



# BÀI THUYẾT TRÌNH GIẢI TÍCH SỐ

PHƯƠNG PHÁP DANILEVSKI TÌM TRỊ RIÊNG  
VÀ VECTOR RIÊNG

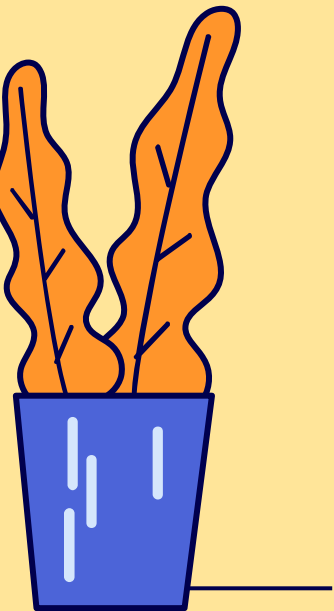
*Giảng viên hướng dẫn: Hà Thị Ngọc Yến*

*Ngày 04, tháng 6, năm 2021*



# Thành viên nhóm

1. Nguyễn Minh Đức – 20195858
2. Nguyễn Trường Giang – 20195868
3. Nguyễn Quý Bách – 20195842
4. Nguyễn Văn Tuấn – 20195939
5. Lưu Đức Trọng – 20195935



# NỘI DUNG CHÍNH

## 1. Nhắc lại một số kiến thức đại số tuyến tính

- Trị riêng và vector riêng
- Ma trận đồng dạng

## 2. Ma trận Frobenius & ma trận khối Frobenius

- Ma trận Frobenius
- Ma trận khối Frobenius

## 3. Phương pháp Danilevski

- Phương pháp Danilevski tìm trị riêng
- Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

# 1. Nhắc lại một số kiến thức đại số



## 1.1 Trị riêng và vector riêng:

Bài Toán. Cho ma trận  $A = [a_{ij}]$  vuông thực cấp  $n$ . Tìm số thực  $\lambda$  và vector  $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  thỏa mãn:

$$AX = \lambda X \quad (1)$$

Trong đó số thực  $\lambda$  để tồn tại  $X$  thỏa mãn (1) được gọi là **trị riêng**, còn vector  $X$  ứng với  $\lambda$  thỏa mãn (1) được gọi là **vector riêng**. Từ (1), ta có:

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (2)$$

Để tồn tại  $X \neq 0$ , ta phải có điều kiện:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3)$$

## 1.1 Trị riêng và vector riêng :

Đa thức  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận  $A$ .

Một cách đi tìm trị riêng thông thường là chúng ta khai triển định thức trên tìm đa thức đặc trưng của ma trận  $A$ , và giải hệ phương trình  $(A - \lambda I)X = 0$  để tìm vector riêng sau khi thu được các vector riêng. Nhưng với cách làm như vậy, số lượng tính toán sẽ rất lớn với  $n!$  phép cộng và  $(n - 1)n!$  phép nhân.

## 1.2 Ma Trận Đồng Dạng.

Cho hai ma trận  $A$  và  $B$  vuông cùng cấp  $n$ .  $A$  đồng dạng với ma trận  $B$ ,  $A \sim B$  nếu tồn tại ma trận không suy biến  $T$  sao cho:

$$B = T A T^{-1}$$

### Tính Chất

Nếu ma trận  $A$  đồng dạng với ma trận  $B$  thì:

1.  $B \sim A$  và nếu  $B \sim C$  thì  $A \sim C$
2.  $X$  là vector riêng của  $B$  thì  $T^{-1}X$  là vector riêng của  $A$
3.  $A$  và  $B$  có cùng đa thức đặc trưng (hay  $A$  và  $B$  có cùng các trị riêng)

## 1.2 Ma Trận Đồng Dạng.

Từ các tính chất của hai ma trận đồng dạng như trình bày ở trên, phương pháp Danilevski rút ra từ ý tưởng là sẽ thực hiện các biến đổi đồng dạng lên ma trận

A để đưa ma trận A về dạng thuận tiện rút ra được trị riêng và vector riêng.





