Instituto Tecnológico Buenos Aires

Matemática I - 93.17

Resumen Práctico

Alejandro Nahuel Heir

2021

Disclaimer

Usar el presente material a modo de refuerzo y/o repaso de los contenidos.
No contiene ninguna justificación teórica.
Fue realizado principalmente a modo de práctica para con LaTeX.
Al final del documento se encuentran dos PDF **de terceros** sobre trigonometría, útiles para las identidades.
Cualquier sugerencia, correción o similar sobre los contenidos y/o formato del documento, es bienvenida: aheir@itba.edu.ar.
Las actualizaciones del documento pueden encontrarse en su repositorio en GitHub

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

Parte I

Primer Parcial

1. Límites

1.1. Cambio de variable

Sean $\lim_{y\to b} g(y) = L, \lim_{x\to a} f(x) = b, f(x) \neq b$ en un entorno reducido de a, entonces

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = L \tag{1}$$

1.2. Cero por acotada

Sean $\lim_{x\to a} g(x) = 0, \nexists \lim_{x\to a} f(x)$, con f acotada en un entorno reducido de a, entonces

$$\lim_{x\to a} \overbrace{f(x)}^{acotada} \cancelto{0}{g(x)} = 0 \tag{2}$$

1.3. Lema del Sandwich

Sean $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in E^*_{(a,r)}$con $r > 0$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L \tag{3}$$

Observación

Sea $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, y sabiendo que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, se deduce por Lema del Sandwich que

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0 \tag{4}$$

1.4. Sobre límites laterales

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \text{ si } \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2$$

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \text{ si } \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = L \\ \nexists \lim_{x\to a^-} f(x) \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \tag{5}$$

1.5. Límites importantes

1.5.1. Trigonométricos

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

1.5.2. Relativos a e

Igualdad importante

$$\boldsymbol{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}} \tag{6}$$

a. $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e, \quad \text{si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

b. $\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e, \quad \text{si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

c. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1, \quad \text{si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

d. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1, \quad \text{si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

1.6. Sobre límites infinitos

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{x} = \infty, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}-\{0\}$

b. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{k}{x} = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$

c. $\lim\limits_{x\to \infty} kx = \infty, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}-\{0\}$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} k+x = \infty, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$

2. Continuidad

2.1. Definición

f es continua en $a \in \mathbb{R}$ si:

- $a \in Dom(f)$
- $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

2.2. Propiedades

Sean f y g continuas en $a \in \mathbb{R}$:

- cf es continua en a, $\forall c \in \mathbb{R}$
- $f \pm g$ es continua en a
- fg es continua en a
- $\dfrac{f}{g}$ es continua en a, si $g(a) \neq 0$

2.3. Funciones continuas en todo su dominio

- Polinómicas
- Trigonométricas (directas o inversas)
- Exponenciales
- Logarítmicas
- Raíces (excepto $\sqrt[n]{x}$ en $x = 0$ para n pares)

2.4. Composición

Si f es continua en $x = a$, y $g(z)$ es continua en $z = f(a)$, entonces $h(x) = (g \circ f)(x)$ es continua en a.

2.5. Discontinuidades

f es discontinua en $a \in \mathbb{R}$ si se cumple <u>*al menos una*</u> de las siguientes condiciones:

- $a \notin Dom(f)$
- $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

2.5.1. Evitables

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad evitable si se cumple simultáneamente

- $f(a) = L_1 \in \mathbb{R}$
- $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$
- $L_1 \neq L_2 \neq \infty$

Si se redefine $f(x)$ en $x = a$ como $f(a) = L_2$, f pasa a ser continua en a.

