Tailieumontoan.com

Sưu tầm và tổng hợp

40 ĐỀ TOÁN VÀO LỚP 10

CÁC TRƯỜNG THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2020

TRƯỜNG THCS MINH KHAI | **ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10**

MÔN: TOÁN 9

Đề số 1 | **Ngày thi: 09/4/2018**

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+12}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\left(\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{A}{B}$.

Bài 2: (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một công nhân dự định làm 33 sản phẩm trong thời gian đã định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 62 sản phẩm. Do vậy mặc dù người đó đã làm tăng mỗi giờ 3 sản phẩm song vẫn hoàn thành chậm hơn dự định 1 giờ 30 phút. Tính năng suất dự định.

Bài 3: (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x-3}-\dfrac{1}{y+1}=1 \\ \sqrt{x-3}+\dfrac{2}{y+1}=5 \end{cases}$

2) Cho parabol $y=x^2\,(P)$ và đường thẳng $y=mx-m+1\,(d)$

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với $m=-3$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2$.

Bài 4: (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB vuông góc với dây cung MN tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ sao cho đoạn thẳng AC cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm K khác A, hai dây MN và BK cắt nhau ở E.

a) Chứng minh rằng $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CA.CK=CE.CH$.

c) Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia MK tại F. Chứng minh ΔNFK cân.

d) Giả sử $KE=KC$. Chứng minh $OK\,//\,MN$.

Bài 5 (0,5 điểm): Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác biết: $a+b-c>0$; $b+c-a>0$; $c+a-b>0$. Chứng minh $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A=\frac{x+12}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{A}{B}$.

a) Thay $x=9$ (TMĐK) vào A ta có: $A=\frac{9+12}{\sqrt{9}-1}=\frac{21}{3-1}=\frac{21}{2}$

Vậy $x=9$ thì $A=\frac{21}{2}$

b) Điều kiện: $x\ge 0, x\ne 1$

$$B=\frac{3+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}:\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{1}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $B=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$.

c) Ta có: $M=\frac{A}{B}=\frac{x+12}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$

$$M=\frac{x+12}{\sqrt{x}+2}=\frac{x-4+16}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}-2+\frac{16}{\sqrt{x}+2}=\left(\sqrt{x}+2+\frac{16}{\sqrt{x}+2}\right)-4\ge 2\sqrt{16}-4=4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+2=\frac{16}{\sqrt{x}+2}\Leftrightarrow x=4$ (TMĐK)

Vậy min $M=4$ khi $x=4$

Bài 2: (2 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một công nhân dự định làm 33 sản phẩm trong thời gian đã định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 62 sản phẩm. Do vậy mặc dù người đó đã làm tăng mỗi giờ 3 sản phẩm song vẫn hoàn thành chậm hơn dự định 1 giờ 30 phút. Tính năng suất dự định.

Gọi năng suất dự định của người công nhân là x (sản phẩm/giờ) (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$)

Năng suất thực tế của người công nhân là $x+3$ (sản phẩm/giờ)

Thời gian dự định làm xong 33 sản phẩm là: $\frac{33}{x}$ (giờ)

Thời gian thực tế làm xong 62 sản phẩm là: $\frac{62}{x+3}$ (giờ)

Vì thực tế người công nhân hoàn thành chậm hơn dự định 1 giờ 30 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{62}{x+3} - \frac{33}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{62x - 33(x+3)}{x(x+3)} = \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 49x + 198 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 27x - 22x + 198 = 0$

$\Leftrightarrow (x-9)(3x-22) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 9$ (Thỏa mãn); $x_2 = \frac{22}{3}$ (loại)

Vậy năng suất dự kiến là 9 sản phẩm/giờ

Bài 3: (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x-3} - \frac{1}{y+1} = 1 \\ \sqrt{x-3} + \frac{2}{y+1} = 5 \end{cases}$

2) Cho parabol $y = x^2 (P)$ và đường thẳng $y = mx - m + 1 (d)$

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với $m = -3$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2$.

1) Điều kiện: $x \geq 3; y \neq 0$

Đặt $a = \sqrt{x-3}$ $(a \geq 0)$ $, b = \frac{1}{y+1}$. Hệ trở thành:

$\begin{cases}3a-b=1\\a+2b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a-2b=2\\a+2b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-b=1\\7a=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a=1\end{cases}$ (thỏa mãn)

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y+1}=2\\\sqrt{x-3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+1=\dfrac{1}{2}\\x-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{-1}{2}\\x=4\end{cases}$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y)=\left(4\,;\,\dfrac{-1}{2}\right)$.

2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2-mx+m-1=0$ (1)

a) Thay $m=-3$ có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$x^2+3x-4=0\Leftrightarrow(x-1)(x+4)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$

Với $x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow A(1;1)$

Với $x=-4\Rightarrow y=16\Rightarrow B(-4;16)$

Vậy khi $m=-3$ thì tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $A(1;1)$, $B(-4;16)$

b) Xét phương trình (1), ta có: $\Delta=m^2-4m+4=(m-2)^2$

Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 , x_2

$\Leftrightarrow\Delta>0\Rightarrow(m-2)^2>0$

$\Leftrightarrow m\neq2$

Hệ thức Vi – ét: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1.x_2=m-1\end{cases}$

Theo đều bài: $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2.\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-(x_1+x_2)=0$ (*)

Thay hệ thức Vi – ét vào (*) ta được: $m^2-2(m-1)-m=0\ \Leftrightarrow m^2-3m+2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\ (TM)\\m=2\ (L)\end{array}\right.$

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4: (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB vuông góc với dây cung MN

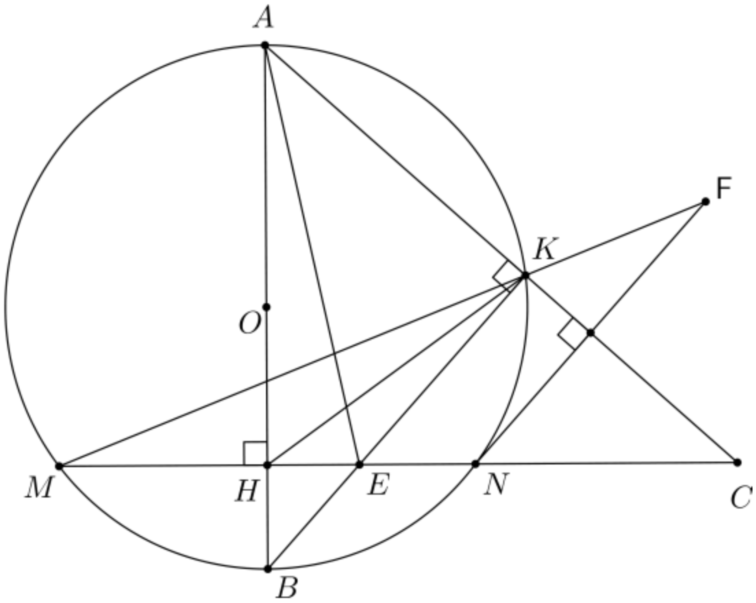
tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ sao cho đoạn thẳng AC cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm K khác A, hai dây MN và BK cắt nhau ở E.

a) Chứng minh rằng $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CA.CK = CE.CH$.

c) Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia MK tại F. Chứng minh ΔNFK cân.

d) Giả sử $KE = KC$. Chứng minh $OK // MN$.



a) Chứng minh rằng $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $AB \perp MN$ tại H (giả thiết) ; $E \in MN$ $\Rightarrow \widehat{AHE} = 90^\circ$

Xét (O) có $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $E \in KB \Rightarrow \widehat{AKE} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AKEH$ có $\widehat{AKE}$, $\widehat{AHE}$ là hai góc đối và $\widehat{AKE} + \widehat{AHE} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKEH$ là tứ giác nội tiếp. (dhnb) (đpcm)

b) Chứng minh $CA.CK = CE.CH$.

Xét ΔCAE và ΔCHK có:

$\widehat{ACH}$ chung

$\widehat{CAE} = \widehat{CHK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AKEH$)

$\Rightarrow \Delta CAE \backsim \Delta CHK$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CH} = \dfrac{CE}{CK}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow CA.CK = CE.CH.$ **(đpcm)**

b) Chứng minh ΔNFK **cân.**

Xét (O), ta có AB là đường kính, MN là dây cung và $AB \perp MN$ tại H (giả thiết)

$\Rightarrow$ B là điểm chính giữa $\overset\frown{MN}$

$\Rightarrow \overset\frown{MB} = \overset\frown{NB}$

$\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{NKB}$ (hai gcs nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)

Xét (O) có $\widehat{AKB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và có A, K, C thẳng hàng

$\Rightarrow BK \perp AC$ tại K

Mà $NF \perp AC$ (giả thiết)

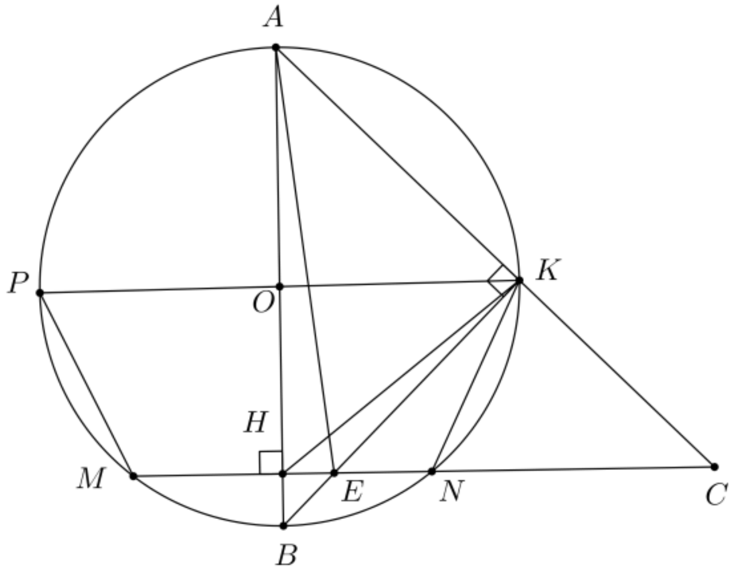
$\Rightarrow BK // NF$

$\Rightarrow \widehat{KFN} = \widehat{MKB}$ (hai góc đồng vị) và $\widehat{KNF} = \widehat{NKB}$ (hai góc sole trong) (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{KFN} = \widehat{KNF}$

$\Rightarrow \Delta NKF$ cân tại K.

d) Chứng minh $OK // MN.$



Ta có $\widehat{AKB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BKC} = 90^0 \Rightarrow \Delta KEC$ vuông tại K

Theo giả thiết ta lại có $KE = KC$ nên tam giác KEC vuông cân tại K

$\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{KEC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{OBK} = 45^0$

Mặt khác vì ΔOBK cân tại O (do $OB = OK = R$)

$\Rightarrow \Delta OBK$ vuông cân tại O $\Rightarrow OK \perp AB$

$\Rightarrow$ $OK // MN$ (cùng vuông góc với AB)

Bài 5 (0,5 điểm): Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác biết: $a + b - c > 0$; $b + c - a > 0$; $c + a - b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với $x > 0, y > 0$ ta có $x + y \ge 2\sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \ge \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y} (*)$$

Dâu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \ge \frac{4}{a+b-c+b+c-a} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b} (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, với $x > 0, y > 0$ ta có $x + y \ge 2\sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \ge \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y} \quad (*)$$

Dâu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \ge \frac{4}{a+b-c+b+c-a} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b} \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{b+c-a} \ge \frac{2}{c} (2) \qquad \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \ge \frac{2}{a} (3)$$

Cộng $(1),(2),(3)$ vế với vế ta có:

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

PHÒNG GD&ĐT QUẬN BA ĐÌNH
TRƯỜNG THCS MẠC ĐĨNH CHI
NGUYỄN TRÃI – HOÀNG HOA THÁM

Đề số 2

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT
MÔN: TOÁN 5/5/2018
NĂM HỌC 2017 – 2018

Bài I. Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{5\sqrt{x}+12}{x-16}$ với $x\geq 0$, $x\neq 16$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm m để phương trình $\dfrac{A}{B}=m+1$ có nghiệm.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Để chở hết 80 tấn quà tặng đồng bào nghèo ở vùng cao đón Tết, một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại. Lúc sắp khởi hành có 4 xe phải điều đi làm việc khác. Vì vậy mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng mới hết. Tính số xe lúc đầu của đội biết rằng khối lượng hàng các xe phải chở là như nhau.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=2\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=1\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-mx+m-2=0$ (1), trong đó m là tham số, x là ẩn số.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình mà không phụ thuộc vào m.

b) Tìm m để cả hai nghiệm của phương trình đều là số nguyên.

Bài IV. Trên nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, lấy điểm C $(CA<CB)$. Hạ CH vuông góc với AB tại H. Đường tròn đường kính CH cắt AC và BC thứ tự tại M, N.

1) Chứng minh tứ giác $HMCN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh tứ giác $AMNB$ là tứ giác nội tiếp.

3) Tia NM cắt tia BA tại K, lấy điểm Q đối xứng với H qua K. Chứng minh QC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

4) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMNB$ trong trường hợp $AC=R$.

Bài V. Tìm $x, y\geq 0$ sao cho $\left(x^2+4y+8\right)\left(y^2+4x+8\right)=\left(3x+5y+4\right)\left(5x+3y+4\right)$.

HƯỚNG DẪN

Bài I. Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{5\sqrt{x}+12}{x-16}$ với $x\geq 0$, $x\neq 16$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm m để phương trình $\dfrac{A}{B}=m+1$ có nghiệm.

1) Với $x=9$ (thỏa mãn điều kiện $x\geq 0$, $x\neq 16$) thì $\sqrt{x}=3$.

Do đó, thay vào biểu thức A ta được $A=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{3+3}{3-4}=-6$.

2) Rút gọn biểu thức B.

$$B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}+\frac{5\sqrt{x}+12}{x-16}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-4\right)+\left(5\sqrt{x}+12\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}$$
$$=\frac{x-\sqrt{x}-12+5\sqrt{x}+12}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}$$
$$=\frac{x+4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$, với $x\geq 0$, $x\neq 16$

3) Ta có $\dfrac{A}{B}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}:\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}=1+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$. với $x\geq 0$, $x\neq 16$

$$\Rightarrow \frac{A}{B}=m+1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}}=m \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{m}$$

Vì $x\geq 0$, $x\neq 16$ nên $\sqrt{x}\geq 0$, $\sqrt{x}\neq 4$.

Do đó, phương trình $\frac{A}{B}=m+1$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m} \geq 0 \\ \frac{3}{m} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases}$

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Để chở hết 80 tấn quà tặng đồng bào nghèo ở vùng cao đón Tết, một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại. Lúc sắp khởi hành có 4 xe phải điều đi làm việc khác. Vì vậy mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng mới hết. Tính số xe lúc đầu của đội biết rằng khối lượng hàng các xe phải chở là như nhau.

Gọi số xe ban đầu là x (xe); điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$, $x>4$.

$\Rightarrow$ Theo dự định, mỗi xe lúc đầu cần phải chở $\frac{80}{\mathrm{x}}$ (tấn).

Vì 4 xe phải điều đi làm việc khác, nên thực tế chỉ còn lại $\mathrm{x}-4$ (xe) dùng để chở 80 tấn hàng.

$\Rightarrow$ Thực tế, mỗi xe còn lại cần phải chở $\frac{80}{\mathrm{x}-4}$ (tấn).

Vì mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn dự định 1 tấn hàng, nên ta có phương trình:

$$\frac{80}{\mathrm{x}-4}-\frac{80}{\mathrm{x}}=1$$

$$\Leftrightarrow 80\mathrm{x}-80(\mathrm{x}-4)=\mathrm{x}(\mathrm{x}-4)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{x}^2-4\mathrm{x}-320=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{x}=20 \quad \text{(thoa man ĐK).} \\ \mathrm{x}=-16 \ \text{(loai)} \end{array}\right.$$

Vậy lúc đầu đội có 20 xe.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}=2 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}=1 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-mx+m-2=0$ (1), trong đó m là tham số, x là ẩn số.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình mà không phụ thuộc vào m.

b) Tìm m để cả hai nghiệm của phương trình đều là số nguyên.

1) Điều kiện $x>0$; $y>1$.

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=a>0$ và $\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=b>0$ (*), ta được hệ:

$$\begin{cases}3a+b=2\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\quad (thoa\ \ man)\\b=\dfrac{1}{2}\quad (thoa\ \ man)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=2\\\sqrt{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y-1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{x}=4\quad (\text{thoa}\ \ \text{man})\\\mathrm{y}=5\quad (\text{thoa}\ \ \text{man})\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(\mathrm{x};\mathrm{y})=(4;5)$

2) Xét phương trình $x^2-mx+m-2=0$ (1), trong đó m là tham số, x là ẩn số.

a) Ta có $\Delta=(-m)^2-4.(m-2)=m^2-4m+8=(m-2)^2+4>0$ với mọi m.

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Hệ thức Vi-ét $\begin{cases}x_1+x_2=m & (2)\\x_1.x_2=m-2 & (3)\end{cases}$

Thay (2) vào (3), ta có: $x_1+x_2-x_1x_2=2$ là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình mà không phụ thuộc vào m.

b) Ta có $x_1+x_2-x_1x_2=2\Leftrightarrow(x_1-1)(1-x_2)=1$ (**).

Bài cho: x_1, $x_2\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x_1-1\in\mathbb{Z}$ và $1-x_2\in\mathbb{Z}$.

Do đó, từ (**) suy ra:

$$\left[\begin{array}{l}x_1-1=1-x_2=1\\x_1-1=1-x_2=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(x_1-1)-(1-x_2)=0\\(x_1-1)-(1-x_2)=0\end{array}\right.\Rightarrow x_1+x_2-2=0\Rightarrow m-2=0\Rightarrow m=2.$$

Thử lại với $m=2$ thì phương trình trở thành

$$x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy cả hai nghiệm của phương trình đều là số nguyên $\Leftrightarrow m=2$

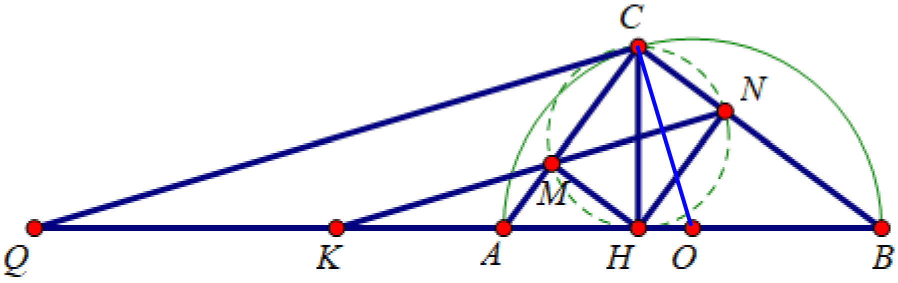
Bài IV. Trên nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, lấy điểm C $(CA<CB)$. Hạ CH vuông góc với AB tại H. Đường tròn đường kính CH cắt AC và BC thứ tự tại M, N.

1) Chứng minh tứ giác $HMCN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh tứ giác $AMNB$ là tứ giác nội tiếp.

3) Tia NM cắt tia BA tại K, lấy điểm Q đối xứng với H qua K. Chứng minh QC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

4) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMNB$ trong trường hợp $AC = R$.



1) Chứng minh tứ giác $HMCN$ là hình chữ nhật.

*** Phân tích:**

$HMCN$ là hình chữ nhật

$\Leftarrow$ cần chỉ ra tứ giác $HMCN$ có 3 góc vuông.

$\Leftarrow$ Cần c/m: $\widehat{CMH} = 90^o$; $\widehat{CNH} = 90^o$ (dùng đường tròn đường kính CH) ; $\widehat{MCN} = 90^o$ hoặc $\widehat{ACB} = 90^o$ (dùng đường tròn (O)).

*** Trình bày lời giải:**

Xét đường tròn đường kính CH có:

$\widehat{CMH} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{CNH} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét $\left(O, \dfrac{AB}{2}\right)$ có:

$\widehat{ACB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{MCN} = 90^0$.

Tứ giác $HMCN$ có 3 góc vuông ($\widehat{CMH} = \widehat{CNH} = \widehat{MCN} = 90^0$) nên theo dấu hiệu nhận biết thì tứ giác $HMCN$ là hình chữ nhật. (đpcm)

2) Chứng minh tứ giác $AMNB$ là tứ giác nội tiếp.

*** Phân tích:**

$AMNB$ là tứ giác nội tiếp

$\Leftarrow$ Cần chứng minh: $\widehat{AMN} + \widehat{ABN} = 180^o$

$\Leftarrow$ Mà $\widehat{AMN} + \widehat{CMN} = 180^o$ (hai góc kề bù) nên cần chứng minh: $\widehat{ABN} = \widehat{CMN}$

$\Leftarrow$ mà $\widehat{CMN} = \widehat{CHN}$ nên cần chứng minh: $\widehat{CHN} = \widehat{ABN}$ hoặc $\widehat{CHN} = \widehat{HBC}$

$\Leftarrow$ Dùng tam giác vuông CHB có HN $\perp$ CB (cần chỉ ra điều này).

*** Trình bày lời giải:**

Theo giả thiết $CH \perp AB$ nên $\widehat{CHB} = 90^o$; cũng có $\widehat{CNH} = 90^o$ (cmt).

$\Rightarrow \Delta CHB$ vuông tại H có HN là đường cao

$\Rightarrow \widehat{CHN} = \widehat{HBC}$ (cùng bằng $90^0 - \widehat{HCN}$) hoặc $\widehat{CHN} = \widehat{ABN}$.

Xét đường tròn đường kính CH có: $\widehat{CHN} = \widehat{CMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{CN}$)

$\Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{ABN}$

Mà $\widehat{AMN} + \widehat{CMN} = 180^o$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{AMN} + \widehat{ABN} = 180^o$

Mà $\widehat{AMN}$; $\widehat{ABN}$ là hai góc đối của tứ giác AMNB .

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMNB$ là tứ giác nội tiếp (định lý) (đpcm).

3) Chứng minh QC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

*** Phân tích:**

QC là tiếp tuyến của $(O;R)$.

$\Leftarrow$ cần c/m: $OC \perp QC$

$\Leftarrow$ cần c/m: $\widehat{QCO} = \widehat{QCM} + \widehat{MCO} = 90^o$

$\Leftarrow$ cần c/m: $\widehat{QCM} = \widehat{OCB}$ (vì $\widehat{MCO} + \widehat{OCB} = \widehat{MCB} = \widehat{ACB} = 90^o$)

$\Leftarrow$ cần c/m: $\widehat{QCM} = \widehat{OBC} = \widehat{ABN}$ (vì chỉ ra được ΔCOB cân tại O)

$\Leftarrow$ cần c/m: $\widehat{QCM} = \widehat{CMN}$ (vì đã có $\widehat{CMN} = \widehat{ABN}$ (cmt))

$\Leftarrow$ mà $\widehat{QCM}$; $\widehat{CMN}$ so le trong nên cần c/m: QC // MN hoặc QC // KN.

*** Trình bày lời giải:**

Gọi I là giao điểm của CH và MN, mà tứ giác CMHN là hình chữ nhật (cmt)

$\Rightarrow$ I là trung điểm của CH (tính chất).

Ta có Q đối xứng với H qua K (giả thiết).

$\Rightarrow$ K là trung điểm của QH (tính chất).

Do đó: KI là đường trung bình của tam giác QHC.

$\Rightarrow$ KI // QC hoặc QC // MN.

