Thuật toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số một biến trên một đoạn con đóng của $\mathbb{R}$

Chủ đề 7

Nhóm thực hiện: Nhóm 12

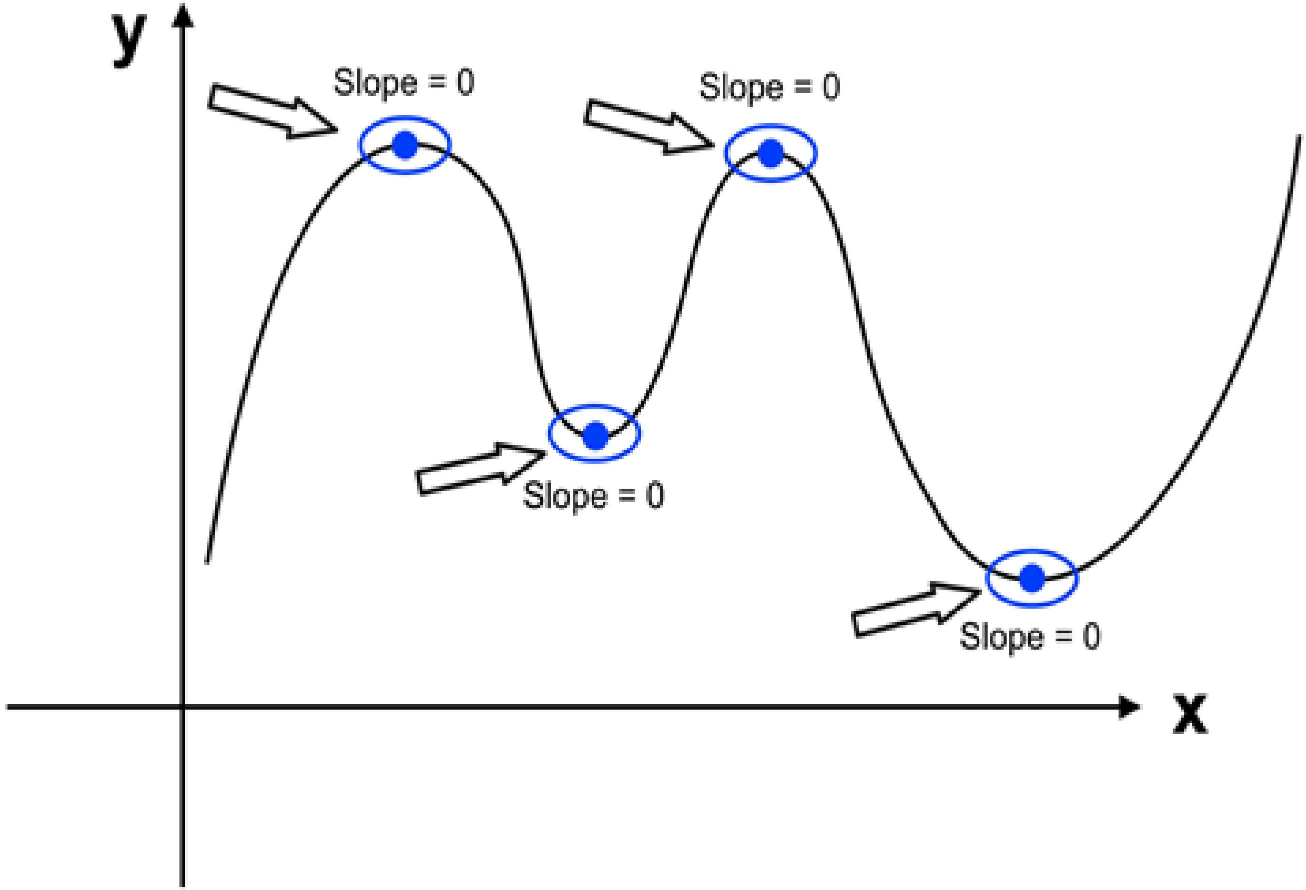
- Nguyễn Hoàng Minh - 20195902
- Phạm Anh Đức - 20195859
- Phan Tiến Đạt - 20195854
- Nguyễn Thành Long – 20195898
- Trần Viết Tài - 20185402

NỘI DUNG CHÍNH

I. Đặt vấn đề
II. Hướng giải quyết
III. Xây dựng thuật toán Gradient Descent
IV. Xây dựng thuật toán tìm cực trị trên [a,b]
V. Sự hội tụ
VI. Sơ đồ thuật toán
VII. Ví dụ
VIII. Đánh giá phương pháp
IX. Phương pháp khác

I. Đặt vấn đề

Tìm cực trị?