2.5.2. No evitables o esenciales

Tipo salto

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad esencial tipo salto si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2, \quad L_1, L_2 \in \mathbb{R}$$

Tipo asíntota (vertical)

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad esencial tipo asíntota si se cumple <u>*alguna*</u> de las siguientes igualdades

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

"De otro tipo"

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad esencial de otro tipo si no es ninguna de las anteriores. Por ejemplo, $a = 0, f(a),$ con $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

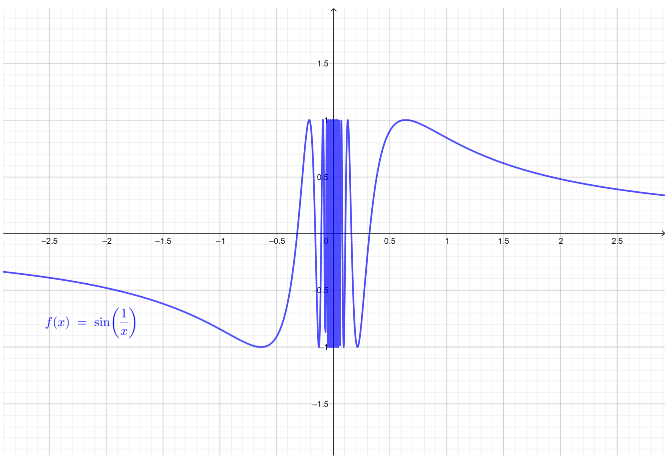


Figura 1: Gráfico de la función $\sin \dfrac{1}{x}$

2.6. Teorema de Bolzano - T.B.

Si f es continua en $[a, b]$, y $f(a)f(b) < 0$ (*tienen signos opuestos*), entonces

$$\exists \boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \,/\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0} \ (\textit{al menos una raiz}) \tag{7}$$

Si f es continua en un intervalo abierto (a, b), se debe cumplir que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, y que $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

2.6.1. Uso

Hallar raíces mínimas de una función

Dada una $f(x)$ igualada a 0, continua en un intervalo dado, hallar por tanteo dos valores de x (que pertenezcan al intervalo donde f es continua) para los cuales $f(x)$ tenga *distinto signo*. Luego, por *T.B.*, esa función tendrá *al menos* una raíz entre esos dos valores de x elegidos.

Cabe resaltar que esto puede emplearse también para conocer soluciones mínimas de una ecuación igualada a 0.

2.7. Corolario del Teorema de Bolzano - C.T.B.

Sea f continua en (a, b), con $f(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$, entonces f mantiene su signo en (a, b). Es decir:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \ \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0} \ \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{8}$$

2.7.1. Uso

Hallar conjuntos de positividad y negatividad de una función

Dada una función, y conociendo su dominio y conjunto de ceros, se puede "partir" el dominio de la función en intervalos donde la misma es continua y no nula (esto último sabiendo el conjunto de ceros). A lo largo de cada intervalo, si la función es continua en él, mantendrá su signo; basta tomar una x cualquiera en ese intervalo y evaluarla en la función para saber el signo en todo ese intervalo.

2.8. Teorema del Valor Intermedio - T.V.I.

Sea f continua en $[a, b]$, $f(a) = c,\ f(b) = d,\ c \neq d$, entonces:

a. $c < d \Rightarrow [c, d] \subset f([a, b])$

b. $d < c \Rightarrow [d, c] \subset f([a, b])$

Generalización

Sea f continua en (a,b), $\lim_{x\to a^+} f(x) = c,\ \lim_{x\to b^-} f(x) = d$, entonces:

a. $c < d \Rightarrow [c, d] \subset f([a, b])$

b. $d < c \Rightarrow [d, c] \subset f([a, b])$

2.9. Teorema para evaluar sobreyectividad

Sea f continua en (a,b), donde a podría ser $-\infty$ y b $+\infty$. Si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$$

$$o$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

entonces

$$f\left((a,b)\right) = \mathbb{R}, \therefore\ f\ \textit{es sobreyectiva}$$

3. Derivadas

3.1. Ecuaciones de rectas

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ el punto en el cual la recta es tangente o normal a la función f.

