TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

NỘI SUY BẰNG HÀM GHÉP TRƠN

Môn học : Giải tích số

Giáo viên hướng dẫn : TS. Hà Thị Ngọc Yến

Nhóm sinh viên thực hiện:

Họ và tên :	MSSV:
Nguyễn Đình Thành	20194377
Hoàng Trung Chiến	20194922

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích số là 1 lĩnh vực của Toán học và Tin học có mục đích chính để tạo ra, phân tích và thực hiện các thuật toán giải xấp xỉ các bài toán liên tục. Những bài toán này thường xuất hiện từ những ứng dụng thực tế của đại số, hình học, và giải tích trong các ngành khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, y học, kĩ thuật và kinh doanh. Bắt đầu từ những năm 1940, sự phát triển cả về sức mạnh lẫn tính thông dụng của máy tính điện tử đã tạo điều kiện cho các ứng dụng ngày càng nhiều của các mô hình Toán học thực tế trong các ngành khác; trong đó, những phương pháp số tối ưu là cần thiết để giải những bài toán kể trên. Lĩnh vực nghiên cứu của môn Giải tích Số bao gồm nghiên cứu cơ sở và lý thuyết Toán học cho đến những công việc thực tế như thiết kế phần mềm và phần cứng máy tính để thực hiện những thuật toán đã được xây dựng. Lý thuyết xấp xỉ là một trong những bài toán quan trọng của Giải Tích Số. Hầu hết các số liệu ngoài đời thực ta đều có được quan việc đo đạc và việc tìm ra được quy luật của số liệu đó có thể giúp ta có khả năng dự đoán số liệu đó trong điều kiện nhất định, chưa từng xảy ra, đó chính là mực đích của bài toán xấp xỉ. Nội suy là một trong những vấn đề chính của lý thuyết xấp xỉ.

MỤC LỤC

I.Đặt vấn đề và ý tưởng phương pháp

1. Đặt vấn đề

Các phương pháp tính nội suy đa thức đã biết ở các chủ đề trước, công thức tính khá thuận lợi, nhưng khi số lượng mốc nội suy tăng thêm thì bậc của đa thức nội suy cũng tăng lên. Khi nội suy với bộ dữ liệu lớn thì đa thức thu được sẽ có bậc rất cao, khiến việc tính toán và sử dụng đa thức thu được trở nên phức tạp hơn. Và phương pháp nội suy bằng hàm ghép trơn đã khắc phục được nhược điểm đó.

2. Ý tưởng phương pháp

Từ n+1 mốc nội suy, ta xây dựng các đa thức bậc thấp hơn n trên từng khúc, nhưng khi nối chúng lại vẫn đạt độ trơn cao (ghép trơn từng khúc). Các đa thức này có bậc như nhau và bậc chúng không đổi khi ta tăng số mốc nội suy

II. Xây dựng công thức

Trước hết ta cần biết định nghĩa hàm ghép trơn.

Xét 1 phân hoạch chia đoạn [a,b] như sau:

Δ=[a,b]=[a = $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ = b]

Hàm ghép trơn S(x) bậc $m \le n$ trên đoạn Δ là hàm số có tính chất sau:

- $S(x) \in C^{m-1}_{[a,b]}$ ($m \ge 1$) là lớp hàm liên tục và có đạo hàm liên tục đến cấp m-1 trên đoạn [a,b]
- Trên mỗi đoạn nhỏ $\Delta j=[x_{j-1},x_j]$ $j=\overline{1n}$ thì S(x) là đa thức bậc m

⇨ Cần (m+1)n phương trình. Từ n+1 điều kiện giá trị hàm f(x) tại các điểm mốc, m(n-1) điều kiện liên tục tại các điểm nối giữa các đoạn Δj

⇨ Còn thiếu (m+1)n - (n+1) - m(n-1) = m-1 điều kiện nữa để giải được, và m-1 điều kiện còn thiếu đó sẽ được bổ sung tại các nút biên $x=x_0=a$ và $x=x_n=b$.

