Informatica per l’Ingegneria

Corsi M – N

A.A. 2023/2024

Angelo Cardellicchio

02 – Rappresentazione dell’informazione

Outline

- Messaggi ed informazione
- Sistemi di numerazione
- Il concetto di bit

Messaggi ed informazione

- Nel linguaggio comune, il termine informazione è spesso usato come sinonimo di ***messaggio***.
  - Il messaggio, tuttavia, è definibile come una ***combinazione di simboli***.
- L’informazione, invece, misura ***l’ampiezza della classe dei messaggi alla quale appartiene un dato messaggio***.
  - Prendiamo un messaggio a quattro caratteri, con ciascuno dei caratteri uno dei possibili simboli dell’alfabeto standard anglosassone, composto da 26 simboli.
  - Allora, l’informazione sarà data dalla ***cardinalità dell’insieme dei messaggi formati da quattro simboli appartenenti all’alfabeto anglosassone****.*
  - *In pratica:*
    - *CIAO* è un messaggio valido, così come *OTTO, ANNA, SARA, LUCA,* etc.
    - L’informazione è data dalla cardinalità dell’insieme di messaggi formati da quattro simboli, ognuno dei quali può assumere 26 possibili valori differenti.
    - In pratica, l’informazione è data da 26^4 possibili messaggi.

Sistemi di numerazione (1)

- Un **sistema di numerazione** è uno schema utilizzato per codificare numeri.
- È definito da **cifre** (concettualmente equivalenti all'alfabeto) e **regole** da applicare per costruire i numeri.
- Ne esistono di due categorie: ***addizionali*** e ***posizionali***.
- Nei sistemi ***addizionali***, ogni simbolo ha un valore fisso indipendente dalla posizione che occupa.

Sistemi di numerazione (2)

- Un esempio più conosciuto di sistema addizionale è l'*alfabeto romano*.
- **Cifre ammesse**: $I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$
- **Regola**: *il valore di ciascun simbolo viene sommato se alla sua destra compare un simbolo di valore inferiore o uguale (o se è l'ultimo), altrimenti viene sottratto.*

$$DCXXII \rightarrow 500 + 100 + 10 + 10 + 2 = 622$$

$$CMV \rightarrow 1000 - 100 + 50 = 950$$

Sistemi di numerazione (3)

- Nei sistemi ***posizionali*** il valore di ogni cifra dipende dalla sua posizione all'interno del numero:
  - *ad ogni posizione è associato un certo peso;*
  - *le posizioni si contano da destra verso sinistra, partendo da* 0*;*
  - *il valore della cifra viene moltiplicato per la base* b *elevata alla posizione.*
- In pratica:

$$N = c_{n-1}c_{n-2} \dots c_1 c_0$$

$$V(N) = (c_{n-1} \cdot b^{n-1}) + (c_{n-2} \cdot b^{n-2}) + \cdots + (c_1 \cdot b^1) + (c_0 \cdot b^0)$$

- dove c rappresenta la cifra, ed n il numero di cifre della parte intera.
- c_{n-1} è la ***cifra più significativa***.

Sistemi di numerazione (4)

- Ad esempio:

$$705, b = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 = 7, c_1 = 0, c_0 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 7 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

- A partire da questa relazione, possiamo definire la ***forma polinomiale*** come:

$$(c_{n-1} \dots c_0)_b = c_0 \cdot b^0 + \cdots + c_{n-1} \cdot b^{n-1}$$

- Analogamente, possiamo definire la parte frazionaria di un numero come:

$$(.c_{-1} \dots c_{-m})_b = c_{-1} \cdot b^{-1} + \cdots + c_{-m} \cdot b^{-m}$$

- Combinando i due concetti:

$$(c_{n-1} \dots c_0 . c_{-1} \dots c_{-m})_b =$$

$$= c_0 \cdot b^0 + \cdots + c_{n-1} \cdot b^{n-1} + c_{-1} \cdot b^{-1} + \cdots + c_{-m} \cdot b^{-m}$$

Sistemi di numerazione (5)

- Il **sistema binario** è caratterizzato dal valore di $b = 2$.
- È il sistema di numerazione con la base più piccola possibile.
  - In questo caso, le cifre sono $\{0, 1\}$
- Si parla di ***cifra binaria***, in inglese ***binary digit***, o ***bit***.
  - *Il bit è l'unità minima di informazione*.
- **Vantaggio:** il sistema binario ha un minor numero di simboli fondamentali, ovvero $\{0, 1\}$, il che comporta la facilità nello stabilire una corrispondenza biunivoca con due possibili stati di funzionamento dei circuiti elettronici.
- **Svantaggio:** è necessario un maggior numero di cifre necessarie per rappresentare un numero.
  - *Ad esempio, per rappresentare due cifre decimali sono necessarie fino a sette cifre binarie.*

Il concetto di bit (1)

- La quantità di informazione viene misurata in bit.
- Il numero di bit di informazione di ogni messaggio è dato per convenzione dal logaritmo (in base 2) della cardinalità della classe dei messaggi disponibili.
- Un'informazione di n bit può quindi essere rappresentata da uno fra 2^n simboli diversi o, equivalentemente, da un insieme ordinato di n simboli binari.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_2 b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} 2}$$

Il concetto di bit (2)

Esempio

- Sia dato un messaggio XXYY, dove XX è uno dei simboli dell'alfabeto standard, mentre Y è una cifra.
- L'informazione sarà data dal numero massimo possibile di messaggi:

$$I = (26)^2 \cdot (10)^2 = 676 \cdot 100$$

- L'informazione misurata in bit sarà data dal logaritmo in base 2 del valore precedente.

$$I(bit) = \log_2((26)^2(10)^2)$$

Il concetto di bit (3)

- In linea generale, ed *a meno del segno*, utilizzando n bit il numero M più grande rappresentabile è pari a $2^n - 1$, mentre il più piccolo è 2^{n-1}. Quindi:

$$
\begin{aligned}
&2^{n-1} \leq X \leq 2^n - 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2^{n-1} < X + 1 \leq 2^n \Rightarrow \\
&\Rightarrow \log_2 2^{n-1} < \log_2(X+1) \leq \log_2 2^n \Rightarrow \\
&\Rightarrow n - 1 < \log_2(X+1) \leq n \Rightarrow \\
&\Rightarrow n = \log_2(X+1)
\end{aligned}
$$

- Di conseguenza, per $n = 8$:

$$
\begin{aligned}
&2^{n-1} \leq X \leq 2^n - 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2^{n-1} < X + 1 \leq 2^n \Rightarrow \\
&\Rightarrow \log_2 2^{n-1} < \log_2(X+1) \leq \log_2 2^n \Rightarrow \\
&\Rightarrow n - 1 < \log_2(X+1) \leq n \Rightarrow \\
&\Rightarrow n = \lceil \log_2(X+1) \rceil
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2^7 \leq X \leq 2^8 - 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 128 < X + 1 \leq 256 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \log_2(128) < \log_2(X+1) \leq \log_2 256 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 7 < \log_2(X+1) \leq 8 \Rightarrow \\
&\Rightarrow n = \lceil \log_2(X+1) \rceil
\end{aligned}
$$

- ***Esercizio: che succede per $\boldsymbol{n = 13}$?***

Domande?

42