3.1.1. Recta tangente

$$r_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{9}$$

3.1.2. Recta normal

$$r_N(x) = f(x_0) + \left(\frac{-1}{f'(x_0)}\right)(x - x_0) \tag{10}$$

3.2. Derivada por definición

La derivada de f en x_0 es, si existe, el valor del límite del siguiente cociente incremental:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned} \tag{11}$$

3.3. Teorema en relación a la continuidad

- Si $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0
- Si f es discontinua en $x_0 \Rightarrow \nexists f'(x_0)$

f continua en x_0 NO necesariamente implica $\exists f'(x_0)$. Por ejemplo:

$$f(x) = |x| \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x\to 0} sg(x), \quad \text{pero} \quad \nexists \lim_{x\to 0} sg(x)$$

$$\therefore |x| \text{ NO es derivable en } x_0 = 0$$

3.4. Reglas de derivación

Sean f y g derivables en $x_0 \in \mathbb{R}$:

1. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
3. $(fg)' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0$

3.5. Regla de la cadena

Sea $f(x)$ derivable en x_0, y $g(y)$ derivable en y_0, entonces $h(x) = (g \circ f)(x)$ es derivable en x_0, y:

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) \tag{12}$$

3.6. Derivadas notables

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0	$\cosh x$	$\sinh x$
x	1	$\sinh x$	$\cosh x$
a^x	$\ln(a)a^x, \quad a > 0$	$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$
$\lvert x \rvert$	$sg(x), \quad x \neq 0$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
x^n	$nx^{n-1}, \quad x > 0,\ n \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arcsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arccosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{arctanh} x$	$\dfrac{1}{x^2-1}, \quad x \in (-1,1)$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$		

Cuadro 1: Derivadas notables

3.7. Sobre funciones partidas

Siempre se debe analizar por definición la continuidad y derivabilidad en los valores de x donde la función se parte.

3.8. Teorema de la Función Inversa

Sea $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e *inyectiva*, entonces:

1° $Im(f)$ es un intervalo (c,d), y $\exists f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$, la cual es continua.

2° Si f es derivable en $x_0 \in (a,b)$, y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f' es derivable en $y_0 = f(x_0)$, y

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} \tag{13}$$

3.9. Aproximación lineal de un función

$$\begin{aligned} &L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad \text{aproximación lineal de } f \text{ en } x_0 \\ &f(x) \simeq L(x) \text{ cuando } x - x_0 \ll 1 \end{aligned} \tag{14}$$

3.10. Aproximación diferencial de una función

$$\begin{aligned} &df = f'(x_0) \cdot \Delta x, \qquad \text{diferencial de } f \text{ en } x_0 \\ &\Delta f \simeq df \text{ cuando } \Delta x \ll 1 \end{aligned} \tag{15}$$

4. Teorema del Valor Medio

4.1. Teorema del Valor Intermedio - T.V.I.

Sea f continua en $[a,b]$, $f(a) = c$, $f(b) = d$, $c \neq d$:

a. $c < d \Rightarrow [c,d] \subset f\left([a,b]\right)$

b. $d < c \Rightarrow [d,c] \subset f\left([a,b]\right)$

Generalización

Sea f continua en (a,b), $\lim_{x\to a^+} f(x) = c \neq \lim_{x \to b^-} f(x) = d$, entonces:

a. $c < d \Rightarrow [c,d] \subset f\left([a,b]\right)$

b. $d < c \Rightarrow [d,c] \subset f\left([a,b]\right)$

4.2. Teorema de Fermat

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}/f$ alcanza un extremo en un $x_0 \in (a,b)$, entonces

$$\nexists f'(x_0) \qquad \text{ó} \qquad f'(x_0) = 0 \tag{16}$$

4.3. Teorema de Weierstrass - T.W.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, *entonces* f alcanza un M (máximo) y m (mínimo) en $[a, b]$. Además, por $T.V.I.$:

$$Im(f) = [m, M]$$

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Si } m = M \Rightarrow f(x) \text{ es } \textit{constante} \text{ en } [a, b]$$

4.4. Teorema de Rolle - T.R.

Hipótesis

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; derivable en (a, b).
- $f(a) = f(b)$

Tesis

$$\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0, \qquad \textit{se afirma al menos unas raiz de } f'$$

4.5. Corolario del Teorema de Rolle - C.T.R.

Hipótesis

- f continua en $e[a, b]_{(a,b)}$; derivable en (a, b).
- $f'(x) = 0$ tiene exactamente k soluciones en (a, b)