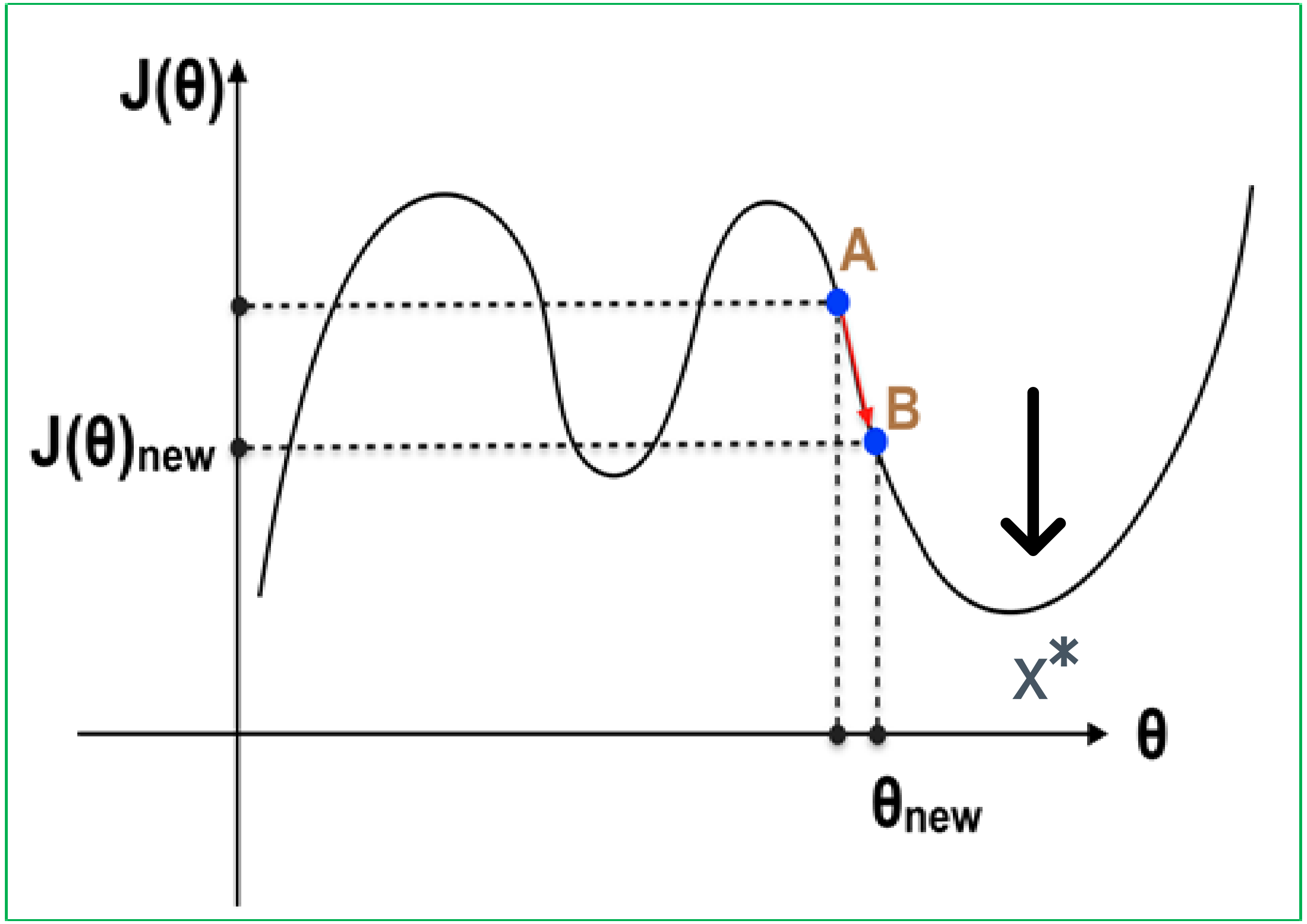


II. Hướng giải quyết

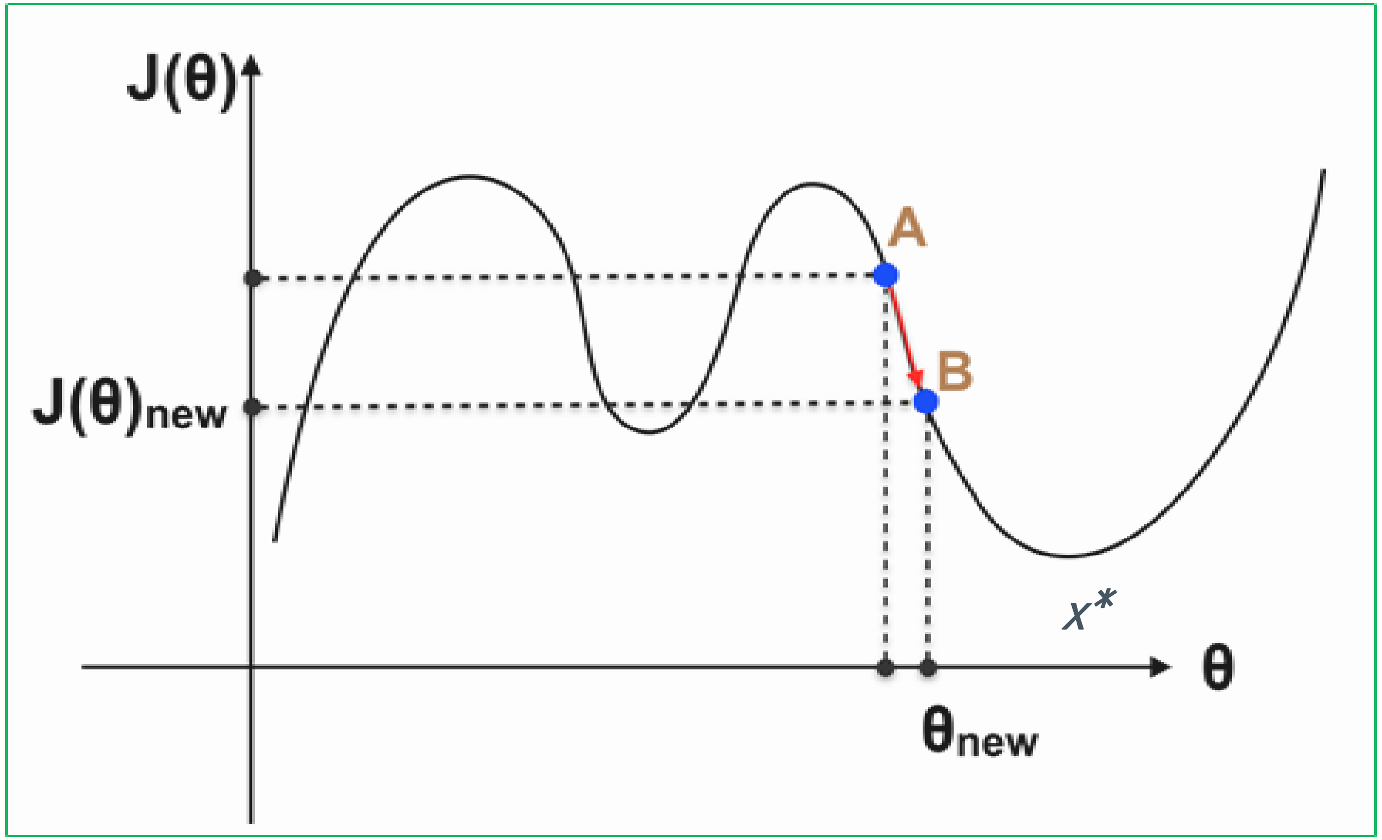
Chia [a;b] thành các đoạn nhỏ. Tính giá trị tại các điểm. So sánh giá trị. Chọn ra f(x) nhỏ nhất và lớn nhất.

