

Simulations en Optique (Optique numérique) - Travaux dirigés

Calculs de structures de bandes de cristaux photoniques*

Sébastien Mouchet
sebastien.mouchet@unamur.be

Année académique 2014-2015

1 Introduction

Les cristaux photoniques sont des dispositifs construits à partir d'un arrangement périodique de matériaux d'indices de réfraction différents [2, 3]. A l'instar des cristaux semi-conducteurs, dans lesquels le déplacement des électrons est affecté par un potentiel périodique, la périodicité de la permittivité diélectrique modifie la propagation de la lumière. Ces structures se révèlent être d'un très grand intérêt dans le domaine des nouvelles technologies mais sont aussi très largement retrouvées dans le monde du vivant ainsi que celui du minéral.

Les cristaux photoniques sont en général classés en trois catégories selon le niveau de complexité : cristaux unidimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels (figure 1). Ces dimensions correspondent au nombre de directions dans lesquelles l'indice de réfraction se répète périodiquement.

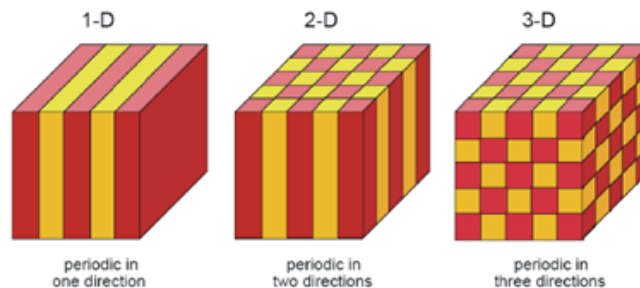


FIGURE 1 – [2] Schémas des arrangements périodiques uni-, bi- et tridimensionnel de cristaux photoniques construits à partir de matériaux ayant des indices de réfraction différents.

2 Cristaux photoniques 1D

Un cristal photonique unidimensionnel est constitué d'un empilement répétitif dans une direction d'au moins deux couches homogènes d'indices de réfraction différents. Celles-ci peuvent également présenter des épaisseurs différentes. Il s'agit du cas le plus simple des cristaux photoniques. La nanoarchitecture est donc réduite à une structure multicouche périodique. Elle joue le rôle d'un filtre, réfléchissant sélectivement et spéculairement les rayonnements incidents [4]. Cette structure est également appelée "réflecteur ou miroir de Bragg". Ce type de structure, couramment nommé multicouche, intéresse énormément la communauté scientifique et a de nombreuses applications notamment dans les cavités des lasers.

*Ces notes sont inspirées du cours de Simulations en Optiques (Optique numérique) de Cédric Vandenbem [1].

3 Cristaux photoniques 2D et 3D

Si une multicouche périodique présente également une variation périodique de l'indice de réfraction selon une direction latérale, alors il s'agit d'un cristal photonique bidimensionnel (figure 2a).

Lorsqu'il existe des variations périodiques de l'indice de réfraction selon deux directions latérales, la structure est appelée cristal photonique tridimensionnel (figure 2b).

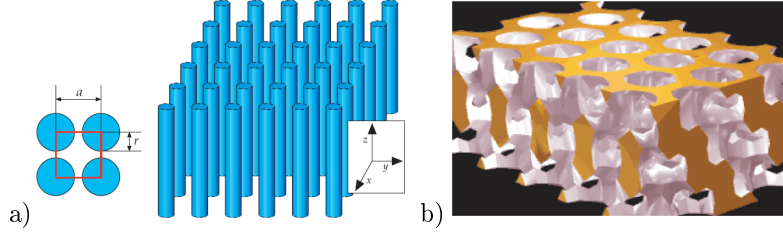


FIGURE 2 – Exemples de cristaux photoniques. (a) [2] Cas bidimensionnel composé de cylindres de rayon r espacé d'une distance a . (b) [2] Cas tridimensionnel. Il s'agit ici d'une nanostructure appelée "Yablonovite" et conçue par YABLONOVICH en 1991 [5].

