

Factorisons $\frac{n^2+n}{3}$ par n :

$$\frac{n^2+n}{3} = \frac{n(n+1)}{3}$$

Calculons $\frac{2}{3} \times$ la somme des n premiers entiers :

$$\frac{2}{3} \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n \frac{2}{3} k = \frac{2n(n+1)}{3 \times 2} = \frac{n(n+1)}{3}$$

C'est exactement :

$$\frac{n(n+1)}{3}$$

Or, nous savons que :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{n(n+1)}{3}$$

Ainsi :

$$\frac{n(n+1)}{3} = \sum_{k=0}^n \frac{2}{3} k = \sum_{k=0}^n u_k$$

Par identification :

$$u_n = \frac{2}{3} n$$