Thuật toán Gradient Descent cho chúng ta cách tìm xấp xỉ các điểm cực trị sau một số vòng lặp.

III. Xây dựng thuật toán Gradient Descent



III. Xây dựng thuật toán Gradient Descent



$$\boxed{x_B = x_A + sign * \eta * f'(x_A)\ (*).}$$

III. Xây dựng thuật toán Gradient Descent

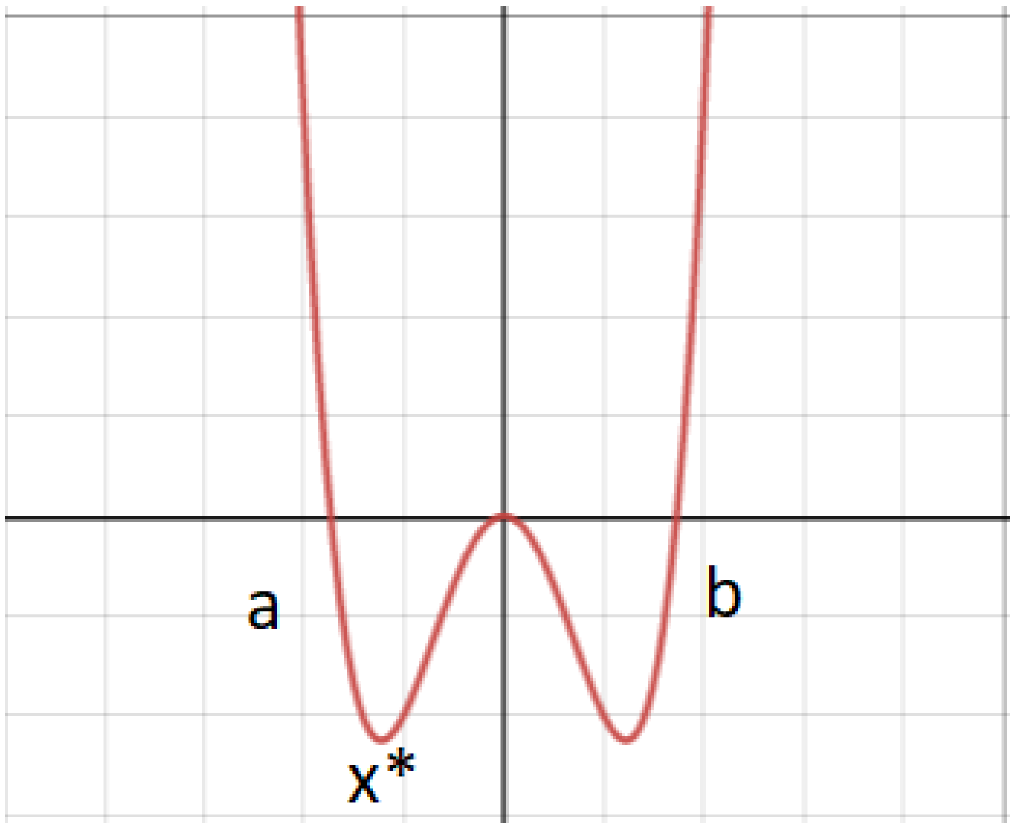
Xây dựng công thức đạo hàm

$$f(x+\varepsilon) \approx f(x) + f'(x)\varepsilon + \frac{f''(x)}{2}\varepsilon^2 + \dots$$

$$f(x-\varepsilon) \approx f(x) - f'(x)\varepsilon + \frac{f''(x)}{2}\varepsilon^2 - \dots$$

$$\boxed{\frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} \approx f'(x) + \frac{f^{(3)}(x)}{6}\varepsilon^2 + \dots = f'(x) + O(\varepsilon^2)}$$

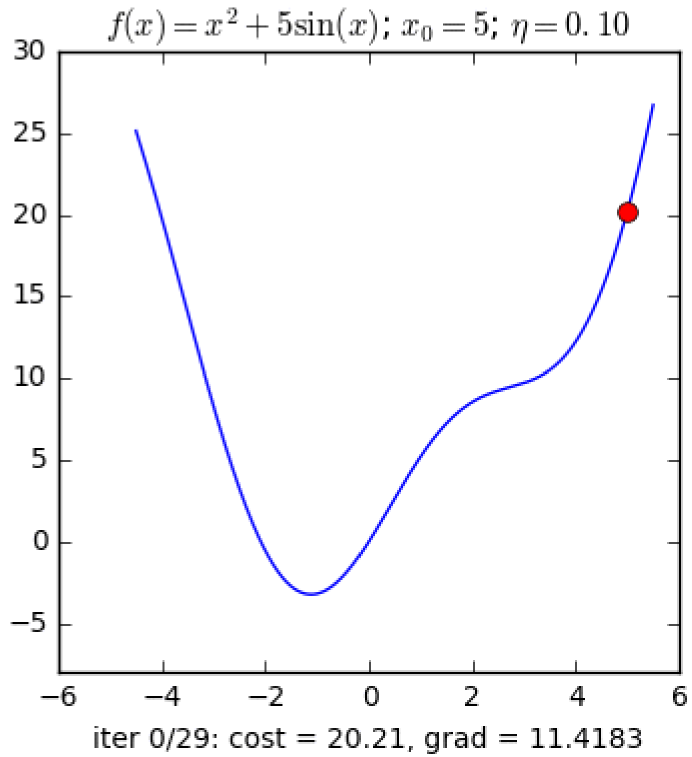
IV. Xây dựng thuật toán tìm các cực trị trên [a,b]