Đặt $h_j = x_j - x_{j-1}$ $j=1,n$

1.Hàm SPLINE bậc 1:

S(x) là đa thức bậc nhất => $S(x) = \alpha_j(x_j-x) + \beta_j(x-x_{j-1})$ $j=1,n$

Khi $x= x_j$, có $S(x_j) = y_j$ => $y_j = \beta_j h_j$ => $\beta_j = \frac{y_j}{h_j}$

Khi x= x_{j-1} , có $S(x_{j-1}) = y_{j-1}$ => $y_{j-1} = \alpha_j h_j$ => $\alpha_j = \frac{y_{j-1}}{h_j}$

⇨ $S(x) = \frac{y_{j-1}}{h_j}(x_j-x) + \frac{y_j}{h_j}(x-x_{j-1})$ j=1,n

----

2. Hàm SPLINE bậc 2

S(x) là đa thức bậc hai

=> S'(x) là đa thức bậc nhất => $S'(x) = \alpha_j(x_j-x) + \beta_j(x-x_{j-1})$ j=1,n

Đặt $S'(x_j)= m_j$

⇨ Tương tự như với m=1 ,ta chỉ thay $y_j = m_j$.

Ta có $S'(x) = \frac{m_{j-1}}{h_j}(x_j-x) + \frac{m_j}{h_j}(x-x_{j-1})$ j=1,n

Tích phân S'(x) 1 lần

⇨ $S(x) = = -\frac{m_{j-1}}{2h_j}(x_j-x)^2 + \frac{m_j}{2h_j}(x-x_{j-1})^2 + A_j$ j=1,n

Khi x= x_j , có $S(x_j) = y_j$ => $y_j = \frac{m_j}{2}h_j + A_j$ => $A_j = y_j - \frac{m_j}{2}h_j$

Khi x= x_{j-1} , có $S(x_{j-1}) = y_{j-1}$ => $y_{j-1} = -\frac{m_{j-1}}{2}h_j + A_j$

=> $y_j - y_{j-1} = \frac{m_j+m_{j-1}}{2}h_j$ j=1,n

=>$m_j + m_{j-1} = \frac{2}{h_j}(y_j - y_{j-1})$ j=1,n

Thiếu m-1 = 1 phương trình nữa để giải được. Ta lấy thêm 1 điều kiện tại biên x=a hoặc x=b.

Nếu f(x) có đạo hàm cấp 1 tại a hoặc b với $f'(a)=m_0$ hoặc $f'(b)=m_n$.

+ $f'(a)=m_0$ (tương tự với $f'(b)=m_n$)

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} m_0=f'(a) \\ m_j+m_{j-1}=\frac{2}{h_j}\left(y_j-y_{j-1}\right) \end{cases}$ j=1,n

Hệ này giải bằng cách thế dần như sau:

$m_0=f'(a)$

$m_1=-m_0+\frac{2}{h_1}(y_1-y_0)$

$m_2=-m_1+\frac{2}{h_2}(y_2-y_1)$

…………………………

$m_n=-m_{n-1}+\frac{2}{h_n}(y_n-y_{n-1})$

----

3. Hàm SPLINE bậc 3

S(x) là đa thức bậc 3 nên S''(x) là đa thức bậc nhất.

Đặt $S''(x_j) = m_j$

Tương tự như m=2, ta có $S''(x) = \frac{m_{j-1}}{h_j}(x_j-x) + \frac{m_j}{h_j}(x-x_{j-1})$ j=1,n

Tích phân đẳng thức trên 2 lần

Ta được

$$S(x) = \frac{m_{j-1}}{6h_j}(x_j-x)^3 + \frac{m_j}{6h_j}(x-x_{j-1})^3 + A_j(x_j-x) + B_j(x-x_{j-1}) \qquad j=1,n$$

