Je vous laisse le soin de calculer les premiers termes de x_n par vous mêmes. On en déduit la conjecture suivante :

$$x_{n+1} = 2^n$$

Démontrons le par récurrence.

Soit P_n une propriété telle que :

$$P_n : \ x_{n+1} = 2^n$$

Montrons que cette propriété est vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

Initialisation Calculons 2_0.

$$2^0 \ = \ 1 \ \textit{Par convention}$$

Il s'agit exactement de x_0. Ainsi P_n est initialisée.

Hérédité Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 2^n \\
\Leftrightarrow x_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} x_k \\
\Leftrightarrow x_{n+2} &= \sum_{k=0}^{n} (x_k) + x_{n+1} \\
\Leftrightarrow x_{n+2} &= \sum_{k=0}^{n} (x_k) + \sum_{k=0}^{n} (x_k) \\
\Leftrightarrow x_{n+2} &= 2 \sum_{k=0}^{n} (x_k) \\
\Leftrightarrow x_{n+2} &= 2 \times 2^n \\
\Leftrightarrow x_{n+2} &= 2 \times 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi P_n est héréditaire.
Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire, alors, par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ avec $x_0 = 1$.

Ainsi, nous en déduisons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n \ = \ 2^{n-1}$$

Or nous souhaitons exprimer x_n pour tout n et nous savons que $x_0 = 1$.
Alors : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n \ = \ 2^{n-1} \\ x_0 = 1 \end{cases}$