Tesis

$$f(x) = 0 \text{ tiene } \textit{como máximo } k + 1 \text{ soluciones en } [a, b]_{(a,b)}$$

4.6. Aplicaciones del C.T.R.

4.6.1. Afirmar inyectividad de una función

Sea f continua en $[a, b]_{(a,b)}$, derivable en (a, b), $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$, entonces

$$f \text{ es inyectiva en } [a, b]_{(a,b)}$$

"Si la derivada no se anula $\Rightarrow$ f es inyectiva"

4.6.2. Determinar raíces de una función

Consiste en tomar una función igualada a 0, buscar sus soluciones máximas con $C.T.R.$, y luego las soluciones mínimas con $T.B.$. Si el número de ambas soluciones coinicide (*debería*),

$$\therefore \text{ se tiene la cantidad exacta de soluciones.}$$

Es posible que para hallar las soluciones de $f'(x) = 0$ haya que aplicarle $T.B.$ a f' y $C.T.R.$ a f'', y concluir en el número de soluciones de $f'(x) = 0$, para luego, recién, tener soluciones máximas de $f(x) = 0$.

4.7. Teorema del Valor Medio de Lagrange - T.V.M.L.

Hipótesis

- f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b).

Tesis

$$\underbrace{\exists c \in (a, b)}_{\text{al menos uno}} / \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

4.8. Corolarios del T.V.M.L.

4.8.1. Corolario I

Sea f continua en $[a, b]_{(a,b)}$, $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$

$$\Rightarrow \ f \text{ es constante } \quad (f(x) = k \in \mathbb{R}) \quad \forall x \in [a, b]_{(a,b)}$$

4.8.2. Corolario II

Sean f y g derivables en (a, b), $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in (a, b)$

$$\Rightarrow \ \exists k \in \mathbb{R}/g(x) = f(x) + k, \ \forall x \in (a, b)$$

4.8.3. Corolario III (para desiguldades entre funciones)

Hipótesis

- f y g continuas en $[a, b]_{[a,b)}$, derivables en (a, b).
- $f(a) \leq g(a)$
- $f'(x) < g'(x), \ \forall x \in (a, b)$

Tesis

$$f(x) < g(x), \ \forall x \in (a, b]_{(a,b)}$$

4.8.4. T.V.M.L. para desigualdades

Tomar un $f(x)$, aplicarle *T.V.M.L.* "entre a y b", acotar la $f'(c)$ (ya que $c \in (a, b)$, (o usar lo que convenga)).

"Desarrollar"; evaluar $f'(x)$ en c y usar las acotaciones; "acotando $f'(c)$ se prueban desigualdades".

4.9. Teorema del Valor Medio de Cauchy

Hipótesis

- f y g continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b).
- $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ (implicando que g es inyectiva)

Tesis

$$\exists c \in (a,b) / \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(generalización del $T.V.M.L.$)

4.10. Regla de L'Hospital

Sean f y g derivables en $E^*_{(a,r)} = (a-r, a+r) - \{a\}$, y

1° $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ o $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$

2° $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in E^*_{(a,r)}$ y $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L, \ L \in \mathbb{R} \vee L = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Parte II
Segundo Parcial

5. Aplicaciones de la Derivada

5.1. Asíntotas

5.1.1. Horizontales

Son de la forma $y = k \in \mathbb{R}$; tomar $\lim_{x \to \infty} f(x)$

5.1.2. Verticales

Son de la forma $x = k \in \mathbb{R}$; tomar $\lim_{x \to x_0} f(x)$, con $x_0 \notin Dom(f)$

5.1.3. Oblicuas

Son de la forma $y = mx + b$.

