Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \frac{n^2+n}{3} \\ &= \frac{n(n+1)}{3} \textit{ Par distributivité du produit sur la somme}\end{aligned}$$

Or on sait que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *Essayons de s'y ramener.*

$$\begin{array}{rrcl} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k & = & \displaystyle\frac{2}{2} \times \frac{n(n+1)}{3} \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k & = & \displaystyle\frac{2}{3} \times \frac{n(n+1)}{2} \quad \textit{Par commutativité du produit} \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k & = & \displaystyle\frac{2}{3} \times \sum_{k=0}^{n} k \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\frac{3}{2} \times \sum_{k=0}^{n} u_k & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2} \times u_k & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \textit{Par distributivité du produit sur la somme} \\ \Leftrightarrow & \displaystyle\frac{3}{2} \times u_k & = & k,\ \forall k \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & u_n & = & \displaystyle\frac{2}{3} \times n \textit{ Par changement d'indice (et pour n entier)} \end{array}$$