Suites

William Hergès

March 19, 2023

1 Introduction

Une démonstration par récurrence est efficace pour l'ensemble de démonstration se basant sur le principe d'hérédité, c'est-à-dire que si u_k est vraie, alors u_{k+1} est aussi vraie.
Ce type de démonstration est efficace quand on a affaire avec des suites définies par récurrence, c'est-à-dire définie comme cet exemple :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

2 Préparer la démonstration

Pour démontrer par récurrence, il faut avant tout définir la propriété mathématique que l'on souhaite démontrer.
Cette propriété sera de forme :

$$P(n) : a + b = 1$$

au lycée, ou de forme :

$$P_n : a + b = 1$$

dans le supérieur.
Cette propriété est bien sûr une propriété booléenne, c'est-à-dire qu'elle est soit vraie, soit fausse.

3 Étapes d'une démonstration par récurrence

Une démonstration par récurrence se fait en 2 étapes si on omet l'introduction et la conclusion.

La première étape est la phase d'initialisation.
Cette étape permet de dire qu'il existe au moins une valeur de la suite u_n tel que P_n soit vraie.

Ensuite, nous devons démontrer que si u_n est vrai, alors u_{n+1} est aussi vrai. Il s'agit de la phase d'héréditée.

4 Rédaction

Dans cette section, nous allons voir comment rédiger une rédaction par récurrence.

Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_{n+1} - 5$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété :

$$u_n = u_{n+1}$$

Initialisation. On a $u_0 = 5$ et $u_1 = 0$. Or $0 = 5 - 5$.
$P(0)$ est donc vraie.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a donc :
Ici il faut passer de u_n à u_{n+1} pour finir l'hérédité.
Ici nous n'allons pas le faire car il ne s'agit que d'un exemple de rédaction.
C'est exactement $P(n+1)$. Ainsi $P(n)$ est héréditaire.

Comme $P(0)$ est vraie et que $P(n)$ est héréditaire, par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.