- Si $\exists m \;\Rightarrow\; m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \qquad (m \in \mathbb{R},\ m \neq \pm\infty)$
- Si $\exists b \;\Rightarrow\; b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) \qquad (b \in \mathbb{R})$

5.2. Monotonía (implica inyectividad)

$$f \text{ es monótona en } I \Leftrightarrow \text{es estríctamente creciente o decreciente en } I$$

Teorema

Sea f continua en $I = [a, b]_{(a,b)}$ y derivable en (a, b)

a. Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \;\Rightarrow\; f$ es *estríctamente creciente* en $I = [a, b]_{(a,b)}$

b. Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \;\Rightarrow\; f$ es *estríctamente decreciente* en $I = [a, b]_{(a,b)}$

(de ser necesario, usar *C.T.B.* para asegurar signo de f' en diferentes intervalos)

5.3. Extremos locales o relativos

f alcanza un M (máximo) o m (mínimo) local en x_0 si

$$\exists \delta > 0 \;/\; f(x_0) \underbrace{\geq_{(M)}}_{\leq_{(m)}} f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Un extremo local es un M o m local.

5.4. Puntos críticos de una función - *PC*

x_0 es PC de f si $x_0 \in Dom(f)$ y

$$\text{a) } \nexists f'(x_0) \qquad \veebar \qquad b)\ f'(x_0) = 0$$

Si x_0 es un extremo local $\Rightarrow x_0$ es PC

5.5. Criterio de la 1ra derivada para extremos locales

Sea f continua en $(x_0-\delta, x_0+\delta) = E_{(x_0,\delta)}$, derivable en $(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\} = E^*_{(x_0,\delta)}$:

$$1) \quad f'(x) > 0 \ \text{ en } \ (x_0-\lambda, x_0), \ \text{ y } \ f'(x) < 0 \text{ en } \ (x_0, x_0+\lambda)$$
$$\Rightarrow \ x_0 \text{ es máximo local}$$

$$2) \quad f'(x) < 0 \ \text{ en } \ (x_0-\lambda, x_0), \ \text{ y } \ f'(x) > 0 \text{ en } \ (x_0, x_0+\lambda)$$
$$\Rightarrow \ x_0 \text{ es mínimo local}$$

(nunca está de más hacer la recta con las flechas de creciendo y de decreciendo, representando el signo de la derivada a ambos lados del x_0)

5.6. Concavidad

Teorema

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos veces derivable:

$$1) \quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b,) \ \Rightarrow \ gr(f) \text{ es cóncavo positivo; es } \cup.$$

$$2) \quad f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b,) \ \Rightarrow \ gr(f) \text{ es cóncavo negativo; es } \cap$$

(de ser necesario, usar *C.T.B.* para asegurar signos de f'')

5.7. Puntos de inflexión - *P.Inf.*

$(x_0, f(x_0))$ es *P.Inf.* del $gr(f)$ si

- f es continua en $x_0 \in Dom(f)$
- $gr(f)$ tiene *concavidad distinta* a ambos lados del probable *P.Inf.*

Observación

Por como está definido el *P.Inf.*, puede ocurrir que $\nexists f''(x_0)$ y/o $\nexists f'(x_0)$

5.8. Criterio de la 2da derivada para extremos

Sea f dos veces derivable en x_0:

$$1) \quad f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad \overbrace{f''(x_0) > 0}^{\textit{cónc.}+} \quad \Rightarrow \quad m \text{ local en } x_0$$

$$2) \quad f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{f''(x_0) < 0}_{\textit{cónc.}-} \quad \Rightarrow \quad M \text{ local en } x_0$$

(regla que no aplica si $f''(x_0) = 0 \quad \vee \quad \nexists f''(x_0)$; en estos casos, puede o no $\exists$ extremo)

5.9. Optimización de funciones

5.9.1. Conceptos

- S, supremo: toda la $Im(f)$ es $\leq$ al S; $S \in codf$, $S \in \mathbb{R}$, $S \neq \infty$.
- M, máximo: si $S \in Im(f) \ \Rightarrow$ es M.
- i, ínfimo: toda la $Im(f)$ es geq al i; $i \in cod(f)$, $i \in \mathbb{R}$, $i \neq \infty$.
- m, mínimo: si $i \in Im(f) \ \Rightarrow$ es m.

