Introduction

William Hergès
Sorbonne Université
william@herges.fr

Table des matières

1. Introduction

Un algorithme est un moyen de décomposer un problème en plein de petites tâches. Une recette de cuisine est un algorithme.

On cherche à trouver un moyen pour analyser les algorithmes et pour choisir le meilleur.

Plan du semestre :
1. Théorie sur les algorithmes ;
2. Structure des données.

Contrôle continu en TD, partiel et examen. Utilise la règle du max.

Les QCM sur Moodle ne sont pas notés. Il y a souvent des QCM aux exams.

2. Rappels mathématiques

Raisonnements valides :

1. calculatoire
2. raisonnements logiques
   - directe
   - absurde
   - contraposé
3. par récurrence

C'est du blabla pour nous rappeler comment on fait des maths.

Ne pas oublier que :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

3. Solution générale des suites

3.1. Suites récurrente linéaire homogène d'ordre 2

△ Définition

Une *suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2* est une suite définie par une relation de récurrence

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$$

avec des conditions initiales

$$u_0 = a_0 \quad u_1 = a_1$$

où a, b, a_0 et a_1 sont des nombres réels.

△ Définition

On définit le *polynôme caractéristique* associé à la suite récurrente précédente le polynôme :

$$r^2 + ar - b$$

Par exemple, le polynôme associé à la suite de Fibonacci est

$$r^2 - r - 1$$

3.1.1. Méthode pour déterminer la solution

On calcule les racines du *polynôme caractéristique*.

Si le polynôme possède deux racines r_1, et r_2, alors la solution générale de la récurrence est de la forme :

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

On détermine ensuite α et β à l'aide des conditions initiales :

$$\alpha + \beta = a_0$$

$$\alpha r_1 + \beta r_2 = a_1$$

Si le polynôme possède une racine r, alors la solution générale est de la forme :

$$u_n = \alpha r^n + \beta n r^n$$

α et β sont déterminés comme dans le cas précédent.

3.2. Autres cas

Voir le diapo, car le prof n'a pas détaillé et est allé très vite.

4. Notations de Landau

Δ Définition

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$.

On écrit $f \in O(g)$ si :

$$\exists D > 0, \exists n_0 \geq 0, \quad \forall n > n_0, \quad f(n) \leq Dg(n)$$

On écrit $f \in \Omega(g)$ si :

$$\exists C > 0, \exists n_0 \geq 0, \quad \forall n > n_0, \quad Cg(n) \leq f(n)$$

On écrit $f \in \Theta(g)$ si :

$$\exists D >, \exists C > 0, \exists n_0 \geq 0, \quad \forall n > n_0, \quad Cg(n) \leq f(n) \leq Dg(n)$$

Autrement dit

- si $f \in O(g)$, alors f croit plus lentement que g ;
- si $f \in \Omega(g)$, alors f croit plus vite que g, i.e. $g \in O(f)$;
- si $f \in \Theta(g)$, alors f croit aussi vite que g, i.e. $f \in O(g)$ et $f \in \Omega(g)$.

Π Proposition

Dans le cas où $\frac{f(n)}{g(n)}$ adment une limite dans n tend vers $+\inf$, si :

- $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, alors $f \in O(g)$;
- $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = +\inf$, alors $f \in \Omega(g)$;
- $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = l$ (où $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), alors $f \in \Theta(g)$.