## 2. Ma trận Frobenius



## 2. Ma Trận Frobenius

### 2.1 Ma Trận Frobenius

Ma trận Frobenius cấp  $n$  có dạng

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của  $P$  là:

$$\det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

## 2.1 Ma Trận Frobenius

Ta chứng minh quy nạp

$$\det(P - \lambda I) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_{n-1} \lambda - p_n)$$

Đặt  $P_i$  là ma trận  $P$  bỏ đi  $(n-i)$  hàng và cột cuối.

Với  $i = 2$ , ta có:  $\det(P_2 - \lambda I_2) = -\lambda(p_1 - \lambda) - p_2 = \lambda^2 - p_1 \lambda - p_2$

Theo giả thiết quy nạp, giả sử rằng mệnh đề đúng với  $n = k$ , ta chứng minh mệnh đề đúng với ma trận cấp  $n = k+1$ : Khai triển Laplace theo cột  $k+1$ , ta có:

$$\begin{aligned} \det(P_{k+1} - \lambda I) &= (-1)^{k+2} p_{k+1} - \lambda \det(P_k - \lambda I) \\ &= (-1)^{k+2} p_{k+1} - \lambda [(-1)^k (\lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - \dots - p_k \lambda)] \\ &= (-1)^{k+1} (\lambda^{k+1} - p_1 \lambda^k - p_2 \lambda^{k-1} - \dots - p_k \lambda^2 - p_{k+1}) \end{aligned}$$

Như vậy hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận Frobenius có thể suy ra từ các phần tử nằm trên hàng đầu tiên của ma trận.

# Vector riêng của Ma trận Frobenius

Giả sử  $\lambda_i$  là 1 trị riêng tìm được của một ma trận Frobenius. Vector riêng  $Y \neq 0$  thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Nếu  $y_n = 0$ , từ hệ phương trình ta có:

$$y_k = \lambda_i y_{k+1} \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$\Rightarrow y_k = 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Mà  $Y \neq 0$  (mâu thuẫn). Vậy  $y_n \neq 0$ . Ta biết rằng, vector riêng sai khác nhau một hàng số nhân, nên để tìm ra 1 vector riêng, do  $y_n \neq 0$  ta có thể giả sử rằng  $y_n = 1$

Với  $y_n = 1$ , suy ra:

$$y_k = \lambda_i^{n-k} \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

# Vector riêng của Ma trận Frobenius

Bộ các số  $y_k$  thỏa mãn phương trình đầu tiên của hệ vì:

$$\begin{aligned} p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_n y_n &= \lambda_i y_1 \\ \Leftrightarrow p_1 \lambda_i^{n-1} + p_2 \lambda_i^{n-2} + \cdots + p_n &= \lambda_i^n \end{aligned}$$

Đẳng thức trên đúng vì  $\lambda_i$  là nghiệm của đa thức đặc trưng. Từ cách chứng minh trên, ta thấy rằng, ứng với mỗi 1 trị riêng  $\lambda_i$  của ma trận Frobenius ứng với duy nhất 1 vector riêng độc lập tuyến tính. Hay không gian riêng ứng với các trị riêng phân biệt của ma trận Frobenius có số chiều bằng 1. Như vậy, ta có thể thu được tất cả các vector riêng của ma trận Frobenius từ các trị riêng.

## 2.2 Ma trận khối Frobenious

Ma Trận khối Frobenious có dạng như sau:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_n \end{bmatrix}$$

Trong đó các ma trận  $P_i$  là các ma trận Frobenius. Ta có đa thức đặc trưng của ma trận khối Frobenius:

$$\det(P - \lambda I) = \prod_{i=1}^n \det(P_i - \lambda I_i)$$

(Trong đó  $I_i$  là các ma trận đơn vị có cấp tương ứng với các ma trận  $P_i$ )

Do đó, ta có thể dễ dàng thu được đa thức đặc trưng của ma trận khối Frobenius bằng tích của các đa thức Frobenius  $P_i$

# Vector riêng của Ma trận khối Frobenius

Giả sử  $\lambda$  là trị riêng của ma trận  $P$ , ta có:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & \ddots \\ & & & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

(Với các  $v_i$  là các vector có cấp tương ứng với các ma trận  $P_i$ ) Mặt khác, ta có:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & \ddots \\ & & & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} P_1 v_1 \\ P_2 v_2 \\ \vdots \\ P_n v_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

Từ (4) và (5), ta có:

$$P_i v_i = \lambda v_i \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Nếu  $P_i$  không có trị riêng là  $\lambda$ , suy ra  $v_i = 0$

Mặt khác, vì  $\lambda$  là trị riêng của ma trận  $P$ , nên  $\lambda$  phải là trị riêng của các ma trận

Frobenius con nào đó trong  $P$ .

