BÀI TẬP CÁ NHÂN MÔN THỐNG KÊ NHIỀU CHIỀU

Tuần 3

Đinh Anh Huy - 18110103

Bài tập 4.14. Cho vectơ ngẫu nhiên $\mathbf{X}$ có phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ với $|\boldsymbol{\Sigma}| \neq 0$. Chứng minh rằng hàm mật độ đồng thời có thể được viết dưới dạng tích của các hàm mật độ lề của

$$\underset{(q\times 1)}{\mathbf{X}_1} \quad \text{và} \quad \underset{((p-q)\times 1)}{\mathbf{X}_2} \quad \text{nếu} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \underset{(q\times(p-q))}{\mathbf{0}}.$$

Lời giải

Ta có $\underset{(q\times 1)}{\mathbf{X}_1}$ và $\underset{((p-q)\times 1)}{\mathbf{X}_2}$ là các phân hoạch của $\mathbf{X}$ với $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$ và $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$, $|\boldsymbol{\Sigma}| \neq 0$.
Do đó

$$\begin{cases} E(\mathbf{X}_1) = \boldsymbol{\mu}_1 \\ Var(\mathbf{X}_1) = \boldsymbol{\Sigma}_{11} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} E(\mathbf{X}_2) = \boldsymbol{\mu}_2 \\ Var(\mathbf{X}_2) = \Sigma_{22} \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

Suy ra nghịch đảo của $\boldsymbol{\Sigma}$ là

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

vì

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{p-q} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_p.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) &= \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)^T & (\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1) \\ (\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2) \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)^T\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1) + (\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)^T\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2). \end{aligned}$$

Mặc khác, ta có kết quả sau

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

với $\underset{(k\times k)}{\mathbf{A}}$, $\underset{(m\times m)}{\mathbf{B}}$ là các ma trận vuông. Thật vậy,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix}$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \underset{(k\times k)}{\mathbf{A}} & \underset{(k\times m)}{\mathbf{0}} \\ \underset{(m\times k)}{\mathbf{0}} & \underset{(m\times m)}{\mathbf{I}} \end{vmatrix} &= (-1)^{2(k+m)} \begin{vmatrix} \underset{(k\times k)}{\mathbf{A}} & \underset{(k\times (m-1))}{\mathbf{0}} \\ \underset{((m-1)\times k)}{\mathbf{0}} & \underset{((m-1)\times (m-1))}{\mathbf{I}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{(k\times k)}{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2(k+m-1)} \begin{vmatrix} \underset{(k\times k)}{\mathbf{A}} & \underset{(k\times (m-2))}{\mathbf{0}} \\ \underset{((m-2)\times k)}{\mathbf{0}} & \underset{((m-2)\times (m-2))}{\mathbf{I}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{(k\times k)}{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-2} \end{vmatrix} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{2(k+2)} \begin{vmatrix} \underset{(k\times k)}{\mathbf{A}} & \underset{(k\times 1)}{\mathbf{0}} \\ \underset{(1\times k)}{\mathbf{0}} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{(k\times k)}{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2(k+1)} |\underset{(k\times k)}{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|
\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underset{(m\times m)}{\mathbf{B}} \end{vmatrix} = |\mathbf{B}|$$

Khi đó

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

Áp dụng kết quả trên vào bài toán ta được

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{vmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{\Sigma}_{11}||\mathbf{\Sigma}_{22}|$$

Khi đó hàm mật độ đồng thời của $\mathbf{X}$ được biến đổi thành

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} e^{-(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\mathbf{\Sigma}_{11}|^{1/2}|\mathbf{\Sigma}_{22}|^{1/2}} e^{-(\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)^T\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)-(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)^T\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{q/2}|\mathbf{\Sigma}_{11}|^{1/2}} e^{-(\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)^T\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)} \frac{1}{(2\pi)^{(p-q)/2}|\mathbf{\Sigma}_{22}|^{1/2}} e^{-(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)^T\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)} \\
&= f(\mathbf{x}_1)f(\mathbf{x}_2)
\end{aligned}$$

Như vậy, hàm mật độ đồng thời của $\mathbf{X}$ có thể được viết dưới dạng tích của các hàm mật độ lề của các phân hoạch của $\mathbf{X}$.

Bài tập 4.15. Chứng minh rằng $\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T$ và $\sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})^T$ đều là *ma trận không* kích thước $p \times p$, trong đó $\mathbf{x}_j = [x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jp}]^T, j = 1, 2, ..., n$ và

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T &= \left[\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})\right](\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j - n\overline{\mathbf{x}}\right)(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \\
&= (n\overline{\mathbf{x}} - n\overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T = \mathbf{0}.(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})^T &= (\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})^T \\
&= (\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})\left[\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})\right]^T \\
&= (\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(n\overline{\mathbf{x}} - n\overline{x})^T = (\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}).\mathbf{0}^T = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T = \sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})^T = \mathbf{0}.$$

Bài tập 4.16. Cho $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ và $\mathbf{X}_4$ là các vectơ ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

(a) Tìm phân phối biên cho mỗi vectơ ngẫu nhiên

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$$

và

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$$

(b) Tìm hàm mật độ đồng thời của hai vectơ ngẫu nhiên $\mathbf{V}_1$ và $\mathbf{V}_2$ được định nghĩa ở (a).

Lời giải

(a) Ta có kết quả "Cho $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ là các vectơ ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Khi đó tổ hợp tuyến tính $\mathbf{V} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_n\mathbf{X}_n$ tuân theo phân phối $\mathcal{N}_p\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{\mu}, \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma}\right)$".