$\Rightarrow \widehat{QCM} = \widehat{CMN}$ (hai góc so le trong).

Mà $\widehat{CMN} = \widehat{ABN}$ (cmt) hoặc $\widehat{CMN} = \widehat{OBC}$.

$\Rightarrow \widehat{QCM} = \widehat{OBC}$.

Lại có OB = OC = R $\Rightarrow$ ΔCOB cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

$\Rightarrow \widehat{QCM} = \widehat{OCB}$.

Mà $\widehat{MCO} + \widehat{OCB} = \widehat{MCB} = \widehat{ACB} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{QCO} = \widehat{QCM} + \widehat{MCO} = 90^o$.

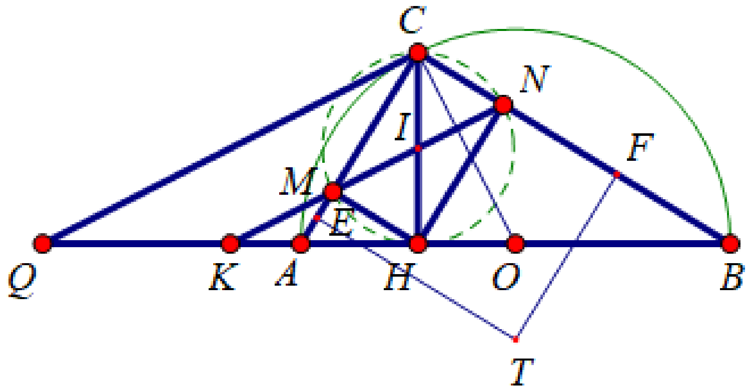
$\Rightarrow OC \perp QC$

$\Rightarrow$ QC là tiếp tuyến tại C của đường tròn (O).

4) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMNB$ trong trường hợp $AC = R$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm AM, BN

Qua E, F kẻ các đường trung trực của AM, BN. Các đường đó cắt nhau tại là T.



Khi đó $\widehat{CET} = \widehat{CFT} = \widehat{ECF} = 90^0$ nên tứ giác $CETF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow TF = CE$

Ta có $AC = OC = OA = R$ (gt) nên ΔABO là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{CAB} = 60^o$.

ΔABC vuông tại C có CH là đường cao (cmt) nên $\widehat{CAB} = 60^o \Rightarrow \widehat{CBA} = 30^o$

Áp dụng hệ thức lượng với tam giác vuông ABC có CH là đường cao ta được

$$AC^2 = AH.AB \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

và $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$

ΔCHA vuông tại H có HM là đường cao (cmt) nên $AH^2 = AM.AC$

Từ E là trung điểm AM suy ra $AE = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}\left(AH^2 : AC\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{4} : R\right) = \frac{R}{8}$

$$\Rightarrow CE = AC - AE = R - \frac{R}{8} = \frac{7R}{8}$$

Tương tự ΔCHB vuông tại H có HN là đường cao (cmt) nên

$$BF = \frac{BN}{2} = \frac{BH^2}{2BC} = \frac{\left(BC.\cos\widehat{CBA}\right)^2}{2.BC} = \frac{\left(BC.\cos 30^o\right)^2}{2.BC} = \frac{\cos^2 30^o}{2}.BC = \frac{3\sqrt{3}}{8}R$$

ΔTFB vuông tại F nên $TB^2 = TF^2 + BF^2 = CE^2 + BF^2 = \left(\frac{7R}{8}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}R\right)^2 = \frac{19R^2}{16}$

$\Rightarrow$ Khi $AC = R$ thì đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMNB$ có bán kính là $TB = \frac{R\sqrt{19}}{4}$

Bài V. Tìm $x, y \geq 0$ sao cho $\left(x^2 + 4y + 8\right)\left(y^2 + 4x + 8\right) = \left(3x + 5y + 4\right)\left(5x + 3y + 4\right)$.

Với mọi biểu thức $a;b\ge 0$ ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Rightarrow ab\le \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

Áp dụng BĐT trên và giả thiết $x,\ y\ge 0$;

$(x^2+4y+8)(y^2+4x+8)=(3x+5y+4)(5x+3y+4)$

Ta được

$$\begin{aligned}16(x+y+1)^2&\le\left[(x-2)^2+4(x+y+1)\right].\left[(y-2)^2+4(x+y+1)\right]\\&=(x^2+4y+8).(y^2+4x+8)\\&=(3x+5y+4).(3y+5x+4)\\&\le\frac{\left[(3x+5y+4)+(3y+5x+4)\right]^2}{4}=\frac{8^2(x+y+1)^2}{4}=16(x+y+1)^2.\end{aligned}$$

Vậy:

$$16(x+y+1)^2\le\left[(x-2)^2+4(x+y+1)\right].\left[(y-2)^2+4(x+y+1)\right]\le 16(x+y+1)^2$$

$$\Rightarrow 16(x+y+1)^2=\left[(x-2)^2+4(x+y+1)\right].\left[(y-2)^2+4(x+y+1)\right]$$

$$\Rightarrow 16(x+y+1)^2=16(x+y+1)^2+(x-2)^2.(y-2)^2+4(x+y+1).\left[(x-2)^2+(y-2)^2\right]$$

$$\Rightarrow (x-2)^2.(y-2)^2+4(x+y+1).\left[(x-2)^2+(y-2)^2\right]=0$$

Do $x;y\ge 0$ nên $x+y+1>0$. Mà $(x-2)^2\ge 0;(y-2)^2\ge 0\ \forall x;y$ nên $(x-2)^2=(y-2)^2=0$

$\Rightarrow x=y=2.$

SỞ GD & ĐT HÀ NỘI

TRƯỜNG THCS LÁNG THƯỢNG

Đề thi thử lần 3 - Tháng 2 – 2018

Đề số 3

ĐỀ THI THỬ VÀO 10

Môn: TOÁN – Năm học: 2017 – 2018

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I. (2 điểm) Cho hai biểu thức

$$A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}+\frac{6\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2} \text{ và } B=\frac{4\sqrt{x}-13}{\sqrt{x}-1} \text{ với } x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4$$

1) Tính giá trị của biểu thức B với $x=36$

2) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=A.B$

Bài II. (2điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Trong một kì thi, hai trường A và B có tổng cộng 350 học sinh dự thi. Kết quả hai trường có 338 học sinh trúng tuyển. Tính ra trường A có 97% và trường B có 96% số học sinh trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh dự thi?

Bài III. (2điểm)

1) Giải phương trình: $(x+1)^4+(x+1)^2-20=0$.

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx-2m+3$

a) Khi $m=\frac{1}{2}$. Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Gọi $A(x_1,y_1)$ và $B(x_2,y_2)$ là các giao điểm của (d) và (P). Tìm các giá trị của m để $y_1+y_2<9$

Bài IV. (3,5điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Đường kính CD vuông góc với AB, M là một điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ (M khác A, C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1) Chứng minh: $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: $\widehat{ACM}=\widehat{ACK}$.

3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE=AM$. Chứng minh ΔECM vuông cân tại C.

4) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A; Cho P là điểm nằm trên d sao cho hai điểm P và C nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP.MB}{MA}=R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm đoạn HK.

Bài V. (0,5điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. (2 điểm) Cho hai biểu thức

$$A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}+\frac{6\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2} \text{ và } B=\frac{4\sqrt{x}-13}{\sqrt{x}-1} \text{ với } x\geq 0; x\neq 1; x\neq 4$$

1) Tính giá trị của biểu thức B với $x=36$

2) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=A.B$

1) Với $x=36$ (thỏa mãn ĐK), thay vào biểu thức B ta được: $B=\frac{4\sqrt{36}-13}{\sqrt{36}-1}=\frac{4.6-13}{6-1}=\frac{11}{5}$

2) Điều kiện: $x\geq 0; x\neq 1; x\neq 4$

$$A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}+\frac{6\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2-\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}+2\right)+6\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

3) Ta có: $P=A.B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}.\frac{4\sqrt{x}-13}{\sqrt{x}-1}=\frac{4\sqrt{x}-13}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{4\sqrt{x}-4-9}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{x}-1}-\frac{9}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

Đặt $t=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$P=-9t^2+4t=-\left(9t^2-2.3t.\frac{4}{6}+\frac{16}{36}\right)+\frac{16}{36}$$

Vì $-\left(3t-\frac{4}{6}\right)^2\leq 0 \Rightarrow P=-\left(3t-\frac{4}{6}\right)^2+\frac{16}{36}\leq\frac{16}{36}$

Dấu "=" xảy ra $-\left(3t-\frac{4}{6}\right)^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{9} \Rightarrow x=\frac{121}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy GTLN của $P=\frac{16}{36} \Leftrightarrow x=\frac{121}{4}$

Bài II. (2điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Trong một kì thi, hai trường A và B có tổng cộng 350 học sinh dự thi. Kết quả hai trường có 338 học sinh trúng tuyển. Tính ra trường A có 97% và trường B có 96% số học sinh trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh dự thi?

Gọi số học sinh dự thi của trường A là $x\left(x>0\right)$

Gọi số học sinh dự thi của trường B là $y\left(x>0\right)$

Vì hai trường A và B có tổng cộng 350 học sinh dự thi, nên ta có phương trình:

$x+y=350$.

Hai trường có 338 học sinh trúng tuyển, trong đó trường A có 97% và trường B có 96% số học sinh trúng tuyển, nên ta có phương trình: $0,97x+0,96y=338$.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y=350 \\ 0,97x+0,96y=338 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=150 \\ y=250 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy trường A có 150 học sinh, trường B có 250 học sinh.

Bài III. (2điểm)

1) Giải phương trình: $\left(x+1\right)^4+\left(x+1\right)^2-20=0$.

2) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2mx-2m+3$

a) Khi $m=\dfrac{1}{2}$. Xác định tọa độ giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$.

b) Gọi $A\left(x_1,y_1\right)$ và $B\left(x_2,y_2\right)$ là các giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(P\right)$. Tìm các giá trị của m để $y_1+y_2<9$

1) $\left(x+1\right)^4+\left(x+1\right)^2-20=0$

Đặt $t=\left(x+1\right)^2\left(t\ge 0\right)$

Khi đó phương trình trở thành : $t^2+t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4\ (tm) \\ t=-5(ktm) \end{array}\right.$

Với $t=4 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: x = 1 và x = - 3.

2) Phương trình hoành độ giao điểm : $x^2 = 2mx - 2m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0 \quad (*)$

a) Với $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình (*) trở thành: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{array}\right.$

Vậy tọa độ giao điểm là: (-1;1) ; (2;4).

b) Xét phương trình (*) có: $\Delta = 4m^2 - 4(2m-3) = 4m^2 - 8m + 12 = (2m-2)^2 + 8 > 0$

với mọi m.

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m.

$\Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ với mọi m.

Ta có: $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

Theo Vi-ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

Theo đề : $y_1 + y_2 < 9 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 < 9 \quad (**)$

Thay hệ thức Vi – ét vào (**) ta được:

$(2m)^2 - 2.(2m-3) < 9 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 6 < 9$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < 2m - 1 < 2$

$\Leftrightarrow -1 < 2m < 3 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{-1}{2} < m < \frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài cho.

Bài IV. (3,5điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Đường kính CD vuông góc với AB, M là một điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ (M khác A, C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

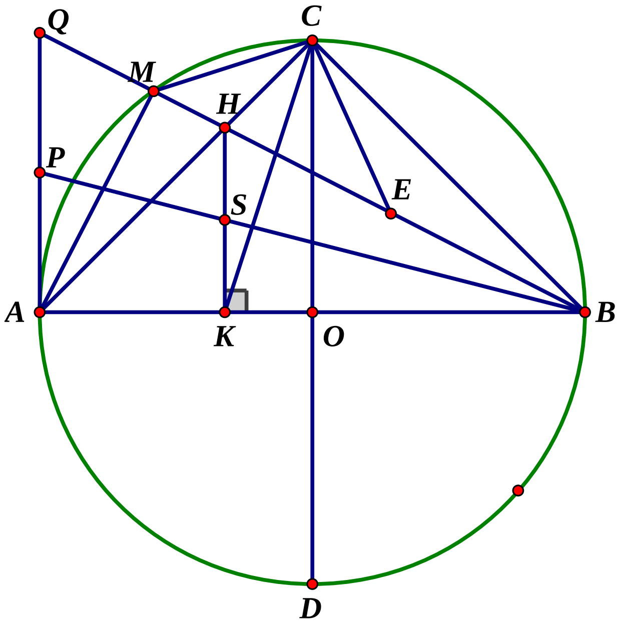
1) Chứng minh: $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$.

3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh ΔECM vuông cân tại C.

4) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A; Cho P là điểm nằm trên d sao cho hai

điểm P và C nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm đoạn HK.



1) Chứng minh: $CBKH$ **là tứ giác nội tiếp.**

Ta có $\widehat{HCB} = 90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Ta có K là hình chiếu của H trên AB (giả thiết)

$\Rightarrow HK \perp AB$ tại K

$\Rightarrow \widehat{HKB} = 90^{\circ}$

Xét tứ giác $CBKH$ có $\widehat{HCB}$; $\widehat{HKB}$ là hai góc đối và $\widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 90^{\circ} + 90^{\circ} = 180^{\circ}$

$\Rightarrow$ tứ giác $CBKH$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết). (đpcm)

2) Chứng minh: $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$ **.**

Xét (O), ta có: $\widehat{ACM} = \widehat{ABM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CBKH$, có: $\widehat{KCA} = \widehat{ABM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KH}$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{KCA}$ (đpcm).

3) Chứng minh ΔECM **vuông cân tại** C**.**

Xét đường tròn (O) có đường kính CD và đường kính AB vuông góc (giả thiết)

$\Rightarrow$ C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ hoặc $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$

$\Rightarrow CA = CB$ (liên hệ cung và dây).

Xét ΔMAC và ΔEBC có:

MA = EB (giả thiết)

$\widehat{MAC} = \widehat{EBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$ của đường tròn (O))

CA = CB (cmt)

$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta EBC$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{BCE}$ (cặp góc tương ứng) và MC = EC (cặp cạnh tương ứng) (1)

Mà $\widehat{BCE} + \widehat{ECH} = \widehat{BCH} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{MCA} + \widehat{ECH} = \widehat{MCE} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta ECM$ vuông cân tại C (đpcm).

4) Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm đoạn HK.

Ta có : $\dfrac{AP.MB}{MA} = R = MO \Rightarrow \dfrac{AP}{MO} = \dfrac{MA}{MB}$

Ta có: $\widehat{PAM} = \widehat{MBO}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$ của (O))

$\Rightarrow \Delta PAM = \Delta OBM \ (c - g - c)$

$\Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{OMB}$

$\Rightarrow \widehat{PMO} = \widehat{PMA} + \widehat{AMO} = \widehat{OMB} + \widehat{AMO} = 90^0$

$\Rightarrow$ PM là tiếp tuyến của (O) tại M

Kéo dài BM cắt AP tại Q, $HK \cap PB = \{S\}$

Ta có : ΔAMQ vuông tại M có $MP = PA$

$\Rightarrow P$ là trung điểm AQ.

Trong ΔABQ, $HK // AQ$, P là trung điểm AQ, BP cắt HK tại S suy ra S là trung điểm HK.

Vậy PB qua trung điểm HK

Bài V. (0,5điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} = 35 - 2x$.

Điều kiện: $x \geq 0$

Đặt $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=t\ (t>0)$.

Khi đó: $t^2=2x+7+2\sqrt{x^2+7x}$

Phương trình trở thành: $t^2+t-42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-7 & \text{(ktm)} \\ t=6 & \text{(tm)} \end{array}\right.$

$t=6 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+7}=6-\sqrt{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{841}{144}(\text{tm})$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{841}{144}$.

TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ
LỚP 9A10

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LỚP 9
NĂM HỌC 2017-2018
MÔN TOÁN

Đề số 4

Thời gian làm bài 120 phút

Bài I: (2điểm). Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$

Với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=3-2\sqrt{2}$

b) Chứng minh : $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$

c) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A:B$

Bài II: (2điểm) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình*:

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60km . Sau đó 1 giờ người khác đi xe máy từ A đến B và đến sớm hơn người đi xe đạp 1 giờ 40 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp .

Bài III (2điểm):

1) Giải phương trình $x-4-\sqrt{x-2}=0$

2) Cho parabol (P): $y=-x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx+m-2$

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A,B phân biệt.

b) Xác định vị trí của m để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A,B phân biệt sao cho tổng y_A+y_B có giá trị lớn nhất (Với y_A, y_B theo thứ tự là tung độ của hai điểm A và B)

Bài IV (3,5điểm): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) , đường kính AB =2R trên cạnh BC lấy điểm M (M khác B và C) đường thẳng AM cắt đường tròn O tại D , đường thẳng BD cắt AC tại E đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường kính AD tại điểm thứ hai là N.

1) Chứng minh tứ giác CEDM nội tiếp đường tròn và ba điểm E,M,N thẳng hàng.

2) Cho đoạn thẳng CN cắt đường tròn (I) ở F . CMR : DF// AE.

3) Khi M di động trên cạnh BC. Chứng minh: BD.BE = BN.AB . Từ đó suy ra BD.BE + AM.AD có giá trị không đổi.

4) Giả sử $\widehat{ABC}=30^0$. Tìm vị trí điểm M trên BC để CN là tiếp tuyến của đường tròn tâm (I).

Bài V (0,5điểm): Tìm GTNN của biểu thức sau: $P=x+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}$ (voi $x>0$)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I: (2điểm). Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\frac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$

Với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=3-2\sqrt{2}$

2) Chứng minh : $B=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$

3) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A:B$

1) Ta có $x=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$ (thỏa mãn ĐK) => $\sqrt{x}=\sqrt{2}-1$, thay vào biểu thức A ta được:

$$=A=\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$$

2) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$

$$B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\frac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)-10+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$.

3) Ta có $P=A:B=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.(\sqrt{x}-2)=\frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-3+\frac{3}{\sqrt{x}+1}=(\sqrt{x}+1)+\frac{3}{\sqrt{x}+1}-4$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số $\sqrt{x}+1$ và $\frac{3}{\sqrt{x}+1}$ ta có:

$$\sqrt{x}+1+\frac{3}{\sqrt{x}+1}\ge 2.\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{3}{\sqrt{x}+1}}=2\sqrt{3}$$

$=> P\ge 2\sqrt{3}-4$

Dấu "=" xảy ra khi

$$(\sqrt{x}+1)=\frac{3}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow(\sqrt{x}+1)^2=3\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}\ \text{(thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy $P_{min}=2\sqrt{3}-4\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}$

Bài II: (2điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60km . Sau đó 1 giờ người khác đi xe máy từ A đến B và đến sớm hơn người đi xe đạp 1 giờ 40 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp .

Gọi vận tốc người đi xe đạp là x (km/h) (x > 0), thì vận tốc người đi xe máy là 3x (km/h).

Sau 1 giờ người đi xe đạp đi được x (km). Quãng đường còn lại là (60-x) km

Thời gian người đi xe đạp đi hết quãng đường còn lại là: $\frac{60-x}{x}$

Thời gian người đi xe máy từ A đến B là: $\frac{60}{3x}=\frac{20}{x}$

Vì người đi xe máy đến sơm hơn người đi xe đạp 1 giờ 40 phút = $\frac{5}{3}$ giờ nên ta có phương trình: $\frac{60-x}{x}-\frac{20}{x}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{60-x-20}{x}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{40-x}{x}=\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 120-3x=5x\Leftrightarrow 8x=120\Rightarrow x=15$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc người đi xe đạp là 15 (km/h)

Bài III (2điểm):

1) Giải phương trình $x-4-\sqrt{x-2}=0$

2) Cho parabol (P): $y=-x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx+m-2$

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A,B phân biệt.

b) Xác định vị trí của m để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A,B phân biệt sao cho tổng y_A+y_B có giá trị lớn nhất (Với y_A,y_B theo thứ tự là tung độ của hai điểm A và B)

1) Điều kiện: $x\ge 4$

$$x-4-\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow x-4=\sqrt{x-2}.$$

Bình phương hai vế ta được:

$$x^2-8x+16=x-2\Leftrightarrow x^2-9x+18=0\Leftrightarrow (x-6)(x-3)=0$$

$\Rightarrow x=6$ (thỏa mãn) ; $x=3$ (loại)

Vậy phương trình có một nghiệm $x=6$.

2a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$-x^2=mx+m-2\Leftrightarrow x^2+mx+m-2=0 \qquad (1)$$

$$\Delta=m^2-4(m-2)=(m-2)^2+4>0 \text{ với } \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

2b) Theo a, hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m

Gọi x_A và x_B là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $\Rightarrow \begin{cases} y_A = -x_A^2 \\ y_B = -x_B^2 \end{cases}$.

Vì x_A và x_B là hai nghiệm của phương trình (1), áp dụng định lí Viét có: $\begin{cases} x_A + x_B = -m \\ x_A - x_B = m-2 \end{cases}$

Ta có: $y_A.y_B = -(x_A^2 + x_B^2) = -[(x_A + x_B)^2 - 2x_A.x_B] = -[m^2 - 2(m-2)] = -(m-1)^2 - 3 \le -3$

Dấu "=" xảy ra khi m = 1.

Vậy $\max(y_A.y_B) = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

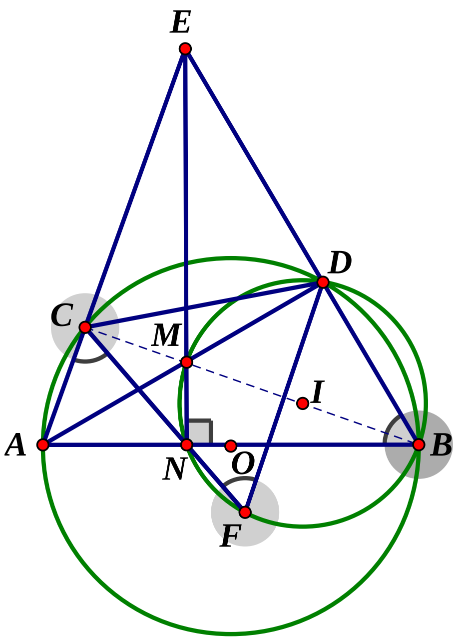
Bài IV (3,5điểm): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) , đường kính AB = 2R trên cạnh BC lấy điểm M (M khác B và C) đường thẳng AM cắt đường tròn O tại D , đường thẳng BD cắt AC tại E, đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường kính AD tại điểm thứ hai là N.

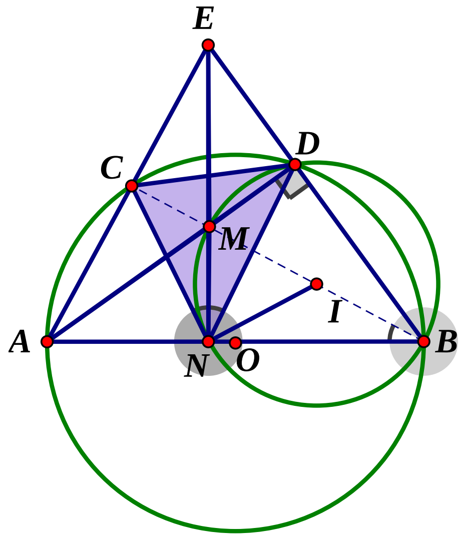
1) Chứng minh tứ giác CEDM nội tiếp đường tròn và ba điểm E, M, N thẳng hàng.

2) Cho đoạn thẳng CN cắt đường tròn (I) ở F. Chứng minh: DF// AE.

