BÀI TẬP CÁ NHÂN MÔN THỐNG KÊ NHIỀU CHIỀU

Tuần 5

Đinh Anh Huy - 18110103

Bài tập 4.6. Cho $\mathbf{X}$ có phân phối $\mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, trong đó

$$\boldsymbol{\mu} = [1, -1, 2]^T \quad \text{và} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Các biến ngẫu nhiên nào sau đây độc lập với nhau? Giải thích.

(a) X_1 và X_2

(b) X_1 và X_3

(c) X_2 và X_3

(d) (X_1, X_3) và X_2

(e) X_1 và $X_1 + 3X_2 - 2X_3$

Lời giải

Ta có kết quả 4.5 phát biểu như sau

(i) Nếu $\underset{(q_1\times 1)}{\mathbf{X}_1}$ và $\underset{(q_2\times 1)}{\mathbf{X}_2}$ độc lập với nhau thì $Cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{0}$.

(ii) Nếu $\left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \hdashline \mathbf{X}_2 \end{array}\right] \sim \mathcal{N}_{q_1+q_2}\left(\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \hdashline \boldsymbol{\mu}_2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \hdashline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array}\right]\right)$, thì $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ độc lập với nhau khi và chỉ khi $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$.

Sử dụng kết quả trên để giải bài toán.

(a) Ta có một phân hoạch của $\mathbf{X}$ là

$$\left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \hdashline X_3 \end{array}\right] \sim \mathcal{N}_3\left(\left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc:c} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \hdashline \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array}\right]\right)$$

Khi đó ta có

$$\left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hdashline X_2 \end{array}\right] \sim \mathcal{N}_2\left(\left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c:c} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \hdashline \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{array}\right]\right)$$

Do X_1 và X_2 có phân phối chuẩn 2 chiều và hiệp phương sai $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12} = 0$ nên X_1 và X_2 độc lập với nhau.

(b) Do $Cov(X_1, X_3) = \sigma_{13} = -1 \neq 0$ nên X_1 và X_3 không độc lập với nhau.

(c) Ta có một phân hoạch của $\mathbf{X}$ là

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \hdashline X_1 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_3 \left(\begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \hdashline \mu_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{21} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \hdashline \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \right)$$

Khi đó ta có

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ \hdashline X_3 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_2 \left(\begin{bmatrix} \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \hdashline \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \right)$$

Do X_2 và X_3 có phân phối chuẩn 2 chiều và hiệp phương sai $Cov(X_2, X_3) = \sigma_{23} = 0$ nên X_2 và X_3 độc lập với nhau.

(d) Ta có một phân hoạch của $\mathbf{X}$ là

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \hdashline \mathbf{X}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ \hdashline X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_3 \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_3 \\ \hdashline \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} & \sigma_{12} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} & \sigma_{32} \\ \hdashline \sigma_{21} & \sigma_{23} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

Ta có

$$\mathbf{\Sigma_{12}} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Do (X_1, X_3) và X_2 có phân phối chuẩn 3 chiều và hiệp phương sai $Cov((X_1, X_3), X_2) = \mathbf{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ nên (X_1, X_3) và X_2 độc lập với nhau.

(e) Ta có kết quả 4.3: Nếu $\mathbf{X}$ có phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ thì q tổ hợp tuyến tính

$$\underset{(q\times p)}{\mathbf{A}}\underset{(p\times 1)}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + ... + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + ... + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qp}X_p \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^T).$$

Xét ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Theo kết quả 4.3 ta có

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 + 3X_2 - 2X_3 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_3(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^T)$$

trong đó

$$\mathbf{A\Sigma A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 61 \end{bmatrix}$$

Do $Cov(X_1, (X_1 + 2X_3 - 3X_3)) = 6 \neq 0$ nên X_1 và $X_1 + 3X_2 - 2X_3$ không độc lập với nhau.

Bài tập 4.7. Từ bài tập 4.6, làm rõ các ý sau

(a) Phân phối có điều kiện của X_1, biết rằng $X_3 = x_3$.

(b) Phân phối có điều kiện của X_1, biết rằng $X_2 = x_2$ và $X_3 = x_3$.

Lời giải

Ta có kết quả 4.6 như sau: Cho $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \hline \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ có phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ với $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \hline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array}\right]$ và $|\boldsymbol{\Sigma}_{22}| > 0$. Khi đó phân phối có điều kiện của $\mathbf{X}_1$, biết rằng $\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$, là phân phối chuẩn và có

$$\text{Mean} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

và

$$\text{Covariance} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$$

(a) Từ bài tập 4.6, ta có một phân hoạch của $\mathbf{X}$ là

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ \hline X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_3\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_3 \\ \hline \mu_2 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{cc|c} \sigma_{11} & \sigma_{13} & \sigma_{12} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} & \sigma_{32} \\ \hline \sigma_{21} & \sigma_{23} & \sigma_{22} \end{array}\right] \right)$$

Khi đó ta có

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \hline X_3 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \hline \mu_3 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c|c} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \hline \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{array}\right] \right)$$

Từ kết quả 4.6, ta có phân phối có điều kiện của X_1, biết rằng $X_3 = x_3$, là phân phối chuẩn có

$$\mu = \mu_1 + \sigma_{13}\sigma_{33}^{-1}(x_3 - \mu_3) = 1 - \frac{1}{2}(x_3 - 2) = 1 - 0.5(x_3 - 2) = 2 - 0.5x_3$$

và

$$\sigma^2 = \sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{33}^{-1} = 4 - \frac{(-1)^2}{2} = 3.5$$

Vậy $X_1|x_3 \sim \mathcal{N}(\mu = (2 - 0.5x_3), \sigma^2 = 3.5)$.