Ces cristaux photoniques présentent la propriété de diffracter les rayons lumineux qui ne peuvent se propager dans le cristal.

La structure cristallographique de ces dispositifs photoniques peut être décrite à l'aide d'une cellule primitive formée par des vecteurs de base \vec{a}_1 , \vec{a}_2 et \vec{a}_3 .

Ces vecteurs \vec{a}_1 , \vec{a}_2 et \vec{a}_3 de la maille élémentaire permettent de définir les vecteurs de base \vec{b}_1 , \vec{b}_2 et \vec{b}_3 du réseau réciproque :

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \\ \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \\ \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \end{cases} \quad (1)$$

Notons que dans le réseau réciproque, les unités correspondent à des inverses de longueur.

Par exemple, dans le cas d'un réseau cubique à faces centrées CFC que nous étudierons (figure 3), les vecteurs de base de la maille élémentaire sont :

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \left(\frac{a}{2}\right) (0 \ 1 \ 1) \\ \vec{a}_2 = \left(\frac{a}{2}\right) (1 \ 0 \ 1) \\ \vec{a}_3 = \left(\frac{a}{2}\right) (1 \ 1 \ 0) \end{cases} \quad (2)$$

où a est le paramètre du réseau cubique.

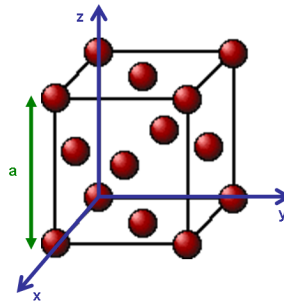


FIGURE 3 – [6] Réseau cubique à faces centrées (CFC) de paramètre a .

La zone de Brillouin [7] correspondant au réseau CFC est un cuboctaèdre (figure 4).

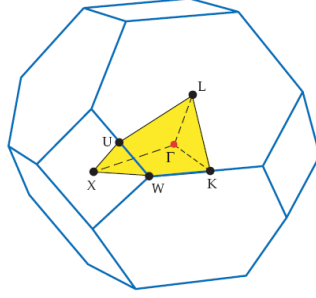


FIGURE 4 – [2] Zone de Brillouin d'un réseau cubique à faces centrées (CFC). Les points de haute symétrie sont également représentés : Γ , le centre de la zone de Brillouin ; K , le milieu d'une arête joignant deux faces hexagonales ; L , le centre d'une face hexagonale ; U , le milieu d'une arête joignant une face hexagonale et une face carrée ; W , un sommet et X , le centre d'une face carrée.

Les points de haute symétrie de cette zone de Brillouin ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned}\Gamma &= (0, 0, 0) \\ L &= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) \\ X &= \left(0, \frac{2\pi}{a}, 0\right) \\ U &= \left(\frac{\pi}{2a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{\pi}{2a}\right) \\ K &= \left(\frac{3\pi}{2a}, \frac{3\pi}{2a}, 0\right) \\ W &= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, 0\right)\end{aligned}$$

L'opale, qui est une pierre semi-précieuse sédimentaire formée de sphères nanométriques de silice est l'illustration d'un matériau présentant une symétrie cubique à faces centrées (CFC). Elle est utilisée en joaillerie depuis les Aztèques (figure 5). La silice est un solide incolore à la base dont la formule chimique est SiO_2 . Les opales possèdent de la sorte la même composition chimique que le quartz et le verre. Ces pierres présentent toutefois un jeu de couleurs caractéristiques dû à une nanostructure ordonnée plus ou moins régulièrement des sphères de silice. Le diamètre de celles-ci étant d'environ quelques centaines de nanomètres, la lumière réfléchie est également de cet ordre de grandeur, c'est-à-dire, dans la partie visible du spectre électromagnétique.



FIGURE 5 – [8] Bague montée d'une opale.

Le comportement optique de ce type de nanoarchitecture peut être compris au moyen de sa structure de bandes.

