Instituto Tecnológico Buenos Aires

Matemática I - 93.17

Resumen Práctico

Alejandro Nahuel Heir
aheir@itba.edu.ar

2021

Resumen

Usar el presente material a modo de refuerzo y/o repaso de los contenidos; no contiene ninguna justificación teórica profunda. Fue realizado principalmente a modo de práctica para con LaTeX. Cualquier sugerencia, correción y/o similar, es bienvenida.

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

Parte I

Primer Parcial

1. Límites

1.1. Cambio de variable

Sean $\lim_{y\to b} g(y) = L, \lim_{x\to a} f(x) = b, f(x) \neq b$ en un entorno reducido de a, entonces

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = L \tag{1}$$

1.2. Cero por acotada

Sean $\lim_{x\to a} g(x) = 0, \nexists \lim_{x\to a} f(x)$, con f acotada en un entorno reducido de a, entonces

$$\lim_{x\to a} \overbrace{f(x)}^{acotada} \cancelto{0}{g(x)} = 0 \tag{2}$$

1.3. Lema del Sandwich

Sean $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in E^*_{(a,r)}$con $r > 0$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L \tag{3}$$

Observación

Sea $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, y sabiendo que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, se deduce por Lema del Sandwich que

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0 \tag{4}$$

1.4. Sobre límites laterales

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \text{ si } \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2$$

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \text{ si } \begin{cases} \lim_{x\to a^+} f(x) = L \\ \nexists \lim_{x\to a^-} f(x) \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \tag{5}$$

1.5. Límites importantes

1.5.1. Trigonométricos

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

1.5.2. Relativos a e

Igualdad importante

$$\boldsymbol{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}} \tag{6}$$

a. $\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e, \quad \text{si} \lim_{x\to a} f(x) = \infty$

b. $\lim_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e, \quad \text{si} \lim_{x\to a} f(x) = 0$

c. $\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1, \quad \text{si} \lim_{x\to a} f(x) = 0$

d. $\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1, \quad \text{si} \lim_{x\to a} f(x) = 0$

1.6. Sobre límites infinitos

a. $\lim_{x\to 0}\frac{k}{x} = \infty, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}-\{0\}$

b. $\lim_{x\to \infty}\frac{k}{x} = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$

c. $\lim_{x\to \infty} kx = \infty, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}-\{0\}$

d. $\lim_{x\to \infty} k+x = \infty, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$

2. Continuidad

2.1. Definición

f es continua en $a \in \mathbb{R}$ si:

- $a \in Dom(f)$
- $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

2.2. Propiedades

Sean f y g continuas en $a \in \mathbb{R}$:

- cf es continua en a, $\forall c \in \mathbb{R}$
- $f \pm g$ es continua en a
- fg es continua en a
- $\frac{f}{g}$ es continua en a, si $g(a) \neq 0$

2.3. Funciones continuas en todo su dominio

- Polinómicas
- Trigonométricas (directas o inversas)
- Exponenciales
- Logarítmicas
- Raíces (excepto $\sqrt[n]{x}$ en $x = 0$ para n pares)

2.4. Composición

Si f es continua en $x = a$, y $g(z)$ es continua en $z = f(a)$, entonces $h(x) = (g \circ f)(x)$ es continua en a.

2.5. Discontinuidades

f es discontinua en $a \in \mathbb{R}$ si se cumple <u>*al menos una*</u> de las siguientes condiciones:

- $a \notin Dom(f)$
- $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

2.5.1. Evitables

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad evitable si se cumple simultáneamente

- $f(a) = L_1 \in \mathbb{R}$
- $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}$
- $L_1 \neq L_2 \neq \infty$

Si se redefine $f(x)$ en $x = a$ como $f(a) = L_2$, f pasa a ser continua en a.