Khi $x= x_j$, có $S(x_j) = y_j$

$\Rightarrow y_j = \frac{m_j}{6}h_j^2 + B_j h_j \quad \Rightarrow B_j = \frac{1}{h_j}(y_j - \frac{m_j}{6}h_j^2)$

Khi $x= x_{j-1}$, có $S(x_{j-1}) = y_{j-1}$

$\Rightarrow y_{j-1} = \frac{m_{j-1}}{6}h_j^2 + A_j h_j \Rightarrow A_j = \frac{1}{h_j}(y_{j-1} - \frac{m_{j-1}}{6}h_j^2)$

Thay vào S(x) ta được:

$$S(x) = \frac{m_{j-1}}{6h_j}(x_j-x)^3 + \frac{m_j}{6h_j}(x-x_{j-1})^3 + \frac{1}{h_j}(y_{j-1} - \frac{m_{j-1}}{6}h_j^2)(x_j-x) + \frac{1}{h_j}(y_j - \frac{m_j}{6}h_j^2)(x-x_{j-1}) \qquad j=1,n \qquad (*)$$

Đạo hàm S(x) 1 lần :

$$S'(x) = -\frac{m_{j-1}}{2h_j}(x_j-x)^2 + \frac{m_j}{2h_j}(x-x_{j-1})^2 - \frac{1}{h_j}(y_{j-1} - \frac{m_{j-1}}{6}h_j^2) + \frac{1}{h_j}(y_j - \frac{m_j}{6}h_j^2)$$

j=1,n

Áp dụng điều kiện liên tục tại các điểm nối x_j (j=1,n-1) $S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$ với $S'(x_j-0)$ lấy giá trị của hàm S'(x) trên đoạn $[x_{j-1},x_j]$ còn S'(x+0) lấy giá trị của hàm S'(x) trên đoạn $[x_j,x_{j+1}]$

Đặt $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$

$$S'(x_j-0) = \frac{m_j}{3} h_j + \frac{m_{j-1}}{6} h_j + \frac{1}{h_j}(y_j - y_{j-1})$$

$$S'(x_j+0) = -\frac{m_j}{3} h_{j+1} - \frac{m_{j+1}}{6} h_{j+1} + \frac{1}{h_{j+1}}(y_{j+1} - y_j)$$

$$S'(x_j-0) = S'(x_j+0)$$

$$\Rightarrow \frac{m_{j-1}}{6} h_j + \frac{m_j}{3}(h_j + h_{j+1}) + \frac{m_{j+1}}{6} h_{j+1} = \frac{1}{h_{j+1}}(y_{j+1} - y_j) - \frac{1}{h_j}(y_j - y_{j-1})$$

j=1,n-1

Nhân 2 vế với $\frac{6}{h_j+h_{j+1}}$, đặt $\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}$ $\mu_j = 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}$

Ta được

$$\mu_j m_{j-1} + 2m_j + \lambda_j m_{j+1} = \frac{6}{h_j+h_{j+1}}\left(\frac{1}{h_{j+1}}(y_{j+1} - y_j) - \frac{1}{h_j}(y_j - y_{j-1})\right) = d_j \quad j=1,n$$

Ta còn thiếu m-1=2 điều kiện nữa để giải được, điều kiện đó được lấy từ 2 đầu mút.

+ Nếu hàm f(x) có đạo hàm cấp 2 tại a và b với $f''(a) = m_0 = d_0$ và $f''(b) = m_n = d_n$

Ta có hệ

$$\begin{cases} m_0 = d_0 \\ \mu_j m_{j-1} + 2m_j + \lambda_j m_{j+1} = d_j \qquad j=1,n-1 \\ m_n = d_n \end{cases} \qquad (1)$$

+ Nếu hàm f(x) có đạo hàm cấp 1 tại a và b với f'(a) và f'(b)

Có $S'(x_0+0) = -\frac{m_0}{3}h_1 - \frac{m_1}{6}h_1 + \frac{1}{h_1}(y_1 - y_0) = f'(a)$