5.9.2. Análisis en funciones definidas en un intervalo cerrado

$$f : [a, b] = I \to R$$

Por *Weierstrass*, ya se sabe que $\exists m$ y $\exists M$.

1° Los extremos de f están en $a \ \vee \ b \vee \in (a, b)$

2° Si están en (a, b), el extremo ocurre en un PC.

3° Comparar $f(a)$ con $f(b)$ con $f(x_0)$, siendo x_0 cada PC. El mayor valor será M, el menor será m.

5.9.3. Análisis en funciones definidas en un intervalo genérico

$$f : I \to R, \ f \text{ continua}, \ I \subseteq \mathbb{R}, \ I \text{ un intervalo}$$

Premisas

- $a < b$ son extremos de I, $a \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ o $b = +\infty$
- $a, b \in I$ o $a, b \notin I$ (o las otras dos posibilidades)
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_a, \ L_a \in \mathbb{R} \quad \vee \quad L_a = \pm\infty$
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = L_b, \ L_b \in \mathbb{R} \quad \vee \quad L_b = \pm\infty$

Entonces, se tiene 2 casos:

1° $\quad L_a = \overset{-\infty}{+\infty} \quad \vee \quad L_b = \overset{-\infty}{+\infty} \qquad \Rightarrow \quad \overset{\nexists i}{\nexists S} \quad \Rightarrow \quad \overset{\nexists m}{\nexists M}$

2° $\quad L_a \neq \overset{-\infty}{+\infty} \quad \wedge \quad L_b \neq \overset{-\infty}{+\infty}$, comparar L_a con L_b con f evaluada en cada PC. El $\overset{\text{menor}}{\text{mayor}}$ será el $\overset{i}{S}$. Si $\overset{i}{S} \in Im(f) \ \Rightarrow$ es $\overset{m}{M}$.

6. Polinomios de Taylor

7. Integral Indefinida - Primitivas

8. Integral Definida

9. Aplicaciones de la Integral

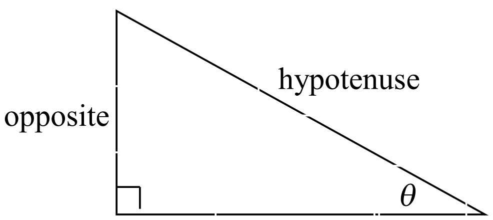
A. Trigonometría 1

Trig Cheat Sheet

Definition of the Trig Functions

Right triangle definition
For this definition we assume that

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ or $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

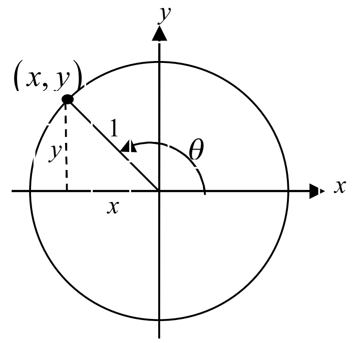


$$\sin\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}}$$

Unit circle definition
For this definition θ is any angle.



$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \qquad \csc\theta = \frac{1}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \qquad \sec\theta = \frac{1}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Facts and Properties

Domain
The domain is all the values of θ that can be plugged into the function.

$\sin\theta$, θ can be any angle
$\cos\theta$, θ can be any angle
$\tan\theta$, $\theta \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\csc\theta$, $\theta \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\sec\theta$, $\theta \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$\cot\theta$, $\theta \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Range
The range is all possible values to get out of the function.

$-1 \le \sin\theta \le 1 \qquad \csc\theta \ge 1$ and $\csc\theta \le -1$
$-1 \le \cos\theta \le 1 \qquad \sec\theta \ge 1$ and $\sec\theta \le -1$
$-\infty < \tan\theta < \infty \qquad -\infty < \cot\theta < \infty$

Period
The period of a function is the number, T, such that $f(\theta + T) = f(\theta)$. So, if ω is a fixed number and θ is any angle we have the following periods.

$$\sin(\omega\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\cos(\omega\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\tan(\omega\theta) \rightarrow T = \frac{\pi}{\omega}$$
$$\csc(\omega\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\sec(\omega\theta) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\cot(\omega\theta) \rightarrow T = \frac{\pi}{\omega}$$