2.5.2. No evitables o esenciales

Tipo salto

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad esencial tipo salto si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2, \quad L_1, L_2 \in \mathbb{R}$$

Tipo asíntota (vertical)

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad esencial tipo asíntota si se cumple <u>*alguna*</u> de las siguientes igualdades

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

"De otro tipo"

$a \in \mathbb{R}$ es discontinuidad esencial de otro tipo si no es ninguna de las anteriores. Por ejemplo, $a = 0, f(a),$ con $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

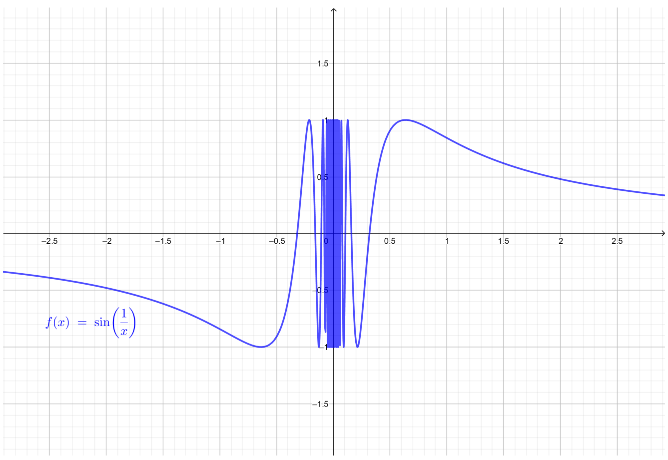

Figura 1: Gráfico de la función $\sin \dfrac{1}{x}$

2.6. Teorema de Bolzano - T.B.

Si f es continua en $[a, b]$, y $f(a)f(b) < 0$ (*tienen signos opuestos*), entonces

$$\boldsymbol{\exists c \in (a, b) \,/\, f(c) = 0} \text{ (\textit{al menos una raiz})} \tag{7}$$

Si f es continua en un intervalo abierto (a, b), se debe cumplir que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, y que $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

2.6.1. Uso

Hallar raíces mínimas de una función

Dada una $f(x)$ igualada a 0, continua en un intervalo dado, hallar por tanteo dos valores de x (que pertenezcan al intervalo donde f es continua) para los cuales $f(x)$ tenga *distinto signo*. Luego, por *T.B.*, esa función tendrá *al menos* una raíz entre esos dos valores de x elegidos.

Cabe resaltar que esto puede emplearse también para conocer soluciones mínimas de una ecuación igualada a 0.

2.7. Corolario del Teorema de Bolzano - C.T.B.

Sea f continua en (a, b), con $f(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$, entonces f mantiene su signo en (a, b). Es decir:

$$\boldsymbol{f(x) > 0 \; \forall x \in (a, b)} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{f(x) < 0 \; \forall x \in (a, b)} \tag{8}$$

2.7.1. Uso

Hallar conjuntos de positividad y negatividad de una función

Dada una función, y conociendo su dominio y conjunto de ceros, se puede "partir" el dominio de la función en intervalos donde la misma es continua y no nula (esto último sabiendo el conjunto de ceros). A lo largo de cada intervalo, si la función es continua en él, mantendrá su signo; basta tomar una x cualquiera en ese intervalo y evaluarla en la función para saber el signo en todo ese intervalo.

2.8. Teorema del Valor Intermedio - T.V.I.

Sea f continua en $[a, b]$, $f(a) = c$, $f(b) = d$, $c \neq d$, entonces:

a. $c < d \Rightarrow [c, d] \subset f([a, b])$

b. $d < c \Rightarrow [d, c] \subset f([a, b])$

Generalización

Sea f continua en (a,b), $\lim_{x \to a^+} f(x) = c$, $\lim_{x \to b^-} f(x) = d$, entonces:

a. $c < d \Rightarrow [c, d] \subset f([a, b])$

b. $d < c \Rightarrow [d, c] \subset f([a, b])$

2.9. Teorema para evaluar sobreyectividad

Sea f continua en (a,b), donde a podría ser $-\infty$ y b $+\infty$. Si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$$

$$o$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

entonces

$$f\left((a,b)\right) = \mathbb{R}, \ \therefore \ f \ \textit{es sobreyectiva}$$

3. Derivadas

3.1. Ecuaciones de rectas

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ el punto en el cual la recta es tangente o normal a la función f.