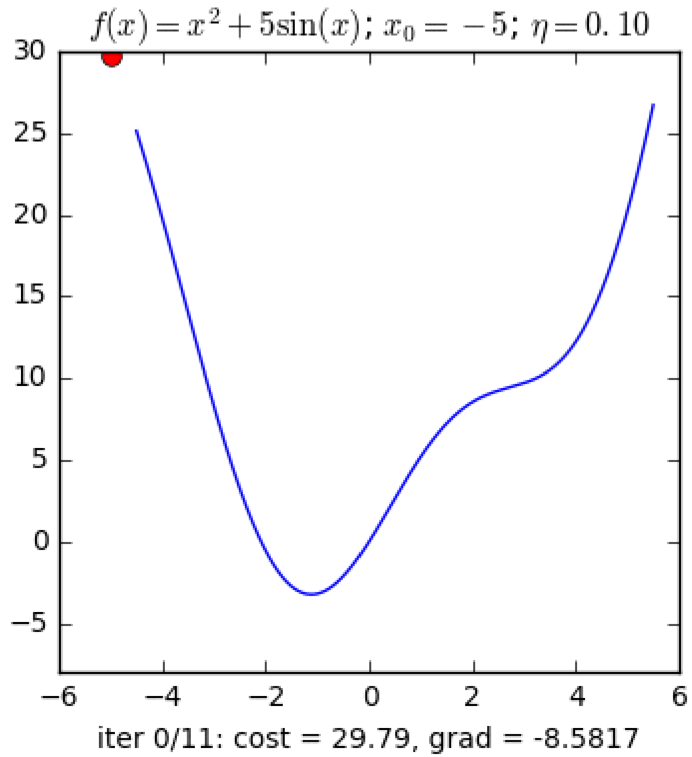
- B1: $f'(x_0) < 0$ => cực trị tiếp theo (nếu có) là cực tiểu.
- B2: Dùng (*) với *sign = -1* (hoặc 1) lặp x_0 --> x^*. Tăng 1 khoảng step để $x_0 > x^*$
- B3: Quay lại B1 với x_0 mới. Lặp lại đến khi x_0=b.

V. Sự hội tụ

1. Điểm khởi tạo ban đầu

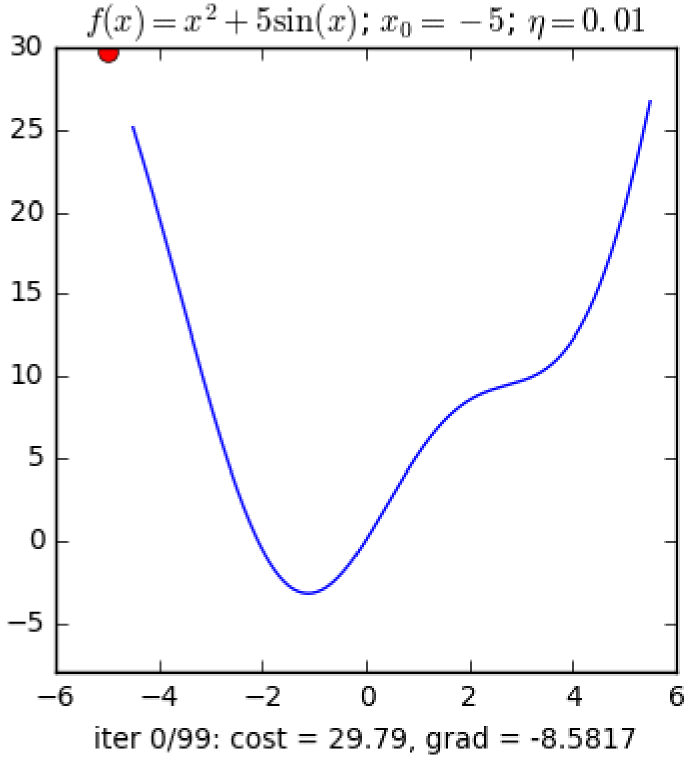


$x_0 = 5$

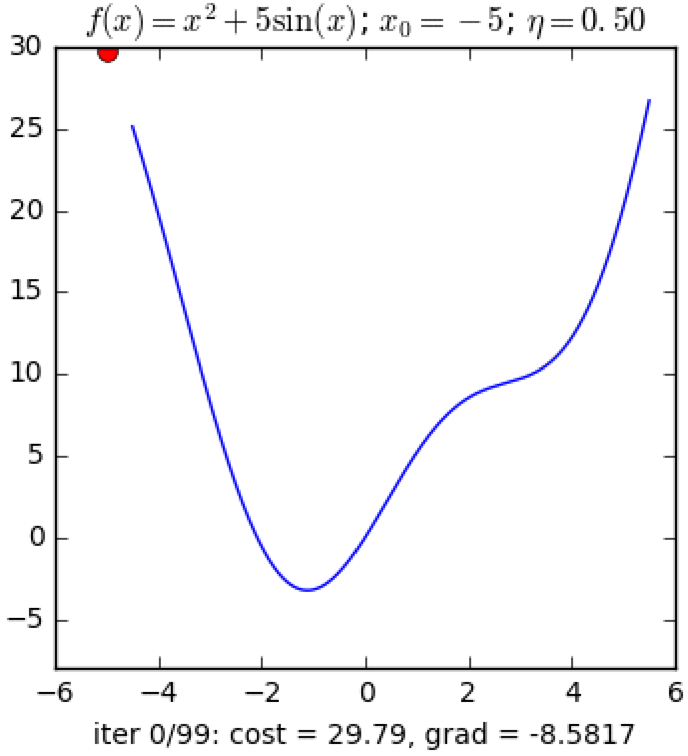


$x_0 = -5$

V. Sự hội tụ
2. Learning rate khác nhau



η = 0.01



η =0.5

V. Sự hội tụ

3. Lựa chọn eta "động"

Nếu η nhỏ, x_1 không vượt qua x^*

Lấy η= η*3

Nếu η lớn và x_1 vượt x^*

Lấy η= η/2

V. Sự hội tụ

4. Các điều kiện dừng khác

Giới hạn số vòng lặp: đảm bảo rằng chương trình chạy không quá lâu và không làm đơ máy tính

Kiểm tra giá trị đạo hàm: nếu gradient tại x nhỏ hơn số ε cho trước thì dừng lại

VI. Sơ đồ thuật toán

B1: Nhâp vào khoảng [a,b], f(x), ε nhỏ >0, step.