Formulas and Identities

Tangent and Cotangent Identities

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Reciprocal Identities

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

Pythagorean Identities

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Even/Odd Formulas

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

Periodic Formulas

If n is an integer.

$$\sin(\theta + 2\pi n) = \sin\theta \qquad \csc(\theta + 2\pi n) = \csc\theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta \qquad \sec(\theta + 2\pi n) = \sec\theta$$

$$\tan(\theta + \pi n) = \tan\theta \qquad \cot(\theta + \pi n) = \cot\theta$$

Double Angle Formulas

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Degrees to Radians Formulas

If x is an angle in degrees and t is an angle in radians then

$$\frac{\pi}{180} = \frac{t}{x} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi x}{180} \quad \text{and} \quad x = \frac{180t}{\pi}$$

Half Angle Formulas (alternate form)

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$$

Sum and Difference Formulas

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Product to Sum Formulas

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right]$$

Sum to Product Formulas

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

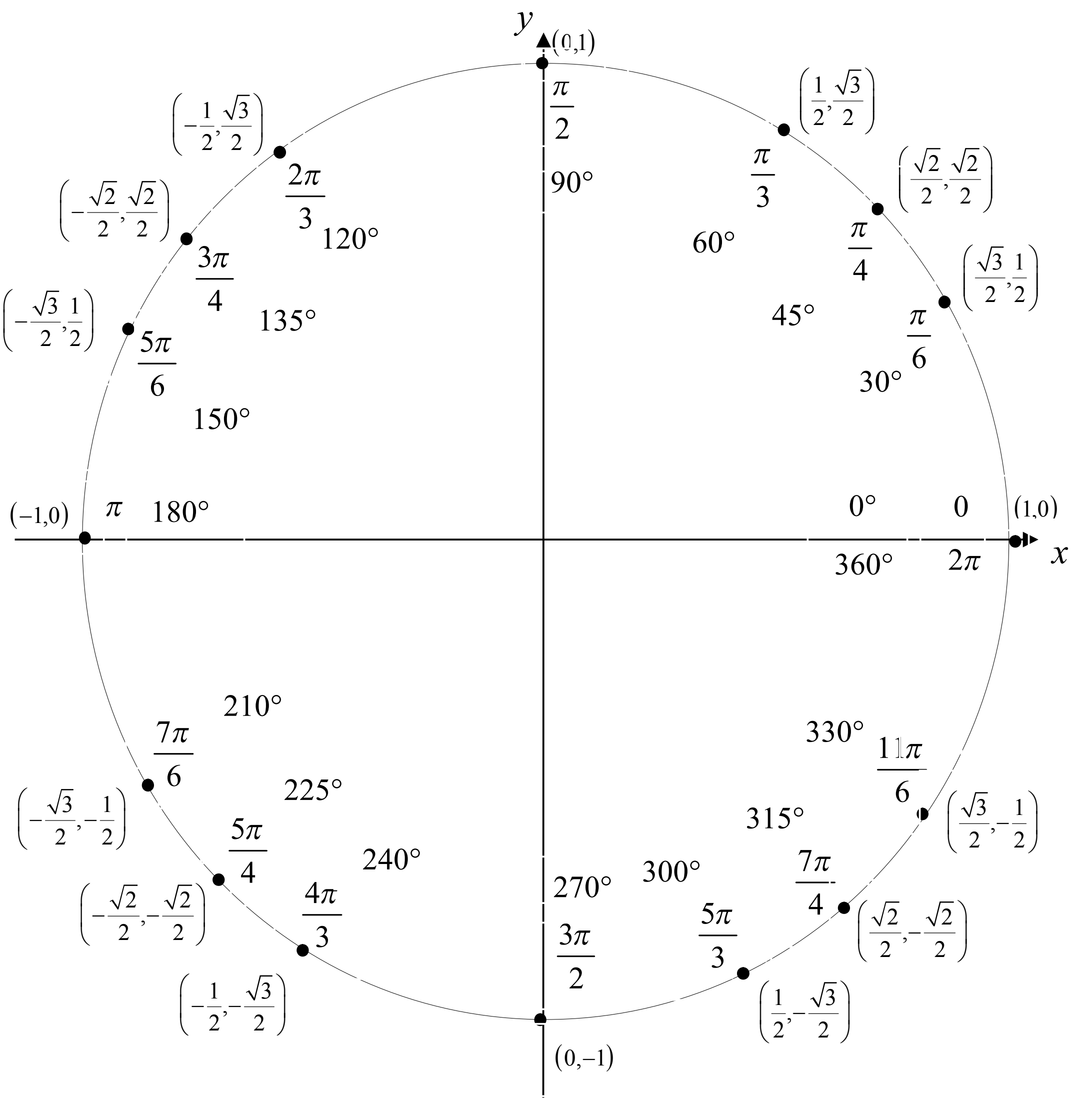
Cofunction Formulas

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

Unit Circle



For any ordered pair on the unit circle (x, y) : $\cos\theta = x$ and $\sin\theta = y$

Example

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Inverse Trig Functions

Definition

$y=\sin^{-1}x$ is equivalent to $x=\sin y$

$y=\cos^{-1}x$ is equivalent to $x=\cos y$

$y=\tan^{-1}x$ is equivalent to $x=\tan y$

Domain and Range

Function	Domain	Range
$y=\sin^{-1}x$	$-1\le x\le 1$	$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$
$y=\cos^{-1}x$	$-1\le x\le 1$	$0\le y\le\pi$
$y=\tan^{-1}x$	$-\infty<x<\infty$	$-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}$

Inverse Properties

$\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)=x \qquad \cos^{-1}\left(\cos(\theta)\right)=\theta$

$\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)=x \qquad \sin^{-1}\left(\sin(\theta)\right)=\theta$

$\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)=x \qquad \tan^{-1}\left(\tan(\theta)\right)=\theta$

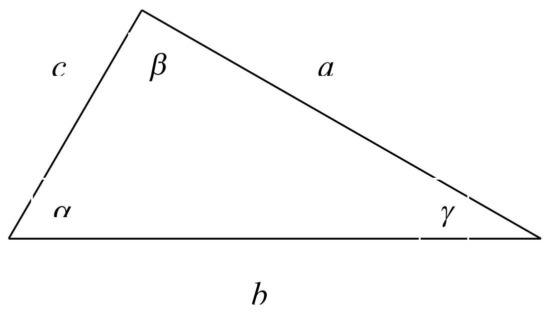
