Géométries

William Hergès

March 19, 2023

1 Introduction

La géométrie dans le plan et dans l'espace fonctionne de la même manière au niveau des notations à l'unique différence que dans l'espace il y a 3 coordonnées et non plus que 2.

2 Appartenance à une droite et plan

Soit M un point de (AB).

$$M \in (AB)$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \text{ colinéaire à } \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \Leftrightarrow k\vec{AB}; k \in \mathbb{R}$$

Soit A, B, C des points non alignés du plan (ABC).
Soit M un point du plan (ABC).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} = x\vec{AC} + y\vec{AB}; x, y \in \mathbb{R}$$

Soit N un point du même plan.
M et N sont coplanaires.

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC). $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de ce plan et $A, \vec{AB}, \vec{AC}$ un repère de ce plan.

Pour calculer la norme d'un vecteur, il faut connaître les coordonnées de ce dernier, ici noté $x; y; z$.

$$\|AB\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3}$$

Si on souhaite connaître la distance entre le point A et le plan P de vecteur normal $\vec{n}$, il nous faut un point $B \in P$.
Cette distance est représenté par AH avec H le projeté orthogonal de A sur P.

$$AH = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\|}$$

Si on souhaite connaître la distance entre le point A et la droite d de vecteur directeur $\vec{u}$, il nous faut un point $B \in d$.
Cette distance est représenté par AH avec H le projeté orthogonal de A sur P.

$$AH = \|\vec{AB} - \frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}^2\|}\vec{u}\|$$

3 Théorème du toit

Soient P_1 et P_2 deux plans sécants suivant une droite d.

Si une droite est parallèle à P_1 et P_2, alors elle est parallèle à d.
S'il existe deux droites parallèles d_1 et d_2, contenues respectivement dans P_1 et P_2, alors d est parallèle à d_1 et d_2.

4 Produits scalaires

Rappels, un produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Un produit scalaire dans une base orthonormée de l'espace se calcule

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

5 Représentation paramétrique

Soit un point A tel que $A(x_a, y_a, z_a)$ et $\vec{(u)} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$.
Soit d la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.
Il existe une représentation paramétrique de cette droite de forme :

$$\begin{cases} x = & t * x_u + x_a \\ y = & t * y_u + y_a \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = & t * z_u + z_a \end{cases}$$

Cette représentation n'est pas unique : il en existe une infinité.

Soit un point $M(x_m, y_m, z_m)$.

$$M \in d \Leftrightarrow M \in d(A; \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{AM} = t\vec{u}; t \in \mathbb{R}$$

Cela revient à résoudre le système d'équation qu'est la représentation paramétrique de d avec $x = x_m; y = y_m; z = z_m$.

6 Équation cartésienne de plan

Soit $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ qui forment le plan P.

Soit $M(x, y, z)$.

$$M \in P \Leftrightarrow ax + by + cz - (\alpha * a + \beta * b + \gamma * c) = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Une équation cartésienne de plan est donc de forme $ax + by + cz - (\alpha * a + \beta * b + \gamma * c) = 0$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
Tous points vérifiant cette équation font partie du plan.