3) Khi M di động trên cạnh BC. Chứng minh: BD.BE = BN.AB. Từ đó suy ra BD.BE + AM.AD có giá trị không đổi.

4) Giả sử $\widehat{ABC} = 30^0$. Tìm vị trí điểm M trên BC để CN là tiếp tuyến của đường tròn tâm (I).





1) Chứng minh tứ giác CEDM nội tiếp đường tròn và ba điểm E, M, N thẳng hàng.

Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) và A, C, E thẳng hàng

$\Rightarrow BC \perp AE$ tại C $\Rightarrow \widehat{MCE} = 90^\circ$ (M ∈ BC)

Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) và B, D, E thẳng hàng

$\Rightarrow AD \perp BE$ tại D $\Rightarrow$ $\widehat{MDE} = 90^o$ (M ∈ AD)

Xét tứ giác $CEDM$ có MCE, MDE là hai góc đối và $MCE + MDE = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác $CEDM$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết). (đpcm)

Xét (I) có: $\widehat{MDB} = 90^o$ (do $\widehat{ADB} = 90^o$ và M ∈ AD) là góc nội tiếp chắn $\overset\frown{MB}$ của (I).

$\Rightarrow$MD là đường kính của đường tròn (I)

$\Rightarrow \widehat{MNB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow MN \perp AB$ tại N. (1)

Xét ΔAEB có: $BC \perp AE$ (cmt), $AD \perp BE$ (cmt) và AD cắt BC tại M

$\Rightarrow M$ là trực tâm của ΔAEB

$\Rightarrow EM \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: E, M, N thẳng hàng. (đpcm)

2) Chứng minh: DF// AE.

Ta có $\widehat{MCA} = 90^o$ (do $BC \perp AE$ tại C và M ∈ BC)

$\widehat{MNA} = 90^o$ (do $MN \perp AB$ tại N).

Xét tứ giác ACMN có $\widehat{MCA}, \widehat{MNA}$ là hai góc đối và $\widehat{MNA} + \widehat{MCA} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác ACMN nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{AMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AN}$) (3)

Ta có tứ giác DMNF nội tiếp đường tròn (I)

$\Rightarrow \widehat{DFN} + \widehat{DMN} = 180^o$ (tổng hai hóc đối)

Mà $\widehat{AMN} + \widehat{DMN} = 180^o$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{DFN} = \widehat{AMN}$ (4)

Từ (3) và (4), có: $\widehat{ACN} = \widehat{DFN}$

Mà $\widehat{ACN}$; $\widehat{DFN}$ là hao góc sole trong

$\Rightarrow AC//DF$ hay $AE//DF$ (đpcm)

3) Chứng minh: BD.BE = BN.AB . Từ đó suy ra BD.BE + AM.AD có giá trị không đổi.

Xét (I) có: $\widehat{DNB} = \widehat{DMB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{DB}$)

Ta có tứ giác CEDM nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{CED} + \widehat{CMD} = 180^o$ (tổng hai góc đối)

Mà $\widehat{DMB} + \widehat{CMD} = 180^o$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{DMB}$ hay $\widehat{AEB} = \widehat{DMB}$

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{DNB}$

Xét ΔAEB và ΔDNB có: $\widehat{AEB} = \widehat{DNB}$ (cmt) và $\widehat{ABE}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta DNB$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{EB}{NB}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AB.NB = EB.DB$ (đpcm)

Xét $BD.BE + AM.AD = AB.NB + AM.AD$

Chứng minh được $\Delta AMB \backsim \Delta AND$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{AD}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AM.AD = AN.AB$

$\Rightarrow BD.BE + AM.AD = AB.NB + AN.AB = AB(BN + AN) = AB^2 = 4R^2$ không đổi

4) Tìm vị trí điểm M trên BC để CN là tiếp tuyến của đường tròn tâm (I).

Ta có CN là tiếp tuyến của (I) $\Leftrightarrow CN \perp IN \Leftrightarrow \widehat{CNM} + \widehat{NMI} = 90^\circ$ (5)

Ta có $\widehat{NBI} = \widehat{ABC} = 30^\circ$, mà ΔNIB cân tại I $\Rightarrow \widehat{NBI} = \widehat{BNI} = 30^\circ$

Lại có: $\widehat{BNI} + \widehat{MNI} = \widehat{BNM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I))

$\Rightarrow \widehat{MNI} = 60^\circ$

Do đó (5) $\Leftrightarrow \widehat{CNM} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{CAM} = 30^\circ$ (vì luôn có tứ giác ACMN nội tiếp nên luôn có $\widehat{CNM} = \widehat{CAM}$)

$\Leftrightarrow \Delta_v CAM \backsim \Delta_v CBA \Leftrightarrow \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CM}{CA} \Leftrightarrow CA^2 = CB.CM$ (6)

Xét ΔACB có $\widehat{ABC} = 30^\circ$, áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn:

$\cos\widehat{ABC} = \cos 30^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BC}{2R} \Rightarrow BC = R\sqrt{3}$

$\sin\widehat{ABC} = \sin 30^\circ = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC}{2R} \Rightarrow AC = R$

Do đó (6) $R^2 = R\sqrt{3}.CM \Leftrightarrow CM = \dfrac{R}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{1}{3}$

Vậy khi $\widehat{ABC} = 30^0$ thì vị trí của M trên BC thỏa mãn $\dfrac{CM}{BC} = \dfrac{1}{3}$ thì CN là tiếp tuyến của (I)

Bài V (0,5điểm): Tìm GTNN của biểu thức sau: $P = x + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}$ $(\text{voi}\, x > 0)$

Bình phương hai vế ta được $P^2 - 2Px + x^2 = x^2 + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow 2Px^2 - xp^2 + 1 = 0$ (1)

Vì $P>0$ nên phương trình (1) có nghiệm khi

$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow P^4 - 8P \ge 0 \Leftrightarrow P(P^3 - 8) \ge 0 \Leftrightarrow P \ge 2$ (vì $P>0$)

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$ (các em thay $P=2$ vào (1) để tìm x)

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

PHÒNG GD & ĐT CẦU GIẤY **ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10**

Năm học 2017 – 2018

Đề số 5 **Môn: TOÁN 9 (Lần 3)**

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. *(2 điểm)* Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}$ và $B=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ với $x>0; x\neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

2) Chứng minh: $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

3) Tìm x để biểu thức $\dfrac{A}{B}>1$

Bài 2. *(2 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở hết 60 tấn hàng. Khi khởi hành , có 2 xe phải điều đi nhận hợp đồng khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 1 tấn hàng. Tính số xe lúc đầu mà đội đều động (Biết rằng số lượng trên mỗi xe phải chở là như nhau)

Bài 3. *(2 điểm)*

1) Giải hệ pt sau: $\begin{cases} x\left(x-2\right)-2\left(y-x\right)=2 \\ 2x\left(x-2\right)+\left(4x+y\right)=9 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): y = $2x-2m+2$ và Parabol $\left(P\right): y=x^2$

a) Xác định các tọa độ giao điểm của Parabol $\left(P\right)$ và đường thẳng (d) khi $m=-\dfrac{1}{2}$

b) Tìm m để đường thẳng $\left(d\right)$ cắt Parabol$\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1+y_2=4\left(x_1+x_2\right)$

Bài 4. *(3.5 điểm)* Cho nửa đường tròn $\left(O\right)$, đường kính BC. Gọi D là điểm cố định thuộc đoạn thẳng $OC\left(D\neq O, D\neq C\right)$. Dựng đường thẳng d vuông góc với BC tại D, đường thẳng d cắt nửa đường tròn $\left(O\right)$ tại A. Trên cung nhỏ AC lấy điểm M bất kì $\left(M\neq A, M\neq C\right)$, tia BM cắt đường thẳng d tại K, tia CM cắ đường thẳng d tại E. Đường thẳng BE cắt nửa wngf tròn $\left(O\right)$ tại $N\left(N\neq B\right)$.

1) Chứng minh tứ giác $CDNE$ nội tiếp một đường tròn.

2) Chứng minh: $KE.KD=KM.KB$ và ba điểm C, K, N thẳng hàng.

3) Tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn $\left(O\right)$ cắt đường thẳng d tại F. Chứng minh: F là trung điểm của KE và $OF\perp MN$.

4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBKE. Chứng minh khi M di chuyển trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ thì I di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Bài 5. *(0.5 điểm)* Giải phương trình: $x^2+\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=5x.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. *(2 điểm)* Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}$ và $B = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2-x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ với $x > 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

2) Chứng minh: $B = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

3) Tìm x để biểu thức $\dfrac{A}{B} > 1$

1) Thay $x = 25$ (thỏa mãn ĐK) vào biểu thức A ta được $A = \dfrac{25+2\sqrt{25}}{25-1} = \dfrac{35}{24}$

2) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$

$$B = \frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)-2+x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

3) $\dfrac{A}{B} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 0 \quad (*)$

Xét $x-\sqrt{x}+1 = \left(x - 2.\dfrac{1}{2}.\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4} = \left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} > 0$ với mọi $x > 0; x \neq 1$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp điều kiện, ta có $x > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. *(2 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một đội xe dự định dùng một số xe cùng loại để chở hết 60 tấn hàng. Khi khởi hành , có 2 xe phải điều đi nhận hợp đồng khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 1 tấn hàng. Tính số xe lúc đầu mà đội điều động (Biết rằng số lượng trên mỗi xe phải chở là như nhau)

Gọi số xe lúc đầu đội dự định điều động là x (xe ; $x \in N^*, x > 2$)

Dự định số lượng hàng mỗi xe phải chở là $\dfrac{60}{x}$ (tấn)

Trên thực tế số xe còn lại là: $x-2$ (xe), nên số tấn hàng mỗi xe còn lại phải chở là $\frac{60}{x-2}$ (tấn)

Vì mỗi xe còn lại phải chở thêm 1 tấn hàng so với dự định nên ta có phương trình

$\frac{60}{x-2}=\frac{60}{x}+1 \Leftrightarrow x^2-2x-120=0 \Leftrightarrow (x-12)(x+10)=0$

$\Rightarrow$ x $=12$ (thỏa mãn) ; x $=-10$ (loại)

Vậy số xe lúc đầu là 12 xe.

Bài 3. *(2 điểm)*

1) Giải hệ pt sau: $\begin{cases} x(x-2)-2(y-x)=2 \\ 2x(x-2)+(4x+y)=9 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): y = $2x-2m+2$ và Parabol $(P): y=x^2$

a) Xác định các tọa độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) khi $m=-\frac{1}{2}$

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol(P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1+y_2=4(x_1+x_2)$

1) $\begin{cases} x(x-2)-2(y-x)=2 \\ 2x(x-2)+(4x+y)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2y=2 \\ 2x^2+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x,y)=(2;1)$ hoặc $(x,y)=(-2;1)$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2=2x-2m+2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+2m-2=0$ (*)

a) Khi $m=-\frac{1}{2}$ phương trình (*) có dạng

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=9 \end{array}\right.$$

Vậy $m=-\frac{1}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $(-1;1)$; $(3;9)$

b) Để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1 , x_2.

$\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Leftrightarrow 4-4(2m-2)>0$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}$

Theo Vi-ét có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=2m-2 \end{cases}$

Mà $y_1=x_1^{\ 2}$; $y_2=x_2^{\ 2}$, nên để $y_1+y_2=4\left(x_1+x_2\right)$

$\Leftrightarrow x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=4\left(x_1+x_2\right)$

$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4(x_1+x_2)$

Kết hợp hệ thức Vi – ét, ta có:

$4-2\left(2m-2\right)=8 \Rightarrow m=0$ (Thỏa mãn).

Vậy với m = 0 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

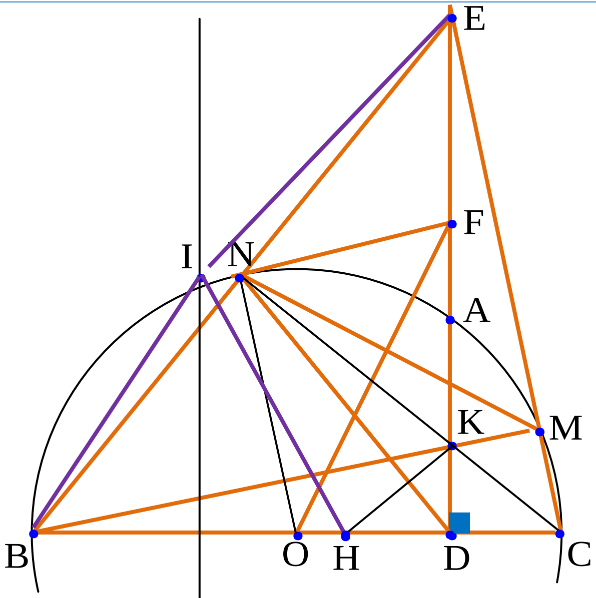
Bài 4. *(3.5 điểm)* Cho nửa đường tròn (O), đường kính BC. Gọi D là điểm cố định thuộc đoạn thẳng $OC\left(D\neq O, D\neq C\right)$. Dựng đường thẳng d vuông góc với BC tại D, đường thẳng d cắt nửa đường tròn (O) tại A. Trên cung nhỏ AC lấy điểm M bất kì $\left(M\neq A, M\neq C\right)$, tia BM cắt đường thẳng d tại K, tia CM cắ đường thẳng d tại E. Đường thẳng BE cắt nửa đường tròn (O) tại $N\left(N\neq B\right)$.

1) Chứng minh tứ giác $CDNE$ nội tiếp một đường tròn.

2) Chứng minh: $KE.KD=KM.KB$ và ba điểm C, K, N thẳng hàng.

3) Tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn (O) cắt đường thẳng d tại F. Chứng minh: F là trung điểm của KE và $OF\perp MN$.

4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBKE. Chứng minh khi M di chuyển trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ thì I di chuyển trên một đường thẳng cố định.



1) Chứng minh tứ giác $CDNE$ nội tiếp một đường tròn.

Ta có: $\widehat{BNC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{BNC} + \widehat{ENC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{ENC} = 90^\circ$

Ta có: $d \perp BC$ tại D (giả thiết), $E \in d$

$\Rightarrow \widehat{EDC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $EDNC$ có $\widehat{EDC} = \widehat{ENC} = 90^\circ$, mà N, D là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh EC.

$\Rightarrow EDNC$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh: $KE.KD = KM.KB$ và ba điểm C, K, N thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{BMC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{BMC} + \widehat{BME} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BME} = 90^\circ$ hoặc $\widehat{KME} = 90^\circ$

Ta có: $d \perp BC$ tại D (giả thiết), $K \in d$

$\Rightarrow \widehat{KDB} = 90^\circ$

Xét ΔKEM và ΔKBD có:

$\widehat{KME} = \widehat{KDB}$ (cùng bằng 90°) ; $\widehat{EKM} = \widehat{BKD}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \Delta KEM \backsim \Delta KBD$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{KE}{KB} = \dfrac{KM}{KD}$ (tính chất) $\Rightarrow KE.KD = KM.KB$ (đpcm)

Trong ΔBEC có $BM \perp CE$ tại M (do $\widehat{BMC} = 90^\circ$ và $\widehat{BME} = 90^\circ$) và $ED \perp BC$

Mà BM và ED cắt nhau tại K

$\Rightarrow$ K là trực tâm của ΔBEC

Mà $CN \perp BE$ (do $\widehat{BNC} = 90^\circ$ và B, N, E thẳng hàng)

$\Rightarrow$ CN đi qua K hay C, N, K thẳng hàng (tính chất ba đường cao của tam giác).

3) Chứng minh: F là trung điểm của KE và $OF \perp MN$.

Chứng minh $\widehat{FNK} = \widehat{FKN} \Rightarrow \Delta NFK$ cân $\Rightarrow NF = FK$ (1)

Chứng minh ΔNFE cân $\Rightarrow NF = FE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow F$ là trung điểm của KE

Chứng minh $NF = FM \Rightarrow F$ thuộc đường trung trực của MN (3)

$OM = ON \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của MN (4)

Từ (3) và (4) FO là đường trung trực của $MN \Rightarrow FO \perp MN$.

4) Chứng minh khi M di chuyển trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ thì I di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Gọi H là điểm đối xứng với C qua D

$\Rightarrow H$ cố định.

Chứng minh tứ giác $BEKH$ nội tiếp

$\Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BH cố định.

Bài 5. *(0.5 điểm)* Giải phương trình $x^2 + \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 5x$.

Điều kiện: $x \geq 3$

$$x^2 + \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 5x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \sqrt{2x+1} - 3 + \sqrt{x-3} - 1 + 3x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{\sqrt{x-3}+1} + 3(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + \frac{2x+1-9}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{x-3-1}{\sqrt{x-3}+1} + 3(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + \frac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} + 3(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left[x-4+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}+3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(x-1+\frac{2}{\sqrt{2x+1}-3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}\right)=0 \qquad (1)$$

Vì $x \ge 3 \Rightarrow x-1+\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+1} \ne 0\ \forall x$

Nên $(1) \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ (tmđk)

TRƯỜNG THCS CÁT LINH

Năm học 2017 – 2018

Đề số 6

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG

MÔN TOÁN 9 - VÒNG 3

Thời gian 120 phút

Ngày thi 20/5/2018

Bài 1: (2,0 đ)Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+3}{x-9}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \ge 0;\ x \ne 9$

a) Tính giá trị biểu thức Q tại $x = 4 - 2\sqrt{x}$

b) Rút gọn P và tính $M = \dfrac{P}{Q}$

c) Cho biểu thức $A = M.x + \dfrac{4x+7}{\sqrt{x}+3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Bài 2: (2,0 đ)*Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng họp không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy?

Bài 3: (2,0 đ)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y-2) = (x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7) = (2x-7)(y+3) \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d):\ 2x - y - a^2 = 0$ và Parabol (P): $(P):\ y = ax^2$ (a>0; a là tham số)

a) Tìm a để d cắt P tại 2 điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung.

b) Gọi $x_A; x_B$ là hoành độ của A và B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{4}{x_A + x_B} + \dfrac{1}{x_A x_B}$

Bài 4: (3,5 đ)Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Đường cao $AD,\ BE$ cắt nhau tại H, kéo dài BE cắt đường tròn $(O;R)$ tại F.

a) Chứng minh tứ giác $CDHE$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh tam giác AHF cân.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Chứng minh: ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

d) Cho BC cố định và $BC = R\sqrt{3}$. Xác định vị trí của A trên (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

Bài 5: (0,5 đ) Cho biểu thức $P = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 + 3y^2 + 18y + 36 - 24x$. Chứng minh P luôn dương với mọi $x,\ y \in \mathbb{R}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,0 đ)Cho biểu thức $P = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+3}{x-9}$ và $Q = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

với $x \ge 0;\ x \ne 9$

a) Tính giá trị biểu thức Q tại $x = 4 - 2\sqrt{x}$

b) Rút gọn P và tính $M=\dfrac{P}{Q}$

c) Cho biểu thức $A=M.x+\dfrac{4x+7}{\sqrt{x}+3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

a) Điều kiện: $x\ge 0;\ x\ne 9.$

Ta có $x=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2\Rightarrow x=\sqrt{3}-1$ (Thỏa mãn ĐK).

Thay $x=\sqrt{3}-1$ vào Q ta có $Q=\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{13}.$

b) Điều kiện: $x\ge 0;\ x\ne 9.$

$$P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+3}{x-9}.$$

$$=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{3x+3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{2x-6\sqrt{x}+x+3\sqrt{x}-3x-3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{-3\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{-3\sqrt{x}-3}{x-9}.$$

Vậy $P=\dfrac{-3\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9.$

* Tính $M=\dfrac{P}{Q}.$

$$M=\frac{P}{Q}=\frac{-3\sqrt{x}-3}{x-9}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\frac{-3\sqrt{x}-3}{x-9}.\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}=\frac{-3}{\sqrt{x}+3}.$$

Vậy $M=\dfrac{-3}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0;\ x\ne 9.$

c) Ta có: $A=M.x+\dfrac{4x+7}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{-3}{\sqrt{x}+3}.x+\dfrac{4x+7}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{x+7}{\sqrt{x}+3}=\left(\sqrt{x}+3\right)+\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}-6.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với 2 số không âm $\sqrt{x}+3$ và $\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}$.

Ta có $\left(\sqrt{x}+3\right)+\frac{16}{\sqrt{x}+3}\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+3\right).\frac{16}{\sqrt{x}+3}}=8.$

$\Rightarrow A\ge 8-6=2.$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=\frac{16}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow x=1$

Vậy $A_{min}=2\Leftrightarrow x=1$

Bài 2: (2,0 đ)*Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng họp không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy?

Gọi số dãy ghế trong phòng lúc đầu là x ($x>3, x\in N^*$, dãy)

Số dãy ghế trong phòng lúc sau là: $x-3$(dãy)

Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc đầu là: $\frac{360}{x}$ (chỗ)

Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc sau là: $\frac{360}{x-3}$ (chỗ)

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{360}{x-3}-\frac{360}{x}=4$

Giải phương trình, ta có: $x_1=18$(tm) ; $x_2=-15$ (Loại)

Vậy trong phòng có 18 dãy ghế.

Bài 3: (2,0 đ)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(y-2\right)=\left(x+2\right)\left(y-4\right) \\ \left(x-3\right)\left(2y+7\right)=\left(2x-7\right)\left(y+3\right) \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\left(d\right)$: $2x-y-a^2=0$ và Parabol (P): $(P):\ y=ax^2$ (a > 0; a là tham số)

a) Tìm a để d cắt P tại 2 điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung.

b) Gọi $x_A; x_B$ là hoành độ của A và B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{4}{x_A+x_B}+\frac{1}{x_Ax_B}$$

1) $\begin{cases}x(y-2)=(x+2)(y-4)\\(x-3)(2y+7)=(2x-7)(y+3)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy-2x=xy-4x+2y-8\\2xy+7x-6y-21=2xy+6x-7y-21\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-4\\x+y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(-2;2)$

2a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$$ax^2-2x+a^2=0\quad(1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta=1-a^2>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<1$$

Gọi $x_A;\,x_B$ là hoành độ của A và B, theo định lý Vi – ét ta có:

$$\begin{cases}x_A+x_B=\dfrac{2}{a}>0\\x_A.x_B=a>0\end{cases}\Rightarrow A,B\text{ nằm bên phải trục tung.}$$

2b) Ta có: $T=\dfrac{4}{x_A+x_B}+\dfrac{1}{x_Ax_B}=2a+\dfrac{1}{a}$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$2a+\frac{1}{a}\geq 2.\sqrt{2a.\frac{1}{a}}=2.\sqrt{2}\Rightarrow T\geq 2.\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2a=\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow 2a^2=1\Leftrightarrow a^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $T_{max}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

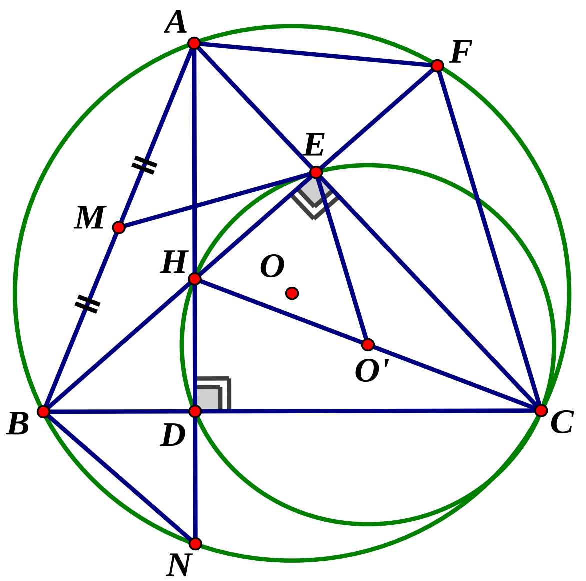
Bài 4: (3,5đ) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Đường cao $AD,\ BE$ cắt nhau tại H, kéo dài BE cắt đường tròn $(O;R)$ tại F.

a) Chứng minh tứ giác $CDHE$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh tam giác AHF cân.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Chứng minh: ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

d) Cho BC cố định và $BC = R\sqrt{3}$. Xác định vị trí của A trên (O) để $DH.DA$ lớn nhất.



a) Chứng minh tứ giác $CDHE$ nội tiếp được một đường tròn.