3.1 Structures de bandes

Les structures périodiques diélectriques ont la propriété de modifier la propagation des ondes électromagnétiques. Une longueur d'onde qui peut se propager dans le cristal est appelée un "mode". Un ensemble de

modes autorisés est nommé une “bande”. A contrario, une plage de fréquences où les ondes électromagnétiques ne peuvent pas se propager constitue une bande interdite ou *band gap*, en anglais [2, 3]. Ces bandes interdites sont dues au contraste d’indices de réfraction. En l’absence d’absorption, le cristal est un réflecteur parfait à ces fréquences. Cette situation est comparable à un cristal semi-conducteur où un potentiel périodique affecte le déplacement des électrons en faisant apparaître des bandes d’énergie interdites et autorisées (figure 6a).

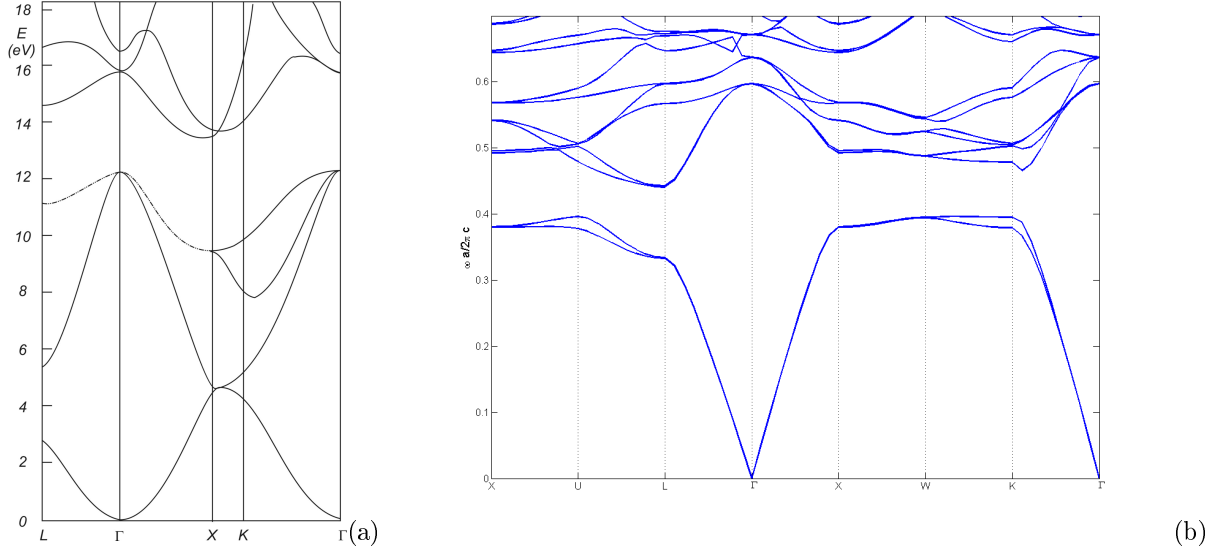


FIGURE 6 – (a) [9] Structure de bandes électroniques du silicium. (b) Structure de bandes photoniques d’un cristal possédant une symétrie de type diamant et composé de sphères de constante diélectrique ε valant 11,56 placée dans de l’air ($\varepsilon = 1$).

L’exemple de la structure de bandes du silicium, qui est un matériau semi-conducteur, montre bien une bande d’énergie interdite entre 12 eV et 14 eV.

La figure 6b représente la structure de bandes photoniques d’un cristal de symétrie diamant. La bande interdite est complète, dans le sens où elle s’étend selon toutes les directions cristallographiques principales du matériau. Un gap complet est observé pour les cristaux photoniques suffisamment isotropes.

Sachant qu’un milieu homogène a une relation de dispersion linéaire $\omega = k \frac{c}{n}$, la structure de bandes obtenue pour un milieu périodique est issue du repliement de la courbe de dispersion aux bords de la zone de Brillouin dû à la périodicité. L’apparition des bandes interdites est provoquée par le contraste d’indices de réfraction.

