Démontrons que la dérivation de cos est cyclique par récurrence.

Soit P_n une propriété telle que :

$$P_n: \cos(x)^{(4+n)} = \cos(x)^{(n)}$$

Montrons que cette propriété est vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

Initialisation Calculons $\cos(x)^{(4)}$.

$$\begin{aligned}
\cos(x)^{(4)} &= (\cos(x)')^{(3)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4)} &= (-\sin(x))^{(3)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4)} &= ((-\sin(x))')^{(2)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4)} &= (-\cos(x))^{(2)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4)} &= ((-\cos(x))')' \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4)} &= (\sin(x))' \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4)} &= \cos(x)
\end{aligned}$$

Il s'agit exactement de P_0. Ainsi P_n est initialisée.

Hérédité Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
\cos(x)^{(4+n)} &= (\cos(x)')^{(3+n)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4+n)} &= (-\sin(x))^{(3+n)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4+n)} &= ((-\sin(x))')^{(2+n)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4+n)} &= (-\cos(x))^{(2+n)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4+n)} &= ((-\cos(x))')^{(1+n)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4+n)} &= (\sin(x))^{(1+n)} \\
\Leftrightarrow \cos(x)^{(4+n)} &= \cos(x)^{(n)}
\end{aligned}$$

Ainsi P_n est héréditaire.
Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire, alors, par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

Comme la dérivation de cos est cyclique et que ni cos ni sin, les fonctions apperessants dans ce cycle, est monotone, alors cos appartient à $\mathcal{C}^\infty$ puisqu'il n'existe pas de dérivé n-ième de cos qui sont monotones.