Xét ΔABC có đường cao $AD,\ BE$ cắt nhau tại H (giả thiết)

$$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC\ (t/c) \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0 \text{ hay } \widehat{HDC} = 90^0 \\ BE \perp AC\ \ (t/c) \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^0 \text{ hay } \widehat{HEC} = 90^0 \end{cases}$$

Xét tứ giác CDHE có: $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $\widehat{HDC};\ \widehat{HEC}$ ở vị trí đối nhau

=> CDHE nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính HC.

b) Chứng minh tam giác AHF cân.

Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{AFB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{AHF} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{DHE}$)

$\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AFB}$ hay $\widehat{AHF} = \widehat{HFA}$

$\Rightarrow \Delta AHF$ cân tại A

$\Rightarrow \Delta HCF$ cân tại C

c) Chứng minh: ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE

Ta có ΔAEB vuông tại E, EM là trung tuyến

$\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MEB}$

Mà $\widehat{MBE} = \widehat{ACF}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AF}$)

$\widehat{ACF} = \widehat{ACH}$ (ΔHCF cân tại C)

$\widehat{ACH} = \widehat{O'EC}$ ($\Delta O'EC$ cân tại O')

$\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{O'EC}$

$\Rightarrow \widehat{MEO'} = 90^\circ$ hay ME là tiếp tuyến của tam giác CDE trùng với tiếp tuyến của (DHEC)

d) Xác định vị trí của A trên (O) để $DH.DA$ lớn nhất.

AH cắt $(O;R)$ tại N

Ta có tứ giác $HECD$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BHN} = \widehat{ECD}$ (góc ngoài tại đỉnh H bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

Mà xét (O), ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{BNH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

$\Rightarrow \widehat{BHN} = \widehat{BNH}$

$\Rightarrow \Delta HBN$ cân ở $B \Rightarrow DH = DN$

Chỉ ra được $\Delta BDN \backsim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BD}{DA} = \dfrac{DN}{DC} \Rightarrow DN.DA = DB.DC$

$$\Rightarrow DH.DA = DN.DA = DB.DC \le \frac{(DB+DC)^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

$$\Rightarrow (DH.DA)_{max} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow DB = DC$$

$\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung BC lớn.

Bài 5: (0,5 đ) Cho biểu thức $P = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 + 3y^2 + 18y + 36 - 24x$. Chứng minh P luôn dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

$P = xy(x-2)(x+6) + 12x^2 + 3y^2 + 18y + 36 - 24x$

$= xy(x-2)(x+6) + 12(x-2) + 3(y+6) + 36$

$= x(x-2)[y(y+6)+12] + 3[y(y+6)+12]$

$= (y^2 + 6y + 12)(x^2 - 2x + 33)$

$= \left[(y+3)^2 + 3\right]\left[(x-1)^2 + 32\right]$

Vì $\begin{cases}(y+3)^2 + 3 > 0 \\ (x-1)^2 + 32 > 0\end{cases}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Vậy P luôn dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

HỆ THỐNG GIÁO DỤC HỌC MÃI

Đề số 7

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT

Năm học: 2018 – 2019

Môn thi: Toán

Ngày thi: *15 tháng 04 năm 2018*

Thời gian làm bài: *120 phút*

Bài 1 *(2 điểm):* Cho biểu thức: $A=\dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}\ (x>0;\ x\ne 1)$.

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của A khi $x=6-2\sqrt{5}$.

3) Tìm giá trị của x để $\dfrac{7}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 2 *(2 điểm):*

1) Cho phương trình: $x^2-(3m+1)x+2m^2+m-1=0\ (1)$ với m là tham số.

a) Chứng minh phươn trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). TÌm m để biểu thức $B=x_1{}^2-4x_1x_2+x_2{}^2$ đạt giá trị lớn nhất.

2) Giải phương trình: $\begin{cases}2(x-1)^2+\sqrt{y+1}=2\\3x^2-6x-2\sqrt{y+1}=-7\end{cases}$

Bài 3 *(2 điểm): Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một xe máy đi từ A đến B cách nhau 40 km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu xe máy đi với vận tốc nhỏ hơn dự định 6 km/h. Trên nửa quãng đường còn lại xe máy đi với vận tốc lớn hơn dự định 12 km/h nên xe máy đến B đúng thời gian đã định. TÌm vận tốc dự định của xe máy.

Bài 4 *(3,5 điểm):* Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M bất kì thuộc đoạn OA $(M\ne O, A)$. Tia DM cắt đường tròn (O) tại N.

1) Chứng minh rằng bốn điểm O, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $DM.DN=DO.DC=2R^2$.

3) Đường tròn tâm M bán kính MC cắt AC, CB lần lượt tại E, F. Chứng minh ba điểm E, M, F thẳng thàng và tổng $CE+CF$ không đổi khi M di động trên OA.

4) Nối B với N cắt OC tại P. Tìm vị trí của điểm M để $\dfrac{OM}{AM}+\dfrac{OP}{CP}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5 *(0,5 điểm):* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. TÌm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{ab+3c}+\sqrt{2a^2+2b^2}}{3+\sqrt{ab}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 *(2 điểm):* Cho biểu thức: $A=\dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}\left(x>0;\,x\neq1\right).$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của A khi $x=6-2\sqrt{5}$.

3) Tìm giá trị của x để $\dfrac{7}{A}$ nhận giá trị nguyên.

1) Điều kiện: $x>0, x\neq1$

$$A=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $A=\dfrac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x>0, x\neq1$.

2) Ta có: $x=6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$ (thỏa mãn ĐK) $\Rightarrow\sqrt{x}=\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1$

Thay vào biểu thức A, ta được:

$$A=\frac{2\left(6-2\sqrt{5}\right)+2\left(\sqrt{5}-1\right)+2}{\sqrt{5}-1}=\frac{12-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{\left(12-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{2+10\sqrt{5}}{4}=\frac{5\sqrt{5}+1}{2}$$

3) Ta có $\dfrac{7}{A}=\dfrac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}}$

Vì $2x+2+2\sqrt{x}=2\left(x+1\right)+2\sqrt{x}>2\cdot2\sqrt{x}+2\sqrt{x}=6\sqrt{x}\quad\left(x>0, x\neq1\right)$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}} < \dfrac{7}{6}$

Mà $\dfrac{7}{A} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{7}{A} = 1 \Rightarrow 7\sqrt{x} = 2x+2+2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 2x\text{-}5\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy $x \in \left\{4;\dfrac{1}{4}\right\}$

Bài 2 *(2 điểm):*

1) Cho phương trình: $x^2-(3m+1)x+2m^2+m-1=0\ (1)$ với m là tham số.

a) Chứng minh phươn trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm m để biểu thức $B=x_1{}^2-4x_1x_2+x_2{}^2$ đạt giá trị lớn nhất.

2) Giải phương trình: $\begin{cases}2(x-1)^2+\sqrt{y+1}=2\\ 3x^2-6x-2\sqrt{y+1}=-7\end{cases}$

1) Phương trình: $x^2-(3m+1)x+2m^2+m-1=0 \quad (1)$

a) Ta có $\Delta=\left[-(3m+1)\right]^2-4\cdot1\cdot(2m^2+m-1)=m^2+2m+5=(m+1)^2+4>0$ với $\forall m$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=3m+1\\ x_1x_2=2m^2+m-1\end{cases}$

$B=x_1{}^2+x_2{}^2-4x_1x_2=(x_1+x_2)^2-6x_1x_2=(3m+1)^2-6(2m^2+m-1)=-3m^2+7$

$\Rightarrow B=-3m^2+7\le 7.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=0.$

Vậy $B_{max}=7$ khi $m=0.$

2) Điều kiện : $y\ge -1.$

$$\begin{cases} 2(x-1)^2+\sqrt{y+1}=2 \\ 3x^2-6x-2\sqrt{y+1}=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-2x)+\sqrt{y+1}=0 \\ 3(x^2-2x)-2\sqrt{y+1}=-7 \end{cases}$$

Đặt $a=x^2-2x; b=\sqrt{y+1}\ (b\ge 0)$.

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a-2b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ 7a=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=-1 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=-1 \\ \sqrt{y+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=0 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)=(1,3)$.

Bài 3 *(2 điểm): Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một xe máy đi từ A đến B cách nhau 40 km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu xe máy đi với vận tốc nhỏ hơn dự định 6 km/h. Trên nửa quãng đường còn lại xe máy đi với vận tốc lớn hơn dự định 12 km/h nên xe máy đến B đúng thời gian đã định. TÌm vận tốc dự định của xe máy.

Gọi vận tốc dự định của xe máy là $x(km/h)$. (ĐK : $x>6$).

Khi đó thời gian xe máy dự định đi hết quãng đường AB là $\dfrac{40}{x}(h)$.

Thời gian thực tế xe máy đi nửa quãng đường đầu là $\dfrac{20}{x-6}(h)$.

Thời gian thực tế xe máy đi nửa quãng đường còn lại là $\dfrac{20}{x+12}(h)$.

Vì xe máy đến B đúng thời gian đã định, ta có phương trình:

$$\frac{20}{x-6}+\frac{20}{x+12}=\frac{40}{x}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+12)}{x(x+12)(x-6)}+\frac{x(x-6)}{x(x+12)(x-6)}=\frac{2x(x+12)(x-6)}{x(x+12)(x-6)}$$

$$\Rightarrow x^2+12x+x^2-6x-(2x^2+12x-144)=0$$

$$\Leftrightarrow 6x-144=0$$

$$\Leftrightarrow x=24 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy vận tốc dự định của xe máy là $24(km/h)$.

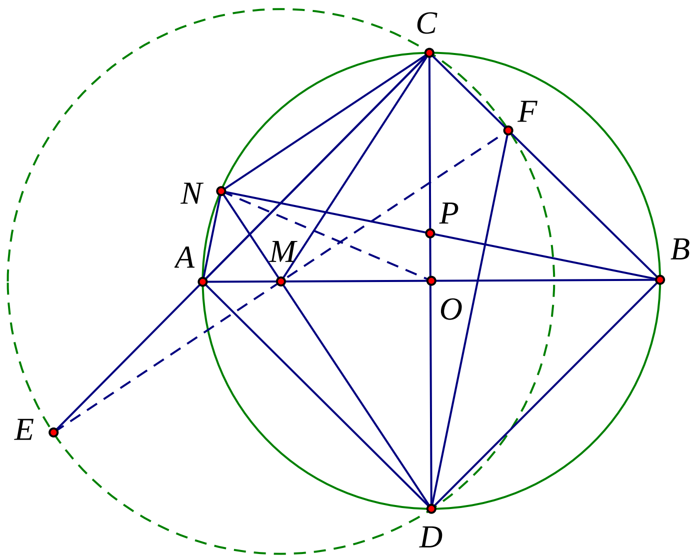
Bài 4 *(3,5 điểm):* Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M bất kì thuộc đoạn OA $(M \neq O, A)$. Tia DM cắt đường tròn (O) tại N.

1) Chứng minh rằng bốn điểm O, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $DM.DN = DO.DC = 2R^2$.

3) Đường tròn tâm M bán kính MC cắt AC, CB lần lượt tại E, F. Chứng minh ba điểm E, M, F thẳng thàng và tổng $CE + CF$ không đổi khi M di động trên OA.

4) Nối B với N cắt OC tại P. Tìm vị trí của điểm M để $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{OP}{CP}$ đạt giá trị nhỏ nhất.



1) Chứng minh rằng bốn điểm O, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{CNM} = \widehat{CND} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$AB \perp CD$ tại O, $M \in AB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{COM} = 90^\circ$

Xét tứ giác CNMO có $\widehat{CNM}$; $\widehat{COM}$ là hai góc đối và $\widehat{CNM} + \widehat{COM} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác CNMO nội tiếp.

$\Rightarrow$ bốn điểm O, M, N, C thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $DM.DN = DO.DC = 2R^2$.

Xét ΔDOM và ΔDNC có: $\widehat{MDC}$ chung ; $\widehat{DOM} = \widehat{DNC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta DOM \backsim \Delta DNC$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{DO}{DN} = \dfrac{DM}{DC}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow DM.DN = DO.DC = 2R^2$.

3) Chứng minh ba điểm E, M, F thẳng thàng và tổng $CE + CF$ không đổi khi M di động trên OA.

Xét (O) có AB và CD là hai đường kính vuông góc tại O (giả thiết)

$\Rightarrow$ tứ giác ACBD là hình vuông.

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^o$ hoặc $\widehat{ECF} = 90^o$

Mà $\widehat{ECF}$ là góc nội tiếp của đường tròn (M, MC) và chắn $\overset{\frown}{EF}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{EF}$ là cung nửa đường tròn tâm M.

$\Rightarrow$ EF là đường kính của đường tròn (M)

$\Rightarrow$ E, M, F thẳng hàng.

Do MO là trung trực của CD nên $MC = MD$.

$\Rightarrow D$ thuộc đường tròn (M, MC)

$\Rightarrow$ tứ giác $CFDE$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{CFD} = 180^o$ (tổng hai góc đối của tứ giác nội tiếp)

Mà $\widehat{BFD} + \widehat{CFD} = 180^o$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BFD}$

Mà ΔBFD vuông tại B và ΔAED vuông tại A có AD = BD (cạnh của hình vuông ACBD).

$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta BDF$ (cạnh góc vuông, góc nhọn).

$\Rightarrow AE = BF$.

Do đó: $CE + CF = CA + AE + CB - BF = 2CA$.

Mà $CA = \sqrt{OA^2 + OC^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow CE + CF = 2R\sqrt{2}$.

Vậy tổng $CE + CF$ không đổi khi M di động trên OA.

4) Tìm vị trí của điểm M để $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{OP}{CP}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\Delta DOM \backsim \Delta DNC (g.g) \Rightarrow \dfrac{DO}{DN} = \dfrac{OM}{NC} \Rightarrow OM = \dfrac{DO.NC}{DN}$

Có $\Delta AMD \backsim \Delta NAD(g.g)$ vì: $\widehat{ADN}$ chung, $\widehat{DAM} = \widehat{DNA} = 45^{\circ}$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow AM = \frac{AD.AN}{DN}$$

Do đó $\frac{OM}{AM} = \frac{DO.NC}{AD.AN} = \frac{R.NC}{R\sqrt{2}.AN} = \frac{NC}{\sqrt{2}AN}(1)$

Tương tự ta có $\Delta OBP \backsim \Delta NBA\ (g-g) \Rightarrow \frac{OP}{NA} = \frac{OB}{NB} \Rightarrow OP = \frac{OB.NA}{NB}$

Có $\Delta CPB \backsim \Delta NCB\ (g-g) \Rightarrow \frac{CP}{NC} = \frac{CB}{NB} \Rightarrow CP = \frac{NC.CB}{NB}$

Do đó $\frac{OP}{CP} = \frac{OB.NA}{NC.CB} = \frac{NA}{\sqrt{2}NC}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{OM}{AM}.\frac{OP}{CP} = \frac{NC}{\sqrt{2}AN}.\frac{NA}{\sqrt{2}NC} = \frac{1}{2}$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\frac{OM}{AM} + \frac{OP}{CP} \geq 2\sqrt{\frac{OM}{AM}\cdot\frac{OP}{CP}} = \sqrt{2}$$

$\frac{OM}{AM} + \frac{OP}{CP}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$ khi

$$\frac{OM}{AM} = \frac{OP}{CP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{OA}{AM} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}OA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}R.$$

Vậy để $\frac{OM}{AM} + \frac{OP}{CP}$ đạt GTNN thì điểm *M* thuộc *OA* thỏa mãn $AM = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}R.$

Bài 5 *(0,5 điểm):* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3.$ TÌm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{ab+3c} + \sqrt{2a^2+2b^2}}{3+\sqrt{ab}}.$

Ta có:

$$ab + 3c = ab + c(a+b+c) = c^2 + c(a+b) + ab \geq c^2 + 2c\sqrt{ab} + ab = \left(c+\sqrt{ab}\right)^2$$

$$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \geq \sqrt{a^2+b^2+2ab} = \sqrt{(a+b)^2} = ab\ \ (\text{v×} : a+b>0).$$

Do đó $A \geq \frac{c+\sqrt{ab}+a+b}{3+\sqrt{ab}} = \frac{3+\sqrt{ab}}{3+\sqrt{ab}} = 1.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi với $a = b$.

Vậy $A_{min} = 1$ với $a = b$.

TRƯỜNG THCS ARCHIMEDES **ĐỀ THI THỬ LẦN 05**

Nămhọc: 2017 – 2018 **Môn: Toán**

Đề số 8

Câu 1: Cho hai biểu thức: $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}, \left(x > 0, x \neq 1\right)$

1) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Đặt M = B:A, tìm x để $\frac{1}{M} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \ge 1$.

Câu 2: *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình hoặc phương trình*:

Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỷ lệ là 84%. Riêng trường A đạt tỷ lệ thi đỗ là 80%. Riêng trường B đạt tỷ lệ thi đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Câu 3:

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + y + \sqrt{x+1} = 10 \end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2 - 5x + m - 2 = 0 \quad (1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm là 2, tìm nghiệm còn lại (nếu có).

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $2\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}\right) = 3$.

Câu 4: Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn (O;R). Qua điểm M bất kỳ thuộc nửa đường tròn này kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở E và F. Nối AM cắt OE tại P, nối MB cắt OF tại Q. Hạ MH vuông góc với AB tại H.

1) Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng: $AE.BF = R^2$.

3) Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng MK = KH.

4) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔEOF. Chứng minh rằng $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$

Câu 5: Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \ge \frac{3}{4}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hai biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1}, (x > 0, x \ne 1)$

1) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Đặt M = B:A, tìm x để $\frac{1}{M}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1.$

1) Điều kiện: $x>0, x\ne 1$

$$A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right).\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

Vậy $A=\frac{2\sqrt{x}}{x-1}\quad x\ge 0; x\ne 1$

Ta có $x=4-2\sqrt{3}$ (tm) $\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1$ (do $\sqrt{3}-1>0$) thay vào A

ta có: $A=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{4-2\sqrt{3}-1}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-2\sqrt{3}}=-\frac{6+2\sqrt{3}}{3}.$

Vậy $A=-\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ khi $x=4-2\sqrt{3}$

2) $B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},\left(x>0, x\ne 1\right)$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+1-x-\sqrt{x}}{x-1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\ (x>0; x\ne 1)$

3) $M=\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}.\frac{x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{1}{M}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}=\frac{16\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{-x+14\sqrt{x}-1}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

Ta có:

$$\frac{1}{M}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1\Leftrightarrow \frac{-x+14\sqrt{x}-1}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+14\sqrt{x}-1-8\sqrt{x}-8}{8\left(\sqrt{x}+1\right)}\ge 0\Leftrightarrow -x+6\sqrt{x}-9\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9\le 0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow x=9\,(tm)$$

Vậy $x=9$ thì bài toán thỏa mãn

Câu 2: *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình hoặc phương trình*:

Hai trường A và B có 420 học sinh thi đỗ vào lớp 10, đạt tỷ lệ là 84%. Riêng trường A đạt tỷ lệ thi đỗ là 80%. Riêng trường B đạt tỷ lệ thi đỗ là 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Gọi số học sinh trường A là x (học sinh) ($x\in\mathbb{N}, 0<x<420$).

Vì hai trường có 420 học sinh nên số học sinh trường B là : $420-x$ (học sinh)

Trường A có tỉ lệ học sinh đỗ vào 10 là 80% nên số học sinh đỗ vào 10 của trường A là:

$80\%x=\frac{4}{5}x$ (học sinh).

Trường B có tỉ lệ học sinh đỗ vào 10 là 90% nên số học sinh đỗ vào 10 của trường B là:

$90\%(420-x)=\frac{9}{10}(420-x)$ (học sinh)

Suy ra tổng số học sinh đỗ vào 10 của cả hai trường là: $\frac{4}{5}x+\frac{9}{10}(420-x)=378-\frac{1}{10}x$ (học sinh)

Mà số tỉ lệ học sinh đỗ vào 10 của cả hai trường là 84% nên ta có phương trình:

$$\frac{378-\frac{1}{10}x}{420}.100\%=84\%.$$

$$\Leftrightarrow 378-\frac{1}{10}x=\frac{1764}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}x=\frac{126}{5}\Leftrightarrow x=252$$

Kết hợp điều kiện ta có số học sinh dự thi của trường A là 252 (học sinh)

số học sinh dự thi của trường B là 168 (học sinh)

Câu 3:

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+\sqrt{x+1}=10 \end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-5x+m-2=0 \quad (1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm là 2, tìm nghiệm còn lại (nếu có).

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right)=3.$

1) Điều kiện: $x \ge -1$

$$(I)\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+\sqrt{x+1}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ 8+\sqrt{x+1}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;5)$

2a) Thay $x=2$ vào (1) ta có: $2^2-5.2+m-2=0 \Leftrightarrow m=8$

Thay $m=8$ vào (1) ta có $(1) \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy với $m=8$ thì (1) có một nghiệm $x=2$ và nghiệm còn lại là $x=3$

2b) Ta có: $\Delta=5^2-4(m-2)=33-4m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 33-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{33}{4} \qquad (2)$$

Hệ thức Vi - ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1.x_2=m-2 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

Xé thệ thức: $2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1>0;\ x_2>0 & (3) \\ 2(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})=3\sqrt{x_1x_2} & (4) \end{cases}$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1.x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5>0 \\ m-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>2 \quad (5)$$

Từ (2) và (5) ta có điều kiện: $2<m<\dfrac{33}{4}$

$(4) \Leftrightarrow 4(5+2\sqrt{x_1x_2})=9x_1x_2$

$\Leftrightarrow 4(5+2\sqrt{m-2})=9(m-2) \Leftrightarrow 9(m-2)-8\sqrt{m-2}-20=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{m-2}-2)(9\sqrt{m-2}+10)=0 \Leftrightarrow \sqrt{m-2}=2 \Leftrightarrow m=4$ (thỏa mãn)

Vậy $m=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

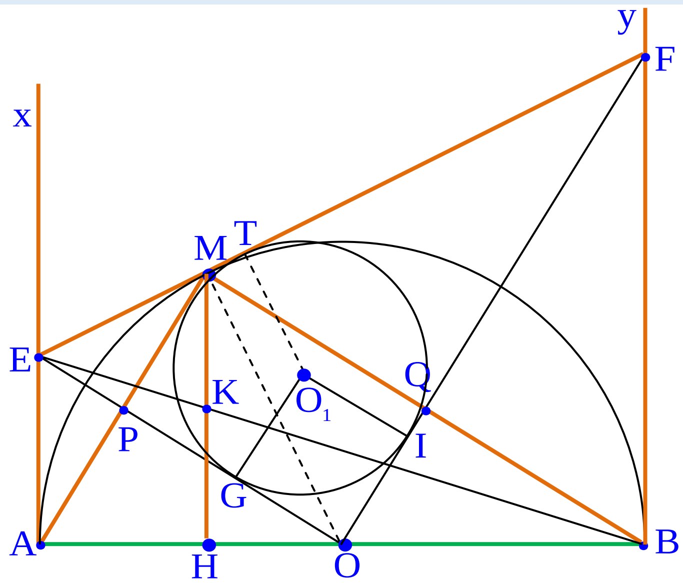
Câu 4: Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn (O;R). Qua điểm M bất kỳ thuộc nửa đường tròn này kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở E và F. Nối AM cắt OE tại P, nối MB cắt OF tại Q. Hạ MH vuông góc với AB tại H.

1) Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng: $AE.BF=R^2$.

3) Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng MK = KH.

4) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔEOF. Chứng minh rằng $\frac{1}{3}<\frac{r}{R}<\frac{1}{2}$



1) Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $MH \perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MHO}=90^\circ$ (1)

Ta có E là giao của 2 tiếp tuyến tại A, M của (O) (giả thiết)

$\Rightarrow EA=EM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Lại có OA = OM = R

$\Rightarrow$ OE là đườn trung trực của AM (tính chất điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng).

$\Rightarrow OE \perp AM$ tại P và P là trung điểm của AM.

$\Rightarrow \widehat{OPM}=90^\circ$

Ta có F là giao của 2 tiếp tuyến tại B, M của (O) (giả thiết)

$\Rightarrow FB = FM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Lại có OB = OM = R

$\Rightarrow$ OF là đườn trung trực của BM (tính chất điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng).

$\Rightarrow OF \perp BM$ tại Q và Q là trung điểm của BM.

$\Rightarrow \widehat{OQM} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{MHO} = \widehat{OPM} = \widehat{OQM} = 90^\circ$ hoặc các điểm H, P, Q cùng nhìn cạnh OM dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$Ba điểm H, P, Q cùng thuộc đường tròn đường kính OM (định lý)

Vậy O, Q, M, P, H cùng thuộc đường tròn đường kính OM (đpcm).

2) Chứng minh rằng: $AE.BF = R^2$.

Ta có: E là giao của 2 tiếp tuyến tại A, M của (O) và F là giao của 2 tiếp tuyến tại B, M của (O) (giả thiết), nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau sẽ có:

OE là tia phân giác của $\widehat{AOM} \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{MOE} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2}$

OE là tia phân giác của $\widehat{BOM} \Rightarrow \widehat{BOF} = \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{BOM}}{2}$

Lại có: $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{EOF} = \widehat{MOE} + \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{AOM} + \widehat{BOM}}{2} = 90^\circ$

Lại có $OM \perp EF$ tại M (tính chất tiế tuyến)

$\Rightarrow$ Xét ΔEOF vuông tại O, đường cao OM sẽ có: $OM^2 = EM.FM$ (hệ thức lượng)

Mà $OM = R$ (bán kính đường tròn (O)) ; $EM = EA$; $FM = FB$ (cmt)

$\Rightarrow EA.FB = R^2$ (đpcm)

3) Chứng minh rằng MK = KH.

Ta có AE, BFlà tiếp tuyến của đường tròn $\Rightarrow AE \perp AB$ và $BF \perp AB$ (tính chất).

Do đó $MH // EA // FB$ (vì cùng vuông góc với AB) hoặc $MK // FB$; $KH // EA$ (vì K $\in MH$)

Xét ΔFEB có $MK // FB \Rightarrow \Delta MEK \backsim \Delta FEB$ (định lý tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow \frac{EK}{EB} = \frac{MK}{FB}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ) (1)

Xét ΔEBA có $KH//EA \Rightarrow \Delta KBH \backsim \Delta EBA$ (định lý tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow \frac{BK}{EB} = \frac{KH}{EA}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ) (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{MK}{KH}.\frac{EA}{FB} = \frac{EK}{BK}$

Lại có $MK//FB$, áp dụng định lý Ta-let trong ΔFEB và kết hợp với $EM = EA$; $FM = FB$

$\Rightarrow \frac{EK}{BK} = \frac{EM}{FM} = \frac{EA}{FB}$

Do đó: $\frac{MK}{KH} = 1 \Rightarrow MK = KH$ (đpcm).

4) Chứng minh rằng $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$

Gọi O_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EOF.

Gọi T, G, I lần lượt là hình chiếu của I lên FE, EO, OF.

$\Rightarrow O_1G = O_1I = O_1T = r$

Ta có $S_{\Delta IEF} = \frac{1}{2}r.EF$; $S_{\Delta IEO} = \frac{1}{2}r.EO$ và $S_{\Delta IOF} = \frac{1}{2}r.OF$

$\Rightarrow S_{\Delta OEF} = S_{\Delta IEF} + S_{\Delta IEO} + S_{\Delta IOF} = \frac{1}{2}r.(EF + OE + OF)$

Mặt khác $S_{\Delta OEF} = \frac{1}{2}OM.EF = \frac{1}{2}R.EF \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{EF}{OE + OF + EF}$

Xét tam giác OEF có: $EF < OE + OF$ (bấtđẳngthức tam giác)

$\Rightarrow 2EF < OE + OF + EF \Rightarrow \frac{EF}{OE + OF + EF} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$

Ta có

$(OE - OF)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow OE^2 + OF^2 \geq 2OE.OF$

$\Leftrightarrow 2(OE^2 + OF^2) \geq (OE + OF)^2$

$\Leftrightarrow 2EF^2 \geq (OE + OF)^2$

$\Rightarrow 4EF^2 > (OE + OF)^2$

$\Leftrightarrow 2EF > OE + OF$

$\Leftrightarrow 3EF > OE + OF + EF$

$\Leftrightarrow \dfrac{EF}{OE + OF + EF} > \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{r}{R} > \dfrac{1}{3}$

Vậy $\dfrac{1}{3} < \dfrac{r}{R} < \dfrac{1}{2}$ (đpcm)

Câu 5: Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{c+a}\right)^2 \geq \dfrac{3}{4}$

Ta có: $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 + \dfrac{a}{2(b+c)} + \dfrac{1}{4} \geq 3\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 \dfrac{a}{2(b+c)} \dfrac{1}{4}} = \dfrac{3a}{2(b+c)}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 \geq \dfrac{a}{b+c} - \dfrac{1}{4}$

Tương tự ta có $\left(\dfrac{b}{a+c}\right)^2 \geq \dfrac{b}{a+c} - \dfrac{1}{4}$ và $\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2 \geq \dfrac{c}{a+b} - \dfrac{1}{4}$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta có:

$\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a+c}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2 \geq \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} - \dfrac{3}{4}$

Ta cần chứng minh $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

Đây là bất đẳng thức Nesbit quen thuộc. Nhận xét:

$\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c}\right) - 3$

BĐT

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\ge 9(*)$$

Ta có bất đẳng thức (*) luôn đúng. Vì

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}}$$

Nhân vế với vế của 2 bất đẳng thức trên ta thu được (*)

Ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

TT BDVH HÀ NỘI – AMSTERDAM
NĂM HỌC 2016 – 2017

Đề số 9

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
MÔN: TOÁN
Ngày thi: **30.4.2017**

Bài I. Cho biểu thức: $P=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right), x\geq 0, x\neq 4, x\neq 9.$

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm tất cả các giá trị của x nguyên để biểu thức $P<0$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km/h. Biết tổng chiều dài quãng đường AB và BC là 199 km và thời gian ô tô đi quãng đường AB ít hơn thời gian ô tô đi quãng đường BC là 12 phút. Tính thời gian Ô tô đi trên quãng đường AB và quãng đường BC.

Bài III. Cho phương trình: $x^2-(m-2)x-m^2+3m-4=0$ (Tham số m).

1) Chứng minh phương trình trên có hai nghiệm trái dấu với mọi giá trị của m.

2) Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2.

Tìm giá trị của m để: $x_1(x_1-2)+x_2(x_2-2)=7$.

Bài IV. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC tới đường tròn $(O;R)$. ($B;C$ là hai tiếp điểm). Đường thẳng d tùy ý đi qua điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt P và Q sao cho tia AP nằm giữa hai tia AB và AC. Đường thẳng đi qua O và song song với d cắt đường thẳng AC tại điểm N. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

1) Chứng minh các điểm A, B, M, O, C cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh tam giác AON đồng dạng với tam giác MCO.

3) Giải sử $OA=3\sqrt{10}$cm, $R=5$cm và $OM=3$cm. Đặt $\widehat{AON}=\alpha$, tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

4) Chứng minh $\dfrac{MA}{MB+MC}$ là đại lượng không đổi khi đường thẳng d quay quanh điểm A.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. Cho biểu thức: $P=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right), x\geq 0, x\neq 4, x\neq 9.$

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm tất cả các giá trị của x nguyên để biểu thức $P < 0$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

1) Điều kiện: $x \ge 0, x \ne 4, x \ne 9$

$$P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

$$= \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} : \left(\frac{(\sqrt{x}+3).(3-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})} + \frac{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x}} : \left(\frac{9-x}{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})} + \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x}} : \frac{9-x+x-4-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} . \frac{(\sqrt{x}-2).(3-\sqrt{x})}{3-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}}$$

Vậy $P = \dfrac{\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}}$ với $x \ge 0, x \ne 4, x \ne 9$.

2) Ta có: $P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2).(1+\sqrt{x}) < 0$

Với $x \ge 0, x \ne 4, x \ne 9$ thì $\sqrt{x}+1 > 0$ do đó $\sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow 0 \le x < 4$.

Kết hợp điều kiện, ta có: $0 \le x < 4$ thì $P < 0$

Do x nguyên nên $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3) Ta có: $P = \dfrac{\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$.

Do $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \ge 1 \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} \le 3 \Rightarrow P \ge 1-3 = -2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = -2$, đạt được khi $x = 0$.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc $45\,km/h$. Biết tổng chiều dài quãng đường AB và BC là $199\,km$ và thời gian ô tô đi quãng đường AB ít hơn thời gian ô tô đi quãng đường BC là 12 phút. Tính thời gian Ô tô đi trên quãng đường AB và quãng đường BC.

Đổi: 12 phút = $\frac{1}{5}=0,2$ (giờ)

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là x (giờ)

Đk: $x>0$

$\Rightarrow$ thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là $x+0,2$ (giờ).

Quãng đường AC là $50x$ (km), quãng đường BC là $45.(x+0,2)$ (km).

Vì tổng chiều dài quãng đường AB và BC là $199\,km$, nên ta có phương trình:

$\Leftrightarrow 50.x+45.\left(x+0,2\right)=199 \Leftrightarrow 50x+45x+9=199$
$\Leftrightarrow 95x=190 \Leftrightarrow x=2$

Vậy thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là 2 (giờ), thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là $2,2$ (giờ).

Bài III. Cho phương trình: $x^2-\left(m-2\right)x-m^2+3m-4=0$ (Tham số m).

1) Chứng minh phương trình trên có hai nghiệm trái dấu với mọi giá trị của m.

2) Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1,x_2.

Tìm giá trị của m để: $x_1\left(x_1-2\right)+x_2\left(x_2-2\right)=7$.

1) Phương trình: $x^2-\left(m-2\right)x-m^2+3m-4=0$ (1) có:

$a=1\,;\,b=-(m-2)=2-m\,;\,c=-m^2+3m-4$

$$a.c=-m^2+3m-4=-\left(m^2-2.\frac{3}{2}.m+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)=-\left[\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]<0,\forall m$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi giá trị của m (đpcm).

2) Ta có x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), thỏa mãn Vi-ét $\begin{cases}x_1+x_2=m-2\\ x_1.x_1=-m^2+3m-4\end{cases}$

$x_1\left(x_1-2\right)+x_2\left(x_2-2\right)=7 \Leftrightarrow x_1{}^2-2x_1+x_2{}^2-2x_1=7$
$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)=7$ (*)

Thay hệ thức Viet vào (*) ta được:

$3m^2-12m+16=7 \Leftrightarrow 3m^2-12m+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy m = 1 hoặc m = 3 thỏa mãn bài toán.

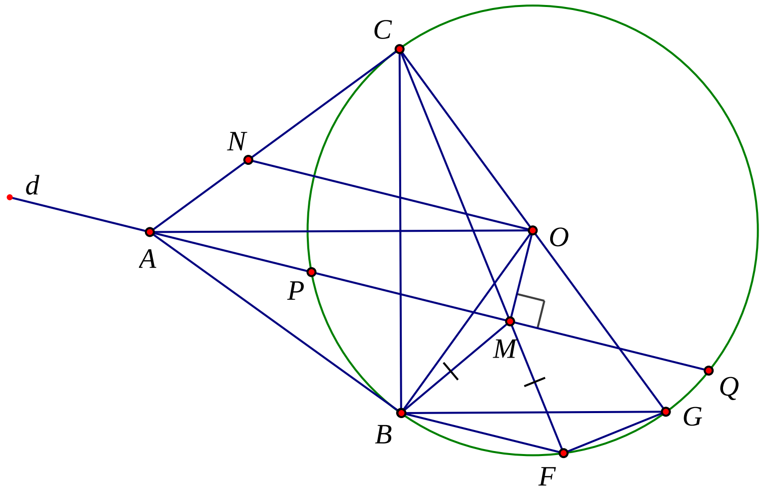
Bài IV. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC tới đường tròn $(O;R)$. ($B;C$ là hai tiếp điểm). Đường thẳng d tùy ý đi qua điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt P và Q sao cho tia AP nằm giữa hai tia AB và AC. Đường thẳng đi qua O và song song với d cắt đường thẳng AC tại điểm N. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

1) Chứng minh các điểm A,B,M,O,C cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh tam giác AON đồng dạng với tam giác MCO.

3) Giải sử $OA=3\sqrt{10}$cm, $R=5$cm và $OM=3$cm. Đặt $\widehat{AON}=\alpha$, tính $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

4) Chứng minh $\dfrac{MA}{MB+MC}$ là đại lượng không đổi khi đường thẳng d quay quanh điểm A.



1) Chứng minh các điểm A,B,M,O,C cùng nằm trên một đường tròn.

Do AB và AC là 2 tiếp tuyến tại B và C của đường tròn $(O;R)$

$\Rightarrow \widehat{OBA}=\widehat{OCA}=90^0$ (tính chất tiếp tuyến).

PQ là dây cung của đường tròn $(O;R)$ và M là trung điểm của PQ

$\Rightarrow OM \perp PQ$ hay $OM \perp AM$

$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA} = \widehat{OMA} = 90^0$

$\Rightarrow$ các điểm B, C, M cùng nhìn cạnh OA dưới một góc vuông.

$\Rightarrow A, B, M, O, C$ cùng nằm trên một đường tròn (I) đường kính OA (I là trung điểm OA)

2) Chứng minh ΔAON đồng dạng với ΔMCO.

Xét trong đường tròn (I) có $\widehat{OMC} = \widehat{CAO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OC}$).

$\Rightarrow \widehat{OMC} = \widehat{NAO}$ (1)

Tứ giác ACOM nội tiếp đường tròn (I) có $\widehat{MOC} + \widehat{MAC} = 180^o$ (Định lý)

Ta có $ON // MA$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ANO} + \widehat{MAC} = 180^o$ (hai góc trong cùng phía).

Do đó: $\widehat{MOC} = \widehat{ANO}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ΔAON đồng dạng với ΔMCO.

3) Giả sử $OA = 3\sqrt{10}cm$, $R = 5cm$ và $OM = 3cm$. Đặt $\widehat{AON} = \alpha$, tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

Ta có: $ON // MA$ (giả thiết); $OM \perp AM \Rightarrow OM \perp ON$ $\Rightarrow \widehat{AON} + \widehat{AOM} = \widehat{NOM} = 90^0$

Trong tam giác vuông OMA ta có: $\cos\widehat{AOM} = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{3}{3\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Từ tính chất của 2 góc phụ nhau ta có: $\sin\alpha = \cos\widehat{AOM} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (do $\alpha = \widehat{AON} < \widehat{AOC} < 90^0$)

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} : \dfrac{1}{\sqrt{10}} = 3$

$\Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{3}$

4) Chứng minh $\dfrac{MA}{MB + MC}$ là đại lượng không đổi khi đường thẳng d quay quanh điểm A.

Kẻ CM cắt (O; R) tại F. CO cắt (O; R) tại G.

Ta có: A, C, M, B cùng thuộc 1 đường tròn (cmt)$\Rightarrow$ Tứ giác ACMB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CAB}+\widehat{CMB}=180^0$ (t/c)

Mà $\widehat{CMB}+\widehat{BMF}=180^0 \Rightarrow \widehat{CAB}=\widehat{BMF}$

Ta có: $\widehat{BFC}=\widehat{ABC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$ của (O; R)) hay $\widehat{MFB}=\widehat{ABC}$ (do $M\in CF$) (3)

Xét ΔABC và ΔMFB có: $\widehat{CAB}=\widehat{BMF}$ (cmt); $\widehat{MFB}=\widehat{ABC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta MFB$ (g.g)$\Rightarrow \widehat{MBF}=\widehat{ACB}$ (cặp góc tương ứng) (4)

Do AB, AC là hai tiếp tuyến của (O; R) (gt)$\Rightarrow AC=AB$ (t/c)$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{ABC}$ (t/c) (5)

Từ (3),(4),(5)$\Rightarrow \widehat{MBF}=\widehat{MFB}\Rightarrow \Delta MBF$ cân tạ M

$\Rightarrow MB=MF\Rightarrow MB+MC=MF+MC=CF$ (6)

ΔMOA vuông tại M (do $OM\perp AM$ (cmt)) nên ta có: $MA=AO.\sin\widehat{OAM}$ (7)

Ta có: $\widehat{CFG}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa (O; R)) ΔCFG vuông tại F

$\Rightarrow CF=CG.\sin\widehat{FCG}=2R.\sin\widehat{FCG}$ (8)

Do A, M, O, C cùng thuộc 1 đường tròn (cmt)

$\Rightarrow \widehat{OAM}=\widehat{MCO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MO}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMOC) hay $\widehat{OAM}=\widehat{FCG}$ (do $M\in CF$; $O\in CG$) (9)

Từ (6),(7),(8),(9)$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB+MC}=\dfrac{AO.\sin\widehat{OAM}}{2R.\sin\widehat{OAM}}=\dfrac{AO}{2R}$

Do A, O cố định và R không đổi nên $\dfrac{AO}{2R}$ không đổi$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB+MC}$ không đổi (đpcm).

PHÒNG GD&ĐT QUẬN LONG BIÊN
NĂM HỌC 2017 – 2018
Đề số 10

ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG
MÔN: TOÁN 9
Ngày 4/5/2018

Bài I. Cho hai biểu thức $P=\dfrac{a-9}{\sqrt{a}-3}$ và $Q=\dfrac{3}{\sqrt{a}-3}+\dfrac{2}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{a-5\sqrt{a}-3}{a-9}, a\ge 0, a\ne 9.$

1) Khi $a=81$, tính giá trị biểu thức P.

2) Rút gọn biểu thức Q.

3) Với $a>9$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=P.Q$.

Bài II: *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Hai đội công nhân làm chung một công việc và dự định 12 ngày thì hoàn thành xong. Nhưng khi làm chung được 8 ngày, thì đội I được điều động đi làm việc khác. Đội II tiếp tục làm nốt phần việc còn lại. Khi làm một mình, do cải tiến cách làm, năng suất của đội II tăng gấp đôi, nên đội II đã hoàn thành xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì sau thời gian bao lâu sẽ hoàn thành công việc trên?.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-1}=2\\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y-1}=1\end{cases}$

2) Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=(2m+1)x-2m$ (x là ẩn, m là tham số).

a) Khi $m=1$. Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $T=x_1{}^2+x_2{}^2-x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài IV. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R) vẽ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M bất kỳ, vẽ MI vuông góc với AB, MK vuông góc với AC $(I\in AB, K\in AC)$.

1) Chứng minh: Tứgiác AIMK nội tiếp đường tròn.

2) Vẽ MP vuông gócvới BC $(P\in BC)$.Chứng minh: $\widehat{MPK}=\widehat{MBC}$.

3) Chứng minh rằng: $MI.MK=MP^2$.

4) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài V. Cho ba số x, y, z không âm và $x^2+y^2+z^2\le 3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{4}{(y+2)^2}+\dfrac{8}{(z+3)^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. Cho hai biểu thức $P=\dfrac{a-9}{\sqrt{a}-3}$ và $Q=\dfrac{3}{\sqrt{a}-3}+\dfrac{2}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{a-5\sqrt{a}-3}{a-9}$ với $a\ge 0, a\ne 9$

1) Khi a = 81, tính giá trị biểu thức P.

2) Rút gọn biểu thức Q.

3) Với a > 9, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = P.Q.

1) Ta có: $P = \dfrac{a-9}{\sqrt{a}-3} = \sqrt{a}+3$

Với $a = 81$ (thỏa mã ĐK) $\Rightarrow \sqrt{a} = 9$

Thay $\sqrt{a} = 9$ vào P ta được: $P = 9 + 3 = 12$.

Vậy $P = 12$ khi $a = 81$.

2) Rút gọn biểu thức Q.

$$Q = \frac{3}{\sqrt{a}-3} + \frac{2}{\sqrt{a}+3} + \frac{a-5\sqrt{a}-3}{a-9} \qquad (a \ge 0, a \ne 9).$$

$$= \frac{3.(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} + \frac{2(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)} + \frac{a-5\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)}$$

$$= \frac{3\sqrt{a}+9+2\sqrt{a}-6+a-5\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$= \frac{a}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

Vậy $Q = \dfrac{a}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$ với $a \ge 0, a \ne 9$

3) Ta có:

$$A = P.Q = \frac{a}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}.(\sqrt{a}+3) = \frac{a}{\sqrt{a}-3} = \sqrt{a}+3+\frac{9}{\sqrt{a}-3} = \sqrt{a}-3+\frac{9}{\sqrt{a}-3}+6.$$

Vì $a > 9 \Rightarrow \sqrt{a}-3 > 0$ nên theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{a}-3+\frac{9}{\sqrt{a}-3} \ge 2\sqrt{(\sqrt{a}-3).\frac{9}{\sqrt{a}-3}} \Leftrightarrow \sqrt{a}-3+\frac{9}{\sqrt{a}-3} \ge 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-3+\frac{9}{\sqrt{a}-3}+6 \ge 6+6$$

$$\Leftrightarrow P \ge 12$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{a}-3 = \dfrac{9}{\sqrt{a}-3} \Rightarrow (\sqrt{a}-3)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{a}-3 = 3 \Leftrightarrow a = 36$ (Thỏa mãn).

Vậy $P_{min} = 12$ khi $a = 36$.

Bài II: *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai đội công nhân làm chung một công việc và dự định 12 ngày thì hoàn thành xong. Nhưng khi làm chung được 8 ngày, thì đội I được điều động đi làm việc khác. Đội II tiếp tục làm nốt phần việc còn lại. Khi làm một mình, do cải tiến cách làm, năng suất của đội II tăng gấp đôi, nên đội II đã hoàn thành xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì sau thời gian bao lâu sẽ hoàn thành công việc trên?.

Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày)

Gọi thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là y (ngày) $(x, y > 12)$

Trong 1 ngày: Đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc); đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc); và cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ (công việc) nên ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ (1)

Cả hai đội cùng làm trong 8 ngày được: $8.\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$ (công việc); trong 3,5 ngày đội hai làm xong phần việc còn lại được $3,5.\frac{2}{y}=\frac{7}{y}$ (công việc). Ta có phương trình: $\frac{2}{3}+\frac{7}{y}=1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{2}{3}+\frac{7}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{7}{y}=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{12}-\frac{1}{21}=\frac{1}{28}\\ y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=28\\ y=21\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là 28 (ngày); thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là 21 (ngày) .