# Vector riêng của Ma trận khối Frobenius

Giả sử  $\lambda$  là trị riêng của các ma trận  $P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mk}$

Theo chứng minh trên, không gian riêng ứng với một trị riêng phân biệt của ma trận Frobenius có số chiều bằng 1, ta gọi  $v_{mi}$  là vector riêng của ma trận  $P_{mi}$  ứng với trị riêng  $\lambda$ . Như vậy:

$$P_{mi} v_{mi} = \lambda v_{mi} \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Đặt (với  $v_{mi}$  nằm ở vị trí tương ứng):

$$y_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{mi} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy tập hợp các vector  $y_{mi}$  với  $i = \overline{1, n}$  độc lập tuyến tính và thỏa mãn:

$$P y_{mi} = \lambda y_{mi} \quad (\text{do } P_{mi} v_{mi} = \lambda v_{mi} \quad \forall i = \overline{1, n})$$

Vậy, từ ma trận khối Frobenius ta có thể dễ dàng thu được tất cả các vector riêng ứng với một trị riêng  $\lambda$  bất kì với cách xây dựng như trên.





# 3. Phương pháp

## Danilevski

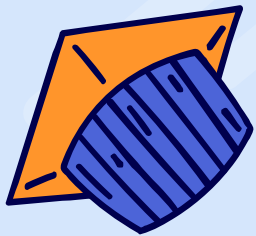
Tìm trị riêng và vector riêng





## Ý tưởng phương pháp

Thực hiện các phép biến đổi đồng dạng lên ma trận vuông thực  $A$  để đưa về dạng ma trận Frobenius hay ma trận khối Frobenius



# 3.1. Phương pháp Danilevski tìm trị riêng



# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Xét trong trường hợp tổng quát,  
giả sử tại bước thứ  $i + 1$  ta luôn có

$$a_{n-i,n-i-1}^{(i+1)} \neq 0 \forall i = \overline{1, n-1}$$

Như vậy, sau mỗi bước ta luôn  
xác định được  $A^{(i+1)} \sim A^i$  bằng  
các bước thực hiện như sau

Bước 1: Đặt ma trận ban đầu  $A = A^{(1)}$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(1)} & a_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Đưa ma trận  $A^{(1)}$  về ma trận đồng dạng  $A^{(2)}$  bằng phép biến đổi  $A^{(2)} = M_1 A^{(1)} M_1^{-1}$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{21}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}^{(2)} & a_{n-1,2}^{(2)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(1)} & a_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Với ma trận  $M_1, M_1^{-1}$  có dạng, với điều kiện tổng quát  $a_{n-i, n-i-1}^{(i+1)} \neq 0 \forall i = \overline{1, n-1}$  luôn xác định được  $M_{i+1}^{-1}$  vì  $\det(M^{(i+1)}) = a_{n-i, n-i-1}^{i+1} \neq 0$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{n,n-1}^{(1)}} & -\frac{a_{n,2}^{(1)}}{a_{n,n-1}^{(1)}} & \cdots & \frac{1}{a_{n,n-1}^{(1)}} & -\frac{a_{n,n}^{(1)}}{a_{n,n-1}^{(1)}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Bước i: Biến đổi đồng dạng ma trận  $A^{(i)}$  thành ma trận  $A^{(i+1)}$  bằng biến đổi  $A^{(i+1)} = M_i A^{(i)} M_i^{-1}$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Bước i: Biến đổi đồng dạng ma trận  $A^{(i)}$  thành ma trận  $A^{(i+1)}$  bằng biến đổi  $A^{(i+1)} = M_i A^{(i)} M_i^{-1}$



# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Bước i: Biến đổi đồng dạng ma trận  $A^{(i)}$  thành ma trận  $A^{(i+1)}$  bằng biến đổi  $A^{(i+1)} = M_i A^{(i)} M_i^{-1}$   
thu được ma trận  $A^{(i)} \sim A$

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1,n-i}^{(i)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(i)} & a_{1,n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-i,1}^{(i)} & a_{n-i,2}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n-i}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n-1}^{(i)} & a_{n-i,n}^{(i)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Sau  $n-1$  bước biến đổi, ta thu được ma trận  $A^{(n)} \sim A$  với

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= P = M_{n-1} A^{(n-1)} M_{n-1}^{-1} = M_{n-1} M_{n-2} A^{(n-2)} M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} \\ &= \dots = \end{aligned}$$

$$= (M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1) A^{(1)} (M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1})$$

Đặt  $M = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1$  thì

$$M^{-1} = (M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1}$$

$$\text{Khi đó, } P = A^{(n)} = M A^{(1)} M^{-1} = M A M^{-1}$$

Tức là  $P \sim A$



Qua quá trình thực hiện trên,  
ta hoàn toàn xác định được trị  
riêng của  $P$ , từ đó xác định  
được trị riêng của  $A$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

Thực tế, trong quá trình tính toán không phải lúc nào cũng xảy ra trường hợp lý tưởng  $a_{n-i+1,n-i}^{(i)} \neq 0$  nên ta xét trường hợp  $a_{n-i+1,n-i}^{(i)} = 0$

$$\text{TH1: } \exists j < n-i : a_{n-i+1,j}^{(i)} \neq 0$$

Tức là: Tại hàng  $n-i+1$  của ma trận  $A^{(i)}$   
tồn tại phần tử  $a_{n-i+1,j}^{(i)} \neq 0$  với mọi  
 $j < n-i$

$$\text{TH2: } \forall j < n-i : a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$$

Tức là: Tại hàng  $n-i+1$ , các phần tử  
trước  $a_{n-i+1,n-i}^{(i)}$  đều bằng 0 với mọi  
 $j < n-i$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

TH1:  $\exists j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} \neq 0$ , khi đó

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1,j}^{(i)} & a_{1,j+1}^{(i)} & \cdots & a_{1,n-i}^{(i)} & a_{1,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{1,n}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & \cdots & a_{2,j}^{(i)} & a_{2,j+1}^{(i)} & \cdots & a_{2,n-i}^{(i)} & a_{2,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{2,n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-i,1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,j}^{(i)} & a_{n-i,j+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n-i}^{(i)} & a_{n-i,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & a_{n-i+1,j}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-i+1,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i+1,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

TH1:  $\exists j < n-i : a_{n-i+1,j}^{(i)} \neq 0$ , ta hoán vị cột  $j$  và cột  $n-i$ , hàng  $j$  và hàng  $n-i$  bằng cách thực hiện biến đổi  $A^{(i)} = CA^{(i)}C^{-1}$  sẽ thu được ma trận đồng dạng với ma trận  $A^{(i)}$ , với ma trận  $C$  ( $C = C^{-1}$ ) có dạng

$$C = \begin{matrix} & & j & & n-i & & \\ \begin{matrix} j \\ n-i \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Khi đó, phần tử  $a_{n-i+1,n-i}^{(i)} \neq 0$ , ta tiếp tục quá trình biến đổi đồng dạng

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

TH2:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$ , khi đó

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1,j}^{(i)} & a_{1,j+1}^{(i)} & \cdots & a_{1,n-i}^{(i)} & a_{1,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{1,n}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & \cdots & a_{2,j}^{(i)} & a_{2,j+1}^{(i)} & \cdots & a_{2,n-i}^{(i)} & a_{2,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{2,n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-i,1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,j}^{(i)} & a_{n-i,j+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n-i}^{(i)} & a_{n-i,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-i+1,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i+1,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm trị riêng

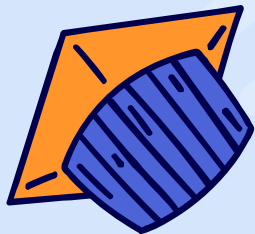
$$\text{TH2: } \forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$$