(b) Từ bài tập 4.6, ta có một phân hoạch của $\mathbf{X}$ là

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \hline \mathbf{X}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_3 \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \hline \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c|cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \hline \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array}\right] \right) = \mathcal{N}_3 \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mu}_1 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \hline \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{array}\right] \right)$$

Từ kết quả 4.6, ta có phân phối có điều kiện của X_1, biết rằng $X_2 = x_2, X_3 = x_3$, là phân phối chuẩn có

$$\begin{aligned} \mu = \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} \begin{bmatrix} x_2 - \mu_2 \\ x_3 - \mu_3 \end{bmatrix} &= 1 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{bmatrix} \\ &= 1 + \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{bmatrix} \\ &= 1 - 0.5(x_3 - 2) = 2 - 0.5x_3 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} &= 4 - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 4 - 0.5 = 3.5 \end{aligned}$$

Vậy $X_1 | x_2, x_3 \sim \mathcal{N}(\mu = (2 - 0.5x_3), \sigma^2 = 3.5)$.

Bài tập 4.8. (Ví dụ về một phân phối hai chiều không tuân theo phân phối chuẩn nhưng có các phân phối lề chuẩn) Cho X_1 có phân phối $\mathcal{N}(0, 1)$ và

$$X_2 = \begin{cases} -X_1 & \text{nếu } -1 \le X_1 \le 1 \\ X_1 & \text{Trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng

(a) X_2 cũng có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0, 1)$.

(b) X_1 và X_2 không tuân theo phân phối chuẩn hai chiều.

Lời giải

(a) Để chứng minh X_2 cũng tuân theo phân phối chuẩn tắc, ta cần chứng minh $P[X_2 \le x_2] = P[X_1 \le x_2]$ với mọi x_2. Do $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ nên $P[-1 < X_1 \le x] = P[-x \le X_1 < 1]$ với mọi x (tính chất đối xứng của phân phối chuẩn tắc). Khi đó, xét các trường hợp của x_2 ta được

* Với $x_2 < -1$ thì $X_2 = X_1$ và $P[X_2 \leq x_2] = P[X_1 \leq x_2]$.

* Với $-1 \leq x_2 \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} P[X_2 \leq x_2] &= P[X_2 \leq -1] + P[-1 < X_2 \leq x_2] \\ &= P[X_1 \leq -1] + P[-1 < -X_1 \leq x_2] \\ &= P[X_1 \leq -1] + P[-x_2 \leq X_1 < 1] \\ &= P[X_1 \leq -1] + P[-1 \leq X_1 < x_2] \\ &= P[X_1 \leq x_2] \end{aligned}$$

* Với $x_2 > 1$, ta có

$$\begin{aligned} P[X_2 \leq x_2] &= P[X_2 \leq -1] + P[-1 < X_2 \leq 1] + P[1 < X_2 \leq x_2] \\ &= P[X_1 \leq -1] + P[-1 < -X_1 \leq 1] + P[1 < X_1 \leq x_2] \\ &= P[X_1 \leq -1] + P[-1 \leq X_1 < 1] + P[1 < X_1 \leq x_2] \\ &= P[X_1 \leq -1] + P[-1 < X_1 \leq 1] + P[1 < X_1 \leq x_2] \\ &= P[X_1 \leq x_2] \end{aligned}$$

Do đó $P[X_2 \leq x_2] = P[X_1 \leq x_2]$ với mọi x_2. Do $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ nên X_2 cũng tuân theo phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$.

(b) Ta có kết quả sau: Nếu Z là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn thì $P[Z = 0] = 0$.

Ta xét tổ hợp tuyến tính của X_1 và X_2 là $X_1 - X_2$, khi đó ta có

$$P[X_1 - X_2 = 0] = P[X_2 = X_1] = P[|X_1| > 1] = 2(1 - \phi(1)) \approx 0.31732 \neq 0$$

Do $P[X_1 - X_2 = 0] \neq 0$ nên $X_1 - X_2$ không có phân phối chuẩn hai chiều hay X_1 và X_2 không có phân phối chuẩn hai chiều.

Bài tập 4.9. Từ bài tập 4.8, thay giá trị 1 thành c như sau

$$X_2 = \begin{cases} -X_1 & \text{nếu } -c \leq X_1 \leq c \\ X_1 & \text{Trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng c có thể được chọn sao cho $Cov(X_1, X_2) = 0$, nhưng hai biến ngẫu nhiên không độc lập với nhau.

Lời giải

- Với $c = 0$, ta có

$$X_2 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } X_1 = 0 \\ X_1 & \text{Trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

hay $X_2 = X_1$ nếu $c = 0$. Khi đó , ta có

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = E[X_1X_2] = E[X_1^2] = Var(X_1) = 1$$

- Với $c \to \infty$, ta có $X_2 = -X_1$. Khi đó

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = E[X_1X_2] = E[-X_1^2] = -E[X_1^2] = -Var(X_1) = -1$$

Theo định lý giá trị trung gian thì sẽ tồn tại giá trị $c > 0$ sao cho $Cov(X_1, X_2) = 0$. Mặt khác, theo định nghĩa của X_2 thì X_1 và X_2 phụ thuộc nhau với mọi giá trị c.