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y-1}=2\\ \frac{2}{x-2}-\frac{3}{y-1}=1\end{cases}$

2) Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=(2m+1)x-2m$ (x là ẩn, m là tham số).

a) Khi m = 1. Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1) Điều kiện: $x \neq 2; y \neq 1$

Đặt $A = \frac{1}{x-2}$; $B = \frac{1}{y-1}$ với $A \neq 0; B \neq 0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2A - 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 6 \\ 2A - 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = 7 \\ A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{7}{5} (tm) \\ B = \frac{3}{5} (tm) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = \frac{7}{5} \\ \frac{1}{y-1} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{7} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là: $(x; y) = \left(\frac{19}{7}; \frac{8}{3}\right)$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2 = (2m+1)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ (1)

2a) Khi m = 1 thì phương trình (1) trở thành

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Với $x = 1$ thay vào phương trình của (P) ta có $y = 1^2 \Leftrightarrow y = 1$

Với $x = 2$ thay vào phương trình của (P) ta có $y = 2^2 \Leftrightarrow y = 4$

Vậy khi m = 1 thì tọa độ giao điểm của (d) và (P) là C(1; 1) và D(2; 4)

2b) Xét phương trình $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ (1)

$$\Delta = (2m+1)^2 - 8m = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 ; $x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$

Ta có: $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$

Với $m \neq \frac{1}{2}$, theo hệ thức vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}$

Thay vào T ta có:

$$T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = (2m+1)^2 - 3.2m = 4m^2 - 2m + 1$$

$$T = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \ \forall m \neq \frac{1}{2}$$

$T = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ (tm)

Vậy $T_{min} = \frac{3}{4}$ khi $m = \frac{1}{4}$.

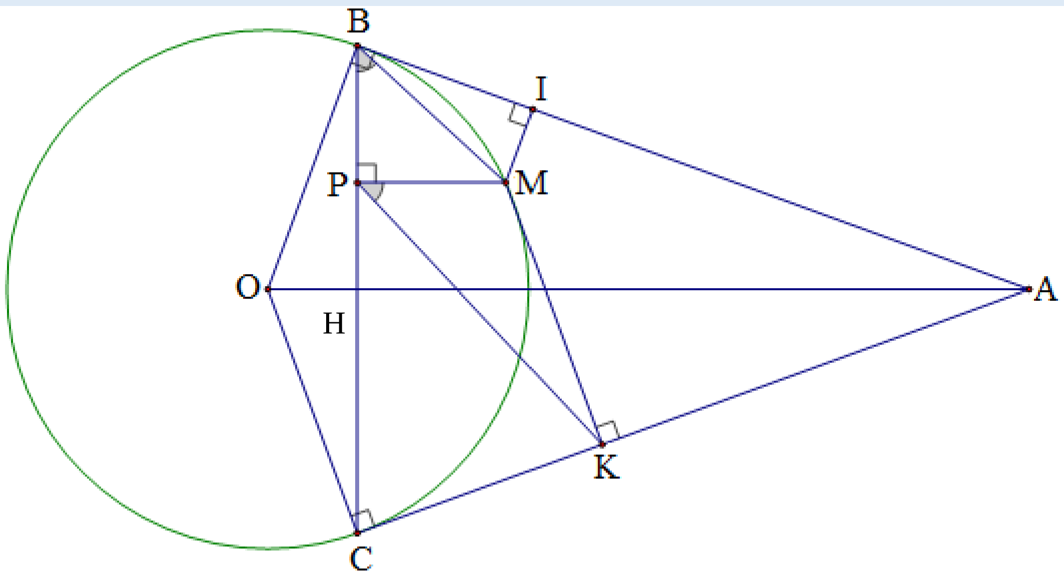
Bài IV. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M bất kỳ, vẽ MI vuông góc với AB, MK vuông góc với AC $\left(I \in AB, K \in AC\right)$.

1) Chứng minh: Tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn.

2) Vẽ MP vuông gócvới BC $\left(P \in BC\right)$. Chứng minh: $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$.

3) Chứng minh rằng: $MI.MK = MP^2$.

4) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.



1) Chứng minh: Tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn.

Ta có $MI \perp AB$ tại I (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MIA} = 90^o$

$MK \perp AC$ tại K (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MKA} = 90^o$

Xét tứ giác $AIMK$ có $\widehat{MIA}$; $\widehat{MKA}$ là hai góc đối nhau và $\widehat{MIA} + \widehat{MKA} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AIMK$ nội tiếp (dhnb) (đpcm).

2) Chứng minh: $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$.

Ta có $MP \perp BC$ tại P (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{CPM} = 90^o$

$MK \perp AC$ tại K (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{CKM} = 90^o$

Xét tứ giác $CPMK$ có $\widehat{CPM}$; $\widehat{CKM}$ là hai góc đối nhau và $\widehat{CPM} + \widehat{CKM} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CPMK$ nội tiếp (dhnb).

=> $\widehat{KPM} = \widehat{KCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ MK của đường tròn ngoại tiếp tứ giác CPMK) (1)

Xét (O) có $\widehat{KCM} = \widehat{CBM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{CM}$) (2)

Từ (1) và (2) => $\widehat{KPM} = \widehat{CBM}$. (đpcm) (3)

3) Chứng minh rằng: $MI.MK = MP^2$.

Ta có $MP \perp BC$ tại P (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BPM} = 90^o$

$MI \perp AB$ tại I (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BIM} = 90^o$

Xét tứ giác $BIMP$ có $\widehat{BPM}$; $\widehat{BIM}$ là hai góc đối nhau và $\widehat{BPM} + \widehat{BIM} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BIMP$ nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow \widehat{PIM} = \widehat{CBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PM}$) (4)

và $\widehat{IBM} = \widehat{IPM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IM}$) (5)

Tứ giác $CPMK$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{PKM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PM}$) (6)

Xét (O) có $\widehat{BCM} = \widehat{IBM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$) (7)

Xét ΔIMP và ΔPMK có:

$\widehat{PIM} = \widehat{KPM}$ (theo (3) và (4))

$\widehat{IPM} = \widehat{PKM}$ (theo (5), (6) và (7))

$\Rightarrow \Delta IMP \backsim \Delta PMK$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{IM}{PM} = \dfrac{PM}{MK}$ (tính chất)

$\Rightarrow IM.MK = PM^2$ (đpcm)

4) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Có $MI.MK.MP = MP^3$.

Để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MP lớn nhất.

Gọi H là trung điểm BC mà BC cố định nên H cố định.

Do đó $MP_{max} \Leftrightarrow MP = MH$

Xét ΔMBC có MP là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

=> ΔMBC cân tại M

=> $MB = MC \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC

Bài V. Cho ba số x, y, z không âm và $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}.$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$(x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1) \ge 2x+4y+2z \Leftrightarrow 3y+6 \ge 2x+4y+2z$ (do $x^2+y^2+z^2 \le 3y$.)

$\Leftrightarrow 6 \ge 2x + y + 2z$

Với a, b là các số dương ta chứng minh được $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \ge \dfrac{8}{(a+b)^2}$

Dấu " = " xảy ra khi a = b.

Áp dung BĐT trên ta có: $P = \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{y}{2}+1\right)^2} + \dfrac{8}{(z+3)^2} \ge \dfrac{8}{\left(x+1+\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2} + \dfrac{8}{(z+3)^2}$

$$P \ge \frac{64.4}{(2x+y+2z+10)^2} \ge \frac{256}{(6+10)^2} = 1$$

Vậy $P_{min} = 1$ khi $x = 1; y = 2; z = 1$

VIETELITE EDUCATION	**KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT (Lần 1)**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Năm học: 2018-2019**
Đề số 11	**Môn thi: TOÁN**
	Ngày thi: 25 tháng 04 năm 2018.
	Thời gian làm bài: 120 phút.

Bài 1 (2,0 điểm). Cho các biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, với $x \geq 0\ ; x \neq 1$.

1) Tìm các giá trị của x để A = 2.

2) Chứng tỏ rằng tích A.B không phụ thuộc vào x .

3) Tìm tất cả các số thực x để $A \geq B$.

Bài II (2,0 điểm). *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Trong giờ thể dục, hai bạn An và Bình cùng chạy bền trên một quãng đường dài 2km và xuất phát tại cùng một thời điểm. Biết bạn An chạy bền với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình của bạn Bình là 2km/giờ và về đích sớm hơn Bình 5 phút. Tính thời gian chạy hết quãng đường của mỗi bạn biết rằng vận tốc của mỗi bạn không đổi trên cả quãng đường.

Bài III (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} + \sqrt{y} = -1 \\ \dfrac{1}{x+1} + 2y = 4 \end{cases}$

2) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$, m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm các giá trị của m để $x_1 + 4 = \sqrt{x_2}$.

Bài IV (3,5 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính BC. Một điểm A thuộc đường tròn sao cho $AB > AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC, AE cắt BC tại M. Kẻ đường cao AH của tam giác ABE, AH cắt BC tại F.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFEC$ là hình thoi.

b) Chứng minh $DC.DB = DM.DO$.

c) Gọi I là trung điểm của AH, kéo dài BI cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh tứ giác $AIMK$ là tứ giác nội tiếp.

d) Đường thẳng AK cắt đường thẳng BD tại N. Chứng minh N là trung điểm của MD.

Bài V (0,5 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ac + bc - 2018ab$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2,0 điểm). Cho các biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, với $x \geq 0\,; x \neq 1$.

1) Tìm các giá trị của x để A = 2.

2) Chứng tỏ rằng tích A.B không phụ thuộc vào x .

3) Tìm tất cả các số thực x để $A \geq B$.

1) Ta có $A = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x}-2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$ (TMĐK).

Vậy với $x = 9$ thì $A = 2$.

2) Xét tích:

$$\begin{aligned}
A.B &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Vậy tích $A.B = 1$ không phụ thuộc vào x.

3) Ta có:

$$\begin{aligned}
&A \geq B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2 - \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) + \sqrt{x}-1}{x-1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+2\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{x-1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{x-1} \geq 0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x-1>0$ hoặc $x=0$ (do $4\sqrt{x}\geq 0$ với mọi $x\geq 0\,; x\neq 1.$)

$\Leftrightarrow x>1$ hoặc $x=0$ (TMĐK).

Vậy với $x>1$ hoặc $x=0$ thì $A\geq B$.

Bài II (2,0 điểm). *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Trong giờ thể dục, hai bạn An và Bình cùng chạy bền trên một quãng đường dài 2km và xuất phát tại cùng một thời điểm. Biết bạn An chạy bền với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình của bạn Bình là 2km/giờ và về đích sớm hơn Bình 5 phút. Tính thời gian chạy hết quãng đường của mỗi bạn biết rằng vận tốc của mỗi bạn không đổi trên cả quãng đường.

Đổi: 5 phút = $\frac{1}{12}$ (giờ).

Cách 1: Gọi ẩn là thời gian cần tìm.

Gọi thời gian chạy hết quãng đường của An là x (giờ), thời gian chạy hết quãng đường của Bình là y (giờ).

Điều kiện: x > 0, y > 0.

Vì An và Bình xuất phát cùng một thời điểm và An về đích sớm hơn Bình $\frac{1}{12}$ (giờ) nên ta có phương trình:

$$y-x=\frac{1}{12} \qquad (1).$$

Vận tốc trung bình của An là $\frac{2}{x}$ (km/h), vận tốc trung bình của Bình là $\frac{2}{y}$ (km/h). Vì An chạy bền với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình của bạn Bình là 2km/giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y-x=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x=\dfrac{1}{12} \\ y-x=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x=\dfrac{1}{12} \\ xy=\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{12}+x \\ x\left(\dfrac{1}{12}+x\right)=\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{12}+x \\ 12x^2+x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{3}\ (TMĐK) \\ x=\dfrac{1}{4}\ (TMĐK)\ \ hoac\ \ x=\dfrac{-1}{3}\ (loai) \end{cases}$$

Vậy thời gian chạy hết quãng đường của An là $\dfrac{1}{4}$ (giờ), thời gian chạy hết quãng đường của Bình là $\dfrac{1}{3}$ (giờ).

Cách 2: Gọi ẩn là vận tốc, rồi suy ra thời gian cần tìm.

Gọi vận tốc trung bình của An là x (km/h), vận tốc trung bình của Bình là $x-2$ (km/h).

Điều kiện: x > 2.

Thời gian chạy hết quãng đường của An là $\dfrac{2}{x}$ (giờ), thời gian chạy hết quãng đường của Bình là $\dfrac{2}{x-2}$ (giờ).

Vì An và Bình xuất phát cùng một thời điểm và An về đích sớm hơn Bình $\dfrac{1}{12}$ (giờ) nên ta có phương trình:

$$\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{12}$$
$$\Leftrightarrow \dfrac{2x-2(x-2)}{x(x-2)}=\dfrac{1}{12}$$
$$\Rightarrow x\left(x-2\right)=48$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-48=0$$
$$\Leftrightarrow x=8\ \text{(TMĐK) hoặc } x=-6\quad \text{(loại)}$$

Vậy thời gian chạy hết quãng đường của An là $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ (giờ), thời gian chạy hết quãng đường của Bình là $\frac{2}{8-2}=\frac{1}{3}$ (giờ).

Bài III (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1}+\sqrt{y}=-1 \\ \dfrac{1}{x+1}+2y=4 \end{cases}$

2) Cho phương trình bậc hai $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$, m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm các giá trị của m để $x_1+4=\sqrt{x_2}$.

1) Điều kiện: $y\ge 0$, $x\ne -1$.

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1}+\sqrt{y}=-1 \\ \dfrac{1}{x+1}+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(x+1)-2}{x+1}+\sqrt{y}=-1 \\ \dfrac{1}{x+1}+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2}{x+1}+\sqrt{y}=-3 \\ \dfrac{1}{x+1}+2y=4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{1}{x+1} \\ b=\sqrt{y}\ ,\ b\ge 0 \end{cases}$, ta có HPT: $\begin{cases} -2a+b=-3 \\ a+2b^2=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b=-3 \\ 2a+4b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{b+3}{2} \\ 4b^2+b-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{b+3}{2} \\ (b-1)(4b+5)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{b+3}{2} \\ \left[\begin{array}{ll} b=1 & (TMĐK) \\ b=\dfrac{-4}{5} & (loai) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}=2 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{2} \\ y=1 \end{cases} \text{(TMĐK).}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{-1}{2}, 1\right)$.

2a) Phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ có:

$\Delta' = (m-1)^2 - m^2 + 2m + 3 = 4 > 0$ với mọi m.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m (đpcm)

2b) Phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là:

$x = m - 1 + 2 = m + 1$ và $x = m - 1 - 2 = m - 3$

Ta có: $x_1 + 4 = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow (x_1 + 4)^2 > x_1 \Rightarrow x_2 > x_1$ (với $x_2 \geq 0$; $x_1 \geq -4$)

Với mọi m thì $m + 1 > m - 3$ nên $x_2 = m + 1$ và $x_1 = m - 3$.

Ta có: $x_1 + 4 = \sqrt{x_2}$

$$\Leftrightarrow m - 3 + 4 = \sqrt{m+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{m+1} = m + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \sqrt{m+1}(\sqrt{m+1} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} m + 1 = 0 \\ \sqrt{m+1} = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow m = -1 \ hoac \ m = 0$$

Vậy với $m = -1 \ hoac \ m = 0$ thỏa mãn bài toán.

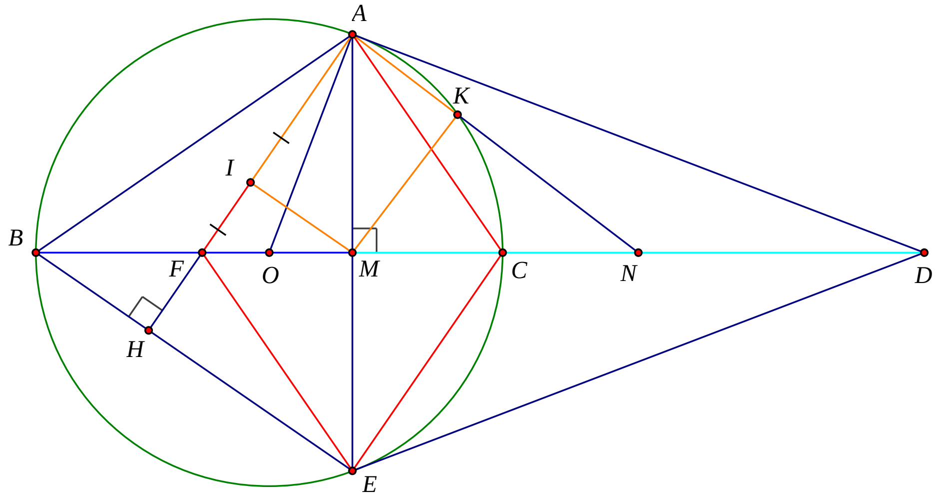
Bài IV (3,5 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính BC. Một điểm A thuộc đường tròn sao cho $AB > AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC, AE cắt BC tại M. Kẻ đường cao AH của tam giác ABE, AH cắt BC tại F.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFEC$ là hình thoi.

b) Chứng minh $DC.DB = DM.DO$.

c) Gọi I là trung điểm của AH, kéo dài BI cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh tứ giác $AIMK$ là tứ giác nội tiếp.

d) Đường thẳng AK cắt đường thẳng BD tại N. Chứng minh N là trung điểm của MD.



a) Ta có BC là đường kính của (O) (gt) và E là điểm đối xứng với A qua BC (giả thiết) nên $E \in (O)$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^o, \widehat{BEC} = 90^o$ (là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$$\Rightarrow \begin{cases} BA \perp AC & (1) \\ BE \perp EC & (2) \end{cases}$$

Ta có $BC \perp AE$ tại M là trung điểm của AE (tính chất đối xứng).

$\Rightarrow \Delta ABE$ có hai đường cao AH, BM và hai đường cao này cắt nhau tại F.

$\Rightarrow F$ là trực tâm của ΔABE. (3)

$\Rightarrow EF \perp AB$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow EF \,//\, AC$ (5)

Từ (3) $\Rightarrow AF \perp BE$ tại H (6)

Từ (2) và (6) $\Rightarrow AF \,//\, EC$ (7)

Từ (5) và (7) $\Rightarrow$ tứ giác $AFEC$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết).

Mà $FC \perp AE$ (vì $BC \perp AE$).

$\Rightarrow$ tứ giác $AFEC$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết). (đpcm)

b) Ta có $AO \perp AD$ tại A (vì AD là tiếp tuyến tại A của (O)).

$\Rightarrow \Delta DAO$ vuông tại A.

Mà $AM \perp OD$ tại M (vì $BC \perp AE$).

$\Rightarrow DM.DO = DA^2$ (hệ thức lượng). (8)

Xét ΔDAC và ΔDBA có:

$\widehat{DAC} = \widehat{DBA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$ của (O))

$\widehat{ADC}$ chung

$\Rightarrow \Delta DAC \backsim \Delta DBA$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DB}{DA} \Rightarrow DB.DC = DA^2$ (9)

Từ (8) và (9), ta có: $DB.DC = DM.DO$ (đpcm).

c) Xét đường tròn (O) có $\widehat{KAE} = \widehat{KBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KE}$). (10)

Ta có I, M lần lượt là trung điểm của AH và AE

$\Rightarrow IM$ là đường trung bình của ΔAHE

$\Rightarrow IM \,//\, HE$ hoặc $IM \,//\, BE$

$\Rightarrow \widehat{KIM} = \widehat{KBE}$ (hai góc đồng vị). (11)

Từ (10) và (11), ta có: $\widehat{KAE} = \widehat{KIM}$ hoặc $\widehat{KAM} = \widehat{KIM}$

$\Rightarrow$ tứ giác $AIMK$ có hai đỉnh kề A và I cùng nhìn cạnh KM dưới một góc không đổi.

$\Rightarrow$ tứ giác $AIMK$ là tứ giác nội tiếp (đpcm)

d) Xét ΔAHB vuông tại H có: $\tan \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH}$ (tỉ số lượng giác góc nhọn).

Xét ΔIHB vuông tại H có: $\tan\widehat{IBH} = \dfrac{IH}{BH}$ (tỉ số lượng giác góc nhọn).

Xét đường tròn (O), ta có:

$\widehat{ABH} = \widehat{DAM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung).

$\widehat{IBH} = \widehat{KAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KE}$ của (O)).

$\Rightarrow \tan\widehat{DAM} = \dfrac{AH}{BH}$; $\tan\widehat{KAM} = \dfrac{IH}{BH}$.

$\Rightarrow \dfrac{\tan\widehat{DAM}}{\tan\widehat{KAM}} = \dfrac{AH}{IH} = 2$ (vì AH = 2IH do I là trung điểm của AH) (12)

Xét ΔAMD vuông tại M có: $\tan\widehat{DAM} = \dfrac{MD}{AM}$ (tỉ số lượng giác góc nhọn).

Xét ΔNAM vuông tại M có: $\tan\widehat{NAM} = \dfrac{NM}{AM}$ (tỉ số lượng giác góc nhọn),

$\widehat{NAM} = \widehat{KAM}$.

$\Rightarrow \dfrac{\tan\widehat{DAM}}{\tan\widehat{NAM}} = \dfrac{MD}{ND}$ hoặc $\dfrac{\tan\widehat{DAM}}{\tan\widehat{KAM}} = \dfrac{MD}{ND}$ (13)

Từ (12) và (13), ta có: $\dfrac{MD}{ND} = 2$ hoặc $ND = \dfrac{MD}{2}$ (với N thuộc đoạn MD).

$\Rightarrow$ N là trung điểm của MD.

Bài V (0,5 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ac + bc - 2018ab$.

* **Tìm GTLN:**

Ta có $P = ac + bc - 2018ab = c(a+b) - 2018ab \underset{(1)}{\leq} c(a+b) \underset{theo\ BĐT\ cosi\ (2)}{\leq} \dfrac{(a+b+c)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu “=” ở (1), (2) đồng thời xảy ra và thỏa mãn điều kiện bài cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.b = 0 \\ c = a + b \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = c = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ a = c = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $P_{max} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b = 0 \\ a = c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

*** Tìm GTNN:**

Ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (BĐT Cosi) $\Leftrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{4} \geq ab$ (3)

$$\Rightarrow P = ac + bc - 2018ab \underset{theo\ BĐT\ cosi\ (3)}{\geq} c(a+b) - 2018\frac{(a+b)^2}{4} \underset{(4)}{\geq} -2018\frac{(a+b)^2}{4}.$$

$a + b + c = 1 \Rightarrow a + b \leq 1$ (5)

$$\Rightarrow P \geq -2018\frac{(a+b)^2}{4} \geq -\frac{2018}{4} = -\frac{1009}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (3), (4), (5) đồng thời xảy ra và thỏa mãn điều kiện bài cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $P_{min} = -\dfrac{1009}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

PHÒNG GD & Đ T THANH TRÌ	**ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LẦN 3**
TRƯỜNG THCS ĐẠI ÁNG	**MÔN: TOÁN 9**
Đề số 12	

Bài 1 (2 điểm): Cho hai biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$; $Q = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức P khi x = 100.

2) Rút gọn Q.

3) Xét biểu thức $A = P.Q$, với giá trị nào của x thì $A < 1$.