⇨ $2m_0 + m_1 = \frac{6}{h_1}(\frac{1}{h_1}(y_1 - y_0) - f'(a)) = d_0$

Tương tự $S'(x_n-0) = \frac{m_n}{3}h_n + \frac{m_{n-1}}{6}h_n + \frac{1}{h_n}(y_n - y_{n-1}) = f'(b)$

⇨ $m_{n-1} + 2m_n = \frac{6}{h_n}(f'(b) - \frac{1}{h_n}(y_{n+1} - y_n)) = d_n$

Vậy trường hợp này ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = d_0 \\ \mu_j m_{j-1} + 2m_j + \lambda_j m_{j+1} = d_j \qquad j=1,n-1 \\ m_{n-1} + 2m_n = d_n \end{cases} \qquad (2)$$

Cả 2 trường hợp ta có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} 2m_0 + \lambda_0 m_1 = d_0 \\ \mu_j m_{j-1} + 2m_j + \lambda_j m_{j+1} = d_j \qquad j=1,n-1 \\ \mu_0 m_{n-1} + 2m_n = d_n \end{cases} \qquad (3)$$

Nội suy spline mốc cách đều : h_j = const = h   j=1,n-1

⇨ $\mu_j = \lambda_j = \frac{1}{2}$ j =1,n-1

⇨ Hệ (**) được viết lại thành:

$$\begin{cases} 2m_0+\lambda_0 m_1=d_0 \\ m_{j-1} + 2m_j + m_{j+1}= 2d_j \qquad j=1,n-1 \\ \mu_0 m_{n-1}+ 2m_n=d_n \end{cases} \qquad (4)$$

Hệ (2), (3), (4) sử dụng kiến thức từ các chương trước để giải. Ở trong bài toán này, bọn em sử dụng phương pháp truy đuổi giải hệ có dạng ba đường chéo được trình bày ở mục 2.4, trang 58 SGK

Ví dụ minh hoạ:

x	1	2	3	4
y	3.2	4,6	7.4	6.3

Do không có hàm f(x) cho trước, nên ta buộc điều kiện đạo hàm cấp 2 tại 2 đầu mút x_0 = 1 và x_3 = 4 là S''(1) = S''(4) = 0

Dễ thấy các mốc cách đều nhau (h=1), nên theo (4), ta có hệ:

$$\begin{cases} m_0=d_0=0 \\ m_{j-1} + 2m_j + m_{j+1}= 2d_j \qquad j=1,2 \\ m_3=d_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_0=d_0=0 \\ m_0+2m_1+m_2=2d_1 \\ m_1+2m_2+m_3=2d_2 \\ m_3=d_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_0=d_0=0 \\ 2m_1+m_2=2d_1 \\ m_1+2m_2=2d_2 \\ m_3=d_3=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow m_1 = \frac{4d_1-2d_2}{3}$, $m_2 = \frac{4d_2-2d_1}{3}$

$d_1 = \frac{6}{2h}\left(\frac{1}{h}(y_2 - y_1) - \frac{1}{h}(y_1 - y_0)\right) = 3((7.4 - 4.6) - (4.6 - 3.2)) = 4.2$

$d_2 = \frac{6}{2h}\left(\frac{1}{h}(y_3 - y_2) - \frac{1}{h}(y_2 - y_1)\right) = 3((6.3 - 7.4) - (7.4 - 4.6)) = -11.7$

$\Rightarrow m_1 = \frac{4d_1-2d_2}{3} = \frac{4}{3}4.2 - \frac{2}{3}(-11.7) = 13.4$

$m_2 = \frac{4d_2-2d_1}{3} = \frac{4}{3}(-11.7) - \frac{2}{3}4.2 = -18.4$

Thay $m_0 = 0, m_1 = 13.4, m_2 = -18.4, m_3 = 0$ vào (*) ta được :

$S_1(x) = \frac{67}{30}(x-1)^3 + 3.2(2-x) + \frac{71}{30}(x-1)$ với $x \in [1,2]$