Ta biểu diễn ma trận  $A^{(i)}$  thành ma trận khối như sau:

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & P' \end{bmatrix}$$

Ta thấy  $P'$  là ma trận Frobenius cấp  $i$ , và từ tính chất ma trận khối đã chứng minh trước, ta biến đổi ma trận vuông  $A'$  cấp  $n-i$  theo phương pháp Danilevski. Từ đó hoàn toàn tính được trị riêng của  $A$  theo  $A'$  và  $P'$ .

$$\det(A^{(i)} - \lambda I) = \det[(A' - \lambda I)(P' - \lambda I)] = P'(\lambda) \det(A' - \lambda I)$$



## 3.2. Phương pháp Danilevski tìm vector riêng





# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

Tương ứng với phương pháp danilevski tìm trị riêng, nếu  $a_{n-i+1,n-i}^{(i)} \neq 0$  thì tìm được vector riêng theo công thức đã chứng minh, ngược lại,  $a_{n-i+1,n-i}^{(i)} = 0$  ta lại chia 2 trường hợp

$$\text{TH1: } \exists j < n-i : a_{n-i+1,j}^{(i)} \neq 0$$

Tức là: Tại hàng  $n-i+1$  của ma trận  $A^{(i)}$  tồn tại phần tử  $a_{n-i+1,j}^{(i)} \neq 0$  với mọi  $j < n-i$

$$\text{TH2: } \forall j < n-i : a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$$

Tức là: Tại hàng  $n-i+1$ , các phần tử trước  $a_{n-i+1,n-i}^{(i)}$  đều bằng 0 với mọi  $j < n-i$

# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

$$\text{TH1: } \exists j < n-i : a_{n-i+1,j}^{(i)} \neq 0$$

Dựa vào các tính chất về trị riêng và vector riêng của ma trận Frobenius đã chứng minh, ta tìm được tất cả các vector riêng của ma trận  $P$  đồng dạng với ma trận  $A$ . Gọi  $Y$  là vector riêng của ma trận Frobenius  $P$ , theo tính chất của 2 ma trận đồng dạng, ta có vector riêng của ma trận  $A$ :

$$X = M^{-1}Y$$

# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

TH2:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$

Ta đã biểu diễn dc A về dạng  $A^{(i)} = \begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & P' \end{bmatrix}$

Ta sẽ cố gắng triệt tiêu ma trận  $B$  với phép biến đổi đồng dạng. Giả sử ta muốn triệt tiêu cột  $q$  của ma trận  $A^{(i)}$  (nằm trong ma trận  $B$ ). Thực hiện biến đổi đồng dạng  $A^{(i)} = S_q A^{(i)} S_q^{-1}$

# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

$$\text{TH2: } \forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$$

$$S_q = \begin{matrix} & & & & q+1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{1,q} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_{2,q} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -a_{3,q} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-i-1,q} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

TH2:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$

$$S_q^{-1} = \begin{matrix} & & & & q+1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{1,q} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & a_{2,q} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3,q} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-i-1,q} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

TH2:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$

Tiếp tục biến đổi đến cột  $n-1$ , ta thu được ma trận

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1,n-i-1}^{(i)} & a_{1,n-i}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 & b_{1,n}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & \cdots & a_{2,n-i-1}^{(i)} & a_{2,n-i}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 & b_{2,n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-i,1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n-i-1}^{(i)} & a_{n-i,n-i}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 & b_{n-i,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-i+1,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i+1,n-1}^{(i)} & a_{n-i+1,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

TH2:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$

Tại đây, ta lại xét 2 trường hợp:

$b_{j,n}^{(i)} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n-k}$

$\exists j \in [1, n-k]: b_{j,n}^{(i)} \neq 0$

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1,n-i-1}^{(i)} & a_{1,n-i}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 & b_{1,n}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & \cdots & a_{2,n-i-1}^{(i)} & a_{2,n-i}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 & b_{2,n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-i,1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i,n-i-1}^{(i)} & a_{n-i,n-i}^{(i)} & 0 & \cdots & 0 & b_{n-i,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-i+1,n-i+1}^{(i)} & \cdots & a_{n-i+1,n-1}^{(i)} & a_{n-i+1,n}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

TH2.1:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$  và  $b_{j,n}^{(i)} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n-k}$

Khi đó ma trận  $A$  có dạng  $A^{(i)} = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & P' \end{bmatrix}$

Với  $P'$  là ma trận Frobenius, ta biến đổi  $A'$  về dạng Frobenius, cuối cùng sẽ thu được ma trận dạng khối Frobenius và tìm được vector riêng(chứng minh trên).



# Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

TH2.2:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$  và  $\exists j \in [1, n-k]: b_{j,n}^{(i)} \neq 0$  (với  $b_{j,n}^{(i)}$  là phần tử đầu tiên khác 0 từ dưới lên)

Ta dựng ma trận  $U_j$

$$U_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

## Phương pháp Danilevski tìm vector riêng

TH2.2:  $\forall j < n-i: a_{n-i+1,j}^{(i)} = 0$  và  $\exists j \in [1, n-k]: b_{j,n}^{(i)} \neq 0$  (với  $b_{j,n}^{(i)}$  là phần tử đầu tiên khác 0 từ dưới lên)

Phần khối ma trận chuyển hàng (cột) có cấp  $n - j + 1$ . Dễ thấy, ma trận nghịch đảo của ma trận  $U_j$  là ma trận chuyển vị của nó:

$$U_j^{-1} = U_j^T$$

Thực hiện phép gán:  $A^{(i)} = U_j A^{(k)} U_j^T$ , bắt đầu vòng lặp mới, thực hiện biến đổi sử dụng phương pháp Danilevski với ma trận thu được, ta sẽ thu được ma trận Frobenius hoặc ma trận khối Frobenius, từ đó tiếp tục thực hiện quá trình tìm vector riêng



## 4. Thuật toán và đánh giá



## 4.1. Thuật toán

Danilevski(A):

Argument:

A : Ma trận 2 chiều

Return:

Danh sách các vector riêng ứng với từng trị riêng

### KHAI BÁO VÀ KHỞI TẠO

list\_eigenvalues = []

list\_eigenvectors = []

n = A.shape[0] : kích cỡ ma trận A

m = n : sử dụng trong vòng lặp

k = n : sử dụng trong vòng lặp

back = eye(n) : là ma trận đơn vị cỡ n.n, sử dụng để lưu tích các ma trận nghịch đảo M, dùng để tính vecto riêng của A

## CHẠY VÒNG LẶP ĐỂ ĐƯA A VỀ MA TRẬN FROBENIUS

while  $k > 1$  :

if  $A[k, k - 1] \neq 0$  : # Trường hợp lí tưởng

#tìm ma trận đồng dạng

$A, \text{inverseM} = \text{findSimpleA}(A, k)$

$\text{back} = \text{back} * \text{inverseM}$  # cập nhật tích các ma trận nghịch đảo M

else:

$\text{case1} = \text{False}$  # Trường hợp đặc biệt thứ 1

# Tìm  $A[k, j]$  : tìm phần tử khác 0

for  $j = 1, 2, \dots, k - 2$  :

if  $A[k, j] \neq 0$  :

+ Hoán vị cột  $j$  và cột  $k-1$  của ma trận A

+ Hoán vị hàng  $j$  và hàng  $k-1$  của ma trận A

+ Hoán vị cột  $j$  và cột  $k-1$  của ma trận back

$k = k + 1$  #tiếp tục biến đổi theo trường hợp lí tưởng

$\text{case1} = \text{True}$

break

if not case1: # Trường hợp đặc biệt thứ 2: không có phần tử nào khác 0

# Khử cột từ k đến m-1 của ma trận A(k2)

#Triệt tiêu ma trận A(k2) với phép biến đổi đồng dạng

for j = k, k + 1, ..., m - 1 :

+ Tìm S, S1 khử cột j của ma trận A

+  $A = S * A * S1$

+ back = back \* S1x`

#case2\_1 = False

#Trường hợp 2.1

for j = k - 1, k - 2, ..., 1 :

# Tìm phần tử b khác 0 đầu tiên của cột cuối

if  $A[j, m] \neq 0$  :