Bài 2 (2 điểm): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội I làm trong 6 ngày, sau đó đội II làm tiếp trong 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình trong bao lâu xong công việc.

Bài 3 (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{3}{\sqrt{y-4}} = -2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{y-4}} = 3 \end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d):\ y = mx + 2$.

a) Với m = 1. Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 ; x_2 sao cho $x_1 - 2x_2 = 5$.

Bài 4 (3, 5 điểm): Cho đường tròn $(O\,;R)$. Dây cung CD cố định. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Đường kính MN của (O) cắt dây CD tại I. Lấy điểm E bất kì trên cung nhỏ CN (E khác C và N); ME cắt CD tại K. Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P.

1) Chứng minh tứ giác IKEN nội tiếp.

2) Chứng minh EI.MN = NK.ME.

3) Gọi Q là giao điểm của NK và MP. Chứng minh IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$.

4) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H. Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, N, D) thì H luôn chạy trên một đường cố định.

Bài 5 (0,5 điểm): Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của bieur thức $P = \dfrac{a+b}{abc}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (2 điểm): Cho hai biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$; $Q = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức P khi x = 100.

2) Rút gọn Q.

3) Xét biểu thức $A = P.Q$, với giá trị nào của x thì $A < 1$.

1) Với x = 100 (thỏa mãn ĐK), thay vào P ta được: $P = \frac{\sqrt{100}+2}{\sqrt{100}-2} = \frac{10+2}{10-2} = \frac{3}{2}$.

2) Điều kiện: $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right) + 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right) - 2 - 5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \frac{3x - 6\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

3) Ta có: $A = P.Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}.\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

$$A < 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} < 0 \quad (*)$$

Vì $x \ge 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}+2 > 0$, do đó:

Từ $(*) \Rightarrow \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4$

Kết hợp điều kiện ta có: $0 \le x < 4$ thì $A < 1$.

Bài 2 (2 điểm): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội I làm trong 6 ngày, sau đó đội II làm tiếp trong 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình trong bao lâu xong công việc.

Gọi thời gian đội I làm một mình xong công việc là x (ngày), thời gian đội II làm một mình xong công việc là y (ngày). Điều kiện: $x > 18\,;\, y > 18$.

Trong 1 ngày, đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) và đội II làm được $\frac{1}{y}$ (công việc). Cả hai đội cùng làm thì 18 ngày xong công việc, nên trong 1 ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{18}$ (công việc). Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}$ (1)

Nếu đội I làm trong 6 ngày, sau đó đội II làm tiếp trong 8 ngày nữa thì được 40% công việc, nên ta có phương trình: $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{3}\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}\\ \frac{2}{y}=\frac{1}{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{18}-\frac{1}{y}\\ y=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=45\\ y=30\end{cases}\text{(Thỏa mãn)}$$

Vậy đội I làm một mình xong công việc trong 45 ngày, đội II làm một mình xong công việc trong 30 ngày.

Bài 3 (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{3}{\sqrt{y}-4}=-2\\ \frac{2}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{y}-4}=3\end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d):\ y=mx+2$.

a) Với m = 1. Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 ; x_2 sao cho $x_1-2x_2=5$.

1) Điều kiện: $x\geq 0$; $x\neq 1$; $y\geq 0$; $y\neq 16$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{y}-4}=-2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y}-4}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{6}{\sqrt{y}-4}=-4 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y}-4}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{y}-4}=-2 \\ \dfrac{-5}{\sqrt{y}-4}=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{y}-4}=-2 \\ \sqrt{y}-4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{-7}{5} \\ \sqrt{y}-4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-7\sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y}=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{x}=2 \\ \sqrt{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{49} \\ y=81 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x\,;\,y)=\left(\dfrac{4}{49}\,;81\right)$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2-mx-2=0$ (1)

a) Với m = 1, phương trình (1) trở thành: $x^2-x-2=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=4 \end{array}\right.$$

Vậy với m = 1 thì (d) cắt (P) tại hai điểm là $(-1\,;1)$ và $(2\,;4)$

b) Xét phương trình (1) có $\Delta=m^2+8>0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1\,;\,x_2$ với mọi m

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1\,;\,x_2$ với mọi m

Hệ thức Vi – ét của phương trình (1): $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1.x_2=-2 \end{cases}$

Ta có: $x_1-2x_2=5 \Leftrightarrow x_1=5+2x_2$ thay vào hệ thức Vi – ét, ta được:

$$\begin{cases} 3x_2=m-5 \\ (5+2x_2).x_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{m-5}{3} \\ (5+2x_2).x_2=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(5+2.\frac{m-5}{3}\right).\frac{m-5}{3}=-2\Leftrightarrow(5+2m)(m-5)=-18$$

$$\Leftrightarrow 2m^2-5m-7=0\Leftrightarrow(m+1)(2m-7)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+1=0\\2m-7=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

Vậy với $m=-1$; $m=\frac{7}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

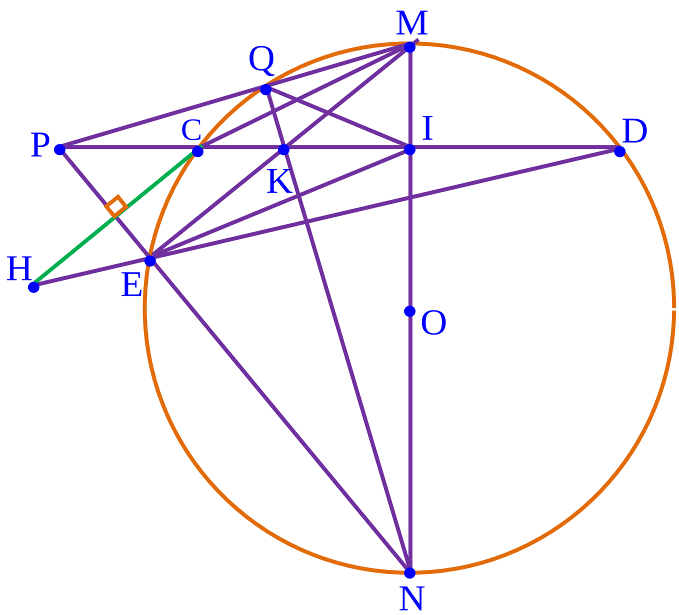
Bài 4 (3, 5 điểm): Cho đường tròn $(O\,;R)$. Dây cung CD cố định. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Đường kính MN của (O) cắt dây CD tại I. Lấy điểm E bất kì trên cung nhỏ CN (E khác C và N); ME cắt CD tại K. Các đường thẳng NE và CD cắt nhau tại P.

1) Chứng minh tứ giác IKEN nội tiếp.

2) Chứng minh EI.MN = NK.ME.

3) Gọi Q là giao điểm của NK và MP. Chứng minh IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$.

4) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với EN cắt đường thẳng DE tại H. Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, N, D) thì H luôn chạy trên một đường cố định.



1) Chứng minh tứ giác IKEN nội tiếp.

Ta có M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{CD}$ và MN là đường kính của (O) (giả thiết)

$\Rightarrow MN \perp CD$ tại I.

$\Rightarrow \widehat{KIN} = 90^{o}$ $(K \in CD)$.

Ta có: $\widehat{KEN} = 90^{o}$ (góc nội tiếp chắn nửa (O))

Xét tứ giác $IKEN$ có $\widehat{KIN}$; $\widehat{KEN}$ là hai góc đối và $\widehat{KIN} + \widehat{KEN} = 90^{o} + 90^{o} = 180^{o}$

$\Rightarrow$ tứ giác $IKEN$ nội tiếp.

2) Chứng minh EI.MN = NK.ME.

Xét ΔEIM và ΔNKM có:

$\widehat{EMI}$ chung

$\widehat{MEI} = \widehat{KNM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KI}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IKEN$)

$\Rightarrow \Delta EIM \backsim \Delta NKM$ $(g - g)$

$\Rightarrow \dfrac{EI}{NK} = \dfrac{EM}{NM}$ (tính chất)

$\Rightarrow$ EI.MN = NK.ME (đpcm).

3) Chứng minh IK là phân giác của $\widehat{EIQ}$.

Ta có: $\widehat{MEN} = 90^{o}$ (góc nội tiếp chắn nửa (O))

$\Rightarrow ME \perp NE$ hoặc $ME \perp NP$ tại E (do N, E, P thẳng hàng).

Ta có: $MN \perp CD$ tại I (cmt)

$\Rightarrow MN \perp PI$ tại I (do P, C, D thẳng hàng).

Do đó PI và ME là các đường cao của ΔMPN, mà có PI cắt ME tại K.

$\Rightarrow$ K là trực tâm của ΔMPN

$\Rightarrow NK \perp PM$ tại Q (tính chất trực tâm)

$\Rightarrow \widehat{KQM} = 90^{o}$

Cũng từ $MN \perp CD$ tại I (cmt) và $K \in CD \Rightarrow \widehat{KIM} = 90^{o}$

Xét tứ giác KQMI có $\widehat{KQM}$; $\widehat{KIM}$ là hai góc đối và $\widehat{KQM} + \widehat{KIM} = 90^{o} + 90^{o} = 180^{o}$

$\Rightarrow$ tứ giác KQMI nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{KMQ} = \widehat{KIQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KQ}$) (1)

Ta có tứ giác $IKEN$ nội tiếp (cmt)

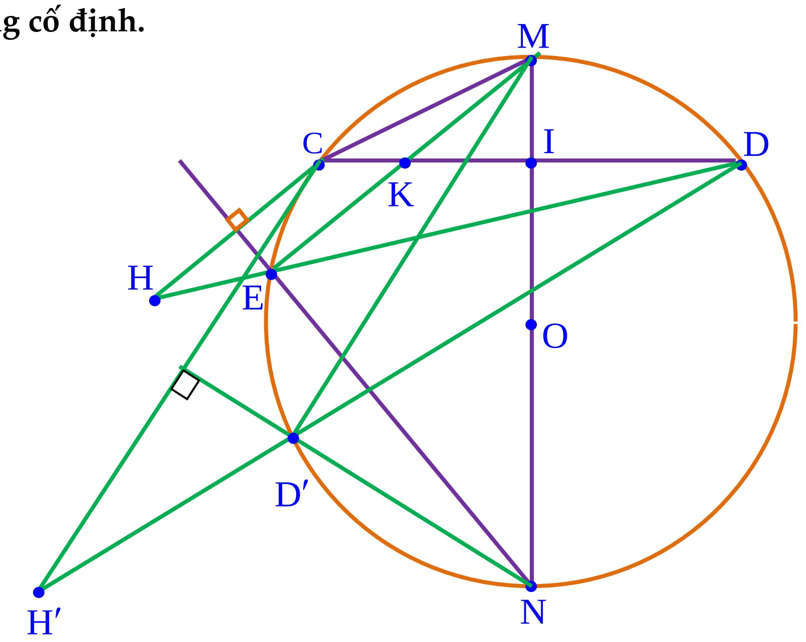
$\Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KNE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KE}$) (2)

Xét (O) có: $\widehat{KMQ} = \widehat{KNE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EQ}$) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{KIE} = \widehat{KIQ}$

$\Rightarrow$ IK là tia phân giác của $\widehat{EIQ}$ (đpcm).

4) Chứng minh khi E di động trên cung lớn CD (E khác C, N, D) thì H luôn chạy trên một đường cố định.



Ta có dây CD cố định và M là điểm chính giữa của cung nhỏ CD nên M và đường kính MN cũng cố định.

Gọi D' là trung điểm của cung nhỏ CN, thì D' cũng là điểm cố định. Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với $D'N$ và cắt DD' tại H' thì H' cũng là điểm cố định.

Ta có $CH \perp PN$ (giả thiết) và $ME \perp PN$ (cmt)

$\Rightarrow CH // ME \Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{MED}$ (hai góc sole trong)

Ta có $CH' \perp D'N$; $MD' \perp D'N$ (do $\widehat{MD'N} = 90^\circ$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow CH' // MD' \Rightarrow \widehat{CH'D} = \widehat{MD'D}$

Mà $\widehat{MED} = \widehat{MD'D} = \frac{1}{2}\widehat{MOD}$ không đổi (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{MD}$ của (O))

$\Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{CH'D} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOD}$ không đổi.

$\Rightarrow$Điểm H và H' luôn nhìn dây CD cố định dưới một góc không đổi khi E di động trên cung lớn CD.

$\Rightarrow$tứ giác $CHH'D$ nội tiếp với $\Delta CH'D$ cố định.

$\Rightarrow$H chạy trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta CH'D$

Bài 5 (0,5 điểm): Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tính giá trị nhỏ nhất của bieur thức $P=\dfrac{a+b}{abc}$.

Áp dụng B Đ T cosi, ta có: $a+b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$ (1)

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} \ge \frac{4}{(a+b)^2} \Rightarrow P = \frac{a+b}{abc} \ge \frac{4}{(a+b).c}$$

Áp dụng B Đ T cosi, ta có: $(a+b)+c \ge 2\sqrt{(a+b).c} \Leftrightarrow (a+b).c \le \dfrac{(a+b+c)^2}{4}$ (2)

$\Rightarrow P \ge \dfrac{16}{(a+b+c)^2} = 16$ (vì theo giả thiết $a+b+c=1$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (1) và (2) đồng thời xảy ra và thỏa mãn giả thiết

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{1}{4} \\ c=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $P_{Min} = 16 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{4}; c=\dfrac{1}{2}$.

TRUNG TÂM BỒI DƯỠNG VĂN HÓA A-STAR ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10

Đề số 13 **Năm học 2017-2018**

Bài 1. Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x\geq 0, x\neq 4$ $, x\neq 9$.

1) Rút gọn B.

2) Tìm x để $A\leq \dfrac{1}{2}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{A}{B}$.

Bài 2. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai trường A và B có tổng cộng 94 học sinh tham gia kỳ thi học sinh giỏi thành phố Hà Nội. Biết rằng 25% học sinh trường A và 20% học sinh trường B đạt giải nhất. Tổng số học sinh đạt giải nhất của hai trường là 21 học sinh. Tính số học sinh của mỗi trường tham gia kỳ thi đó?

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{3}{2y-1}=2\\ \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{4}{1-2y}=3\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-(m-1)x-1-m^2=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m biết $|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AE và AF tới đường tròn ($E;\ F$ là các tiếp điểm). Dựng cát tuyến ABC cắt đường tròn tại hai điểm B và C ($AB<AC$, BC không là đường kính của (O)). Gọi I là trung điểm của BC, K là trung điểm của EF. Gọi giao điểm của FI với (O) là D.

a) Chứng minh $AE^2=AB.AC$.

b) Chứng minh năm điểm $A;\ E;\ O;\ I;\ F$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh $ED//AC$ và tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính $OE,\ OF$ và cung nhỏ EF nếu $\widehat{OAE}=30^o$.

d) Chứng minh rằng khi (O) thay đổi các điểm $A,\ B,\ C$ cố định thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 5. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

---------------------------- Hết ----------------------------

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x\ge 0, x\ne 4$ $, x\ne 9$.

1) Rút gọn B.

2) Tìm x để $A\le \dfrac{1}{2}$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{A}{B}$.

1) $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{10-5\sqrt{x}}{x-5\sqrt{x}+6}$ ĐK: $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$.

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-10+5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{x-4\sqrt{x}+3-x+4-10+5\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

2) Ta có $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$, ĐK: $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$.

$$A\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-1}{2+2\sqrt{x}}\le 0$$

Mà $2+2\sqrt{x}>0\ \ \forall x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}-1\le 0\Leftrightarrow x\le 1$

Kết hợp với ĐK ta được $0\le x\le 1$

Vậy: với $0\le x\le 1$ thì $A\le\dfrac{1}{2}$.

3) $P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)+3}{\sqrt{x}+1}$

$$= \sqrt{x} - 3 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = \left(\sqrt{x} + 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}\right) - 4$$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương $\sqrt{x}+1$; $\frac{3}{\sqrt{x}+1}$, ta có:

$$\sqrt{x} + 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right).\frac{3}{\sqrt{x}+1}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{3} - 4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x} + 1 = \frac{3}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{3}\ \left(Do\, \sqrt{x} + 1 > 0\right)$$

$$\Rightarrow x = 4 - 2\sqrt{3}\left(tm\right)$$

Vậy $P_{\min} = 2\sqrt{3} - 4$ đạt được khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Bài 2. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai trường A và B có tổng cộng 94 học sinh tham gia kỳ thi học sinh giỏi thành phố Hà Nội. Biết rằng 25% học sinh trường A và 20% học sinh trường B đạt giải nhất. Tổng số học sinh đạt giải nhất của hai trường là 21 học sinh. Tính số học sinh của mỗi trường tham gia kỳ thi đó?

Gọi số học sinh của trường A và trường B tham gia kỳ thi học sinh giỏi lần lượt là x và y

(đk: $x, y \in \mathbb{N}^*, x, y < 90$)

Vì có tổng 94 học sinh tham gia kỳ thi học sinh giỏi nên ta có phương trình:

$$x + y = 94 \qquad (1)$$

25% học sinh trường A là $25\%.x = \frac{1}{4}x$ (học sinh)

20% học sinh trường B là $20\%\,\text{y} = \frac{1}{5}y$ (học sinh)

Ta có phương trình $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 21 \Leftrightarrow 5x + 4y = 420 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} x+y=94 \\ 5x+4y=420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+5y=470 \\ 5x+4y=420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=50(tm) \\ x=44(tm) \end{cases}$$

Vậy số học sinh trường A và B tham gia thi học sinh giỏi lần lượt là 44 học sinh và 50 học sinh.

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{3}{2y-1}=2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{4}{1-2y}=3 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-(m-1)x-1-m^2=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m biết $|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$.

1) Điều kiện $\begin{cases} x>-1 \\ y\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{3}{2y-1}=2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{4}{1-2y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{6}{2y-1}=4 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{4}{2y-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2y-1}=1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{4}{2y-1}=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1=2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{4}{2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{2}(tm) \\ x=3(tm) \end{cases}.$$

Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ là $\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$

2)

a) Phương trình: $x^2-(m-1)x-1-m^2=0$.

a = 1 ; b = $-(m-1)$; c = $-1-m^2$

Ta có $ac=-m^2-1<0\ \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Áp dụng định lý Vi-et ta được $\begin{cases} x_1+x_2=m-1 \\ x_1x_2=-m^2-1 \end{cases}$

Ta có $|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=8 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=8$ (*)

Thay hệ thức Vi-et vào (*) ta được:

$$(m-1)^2-2\left(-m^2-1\right)+2\left|-m^2-1\right|=8$$

$$\Leftrightarrow m^2-2m+1+2m^2+2+2m^2+2=8$$

$$\Leftrightarrow 3m^2-2m-5=0$$

$$\Leftrightarrow (3m-5)(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{5}{3} \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left\{-1;\dfrac{5}{3}\right\}$

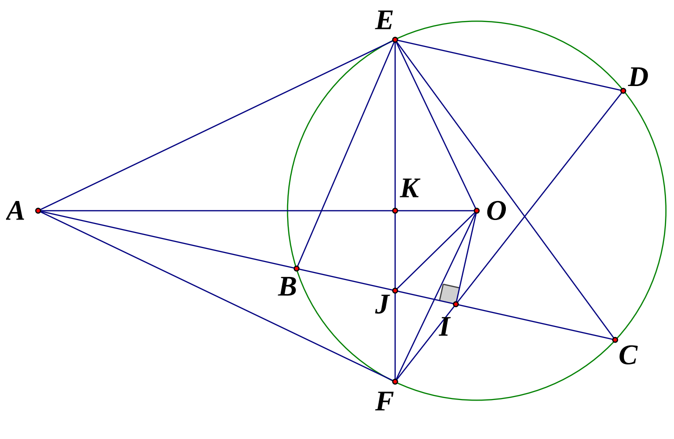
Bài 4. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AE và AF tới đường tròn ($E;\ F$ là các tiếp điểm). Dựng cát tuyến ABC cắt đường tròn tại hai điểm B và C ($AB<AC$, BC không là đường kính của (O)). Gọi I là trung điểm của BC, K là trung điểm của EF. Gọi giao điểm của FI với (O) là D.

a) Chứng minh $AE^2=AB.AC$.

b) Chứng minh năm điểm $A;\ E;\ O;\ I;\ F$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh $ED//AC$ và tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OE, OF và cung nhỏ EF nếu $\widehat{OAE}=30^o$.

d) Chứng minh rằng khi (O) thay đổi, các điểm $A,\ B,\ C$ cố định thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định.



a) Xét ΔAEB và ΔACE có:

$\widehat{A}$ chung, $\widehat{AEB}=\widehat{ACE}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta AEB$ đồng dạng với $\Delta ACE\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AE}\Rightarrow AE^2=AB.AC$$

b) Ta có AE, AF lần lượt là hai tiếp tuyến tại E và F của (O) (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{AEO} = 90^o; \widehat{AFO} = 90^o$ (Tính chất tiếp tuyến).

Xét (O) có I là trung điểm của BC nên $OI \perp BC$ tại I (tính chất đường kính – dây cung)

$\Rightarrow \widehat{AIO} = 90^o$

Xét tứ giác AEOI có hai góc đối $\widehat{AEO}$; $\widehat{AIO}$ mà $\widehat{AEO} + \widehat{AIO} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác AEOI nội tiếp (dhnb) (1).

Xét tứ giác AEOF có hai góc đối $\widehat{AEO}$; $\widehat{AFO}$ mà $\widehat{AEO} + \widehat{AFO} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác AEOF nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ năm điểm A, E, O, I, F thuộc đường tròn đường kính AO.

c) Xét (O) có: $\widehat{EDF} = \frac{1}{2}\widehat{EOF}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{EF}$)

Ta có AE và AF là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O).

$\Rightarrow$ AO là phân giác của $\widehat{EOF}$ (Tính chất tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{AOF} = \frac{1}{2}\widehat{EOF}$

Do đó: $\widehat{AOF} = \widehat{EDF}$

Xét đường tròn ngoại tiếp AEOIF có $\widehat{AOF} = \widehat{AIF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AF}$)

Do đó $\widehat{EDF} = \widehat{AIF}$

Mà $\widehat{EDF}; \widehat{AIF}$ là hai góc đồng vị.

$\Rightarrow ED // AC$ (đpcm)

Do $\widehat{OAE} = 30^o \Rightarrow \widehat{AOE} = 60^o \Rightarrow \widehat{EOF} = 120^o$.

Diện tích hình quạt giới hạn bởi OE, OF và cung nhỏ EF là: $S = \dfrac{\pi R^2.120^o}{360^o} = \dfrac{\pi R^2}{3}$

(đvdt)

d) Gọi J là giao điểm của BC và EF .

Ta có: AE = AF (tính chất tiếp tuyến cắt nhau).

OE = OF = R

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của EF (tính chất điểm thuộc đường trung trực).

$\Rightarrow AO \perp EF$ tại K là trung điểm của EF $\Rightarrow \widehat{OKJ} = 90^o$

Ta có $\Rightarrow \widehat{AIO} = 90^o \Rightarrow \widehat{JIO} = 90^o$

Xét tứ giác $OKJI$ có hai góc đối $\widehat{OKJ}$; $\widehat{JIO}$ mà $\widehat{OKJ} + \widehat{JIO} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác $OKJI$ nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow$ $AJ.AI = AK.AO = AE^2$ (hệ thức lượng trong đường tròn (OKJI)).

