Fonctions

William Hergès

March 19, 2023

1 Introduction

Les fonctions peuvent être dérivées pour aider leurs études. La dérivation permet notamment d'étudier la convexité ainsi que la varation de la fonction.
En effet, la dérivé première, noté f' pour la fonction f, permet d'obtenir la variation de la fonction, c'est-à-dire si elle est croissante ou décroissante.

Une fonction est dérivable s'il s'agit d'un polynôme, ou d'une somme/produit/quotient de fonction dérivable sur I. De plus, les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$

2 Dérivée de fonction simple

Pour dérivée une fonction, on utilise ce tableau suivant dans un grand nombre de cas :

Base	Dérivée
x^n pour $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	x^{-1}
$\sin x$	$\cos$
$\cos$	$\sin$

3 Dérivées de produit ou de quotient de fonctions

Les dérivées de produit ou de quotient ne suivent pas les règles plus haut car on ne dérive pas le contenu de la fonction mais la fonction.

Nous allons d'abord voir les cas généraux :

Forme de Base	Dérivée
$u(x) * v(x)$	$u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)*v(x)-u(x)*v'(x)}{(v(x))^2}$

4 Dérivées de composition de fonctions

Comme pour les dérivées de produit et de quotient, les dérivées de composition de fonctions ne se dérive pas de la même manière que les autres.
Ici, à l'instar des autres méthodes, il existe quelques formules spécifiques qui permettent de dérivée le tout beaucoup plus rapidement.

Commençons d'abord par voir le cas général :

Forme de Base	Dérivée
$u(x) \circ v(x)$ ou $u(v(x))$	$v'(x) * v(u'(x))$

Ensuite, pour aller plus rapidement, nous pouvons retenir des formes spécifiques.

Forme de Base	Dérivée
$e^{u(x)}$	$u'(x) * e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$(u(x))^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$nu'(x)(u(x))^{n-1}$

L'ensemble de définition de ces fonctions composées sont l'ensemble des réels x appartenant à D_v dont l'image par v appartient à D_u.

5 Propriété de la dérivation

La fonction dérivée et sa primitive sont liées.
En effet, la varition de la primitive dépend du signe de sa dérivée. Si sa dérivée est négative sur I, alors elle est décroissante sur I, et si sa dérivée est positive sur I', alors elle est croissante sur I'.

De plus, il existe aussi un lien entre la primitive et sa dérivée seconde.
La convexité dépend de la primitive dépend de sa dérivée seconde. Si sa dérivée seconde est négative sur I, alors elle est concave et sa dérivée est décroissante sur I, et si sa dérivée seconde est positive sur I', alors elle est convexe et sa dérivée est croissante sur I'.

6 Primitive

La primitive est la méthode inverse de la dérivation.
Elle permet de passer de f' à f.

Pour prendre la primitive d'une fonction, il faut utiliser les formules que nous avons vu lors plus haut.

Dérivée	Primitive
x^n	$\frac{x^{n+1}}{x^{n+1}}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$

7 Équation de la tangeante

Équation de la tangeante en un point d'abscisse A avec $f(x)$ la fonction :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Mémotechnique : convexe = forme un V, concave forme une cave.

8 Continuité

Soit $a \in I$.
f est continue en a quand $\lim_{x \to a} = \lim_{x \to -a} = f(a)$.
Les sommes, produits, quotients et compositions de fonctions continues donnent une fonction continue sur son ensemble de définition.
Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

9 Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue et strictement croissante, que $f(a) = \alpha$, que $f(b) = \beta$ et que $\alpha < \beta$, avec $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a < b$; ou si f est continue et strictement décroissante, que $f(a) = \alpha$, que $f(b) = \beta$ et que $\alpha < \beta$, avec $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $b < a$, alors

$$\exists l \in \mathbb{R} / \alpha < l < \beta$$

10 Théorème

Soit f, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et u_n une suite à valeur sur $\mathbb{R}$ défini par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si u_n converge vers l si et seulement si $f(x)$ converge vers l.

$$\lim f(x) = \lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Ainsi :

$$f(l) = l$$

Car $f(x) = f(l)$ car x est quelconque.

11 Logarithme népérien

La fonction $\ln x$ est la fonction réciproque de e^x.

Forme	Simplification
$\ln(a * b)$	$\ln a + \ln b$
$\ln(\frac{a}{b})$	$\ln a - \ln b$
$\ln(a^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$	$n \ln a$

ln est défini sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivé est x^{-1}.

Quelques propriétés et notations découlant de ln :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

La fonction log permet est la réciproque de 10^x et la fonction $\log_a$ est la réciproque de a^x.

12 Limites des logarithmes

La fonction ln et ses dérivées possèdent de nombreuses particularités au niveau des limites.
Quand on applique ces propriétés, on indique "par croissance comparé".

$$\lim_{x \to 0} x^n * \ln x = 0; n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0; n \in \mathbb{Z}$$