Alternate Notation

$\sin^{-1}x=\arcsin x$

$\cos^{-1}x=\arccos x$

$\tan^{-1}x=\arctan x$

Law of Sines, Cosines and Tangents



Law of Sines

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

Law of Cosines

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Mollweide's Formula

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

Law of Tangents

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}$$

B. Trigonometría 2

FORMULA SHEET

MATH 1060-004 Trigonometry

The following formulas will be provided on the Final Test.

Sum and Difference Formula

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$$

Double Angle Formula

$$\sin(2A) = 2\sin A\cos A$$
$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$\cos(2A) = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$
$$\tan(2A) = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

Half Angle Formula

$$\sin(\frac{A}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(A)}{2}}$$
$$\cos(\frac{A}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(A)}{2}}$$
$$\tan(\frac{A}{2}) = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$$

Product to Sum

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$$
$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$$
$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$$

Sum to Product

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin(\frac{A\pm B}{2})\cos(\frac{A\mp B}{2})$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2})$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$

Area of a Triangle

$$\text{Area} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$$
$$= \frac{1}{2}ac\sin B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

where $s = \frac{a+b+c}{2}$

Law of Sines

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Law of Cosines

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Vectors

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}}.\overrightarrow{\mathbf{u}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|}$$
$$\text{Proj}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\overrightarrow{\mathbf{u}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{u}}.\overrightarrow{\mathbf{v}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\|^2}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$
$$\text{Work} = \overrightarrow{\mathbf{F}}.\overrightarrow{\mathbf{disp}}$$