$S_2(x) = \frac{67}{30}(3-x)^3 - \frac{46}{15}(x-2)^3 + \frac{71}{30}(3-x) + \frac{157}{15}(x-2)$ với $x \in [2,3]$

$S_3(x) = -\frac{46}{15}(4-x)^3 + \frac{157}{15}(4-x) + 6.3(x-3)$ với $x \in [3,4]$

4. Lưu ý khi chọn các điều kiện biên:

Trong phần lý thuyết ở trên, chúng ta chọn được điều kiện tại biên như vậy khi đã có hàm y=f(x). Nhưng trong thực tế, bài toán đặt ra thường chỉ cho dướng dạng bộ điểm (x,y) mà không cho biết hàm số. Trong trường hợp này, ta chọn đạo hàm cấp 1 tại 2 biên như sau:

$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$f'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

III.Sai số và ứng dụng

1. Sai số:

   Sai số phụ thuộc rất lớn vào cách chọn mốc nội suy. Khi ta chọn mốc nội suy phù hợp và khoảng cách giữa các mốc nội suy đủ nhỏ thì sai số sẽ bé. Ngược lại thì sai số sẽ lớn

2. Ứng dụng:

   Do đa thức thu được có bậc không quá cao (thường là bậc 3), nên việc sử dụng các đa thức này vào tính toán và ứng dụng thực tế khá dễ dàng và phổ biến. Sau đây là một vài ứng dụng của hàm SPLINE:

   a. Trong tính toán:

- Sử dụng hàm SPLINE để tính gần đúng giá trị hàm số
- Sử dụng hàm SPLINE để tính gần đúng đạo hàm
- Sử dụng hàm SPLINE để tính gần đúng tích phân

   b. Trong khoa học, kỹ thuật

- Sử dụng hàm SPLINE để vẽ bàn tay
- Sử dụng hàm SPLINE để nhận dạng chữ viết tay
- Sử dụng hàm SPLINE để nhận dạng, xử lý ảnh

3. Ưu nhược điểm:

a) Ưu điểm:

-Sử dụng trong trường hợp bộ dữ liệu lớn, nhiều mốc nội suy. Khi tăng thêm các mốc ta vẫn thu được đa các thức với bậc cố định

b) Nhược điểm:

-Nhược điểm lớn nhất của phương pháp nằm ở việc chọn mốc nội suy, nếu ta chọn các mốc nội suy hợp lý thì đa thức thu được sẽ chính xác. Ngược lại thì đa thức thu được sẽ có sai số khá lớn

IV.Thuật toán, chương trình và ví dụ

1. Thuật toán

input: Bộ mốc nội suy x_i và y_i

output: -Các đa thức spline bậc 1, bậc 2 và bậc 3

-Đồ thị các hàm spline bậc 1, bậc 2, bậc 3

Bước 1: -Nhập bộ giá trị x_i , y_i vào file dữ liệu đầu vào.

-Kiểm tra điều kiện của các bộ x_i và y_i

Bước 2: - Xây dựng hàm spline bậc 3:

+) Xây dựng gói tính m :

.) Khởi tạo giá trị biên là đạo hàm cấp 1 tại 2 biên là dh0 và dhn

.) Tính các giá trị m[i] với i=1,n-1

+) Với mỗi giá trị x thuộc khoảng $[x_{j-1},x_j]$ đa thức bậc 3 được tính theo công thức sau:

$$S(x) = \frac{m_{j-1}}{6h_j}(x_j-x)^3 + \frac{m_j}{6h_j}(x-x_{j-1})^3 + \frac{1}{h_j}\left(y_{j-1} - \frac{m_{j-1}}{6}h_j^2\right)(x_j-x) + \frac{1}{h_j}\left(y_j - \frac{m_j}{6}h_j^2\right)(x-x_{j-1})$$

Bước 3: - Xây dựng hàm spline bậc 1:

+) Với mỗi giá trị x thuộc khoảng $[x_{j-1},x_j]$ đa thức bậc 1 được tính theo công thức sau:

$$S(x) = \frac{y_{j-1}}{h_j}(x_j-x) + \frac{y_j}{h_j}(x-x_{j-1})$$

Bước 4: - Xây dựng hàm spline bậc 2:

+) Khởi tạo giá trị đầu vào là đạo hàm cấp 1 tại đầu biên m_0

+) Với mỗi giá trị x thuộc khoảng $[x_{j-1},x_j]$ đa thức bậc 2 được tính theo công thức sau:

$$S(x) = = -\frac{m_{j-1}}{2h_j}(x_j-x)^2 + \frac{m_j}{2h_j}(x-x_{j-1})^2 + y_j - \frac{m_j}{2}h_j$$

Bước 5: -Xuất ra các đa thức spline bậc 3, bậc 1, bậc 2

-Xuất ra đồ thị các đa thức

2. Chương trình

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def data():
    global x,y,n
    x = []
    y = []
    with open('input.txt','r+') as f:
        for line in f.readlines():
            xt = float(line.split(' ')[0])
            yt = float(line.split(' ')[1])
            check = True
            for x_check in x:
```

```
            if x_check == xt:
                check = False
                break
        if check:
            x.append(xt)
            y.append(yt)
    x = np.asarray(x)
    y = np.asarray(y)
    n = len(x)-1
    return x,y,n
x,y,n=data()
def spline3(k,x0):
    x, y, n = data()
    h = np.diff(x)
    # Duoi day la ham tính m
    def tinhM(x,y,n):
        m=np.empty(n+1)
        d=np.empty(n+1)
        anpha=np.empty(n+1)
        beta=np.empty(n+1)
        muy=np.empty(n+1)
        lamda=np.empty(n+1)
        h=np.diff(x)
```

```
        dh0=(y[1]-y[0])/(x[1]-x[0])
        dhn=(y[n]-y[n-1])/(x[n]-x[n-1])
        d[0]=6/h[0]*((y[1]-y[0])/h[0]-dh0)
        d[n]=6/h[n-1]*(dhn-(y[n]-y[n-1])/h[n-1])
        anpha[1]=1/(-2)
        beta[1]=d[0]/2
        for i in range(1,n):
            d[i]=6*((y[i+1]-y[i])/h[i]-(y[i]-y[i-1])/h[i-1])/(h[i]+h[i-1])
        for i in range(1,n):
            muy[i]=h[i-1]/(h[i-1]+h[i])
            lamda[i]=h[i]/(h[i-1]+h[i])
        for i in range(1,n):
            anpha[i+1]=lamda[i]/(-2-anpha[i]*muy[i])
            beta[i+1]=(muy[i]*beta[i]-d[i])/(-2-anpha[i]*muy[i])
        m[n]=(1*beta[n]-d[n])/(-2-1*anpha[n])
        for i in range(n-1,-1,-1):
            m[i]=anpha[i+1]*m[i+1]+beta[i+1]
        return m
    m=tinhM(x,y,n)
    if k==1:
        for j in range(1,n+1):
            print('S3' +'['+ str(x[j-1])+','+str(x[j])+']'+'= ' +
str(round(m[j - 1] / (6 * h[j - 1]),3)) + '(' + str(x[j]) + '- x)^3' +
```

