Suites

William Hergès

March 19, 2023

1 Introduction

Une démonstration par récurrence est efficace pour l'ensemble de démonstration se basant sur le principe d'hérédité, c'est-à-dire que si u_k est vraie, alors u_{k+1} est aussi vraie.
Ce type de démonstration est efficace quand on a affaire avec des suites définies par récurrence, c'est-à-dire définie comme cet exemple :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

2 Préparer la démonstration

Pour démontrer par récurrence, il faut avant tout définir la propriété mathématique que l'on souhaite démontrer.
Cette propriété sera de forme :

$$P(n) : a + b = 1$$

au lycée, ou de forme :

$$P_n : a + b = 1$$

dans le supérieur.
Cette propriété est bien sûr une propriété booléenne, c'est-à-dire qu'elle est soit vraie, soit fausse.

3 Étapes d'une démonstration par récurrence

Une démonstration par récurrence se fait en 2 étapes si on omet l'introduction et la conclusion.

La première étape est la phase d'initialisation.
Cette étape permet de dire qu'il existe au moins une valeur de la suite u_n tel que P_n soit vraie.

Ensuite, nous devons démontrer que si u_n est vrai, alors u_{n+1} est aussi vrai. Il s'agit de la phase d'héréditée.

4 Rédaction

Dans cette section, nous allons voir comment rédiger une rédaction par récurrence. Nous allons d'abord voir comment la rédiger pour le bac et ensuite comment la rédiger pour le post-bac.

Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_{n+1} - 5$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété :

$$u_n = u_{n+1}$$

Initialisation. On a $u_0 = 5$ et $u_1 = 0$. Or $0 = 5 - 5$.
$P(0)$ est donc vraie.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a donc :
Ici il faut passer de u_n à u_{n+1} pour finir l'hérédité.
Ici nous n'allons pas le faire car il ne s'agit que d'un exemple de rédaction.
C'est exactement $P(n+1)$. Ainsi $P(n)$ est héréditaire.

Comme $P(0)$ est vraie et que $P(n)$ est héréditaire, par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.