+ Tìm ma trận U và U nghịch đảo

Gán  $A = U * A * U'$  bắt đầu vòng lặp mới

## #Trường hợp 2.2

Có  $A(k3)$  là ma trận Frobenius, tìm trị riêng của  $A(k3)$  tìm vectơ riêng của  $A(k3)$

if case2\_1 == False:

$X = A[k : m, k : m]$

$t = X.shape[0]$

$\lambda = \text{findValue}(X)$

$\text{list\_eigenvalues.append}(\lambda)$

+ Với mỗi trị riêng trong  $\lambda$ :

+ Tìm vectơ riêng  $y$  của ma trận Frobenius  $X$

+ Tìm vectơ riêng  $x$  của ma trận  $A$  ban đầu

$\text{list\_eigenvectors.append}(x)$

#Biến đổi  $A(k1)$  về Frobenius

$m = k$

$A = A[1:m, 1:m]$

$\text{back} = \text{eye}(m)$

$k = k - 1$

Sau khi hết vòng lặp , ta thực hiện tìm trị riêng và các vecto riêng tương ứng

`lam = findValue(A)`

`list_eigenvalues.append(lam)`


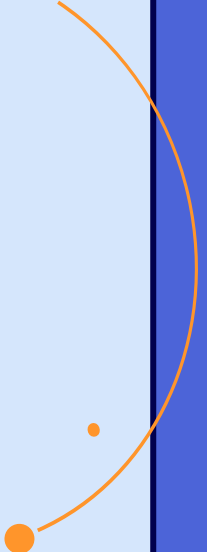
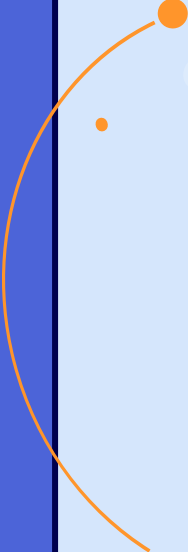

+ Với mỗi trị riêng trong lam:

+ Tìm vector riêng y của ma trận Frobenius A

+ Tìm vector riêng x của ma trận A ban đầu

`list_eigenvectors.append(x)`





## 4.2.Đánh giá sai số & độ phức tạp

## Sai số

Phương pháp Danilevsky là phương pháp tìm đúng ma trận Frobenius  $P$  đồng dạng với ma trận  $A$  và ma trận  $M$  để đưa  $A$  về dạng Frobenius (tức là  $MAM^{-1} = P$ ). Cho nên trong quá trình biến đồng dạng ma trận  $A$  chỉ có sai số tính toán. Ta có thể giảm đi sai số bằng cách như chọn ra trong tập  $\{a_{(n-i)j}^i\}$  với  $j = \overline{1, n-i-1}$  phần tử lớn nhất, và thực hiện phép biến đổi chỗ hai phần tử như trong trường hợp  $a_{(n-i)(n-i-1)}^i = 0$ . Đối với việc tìm nghiệm của đa thức đặc trưng thì như kết quả đã có, ta có thể tìm nghiệm thực của đa thức với sai số nhỏ hơn  $\epsilon > 0$  tùy ý.

# Độ Phức Tạp

- Đối với bài toán đi tìm trị riêng, trong mỗi bước biến đổi đồng dạng ma trận A, ta thực hiện nhiều nhất 2 phép nhân ma trận cấp n. Do đó trong tình huống xấu nhất, khối lượng tính toán là:

$$O(n^4).$$

- Đối với bài toán tìm vector riêng, trường hợp xấu nhất là ta liên tiếp gặp phải trường hợp  $a^i_{(i-1)j} = 0 \quad \forall j < n - i - 1$  và phải thực hiện lại quá trình từ đầu. Do đó khối lượng tính toán là:

$$O(n^5)$$

Trong các trường hợp còn lại thì khối lượng tính toán để tìm ra vector riêng chỉ tương đương với bài toán đi tìm trị riêng ( $O(n^4)$ )

Như vậy, so sánh với phương pháp đi tìm trị riêng và vector riêng thông thường, khối lượng tính toán của phương pháp Danilevsky được giảm xuống để chạy với thời gian đa thức.

# THANKS!



CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, infographics & images by **Freepik**

