bước 2: Nếu $||B||_p < 1$ thì chuyển sang bước 3, nếu không thì kết luận phương pháp không hội tụ, kết thúc.

Bước 3: Lặp $x^{(k)} = L_B \times x^{(k)} + U_B \times^{(k-1)} + g$ cho đến khi $\dfrac{\lambda||x - x_0||}{(1-\lambda)} < \varepsilon$.

Bước 4: Kết luận nghiệm x và số lần lặp k.

Mã giả

```
Step 1: Input n, B, g, x0 epsi.
Step 2: If ||B|| < 1
            then go to step 3
            else end.
Step 3: x <— L * x + U * x0 + g;
Step 4: If lamda ||x - x0|| < (1 - lamda) * epsilon
            then output x, k
            else
                x0 <- x;
STEP 3.
```

Phương pháp lặp Gauss - Seidel với ma trận chéo trội

Kiểm tra chéo hàng

```
bool row_diag_dom(double temp[N][N]) {
    double sum_row;
    for i from 1 to n do
        sum_row = 0.0;
        for j = 0 to n do
            sum_row = sum_row + fabs(temp[i][j]);
        sum_row = sum_row - fabs(temp[i][i]);
        if(abs(temp[i][i]) < sum_row) return false;
    return true;
}
```

Kiểm tra chéo cột

```
bool col_diag_dom(double temp[N][N]) {
    double sum_col;
    for j = 1 to n do
        sum_col = 0.0;
        for i = 1 to n do
            sum_col = sum_col + fabs(temp[i][j]);
        sum_col = sum_col − fabs(temp[j][j]);
        if(abs(temp[j][j]) < sum_col) return false;
    return true;
}
```

```
while(true) {
        k = k + 1;
        z = x;
        for i = 1 to n do {
            temp = 0;
            for j = 1 to n do
                if (j != i) temp = temp + (a[i][j]/a[i][i])* x[j];
            x[i] = b[i]/a[i][i] - temp;
        }
        norm = 0;
        for(int i = 0; i < n; i++)
            norm = norm + fabs(x[i] - z[i]);
        if(norm < epsi) {
            cout << "So lan lap: " << k << endl;
            break;
        }
    }
```

Đánh giá phương pháp

1. Độ phức tạp thuật toán $O(kn^2)$
2. Phương pháp Gauss Seidel hội tụ phụ thuộc vào hệ số co $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{\gamma_i}{1 - \beta_i}$
3. Phương pháp Gauss Seidel hội tụ nhanh hơn Jacobi vì hệ số co $\lambda \le \| B \|$
4. Hai phương pháp chéo trội hàng và cột có số lần lặp xấp xỉ nhau.