B2: Tính đạo hàm f’(x):

B2.1 dy= f(x+ ε)-f(x- ε)

B2.2 dx=2* ε

B2.3 f’(x)= dy/dx

B3: So sánh f’(x) và 0

Nếu f’(x) = 0 => trả về x

Nếu f’(x) > 0, chọn sign= 1

Nếu f’(x) < 0, chọn sign= -1

B4.1: TH xét η tĩnh. Chọn η nhỏ bất kì >0. . Chuyển đến B5

B4.2: TH xét η động

B4.2.1: Nhập xo, η = const

B4.2.2: Xét dấu $f_p(x_{new})*f_p(x_o)$

Th1: $f_p(x_{new})*f_p(x_o) <0$, chọn $\eta = \eta/2$

Th2: $f_p(x_{new})*f_p(x_o) >0$, nếu $\eta * f_p(x_{new}) < 1$, $\eta = \eta *1.5$

nếu $\eta * f_p(x_{new}) > 1$, trả về η

B5: Tìm xnew:

x=xo+sign* η*f’(xo);

xo=x;

B6: So sánh |f’(x)| với ε

Nếu |f’(x)| <ε, trả về x

Nếu |f’(x)| >ε, so sánh x với b.

Th1: x>b,thuật toán kết thúc, trả về x

Th2: $x<b$, quay lại B5

B7: So sánh f(x*), f(a), f(b) để tìm min, max

B7.1: Nếu f(a)>f(b), ta chọn tmax=a, tmin= b (ngược lại)

B7.2: đặt xo=minmax

Th1: sign <0. So sánh f(minmax) và f(tmin)

Nếu f(minmax)<f(tmin), gán tmin= minmax

Nếu f(minmax)>f(tmin), So sánh x0 với b.

xo>b, kết thúc

$xo<b$, quay lại B5

Th2: sign >0.

Nếu f(minmax)>f(tmax), gán tmax= minmax

Nếu f(minmax)<f(tmax), So sánh xo với b.

