

# Calcul matriciel

William Hergès<sup>1</sup>

24 janvier 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Définition</b>	<b>2</b>
1.1	Opérations . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Matrices spéciales</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Système linéaire</b>	<b>5</b>

# 1. Définition

## Définition 1

Une matrice est un l'ensemble de nombre  $\{a_{p,q} \in E, p, q \in \mathcal{SN}\}$  où  $\mathcal{SN}$  est un intervalle de  $\mathbb{N}^*$ . On note l'ensemble de ces matrices  $\mathcal{M}_{p,q}(E)$ .

## Définition 2

Une matrice carrée est l'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{K})$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ).

On utilise l'abus de notation  $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$  pour parler des matrices carrées d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$ .

## 1.1. Opérations

### Définition 3

### Somme de matrices

Une somme de matrice est la somme des nombres des matrices.

Si on note  $(a_{p,q})$  les nombres de la matrice  $A$  et  $(b_{p,q})$  les nombres de la matrice  $B$ , alors

$$A + B = \{a_{p,q} + b_{p,q}, p, q \in \mathcal{SN}\}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,q} + b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} + b_{p,1} & \cdots & a_{p,q} + b_{p,q} \end{pmatrix}$$

### Définition 4

### Produit externe

Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $t \in \mathbb{K}$ .

On a :

$$tA = (ta_{p,q})_{p,q \in \mathcal{SN}}$$

### Proposition 4.1

On a :

- $s(tA) = t(sA)$
- $t(A + B) = tA + tB$
- $(t + s)A = tA + sA$

pour  $t, s \in \mathbb{K}$  et  $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

□ Démonstration. AQT

### Proposition 4.2

L'élément neutre pour l'addition est  $\tilde{0}$ , i.e. l'ensemble  $(a_{p,q})_{p,q \in \mathcal{SN}} = 0$ .

□ *Démonstration.* AQT

### Définition 5

### Produit matriciel

Soient  $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ .

Le produit  $AB$  est :

$$\forall (i, k) \in [[1, p]] \times [[1, q]], \quad (ab)_{i,k} = \sum_{j=1}^r a_{i,j} b_{j,k}$$

### Attention

On a besoin que le nombre de colonnes de la matrice  $A$  soit égal au nombre de lignes de la matrice  $B$ .

C'est une forme de produit scalaire !

## 2. Matrices spéciales

### Définition 6

Une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [1, p]^2, \quad i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

### Proposition 6.1

La multiplication matricielle des matrices diagonales est commutative et se fait très simplement.

### Proposition 6.2

L'élément neutre de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est la matrice diagonale notée  $I_p$  telle que :

$$\forall (i, j) \in [1, p]^2, \quad i = j \implies 1$$

### Définition 7

On note  $A^{-1}$  la matrice inverse de  $A$ , i.e.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_p$$

### Théorème 7.1

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

$A^{-1}$  existe si et seulement si :

$$ad - bc \neq 0$$

où  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Mais qu'est-ce  $ad - bc$ ?**

Il s'agit d'un déterminant de la matrice  $A$ . C'est une notion essentielle que l'on retrouve partout en maths.

### **Théorème 7.2**

Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  l'est aussi et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

### 3. Système linéaire

#### Théorème 7.3

On peut remplacer un système linéaire à  $x$  inconnu par une matrice  $A \in \mathcal{M}_x$  contenant les coefficients,  $X \in \mathcal{M}_{x,1}$  contenant les inconnues et  $B \in \mathcal{M}_{x,1}$  contenant les résultats. On a alors :

$$AX = B$$

Si  $A$  est inversible, alors il existe une unique solution à ce système linéaire telle que :

$$X = A^{-1}B$$

#### Exemple 1

Le système

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,p}x_p & = & b_p \end{array}$$

est équivalent à

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

#### Opérations élémentaires

Ce sont les opérations qui ne font perdre aucune information au système. Il y a :

- permutation de deux lignes, notée  $P_{i_1 \rightarrow i_2}$  (échange des lignes  $i_1$  et  $i_2$ )
- dilatation d'une ligne, notée  $D_{i,\alpha \in \mathbb{R}^*}$  (dilatation de la ligne  $i$  par  $\alpha$ )
- transvection (somme de deux lignes), notée  $T_{i_1, i_2, t \in \mathbb{R}}$  (transvection de la ligne  $i_1$  par  $i_2$  avec comme facteur  $t$ )

C'est-à-dire, on peut faire des combinaisons linéaires !

Faire cette opération, c'est équivalent à multiplier par une matrice carrée inversible.

Par exemple, pour  $P_{2 \rightarrow 3}$ , on a la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou  $D_{2,\alpha \in \mathbb{R}^*}$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore  $T_{2,3,t}$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### **Théorème 7.4**

Si  $r$  est le rang de  $A|B$  (voir le pivot de Gauss), si  $p$  est le nombre de colonnes de  $A$  et  $q$  le nombre de lignes de  $A$ , alors :

- si  $r = p$ , alors pour tout  $B$  il existe une solution (existence)
- si  $r = q$ , alors il existe une unique solution (unicité)