On comprend ici l’intérêt des cristaux photoniques. Si un émetteur est placé dans la bande interdite, l’émission est empêchée dans certaines directions mais pas dans d’autres. On peut ainsi obtenir un faisceau très directionnel. Près de la bande interdite, la relation de dispersion n’est pas linéaire. Ceci peut produire des effets comme dans les matériaux d’indice de réfraction négatif [10] ou dans les superprismes [11] qui dispersent énormément la lumière. Aux endroits où les bandes sont relativement plates, des effets de lumière lente peuvent être observés [12, 13].

Avant de produire un cristal photonique, il est important de tracer sa structure de bandes afin de prédire ses caractéristiques optiques [14]. Dans notre cas, la méthode utilisée est celle des ondes planes qui permet de réaliser numériquement le calcul du diagramme de dispersion, c’est-à-dire des courbes de la fréquence angulaire ω en fonction du nombre d’onde k , et donne la possibilité de déterminer la présence de bandes interdites prédisant de la sorte les longueurs d’onde réfléchies.

3.2 Méthode des ondes planes

3.2.1 Equation aux valeurs propres

Pour tracer les structures de bandes, nous avons d'abord à résoudre les équations de Maxwell sans source de courant ni de charge pour des champs variant temporellement de manière harmonique ($e^{-i\omega t}$).

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon(\vec{r}) \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H} \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon(\vec{r}) \varepsilon_0 \vec{E} \quad (6)$$

A cette fin, ces quatre relations doivent être exprimées sous forme d'un système d'équations aux valeurs propres¹ :

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} \quad (7)$$

où \vec{H} représente le champ magnétique.

Notons, comme le montre l'équation d'Ampère-Maxwell, que le champ électrique \vec{E} peut être retrouvé à partir du champ magnétique \vec{H} . Il suffit donc de résoudre le système uniquement par rapport à un seul champ.

Il faut ajouter à ce système aux valeurs propres la condition de l'équation décrivant l'absence de monopole magnétique qui traduit la transversalité du champ magnétique \vec{H} .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (8)$$

La constante diélectrique $\varepsilon(\vec{r})$ étant réelle (si nous supposons des milieux sans perte), l'opérateur $\vec{\nabla} \times \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times$ est hermitien² et les valeurs propres $\frac{\omega^2}{c^2}$ sont réelles. Celles-ci fournissent les fréquences nécessaires pour tracer le diagramme de dispersion.

Notons que si à partir des équations de Maxwell, nous avons recherché une expression semblable pour le vecteur déplacement électrique \vec{D} , transverse également, nous aurions obtenu un système d'équations aux valeurs propres ne disposant pas d'un opérateur hermitien³.

Un cristal photonique étant périodique, le champ magnétique \vec{H} peut être développé en une série de Fourier dans l'espace réciproque par le théorème de Bloch [7]. Il est ainsi décomposé en une somme d'ondes planes de vecteurs d'onde $\vec{k} + \vec{G}$.

$$\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}, \lambda} h_{\vec{G}, \lambda}^{\vec{k}} \vec{\eta}_{\vec{G}, \lambda}^{\vec{k}} e^{i(\vec{k} + \vec{G}) \cdot \vec{r}} \quad (9)$$

où le vecteur d'onde \vec{k} se situe dans la première zone de Brillouin, λ représente la polarisation (prend 1 ou 2 comme valeur pour les deux polarisations possibles), les vecteurs du réseau réciproque $\vec{G} = m_1 \vec{b}_1 + m_2 \vec{b}_2 + m_3 \vec{b}_3$ avec m_1, m_2 et m_3 prenant toutes les valeurs entières, se situent sur un nœud du réseau réciproque, $h_{\vec{G}, \lambda}^{\vec{k}}$ sont les composantes de la décomposition du champ $\vec{H}_{\vec{k}}(\vec{r})$ en ondes planes et $\vec{\eta}_{\vec{G}, \lambda}^{\vec{k}}$ sont les vecteurs de polarisation tels que $\vec{\eta}_{\vec{G}, \lambda}^{\vec{k}} \cdot \vec{\eta}_{\vec{G}, \lambda'}^{\vec{k}} = \delta_{\lambda \lambda'}$ et perpendiculaires à la direction de propagation $\vec{k} + \vec{G}$.