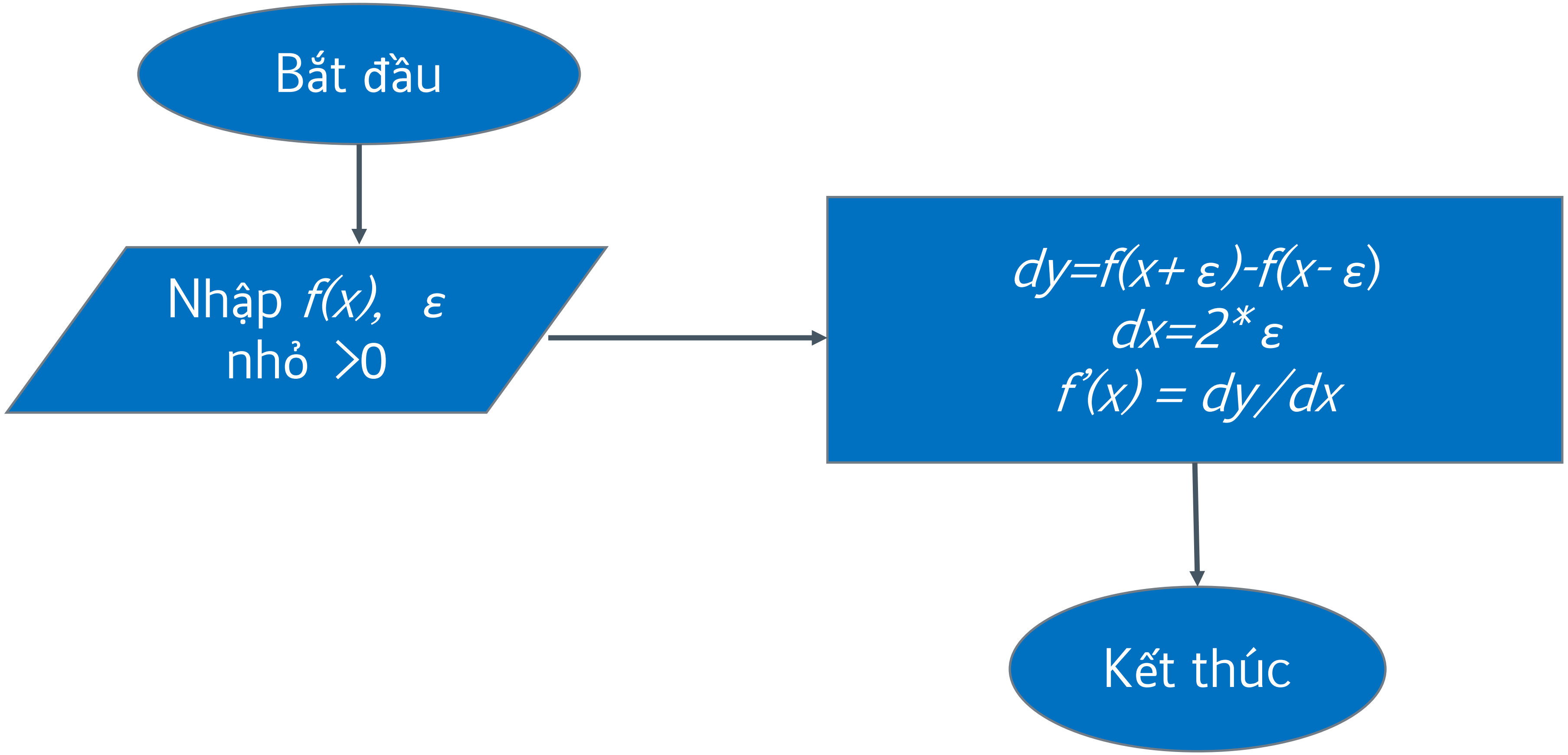
xo>b, kết thúc

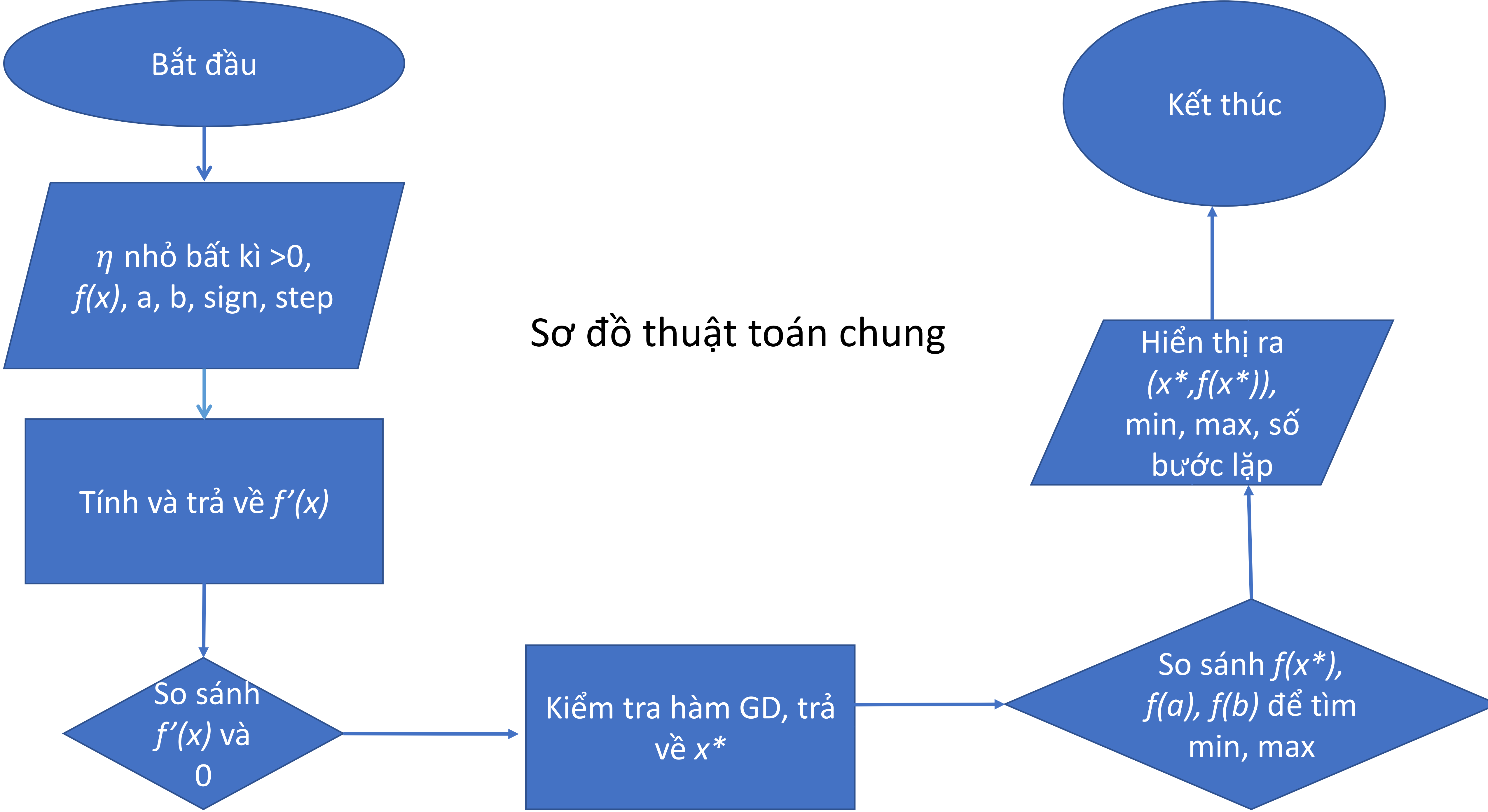
xo<b, quay lại B5

B8: Hiển thị ra (x*, f(x*)), min, max, số bước lặp.

