

Je vous laisse le soin de calculer les premiers termes de x_n par vous mêmes.
On en déduit la conjecture suivante :

$$x_{n+1} = 2^n$$

Démontrons le par récurrence.

Soit P_n une propriété telle que :

$$P_n : x_{n+1} = 2^n$$

Montrons que cette propriété est vraie pour tout n appartenant à \mathbb{N} .

Initialisation Calculons 2_0 .

$$2^0 = 1 \text{ Par convention}$$

Il s'agit exactement de x_0 . Ainsi P_n est initialisée.

Hérédité Fixons n dans \mathbb{N} tel que P_n soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2^n \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \sum_{k=0}^n x_k \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= \sum_{k=0}^n (x_k) + x_{n+1} \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= \sum_{k=0}^n (x_k) + \sum_{k=0}^n (x_k) \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= 2 \sum_{k=0}^n (x_k) \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= 2 \times 2^n \\ \Leftrightarrow x_{n+2} &= 2 \times 2^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi P_n est héréditaire.

Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire, alors, par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n appartenant à \mathbb{N} .