1. Ce système est obtenu en divisant les deux membres de l'équation d'Ampère-Maxwell par $\varepsilon(\vec{r})$, en prenant ensuite le rotationnel et en utilisant finalement l'équation de Faraday.

2. En effet, cet opérateur est de type BAB où A et B sont hermitiens : $(BAB)^+ = B^+ A^+ B^+ = BAB$.

3. Le système en question est $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{D} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D}$. L'opérateur $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}$ n'est pas hermitien. Il est de type AAB et $(AAB)^+ = B^+ A^+ A^+ = BAA \neq AAB$.

Comme nous l'avons vu, dans un cristal photonique, la permittivité diélectrique dépend périodiquement de la position. La périodicité de la constante diélectrique impose que :

$$\varepsilon(\vec{r} + \vec{l}) = \varepsilon(\vec{r}) \quad (10)$$

où \vec{l} est un vecteur de translation du réseau direct défini par la maille élémentaire déterminée par les vecteurs \vec{a}_1 , \vec{a}_2 et \vec{a}_3 .

L'inverse de la constante diélectrique peut également être développé en une série de Fourier dans l'espace réciproque :

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} = \sum_{\vec{G}'} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)_{\vec{G}'} e^{i\vec{G}' \cdot \vec{r}} \quad (11)$$

où

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)_{\vec{G}} = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{r}^3 \quad (12)$$

avec $V_c = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ représentant le volume de la maille élémentaire.

En évaluant le système d'équations aux valeurs propres 7 ainsi que l'équation traduisant la transversalité du champ magnétique \vec{H} à l'aide des expressions 9 et 11, nous obtenons :

$$\sum_{\vec{G}', \lambda'} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)_{\vec{G} - \vec{G}'} \left\{ (\vec{k} + \vec{G}) \times \vec{\eta}_{\vec{G}\lambda}^{\vec{k}} \right\} \cdot \left\{ (\vec{k} + \vec{G}') \times \vec{\eta}_{\vec{G}'\lambda'}^{\vec{k}} \right\} h_{\vec{G}', \lambda'}^{\vec{k}} = \frac{\omega^2}{c^2} h_{\vec{G}\lambda}^{\vec{k}}. \quad (13)$$

Ce système est un système d'équations aux valeurs propres pour lequel la matrice est hermitienne. Le problème numérique consiste donc en la diagonalisation d'une matrice. Les valeurs propres obtenues seront réelles et permettront de déterminer les fréquences ω . Les relations de dispersion recherchées pourront dès lors être tracées.

3.2.2 Transformée de Fourier de l'inverse de la permittivité

Afin de représenter les structures de bandes, il est nécessaire d'évaluer l'expression de la transformée de Fourier de l'inverse de la permittivité diélectrique $\varepsilon(\vec{r})$ (équation 12).

Pour cela, il faut connaître l'inverse de la permittivité dans le réseau direct $\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}$. Notre structure étant composée exclusivement de deux matériaux, son expression peut être écrite comme :

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \theta(\vec{r}) \quad (14)$$

où ε_1 et ε_2 représentent les constantes diélectriques des matériaux 1 et 2, respectivement et $\theta(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{dans le volume du matériau 2} \\ 0 & \text{dans le volume du matériau 1} \end{cases}$.

Dans l'espace réciproque, l'inverse de la constante diélectrique pour une structure photonique dont la maille élémentaire est composée d'une sphère de rayon R et de permittivité diélectrique ε_2 dans un fond constant de permittivité ε_1 vaut :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)_{\vec{G}} = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{1}{V_c} \frac{4\pi (\sin(GR) - GR \cos(GR))}{G^3}. \quad (15)$$

Dans le cas où $\vec{G} = \vec{0}$, l'expression s'écrit :

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)_{\vec{G}=\vec{0}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{V_s}{V_c} \quad (16)$$

où V_s est le volume de la sphère.