3.1.1. Recta tangente

$$r_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{9}$$

3.1.2. Recta normal

$$r_N(x) = f(x_0) + \left(\frac{-1}{f'(x_0)}\right)(x - x_0) \tag{10}$$

3.2. Derivada por definición

La derivada de f en x_0 es, si existe, el valor del límite del siguiente cociente incremental:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned} \tag{11}$$

3.3. Teorema en relación a la continuidad

- Si $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0
- Si f es discontinua en $x_0 \Rightarrow \nexists f'(x_0)$

f continua en x_0 NO necesariamente implica $\exists f'(x_0)$. Por ejemplo:

$$f(x) = |x| \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x\to 0} sg(x), \quad \text{pero} \quad \nexists \lim_{x\to 0} sg(x)$$

$$\therefore |x| \text{ NO es derivable en } x_0 = 0$$

3.4. Reglas de derivación

Sean f y g derivables en $x_0 \in \mathbb{R}$:

1. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
3. $(fg)' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0$

3.5. Regla de la cadena

Sea $f(x)$ derivable en x_0, y $g(y)$ derivable en y_0, entonces $h(x) = (g \circ f)(x)$ es derivable en x_0, y:

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) \tag{12}$$

3.6. Derivadas notables

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0	$\cosh x$	$\sinh x$
x	1	$\sinh x$	$\cosh x$
a^x	$\ln(a)a^x, \quad a > 0$	$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$
$\|x\|$	$sg(x), \quad x \neq 0$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
x^n	$nx^{n-1}, \quad x > 0,\ n \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arcsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arccosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{arctanh} x$	$\dfrac{1}{x^2-1}, \quad x \in (-1,1)$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$		

Cuadro 1: Derivadas notables

3.7. Sobre funciones partidas

Siempre se debe analizar por definición la continuidad y derivabilidad en los valores de x donde la función se parte.

3.8. Teorema de la Función Inversa

Sea $f: \ (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e *inyectiva*, entonces:

1° $Im(f)$ es un intervalo (c,d), y $\exists f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$, la cual es continua.

2° Si f es derivable en $x_0 \in (a,b)$, y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f' es derivable en $y_0 = f(x_0)$, y

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} \tag{13}$$

3.9. Aproximación lineal de un función

$$\begin{aligned} &L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad \text{aproximación lineal de } f \text{ en } x_0 \\ &f(x) \simeq L(x) \text{ cuando } x - x_0 \ll 1 \end{aligned} \tag{14}$$

3.10. Aproximación diferencial de una función

$$\begin{aligned} df &= f'(x_0) \cdot \Delta x, \qquad \text{diferencial de } f \text{ en } x_0 \\ \Delta f &\simeq df \text{ cuando } \Delta x \ll 1 \end{aligned} \tag{15}$$

4. Teorema del Valor Medio

4.1. Teorema del Valor Intermedio - T.V.I.

Sea f continua en $[a,b]$, $f(a) = c$, $f(b) = d$, $c \neq d$:

a. $c < d \Rightarrow [c,d] \subset f\left([a,b]\right)$

b. $d < c \Rightarrow [d,c] \subset f\left([a,b]\right)$

Generalización

Sea f continua en (a,b), $\lim_{x\to a^+} f(x) = c \neq \lim_{x\to b^-} f(x) = d$, entonces:

a. $c < d \Rightarrow [c,d] \subset f\left([a,b]\right)$

b. $d < c \Rightarrow [d,c] \subset f\left([a,b]\right)$

4.2. Teorema de Fermat

Sea $f: (a,b) \to \mathbb{R}/f$ alcanza un extremo en un $x_0 \in (a,b)$, entonces

$$\nexists f'(x_0) \qquad \text{ó} \qquad f'(x_0) = 0 \tag{16}$$

4.3. Teorema de Weierstrass - T.W.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, *entonces* f alcanza un M (máximo) y m (mínimo) en $[a, b]$. Además, por $T.V.I.$:

$$Im(f) = [m, M]$$

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Si } m = M \Rightarrow f(x) \text{ es } \textit{constante} \text{ en } [a, b]$$

4.4. Teorema de Rolle - T.R.

Hipótesis

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; derivable en (a, b).
- $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$

Tesis

$$\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0, \qquad \text{se afirma al menos unas raiz de } f' \tag{17}$$

Parte II

Segundo Parcial

A. Trigonometría 1

B. Trigonometría 2