Do $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ là các vectơ ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ và

* Với $\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$ ta có

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{V}_1) &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\boldsymbol{\mu} = 0.\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \\
Var(\mathbf{V}_1) &= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}
\end{aligned}$$

nên từ kết quả trên ta suy ra $\mathbf{V}_1 \sim \mathcal{N}_p\left(\mathbf{0}, \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}\right)$.

* Tương tự với $\mathbf{V}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$ ta có

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{V}_1) &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\boldsymbol{\mu} = 0.\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \\
Var(\mathbf{V}_1) &= \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}
\end{aligned}$$

nên từ kết quả trên ta suy ra $\mathbf{V}_2 \sim \mathcal{N}_p\left(\mathbf{0}, \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}\right)$.

(b) Với kết quả "Cho $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ là các vectơ ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Khi đó $\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix}$ có phân phối là

$$\mathcal{N}_{2p}\left(\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{\mu} \\ \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{\mu}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{b}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\Sigma} & \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma}\end{bmatrix}\right)$$

trong đó $\mathbf{V}_1 = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_n\mathbf{X}_n$ và $\mathbf{V}_2 = b_1\mathbf{X}_1 + b_2\mathbf{X}_2 + ... + b_n\mathbf{X}_n$", thì khi đó với

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4 \\
\mathbf{V}_2 &= \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4
\end{aligned}$$

ta có

$$\mathbf{b}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\Sigma} = \left(\frac{1}{4}.\frac{1}{4} - \frac{1}{4}.\frac{1}{4} - \frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{4}.\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{\Sigma} = 0.\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$$

Từ câu (a) ta có

$$\sum_{j=1}^{4} c_j\boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^{4} b_j\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0},$$
$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}$$

Từ kết quả trên ta suy ra được

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_{2p}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}\end{bmatrix}\right).$$

Như vậy hàm mật độ đồng thời của $\mathbf{V}_1$ và $\mathbf{V}_2$ là

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{(2\pi)^{(2p)/2}|\frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}|\frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\mathbf{v}_1^T\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}\right)^{-1}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2^T\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}\right)^{-1}\mathbf{v}_2}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^p\frac{1}{4}|\boldsymbol{\Sigma}|} e^{-4\left(\mathbf{v}_1^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{v}_2\right)}. \end{aligned}$$

Bài tập 4.17. Cho $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ và $\mathbf{X}_5$ là các vectơ ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối với vectơ trung bình $\boldsymbol{\mu}$ và ma trận hiệp phương sai $\boldsymbol{\Sigma}$. Tìm vectơ trung bình và ma trận hiệp phương sai của các tổ hợp tuyến tính của các vectơ ngẫu nhiên

$$\frac{1}{5}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_3 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_4 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_5$$

và

$$\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5$$

theo $\boldsymbol{\mu}$ và $\boldsymbol{\Sigma}$. Ngoài ra, có thể thu được hiệp phương sai giữa hai tổ hợp tuyến tính trên.

Lời giải

Ta có kết quả "Cho $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ là các vectơ ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Khi đó tổ hợp tuyến tính $\mathbf{V} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_n\mathbf{X}_n$ tuân theo phân phối $\mathcal{N}_p\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{\mu}, \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\boldsymbol{\Sigma}\right)$".

Do $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ là các vectơ độc lập và có cùng phân phối $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ nên từ kết quả trên

* Với $\mathbf{V}_1 = \frac{1}{5}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_3 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_4 + \frac{1}{5}\mathbf{X}_5$, ta có

$$\begin{aligned} E(\mathbf{V}_1) &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \\ Var(\mathbf{V}_1) &= \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \left(\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}\right)\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \frac{1}{5}\boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

* Với $\mathbf{V}_2 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5$, ta có

$$\begin{aligned} E(\mathbf{V}_2) &= (1-1+1-1+1)\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \\ Var(\mathbf{V}_2) &= \left(1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2\right)\boldsymbol{\Sigma} \\ &= 5\boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

Hơn nữa ta có

$$Cov(\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2) = \mathbf{b}^T\mathbf{c}\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{5}\Sigma.$$

Bài tập 4.18. Tìm ước lượng hợp lý cực đại của vectơ trung bình $\underset{(2\times 1)}{\boldsymbol{\mu}}$ và ma trận hiệp phương sai $\underset{(2\times 2)}{\boldsymbol{\Sigma}}$ dựa trên mẫu ngẫu nhiên

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

được lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn hai chiều.

Lời giải

$\mathbf{X}$ là mẫu ngẫu nhiên được lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn 2 chiều

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{X}_2^T \\ \mathbf{X}_3^T \\ \mathbf{X}_4^T \end{bmatrix}$$

trong đó $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}^T, \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}^T, \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}^T, \mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 7 \end{bmatrix}^T$.
Do $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ là các vectơ ngẫu nhiên được lấy từ tổng thể có phân phối $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ nên ta có ước lượng hợp lý cực đại của $\boldsymbol{\mu}$ là

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}_i = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

và ước lượng hợp lý cực đại của $\boldsymbol{\Sigma}$ là

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})^T$$

Ta có

$$(\mathbf{x}_1 - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_1 - \overline{\mathbf{x}})^T = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$(\mathbf{x}_2 - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_2 - \overline{\mathbf{x}})^T = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$(\mathbf{x}_3 - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_3 - \overline{\mathbf{x}})^T = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$(\mathbf{x}_4 - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_4 - \overline{\mathbf{x}})^T = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó
$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 3/2 \end{bmatrix}$$