```
            '+ ' + str(round(m[j] / (h[j - 1] * 6),3)) + '(x-' + str(x[j -
1]) + ')^3' +
            '+ ' + str(round((1 / h[j - 1]) * (y[j - 1] - m[j - 1] / 6 *
h[j - 1] ** 2),3)) + '(' + str(x[j]) + '-x)' +
            '+ ' + str(round((y[j] - (m[j] / 6) * h[j - 1] ** 2) / h[j -
1],3)) + '(x-' + str(x[j - 1]) + ')')
    for i in range(1,n+1):
        if x[i-1]<=x0 and x0<=x[i]:
            s3=m[i-1]/(6*h[i-1])*(x[i]-x0)**3+m[i]/(h[i-1]*6)*(x0-x[i-
1])**3+(1/h[i-1])*(y[i-1]-m[i-1]/6*h[i-1]**2)*(x[i]-x0) +(y[i]-
(m[i]/6)*h[i-1]**2)*(x0-x[i-1])/h[i-1]
    return s3
def spline1(k,x0):
    x, y, n = data()
    h = np.diff(x)
    if k==1:
        for i in range(1,n+1):
            print('S1'+'['+str(x[i-1])+', '+str(x[i])+']='+str(round(y[i-
1]/h[i-1],3))+'('+str(x[i])+'-x)'+'+'+str(round(y[i]/h[i-1],3))+'(x-
'+str(x[i-1])+')')
    for i in range(1,n+1):
        if x[i-1]<=x0 and x0<=x[i]:
            s1=y[i-1]/h[i-1]*(x[i]-x0)+y[i]/h[i-1]*(x0-x[i-1])
```

```
    return s1
def spline2(k,x0):
    x, y, n = data()
    h = np.diff(x)
    m=np.empty(n+1)
    m[0]=(y[1]-y[0])/h[0]
    for i in range(1,n+1):
        m[i]=2/h[i-1]*(y[i]-y[i-1])-m[i-1]
    if k==1:
        for i in range(1,n+1):
            print('S2'+'['+str(x[i-1])+', '+str(x[i])+']='+str(round(-m[i-
1]/2/h[i-1],3))+'('+str(x[i])+'-x)^2+'+str(round(m[i]/2/h[i-
1],3))+'(x-'+str(x[i-1])+')^2'+'+'+str(round(y[i]-m[i]/2*h[i-1],3)))
    for i in range(1,n+1):
        if x[i-1]<=x0 and x0<=x[i]:
            s2=-m[i-1]/2/h[i-1]*(x[i]-x0)**2+m[i]/2/h[i-1]*(x0-x[i-
1])**2+y[i]-m[i]/2*h[i-1]
    return s2
print("Cac da thuc spline bac 3")
spline3(1,x[0])
print("=========================================
========================================="
)
```