VI. Sơ đồ thuật toán

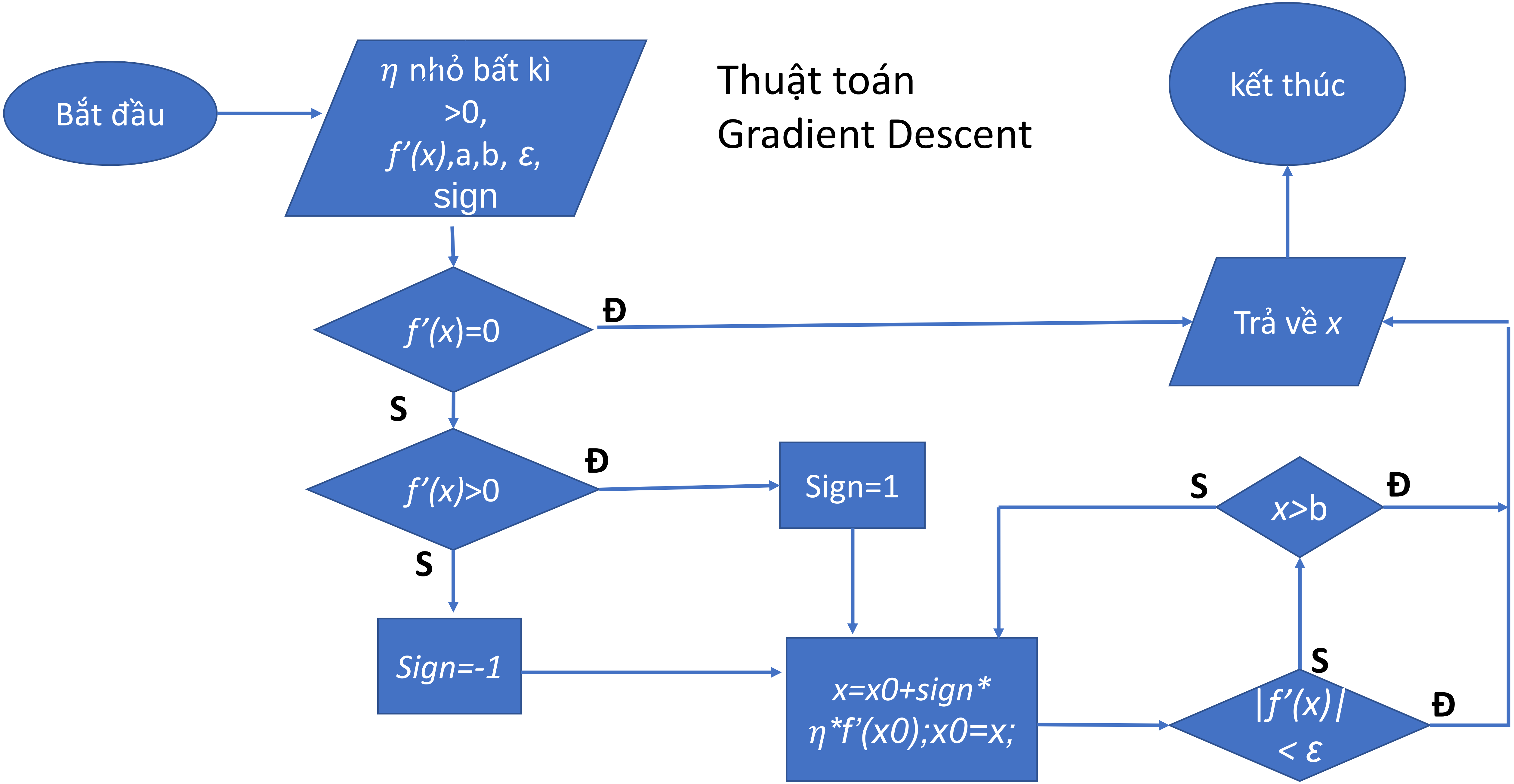
Thuật toán tính đạo hàm



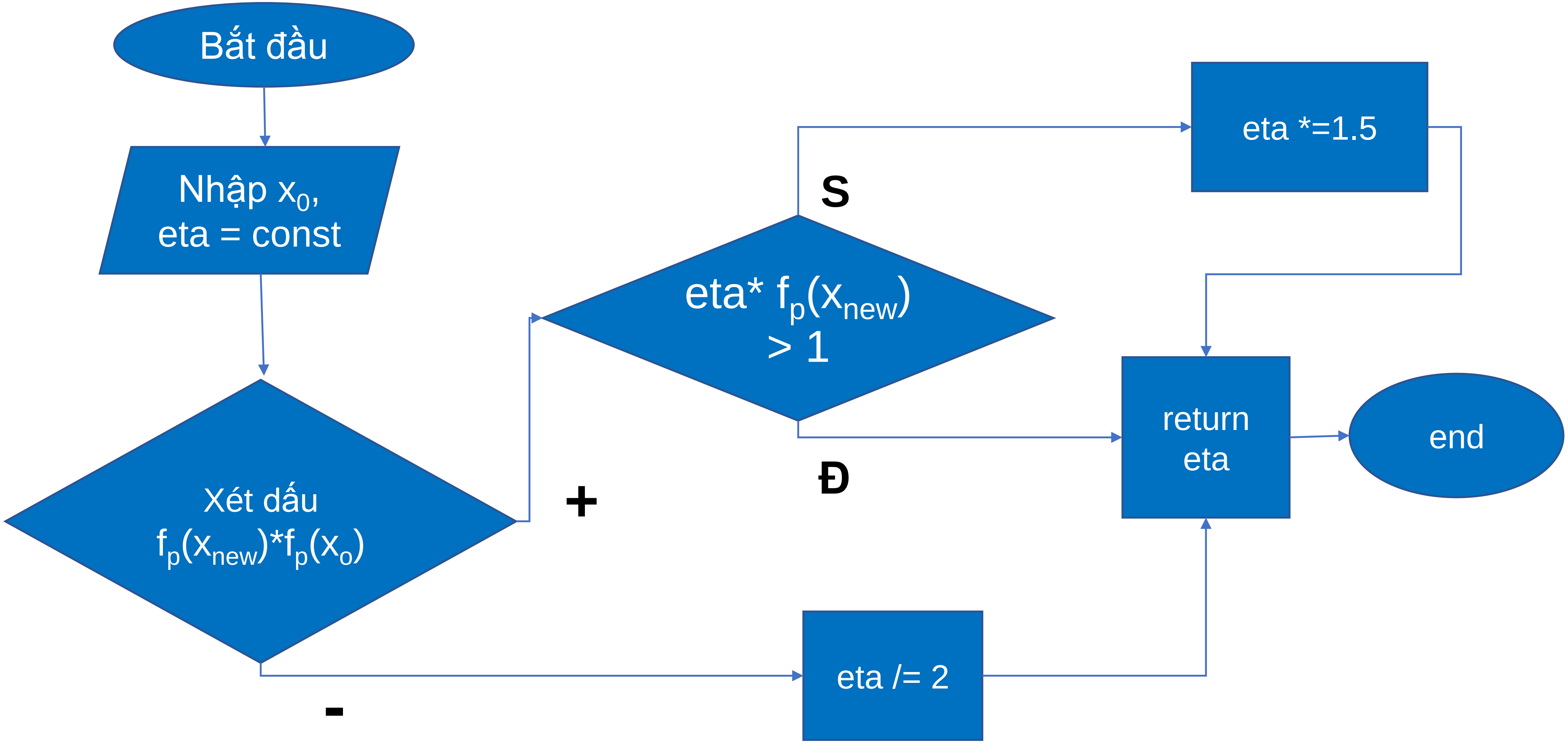


Bắt đầu
η nhỏ bất kì >0,
f(x), a, b, sign, step
Tính và trả về *f'(x)*
So sánh
f'(x) và
0
Kiểm tra hàm GD, trả
về *x**
So sánh *f(x*)*,
f(a), *f(b)* để tìm
min, max
Hiển thị ra
(x,f(x*))*,
min, max, số
bước lặp
Kết thúc
Sơ đồ thuật toán chung