3.2.3 Contraintes liées à la programmation

Remarquons que toutes les sommes présentes dans nos équations sont infinies. Toutefois, suite aux contraintes liées au calcul numérique, il est impératif que les séries soient finies. C'est pourquoi la liste des vecteurs \vec{G} est limitée à un nombre fini n_g de vecteurs. Seuls sont choisis des vecteurs décrivant une sphère centrée sur $\vec{G} = \vec{0}$. Cela a pour effet de supprimer les discontinuités qui ont des hautes fréquences spatiales. Cela revient en quelques sortes à appliquer un filtre passe-bas. On ne considère ainsi que les grandes longueurs d'onde. Notons également que moins le contraste d'indice est marqué, moins il faut d'ondes planes. Il faut veiller à ne pas prendre un nombre trop important de composantes rendant le temps de calcul extrêmement long mais il est également essentiel de choisir un nombre suffisant afin d'obtenir une bonne convergence. Le système à diagonaliser est donc une matrice $2n_g \times 2n_g$ - car les deux directions de polarisation doivent être prises en compte - fournissant $2n_g$ valeurs propres $\frac{\omega^2}{c^2}$.

Notons finalement que les structures de bandes sont en général établies en unités réduites :

$$\omega_{red} = \frac{\omega a}{2\pi c} \text{ et } k_{red} = \frac{ka}{2\pi}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et a le paramètre de maille du réseau.

Le but est d'éviter de devoir tenir compte des dimensions du cristal étudié. Ainsi, seuls les rapports de dimensions et de permittivités diélectriques influencent la structure de bandes obtenue. L'invariance d'échelle qui peut être démontrée facilement à partir de l'équation aux valeurs propres (équation 7) en est la cause :

Si $\vec{r}' = s\vec{r}$, alors $\omega' = \omega/s$.

Si $\epsilon' = \epsilon/s^2$ et donc si $n' = n/s$, alors $\omega' = s\omega$.

4 MIT Photonic-Bands Package (MPB)

Plusieurs programmes de modélisation développés durant la dernière décennie sont disponibles sur internet [15]. Parmi ceux-ci, la méthode à laquelle nous allons avoir recours est celle de S. G. JOHNSON et J. D. JOANNOPOULOS [16]. Celle-ci est largement utilisée grâce au *MIT Photonic-Bands Package* (MPB), téléchargeable gratuitement sur internet [17].

5 Exercice

1. Ecrire un programme permettant de tracer la structure de bandes d'un cristal photonique au moyen de la méthode des ondes planes (voir section 6). La structure étudiée sera composée de sphères de verre ($\epsilon_{\text{verre}} = 2,25$) arrangées selon un réseau cubique à faces centrées (CFC) dans un milieu environnant constitué d'air ($\epsilon_{\text{air}} = 1$). Le chemin selon lequel les relations de dispersion sont proposées d'être calculées relie les points XULFXWK de la zone de Brillouin correspondant au cristal CFC. Afin de déterminer le rayon des sphères, prenons celui des sphères dans un cristal cubique à faces centrées pour lequel le taux de remplissage f^4 est maximal, c'est-à-dire équivalent à 0,74.
2. Vérifier l'exactitude de la structure de bandes photoniques en calculant l'indice de réfraction moyen du cristal.
3. [Facultatif] Retrouver les valeurs de la permittivité diélectrique en fonction de la position à partir de la série de Fourier de l'inverse de la constante diélectrique.
4. Etudier l'influence des paramètres du cristal comme le rayon R des sphères, la permittivité diélectrique... sur la structure de bandes. S'intéresser au cas de l'opale inverse.
5. Calculer la structure de bandes du cristal photonique décrit au point 1 au moyen du logiciel MPB.

4. La maille élémentaire d'un cristal cubique à faces centrées ne contenant qu'une seule sphère, le facteur de remplissage est défini comme le rapport entre le volume V_s d'une sphère et le volume V_c de la cellule unitaire : $f = \frac{V_s}{V_c} = \frac{4\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3}$.