```
print("Cac da thuc spline bac 1:")
spline1(1,x[0])
print("==========================================
==============================================="
)
print("Cac da thuc spline bac 2")
spline2(1,x[0])
x0=np.linspace(x[0], x[n], 1000)
y3=[]
y1=[]
y2=[]
for i in x0:
  y3.append(spline3(0,i))
  y1.append(spline1(0,i))
  y2.append(spline2(0,i))
plt.plot(x0,y3)
plt.plot(x0,y1)
plt.plot(x0,y2)
plt.scatter(x,y)
plt.show()
```

3. Ví dụ chương trình minh hoạ:

Sau đây là chương trình chạy với bộ điểm dựa trên hàm y= sin(x) và khoảng nội suy là [0,2pi]

xi	yi
0	0
0.52	0.5
1.05	0.87
1.57	1
2.09	0.87
2.62	0.5
3.14	0
3.66	-0.5
4.17	-0.87
4.71	-1
5.23	-0.87
5.76	-0.5
6.28	0

Sau đây là kết quả chạy chương trình:

Cac da thuc spline bac 3

S3[0.0,0.52]= 0.097(0.52- x)^3+ -0.194(x-0.0)^3+ -0.026(0.52-x)+ 1.014(x-0.0)

S3[0.52,1.05]= -0.19(1.05- x)^3+ -0.277(x-0.52)^3+ 0.997(1.05-x)+ 1.719(x-0.52)

S3[1.05,1.57]= -0.282(1.57- x)^3+ -0.32(x-1.05)^3+ 1.749(1.57-x)+ 2.01(x-1.05)

S3[1.57,2.09]= -0.32(2.09- x)^3+ -0.288(x-1.57)^3+ 2.01(2.09-x)+ 1.751(x-1.57)

S3[2.09,2.62]= -0.283(2.62- x)^3+ -0.168(x-2.09)^3+ 1.721(2.62-x)+ 0.99(x-2.09)

S3[2.62,3.14]= -0.171(3.14- x)^3+ 0.009(x-2.62)^3+ 1.008(3.14-x)+ -0.002(x-2.62)

S3[3.14,3.66]= 0.009(3.66- x)^3+ 0.135(x-3.14)^3+ -0.002(3.66-x)+ -0.998(x-3.14)

S3[3.66,4.17]= 0.137(4.17- x)^3+ 0.344(x-3.66)^3+ -1.016(4.17-x)+ -1.795(x-3.66)

S3[4.17,4.71]= 0.325(4.71- x)^3+ 0.277(x-4.17)^3+ -1.706(4.71-x)+ -1.933(x-4.17)

S3[4.71,5.23]= 0.288(5.23- x)^3+ 0.291(x-4.71)^3+ -2.001(5.23-x)+ -1.752(x-4.71)

S3[5.23,5.76]= 0.285(5.76- x)^3+ 0.188(x-5.23)^3+ -1.722(5.76-x)+ -0.996(x-5.23)

S3[5.76,6.28]= 0.192(6.28- x)^3+ -0.096(x-5.76)^3+ -1.013(6.28-x)+ 0.026(x-5.76)

===

Cac da thuc spline bac 1:

S1[0.0, 0.52]=0.0(0.52-x)+0.962(x-0.0)

S1[0.52, 1.05]=0.943(1.05-x)+1.642(x-0.52)

S1[1.05, 1.57]=1.673(1.57-x)+1.923(x-1.05)

S1[1.57, 2.09]=1.923(2.09-x)+1.673(x-1.57)

S1[2.09, 2.62]=1.642(2.62-x)+0.943(x-2.09)

S1[2.62, 3.14]=0.962(3.14-x)+0.0(x-2.62)

S1[3.14, 3.66]=0.0(3.66-x)+-0.962(x-3.14)

S1[3.66, 4.17]=-0.98(4.17-x)+-1.706(x-3.66)

S1[4.17, 4.71]=-1.611(4.71-x)+-1.852(x-4.17)

S1[4.71, 5.23]=-1.923(5.23-x)+-1.673(x-4.71)

S1[5.23, 5.76]=-1.642(5.76-x)+-0.943(x-5.23)

S1[5.76, 6.28]=-0.962(6.28-x)+0.0(x-5.76)

===

Cac da thuc spline bac 2

S2[0.0, 0.52]=-0.925(0.52-x)^2+0.925(x-0.0)^2+0.25

S2[0.52, 1.05]=-0.907(1.05-x)^2+0.41(x-0.52)^2+0.755

S2[1.05, 1.57]=-0.418(1.57-x)^2+0.063(x-1.05)^2+0.983

S2[1.57, 2.09]=-0.063(2.09-x)^2+-0.544(x-1.57)^2+1.017

S2[2.09, 2.62]=0.533(2.62-x)^2+-0.784(x-2.09)^2+0.72

S2[2.62, 3.14]=0.799(3.14-x)^2+-1.05(x-2.62)^2+0.284

S2[3.14, 3.66]=1.05(3.66-x)^2+-0.799(x-3.14)^2+-0.284

S2[3.66, 4.17]=0.815(4.17-x)^2+-0.608(x-3.66)^2+-0.712

S2[4.17, 4.71]=0.574(4.71-x)^2+0.128(x-4.17)^2+-1.037

S2[4.71, 5.23]=-0.133(5.23-x)^2+0.348(x-4.71)^2+-0.964

S2[5.23, 5.76]=-0.341(5.76-x)^2+0.976(x-5.23)^2+-0.774

S2[5.76, 6.28]=-0.995(6.28-x)^2+0.854(x-5.76)^2+-0.231