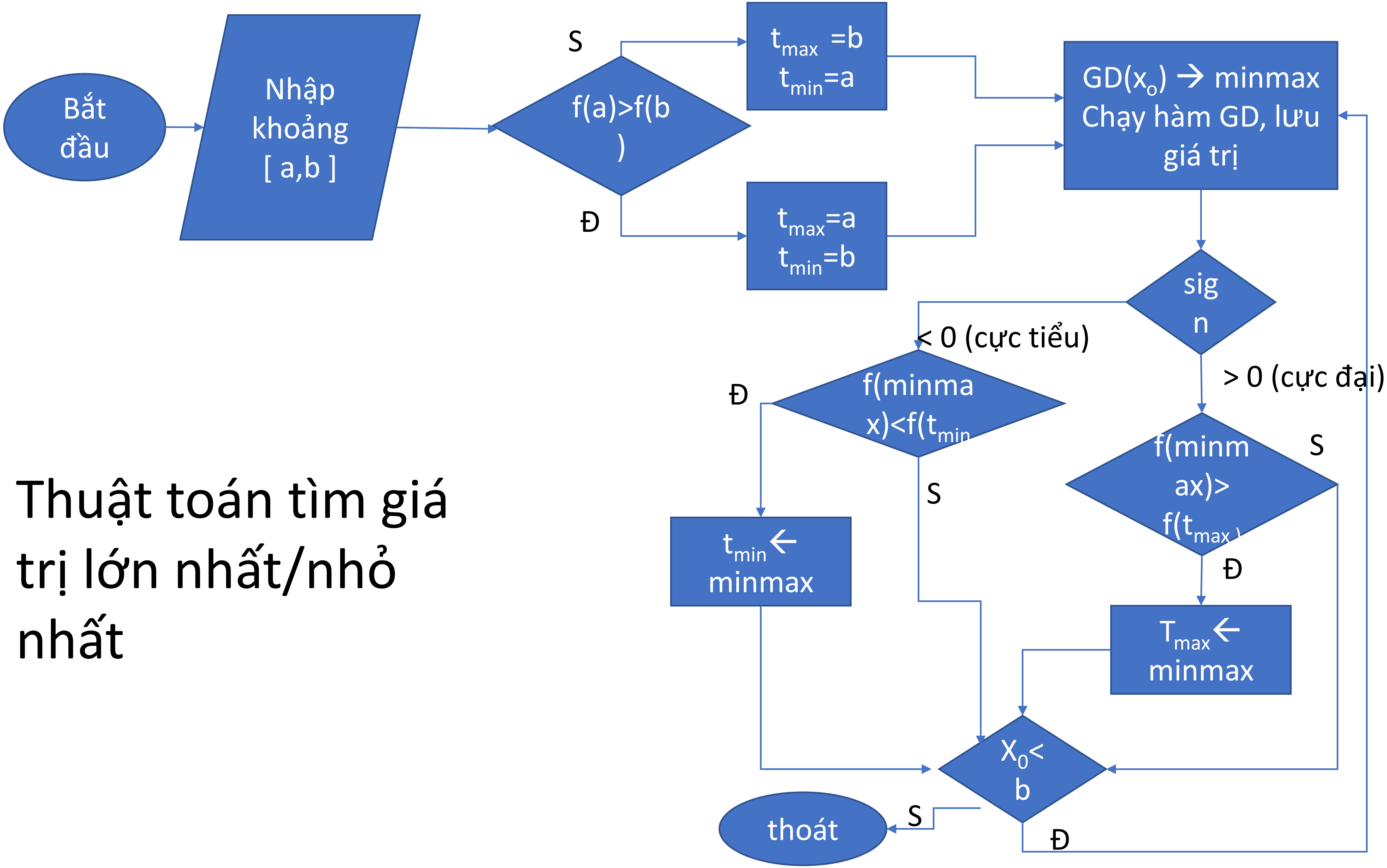
Thuật toán
Gradient Descent



Thuật toán eta động



Thuật toán tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất



VII. Ví dụ

VII. Đánh giá phương pháp

1. Ưu điểm

Thuật toán hội tụ nhanh với nhiều dạng hàm

Gradient Descent có lợi thế khi việc khảo sát hàm số để tìm cực trị là quá khó hoặc quá phức tạp

VII. Đánh giá phương pháp

2. Nhược điểm

$f(x)$ và $f'(x)$ phải cùng liên tục trên [a;b]

Gặp khó khăn với hàm có khoảng cách cực trị quá bé hoặc quá dốc

IX. Phương pháp khác

Phương pháp duyệt thông thường:

1. Phương pháp:

- Chia [a;b] thành các đoạn nhỏ. Tính giá trị tại các điểm. So sánh giá trị.
- Chọn ra *f(x)* nhỏ nhất và lớn nhất. Sai số $|x_n - x^*| <$ step.
- So sánh các *f(x)* và xuất ra min, max.

IX. Phương pháp khác

2. <u>Đánh giá:</u>

- không bị ràng buộc bởi các yếu tố khác như hệ số η

=> chương trình rất tốt, và sai số có thể điều chỉnh

- Thời gian chạy lâu hay các bước lặp khá lớn

Câu Hỏi

Cảm ơn cô và các bạn đã theo dõi