6 Structure du programme

1. Calculer les vecteurs de base \vec{b}_1 , \vec{b}_2 et \vec{b}_3 du réseau réciproque.
2. Générer la liste des vecteurs du réseau réciproque $\vec{G} = m_1 \vec{b}_1 + m_2 \vec{b}_2 + m_3 \vec{b}_3$, m_1 , m_2 et m_3 étant des valeurs entières.⁵ Limiter celle-ci à un nombre fini n_g de vecteurs décrivant une sphère centrée sur $\vec{G} = \vec{0}$.
3. Définir les vecteurs \vec{k} .
4. Construire les vecteurs de polarisation $\vec{\eta}_{\vec{k}}^{\vec{G}_\lambda}$.
5. Calculer la transformée de Fourier de l'inverse de la permittivité.
6. Construire la matrice du système aux valeurs propres⁶ et calculer ces dernières.
7. Tracer la structure de bandes.

Références

- [1] Vandenbem C., *Simulations en optique (Optique numérique)*, cours de Master 2 en Sciences Physiques, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix (FUNDP), Namur, année académique 2010-2011.
- [2] Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Winn J. N. and Meade R. D., *Photonic Crystals – Molding the Flow of Light*, Second Edition, Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [3] Skorobogatiy M. and Yang J., *Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [4] Yeh P., *Optical waves in layered media*, Second edition, Wiley-Interscience, Hoboken, N.J., 2005.
- [5] Yablonotivitch E., Gmitter T. J. and Leung K. M., *Photonic band structure : The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms*, Physical Review Letters, vol. 67, pp 2295-2298, 1991.
- [6] <http://chem.ps.uci.edu/~rmpenner/Chem1ba/FCC.gif>, page consultée le 11 avril 2011.
- [7] Kittel C., *Physique de l'état solide*, Dunod, Paris, 2005.
- [8] http://images.artfinding.com/lot/_293/martin_du_daffoy_bague_opale_12484422382257.jpg, page consultée le 12 février 2011.
- [9] Thiry P., *Physique du solide*, cours de Master 1 en Sciences Physiques, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix (FUNDP), Namur, année académique 2009-2010.
- [10] Fonteinopoulos S., Economou E. N. and Soukoulis C. M., *Refraction in media with a negative refractive index*, Physical Review Letters, vol. 90, 107402, 2003.
- [11] Kosaka H., Kawashima T., Tomita A., Notomi M., Tamamura T., Sato T. and Kawasaki S., *Superprism phenomena in photonic crystals*, Physical Review B, vol. 58, 10096(R), 1998.
- [12] Baba T., *Slow light in photonic crystals*, Nature Photonics, vol. 2, pp 465-473, 2008, doi:10.1038/nphoton.2008.146.
- [13] Vlasov Y. A., O'Boyle M., Hamann H. F. and McNab S. J., *Active control of slow light on a chip with photonic crystal waveguides*, Nature, vol. 438, pp 65-69, 2005, doi:10.1038/nature04210.
- [14] Vandenbem C. and Vigneron J.-P., *Mie Resonances of dielectric spheres in face-centered cubic photonic crystals*, Journal of the Optical Society of America A, vol. 22, pp 1042-1047, 2005.
- [15] http://www.photonics.phys.polymtl.ca/fund_phot_cryst_guid/planewave2D.m, site du *Complex Photonic Structures and Processes Group* de l'Ecole Polytechnique de Montréal, page consultée le 4 mai 2011.
- [16] Johnson S. G. and Joannopoulos J. D., *Block-iterative frequency-domain methods for Maxwell's equations in a planewave basis*, Optics Express, vol. 8, pp 173-190, 2001.
- [17] <http://ab-initio.mit.edu/mpb/>, site du *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), page consultée le 31 mars 2011.

⁵. Classer les vecteurs \vec{G} par ordre croissant peut s'avérer être une aide utile.

⁶. Un test peut être effectué pour vérifier si cette matrice est hermitienne.