Xét ΔAEO vuông tại E, đường cao EK có: $AK.AO = AE^2$ (hệ thức lượng)

Xét $\Delta ABE \backsim \Delta AEC$ (g – g) $\Rightarrow AB.AC = AE^2$

Do đó: $AJ.AI = AB.AC$ mà A, B, C cố định và I là trung điểm của BC cũng cố định nên điểm J cố định.

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OKI cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OKJI$. Gọi P là tâm đường tròn này.

Khi (O) thay đổi thì P thay đổi nhưng $PI = PJ$ nên P luôn thuộc đường trung trực của IJ cố định.

Bài 5. Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$$

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)(*)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$x,y>0\Rightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

Áp dụng ta được: $\dfrac{ab}{a+b+2c}=\dfrac{ab}{a+c+b+c}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{ab}{a+c}+\dfrac{ab}{b+c}\right)$

Tương tự ta có: $\dfrac{bc}{b+c+2a}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{bc}{b+a}+\dfrac{bc}{c+a}\right);\dfrac{ca}{c+a+2b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{ca}{c+b}+\dfrac{ca}{a+b}\right)$

$$\Rightarrow VT(*)\le\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{ac+bc}{a+b}\right)=\frac{1}{4}(a+b+c)\Rightarrow dpcm.$$

THCS ARCHIMEDES ACADEMY | **ĐỀ KIỂM TRA TOÁN 9**

NGÀY 23 – 3 – 2019

Đề số 14 | **Năm học 2018 – 2019**

Thời gian: 120 phút.

Bài 1 (2 điểm): Cho hai biểu thức $A = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \ge 0$; $x \ne 4$; $x \ne 9$.

a) Rút gọn B.

b) Tìm x để $B > 0$.

c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm x để $2P = 2\sqrt{x} - 9$.

Bài 2 (2 điểm): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 6m. Bình phương độ dài đường chéo gấp 5 lần chu vi hình chữ nhật. Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật.

Bài 3 (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + 2\sqrt{y+2} = 3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{\sqrt{y+2}} = -2 \end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2 - 2x + m - 3 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$.

Bài 4 (3,5 điểm): Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O;R). H là trực tâm của tam giác ABC. Từ B đường thẳng song song với HC, từ C kẻ đường thẳng song song với HB, hai đường thẳng này cắt nhau tại D. Chứng minh:

1) Tứ giác ABDC nội tiếp và AD là đường kính của (O;R).

2) $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.

3) a) Gọi E là giao điểm của BC và HD, G là giao điểm của AE và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Cho $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính diện tích hình quạt tròn COD (ứng với cung nhỏ CD).

4) Nếu OH song song với BC thì $\tan B.\tan C = 3$ với B, C là hai góc của ΔABC.

Câu 5 (0,5 điểm): Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 27$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

a) Rút gọn B.

b) Tìm x để $B > 0$.

c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm x để $2P = 2\sqrt{x} - 9$.

a) Điều kiện: $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right) - \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right) + \sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$
$$= \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

b) Ta có: $B > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-2} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Kết hợp điều kiện, ta có: $x > 4\,;\, x \ne 9$ thì $B > 0$.

c) Ta có: $P = \frac{A}{B} = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x \ge 0\,;\, x \ne 4\,;\, x \ne 9$.

$$2.\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x}-9$$

$$2\left(\sqrt{x}-2\right)=\left(2\sqrt{x}-9\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4=2x-7\sqrt{x}-9$$

$$\Leftrightarrow 2x-9\sqrt{x}-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-5\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)=0 \quad (*)$$

Vì $x\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{x}+1>0$, nên từ (*)

$$\Rightarrow \sqrt{x}-5=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=5\Rightarrow x=25 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy với $x=25$ thì $2P=2\sqrt{x}-9$.

Bài 2: *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 6m. Bình phương độ dài đường chéo gấp 5 lần chu vi hình chữ nhật. Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật.

Gọi chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là x (m) $(x>6)$.

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng 6m, nên chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là: $x-6$ (m).

Chu vi hình chữ nhật là: $2\left[x+(x-6)\right]=2\left(2x-6\right)=4x-12$ (m).

Bình phương độ dài đường chéo hình chữ nhật là: $x^2+(x-6)^2$.

Vì bình phương độ dài đường chéo gấp 5 lần chu vi hình chữ nhật, nên ta có phương trình:

$$x^2+(x-6)^2=5.2\left[x+(x-6)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-12x+36=20x-60$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-32x+96=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-16x+48=0$$

$$\Leftrightarrow (x-12)(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-12=0 \\ x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=12 & \text{(thoa man)} \\ x=4 & \text{(khong thoa man)} \end{array}\right.$$

Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 12 (m), chiều rộng mảnh đất hình chữ nhật là 6 (m).

Bài 3:

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+2\sqrt{y+2}=3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+2}}=-2 \end{cases}$

2) Cho phương trình: $x^2-2x+m-3=0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1^2+12=2x_2-x_1x_2$.

1) Điều kiện: $x>-1$; $y>-2$.

Đặt: $\sqrt{x+1}=a>0$ và $\sqrt{y+2}=b>0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} a+2b=3 \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ \dfrac{1}{3-2b}-\dfrac{3}{b}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ \dfrac{b-3(3-2b)}{b(3-2b)}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ b-3(3-2b)=-2b(3-2b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ 4b^2-13b+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ (b-1)(4b-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-2b \\ b=1 \text{ hoac } b=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Với $b=1$ (thỏa mãn) $\Rightarrow a=1$ (thỏa mãn), ta có: $\begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{y+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Với $b=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn) $\Rightarrow a=\dfrac{-3}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$.

2a) Xét phương trình $x^2-2x+m-3=0$ (1)

$\Delta=4-4(m-3)=-4m+16$

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1 ; x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1.x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m+16>0 \\ 2>0 \\ m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m>3 \end{cases} \Rightarrow 3<m<4$$

Vậy với $3<m<4$ thì phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1 ; x_2.

2b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m<4$

Hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = m - 3 \end{cases}$

Ta có x_1 là nghiệm của phương trình (1), nên: $x_1^2 - 2x_1 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2x_1 - m + 3$

Bài cho: $x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$.

$$\Rightarrow 2x_1 - m + 3 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$$
$$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) = m - 15 - x_1x_2$$

Kết hợp hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = m - 3 \\ 2(x_1 - x_2) = m - 15 - x_1x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = m - 3 \\ 2(x_1 - x_2) = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = m - 3 \\ x_1 - x_2 = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = m - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m - 3 = 4.(-2)$$

$\Rightarrow m = -5.$ (Thỏa mãn).

Vậy $m = -5$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$.

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O;R). H là trực tâm của tam giác ABC. Từ B đường thẳng song song với HC, từ C kẻ đường thẳng song song với HB, hai đường thẳng này cắt nhau tại D. Chứng minh:

1) Tứ giác ABDC nội tiếp và AD là đường kính của (O;R).

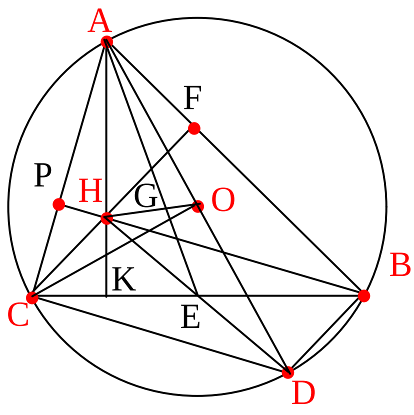
2) $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.

3)

a) Gọi E là giao điểm của BC và HD, G là giao điểm của AE và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Cho $\widehat{ABC} = 60^o$. Tính diện tích hình quạt tròn COD (ứng với cung nhỏ CD).

4) Nếu OH song song với BC thì $\tan B.\tan C = 3$ với B, C là hai góc của ΔABC.



1) Tứ giác ABDC nội tiếp và AD là đường kính của (O;R).

Ta có H là trực tâm ΔABC (giả thiết), ta có: $BH \perp AC$ tại P ; $CH \perp AB$ tại F

Mà $BD//CH$ (gt); $CD//BH$ (gt)

$\Rightarrow BD \perp AB$; $AC \perp DC$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^o$; $\widehat{ACD} = 90^o$ (1)

Xét tứ giác có $\widehat{ABD}$; $\widehat{ACD}$ là hai góc đối và $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABDC nội tiếp. (đpcm).

Mà tam giác ABC nôi tiếp (O; R) (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn (O; R) (2)

Từ (1) và (2), ta có AD là đường kính (O; R). (đpcm).

2) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.

Xét $AH \perp BC$ tại K (vì H là trực tâm tam giác ABC), nên ΔAKB có:

$\widehat{AKB} = 90^o$; $\widehat{AKB} + \widehat{ABK} + \widehat{BAH} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{ABK} + \widehat{BAH} = 90^o$ (3)

Xét ΔACD có:

$\widehat{ACD} = 90^o$ (cmt); $\widehat{ACD} + \widehat{ADC} + \widehat{CAO} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{CAO} = 180^o$ (4)

Xét (O) có: $\widehat{ABK} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$). (5)

Từ (3), (4) và (5) $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$ (đpcm).

3)

a) Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $BD//CH$ (gt) ; $CD//BH$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCD là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết), mà BC và HD cắt nhau tại E.

$\Rightarrow$ E là trung điểm của BC (tính chất giao điểm hai đường chéo của hình bình hành). (6)

$\Rightarrow$ AE là trung tuyến của ΔABC. (7)

Xét (O), từ (6) có: $OE \perp BC$ (liên hệ đường kính và dây).

Mà $AH \perp BC$.

$\Rightarrow OE//AH$.

$\Rightarrow$ $\Delta OEG \backsim \Delta HAG$ (tính chất)

$\Rightarrow$ $\dfrac{OE}{AH} = \dfrac{EG}{AG}$ (tính chất)

Xét ΔADH, có OE là đường trung bình $\Rightarrow OE = \dfrac{1}{2}AH$ (tính chất).

$\Rightarrow \dfrac{EG}{AG} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{2}{3}$ (8)

Từ (7), (8) $\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Tính diện tích hình quạt tròn COD (ứng với cung nhỏ CD).

Xét (O) có: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$).

Mà $\widehat{ABC} = 60^o$ (gt) ; ΔCOD cân tại O (vì OC = OD = R).

$\Rightarrow \Delta COD$ đều $\Rightarrow \widehat{COD} = 60^o$.

$S_{\text{quạt COD}} = \dfrac{\pi R^2.60^o}{360^o} = \dfrac{\pi R^2}{6}$ (đvdt)

4) Nếu OH song song với BC thì $\tan B.\tan C = 3$ **với B, C là hai góc của** ΔABC.

ΔABK vuông tại K, có: $\tan\widehat{ABK} = \dfrac{AK}{BK}$ hay $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AK}{BK}$

Xét $\widehat{BHK}$ và $\widehat{ACB}$ có $BH \perp AC$ và $HK \perp CB$

$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{ACB}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

ΔBHK có $\tan\widehat{BHK} = \dfrac{BK}{HK} \Rightarrow \tan\widehat{ACB} = \dfrac{BK}{HK}$

Do đó: $\tan\widehat{ABC}.\tan\widehat{ACB} = \dfrac{BK}{HK}.\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AK}{HK}$

Nếu $OH//BC \Rightarrow HG//KE \Rightarrow \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow AK = 3HK$

Khi đó: $\tan\widehat{ABC}.\tan\widehat{ACB} = 3$ (đpcm).

Câu 5: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 27$$

Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ nên: $0 < a^3 < 3$; $0 < b^3 < 3$; $0 < c^3 < 3$.

Tổng quát:

+ Xét $0 < x^3 < 3 \Rightarrow 2\sqrt{x^3} < 2\sqrt{3} < 4$

+ Áp dụng BĐT cosi ta có: $1 + \dfrac{4}{x} \ge 2\sqrt{1.\dfrac{4}{x}} = \dfrac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow 1 + \dfrac{4}{x} - 2x \ge \dfrac{4}{\sqrt{x}} - 2x = \dfrac{4 - 2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} > 0$

$\Rightarrow (x-1)^2\left(1 + \dfrac{4}{x} - 2x\right) \ge 0 \Leftrightarrow 5x^2 + \dfrac{4}{x} \ge 2x^3 + 7$

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. CHÚ Ý: Dấu "=" xảy ra không phụ thuộc vào việc dấu "=" của BĐT cosi có xảy ra hay không mà chỉ phụ thuộc vào hiệu $(x-1)$ và thỏa mãn giả thiết).

Áp dụng cho bài toán ta có:

$5a^2 + \dfrac{4}{a} \ge 2a^3 + 7$ (1) ; $5b^2 + \dfrac{4}{b} \ge 2b^3 + 7$ (2) ; $5c^2 + \dfrac{4}{c} \ge 2c^3 + 7$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có: $4\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 21$

$\Rightarrow 4\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 27$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1), (2) và (3) đồng thời xảy ra và $a^3 + b^3 + c^3 = 3$

$\Leftrightarrow$ a = b = c = 1

TRƯỜNG THCS PHƯƠNG LIỆT
NĂM HỌC 2017 – 2018

Đề số 15

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC SINH LỚP 9
MÔN: TOÁN
Ngày kiểm tra: 15/5/2018.
Thời gian làm bài: 120 phút.

Bài I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}; B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{5\sqrt{x}+12}{x-16}, \left(x\ge 0; x\ne 16\right)$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 9.

2) Chứng tỏ rằng: $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$.

3) Tìm m để phương trình $\dfrac{A}{B}=m+1$ có nghiệm.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Hai xe ô tô và xe máy cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 12km. Biết vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 24km/h và ô tô đến B trước xe máy 50 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3y}{x-3}+4\sqrt{y-1}=5\\ \dfrac{-2y}{x-3}+3\sqrt{y-1}=8\end{cases}$

2) Trên cùng mặt phẳng tọa độ cho Parabol (P): $y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y=\left(m-1\right)x+m$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng – 2 .

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1<2<x_2$.

Bài IV. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến AB và AC với đường tròn ấy (B, C là các tiếp điểm và B$\ne C$). Điểm M thuộc cung nhỏ BC$\left(M\ne B, M\ne C\right)$. Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên CB, BA, AC. Biết MB cắt IH tại E, MC cắt IK tại F.

1) Chứng minh bốn điểm M, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $\widehat{MIK}=\widehat{MHI}$ và $MI^2=MH.MK$.

3) Chứng minh $EF\perp MI$.

4) Đường tròn ngoại tiếp ΔMFK và đường tròn ngoại tiếp ΔMEH cắt nhau tại điểm thứ 2 là N. Chứng tỏ khi M di động trên cung nhỏ BC$\left(M\ne B; M\ne C\right)$ thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V. Cho a, b, c là các số dương $a+b+c \le \sqrt{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\mathrm{P} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+1}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}; B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{5\sqrt{x}+12}{x-16}, (x \ge 0; x \ne 16)$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 9.

2) Chứng tỏ rằng: $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$.

3) Tìm m để phương trình $\dfrac{A}{B} = m+1$ có nghiệm.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 9.

$$A = \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{9}-4} = \frac{3+3}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$$

Vậy với $x=9$ thì $A=-6$

2) Chứng tỏ rằng: $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$.

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4} + \frac{5\sqrt{x}+12}{x-16}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-4)+5\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$B = \frac{x-\sqrt{x}-12+5\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$B = \frac{x+4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$ (Điều phải chứng minh)

3) Tìm m để phương trình $\dfrac{A}{B} = m+1$ có nghiệm.

Xét phương trình $\frac{A}{B}=m+1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}:\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}=m+1$ ĐK: $\left(x>0; x\neq 16\right)$.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}.\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}=m+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}=m+1$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3}{\sqrt{x}}=1+m$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}}=m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{m} \quad (*)$$

Để phương trình có nghiệm thì phương trình (*) phải có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m}>0 \\ \frac{3}{m}\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\neq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Hai xe ô tô và xe máy cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 120km. Biết vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là 24km/h và ô tô đến B trước xe máy 50 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Gọi vận tốc của xe máy là: x (km/h) (x > 0).

Vận tốc của ô tô là: $x+24\left(km/h\right)$

Thời gian xe máy đi từ A đến B là: $\frac{120}{x}(h)$

Thời gian ô tô đi từ A đến B là: $\frac{120}{x+24}(h)$

Vì ô tô đến B sớm hơn xe máy 50 phút $\left(=\frac{5}{6}h\right)$ nên ta có phương trình:

$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+24}=\frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{120x+2880-120x}{x^2+24x}=\frac{5}{6}$

$\Rightarrow 5x^2+120x-17280=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=48 \quad (thoa \;\; man) \\ x=-72 \;\; (loai) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc của xe máy là 48km/h, vận tốc của ô tô là 72km/h

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{3y}{x-3}+4\sqrt{y-1}=5 \\ \frac{-2y}{x-3}+3\sqrt{y-1}=8 \end{cases}$

2) Trên cùng mặt phẳng tọa độ cho Parabol (P): $y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y=\left(m-1\right)x+m.$

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng – 2 .

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1<2<x_2$.

1) Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{3y}{x-3}+4\sqrt{y-1}=5 \\ \frac{-2y}{x-3}+3\sqrt{y-1}=8 \end{cases}$

ĐKXĐ: $x\neq 3; y>1.$

Đặt $\frac{y}{x-3}=a; \sqrt{y-1}=b$ (điều kiện $b\geq 0$)

Ta được: $\begin{cases} 3a+4b=5 \\ -2a+3b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+8b=10 \\ -6a+9b=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17b=34 \\ -2a+3b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2(TM) \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \frac{y}{x-3}=-1 \\ \sqrt{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

2) Parabol (P): $y=\frac{1}{2}x^2$; đường thẳng (d): $y=(m-1)x+m$.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\frac{1}{2}x^2=(m-1)x+m.$$

Vì (d) và (P) cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng -2 nên $x=-2$, ta có:

$$2=(m-1)(-2)+m \Leftrightarrow -m=0$$
$$\Leftrightarrow m=0$$

Vậy $m=0$ thì (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -2

b) xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$\frac{1}{2}x^2=(m-1)x+m.$$
$$\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x-2m=0 \qquad (1)$$

$$\Delta'=(m-1)^2+2m=m^2+1>0;\forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 .

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m-2 \\ x_1.x_2=-2m \end{cases}$

Hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1<2<x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2<0 \\ x_2-2>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-2)<0$$
$$\Leftrightarrow x_1.x_2-2(x_1+x_2)+4<0$$
$$\Leftrightarrow -2m-2(2m-2)+4<0$$
$$\Leftrightarrow -6m<-8 \Leftrightarrow m>\frac{4}{3}$$

Vậy với $m>\frac{4}{3}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1<2<x_2$.

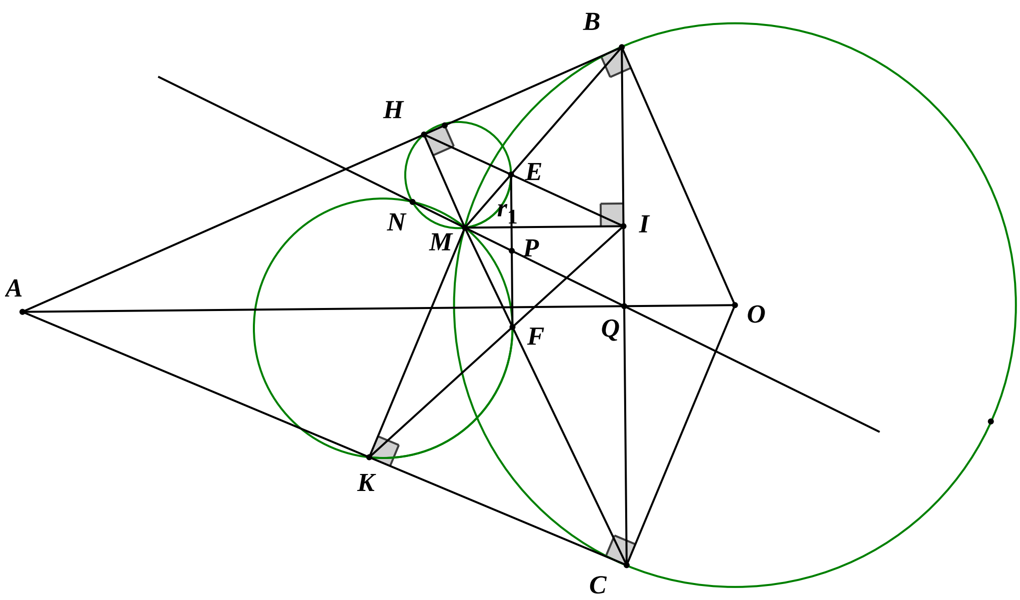
Bài IV. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến AB và AC với đường tròn ấy (B, C là các tiếp điểm và $B\neq C$). Điểm M thuộc cung nhỏ BC $(M\neq B, M\neq C)$. Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên CB, BA, AC. Biết MB cắt IH tại E, MC cắt IK tại F.

1) Chứng minh bốn điểm M, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $\widehat{MIK} = \widehat{MHI}$ và $MI^2 = MH.MK$.

3) Chứng minh $EF \perp MI$.

4) Đường tròn ngoại tiếp ΔMFK và đường tròn ngoại tiếp ΔMEH cắt nhau tại điểm thứ 2 là N. Chứng tỏ khi M di động trên cung nhỏ BC $(M \neq B; M \neq C)$ thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.



1) Chứng minh bốn điểm M, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có I, K là hình chiếu của M lên BC, AC (giả thiết)

$\Rightarrow$ MI $\perp$ BC tại I và MK $\perp$ AC tại K.

$\Rightarrow \widehat{\text{MIC}} = 90^\circ$; $\widehat{\text{MKC}} = 90^\circ$

Xét tứ giác $MKCI$ có hai góc đối $\widehat{\text{MIC}}$; $\widehat{\text{MKC}}$ mà $\widehat{MKC} + \widehat{MIC} = 180^0$

$\Rightarrow MKCI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, K, I, C cùng thuộc một đường tròn. (đpcm)

2) Chứng minh $\widehat{MIK} = \widehat{MHI}$ và $MI^2 = MH.MK$.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác MKIC có:

$\widehat{\text{MIK}} = \widehat{\text{MCK}}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{\text{MK}}$) (1)

$\widehat{\text{MKI}} = \widehat{\text{MCI}}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{\text{MI}}$) (2)

Xét (O) có:

$\widehat{\text{MCA}} = \widehat{\text{MBC}}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{\text{MC}}$)

Hay $\widehat{MCK} = \widehat{MBI}$ (vì $K \in CA$, $I \in BC$) (3)

$\widehat{MCB} = \widehat{MBA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$)

Hay $\widehat{MCI} = \widehat{MBH}$ (vì $H \in AB$, $I \in BC$) (4)

Ta có H là hình chiếu của M lên AB (giả thiết) $\Rightarrow MH \perp AB$ tại H $\Rightarrow \widehat{MHB} = 90^o$

$MI \perp BC$ tại I (cmt) $\Rightarrow \widehat{MIB} = 90^o$

Xét tứ giác $MHBI$ có hai góc đối $\widehat{MHB}$; $\widehat{MIB}$ mà $\widehat{MHB} + \widehat{MIB} = 180^0$

$\Rightarrow MHBI$ là tứ giác nội tiếp.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác MHBI có:

$\widehat{MHI} = \widehat{MBI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MI}$). (5)

$\widehat{MBH} = \widehat{MIH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MH}$). (6)

Từ (1), (3) và (5) có: $\widehat{MIK} = \widehat{MHI}$ (đpcm). (7)

Từ (2), (4) và (6) có: $\widehat{MKI} = \widehat{MIH}$. (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \Delta MKI \backsim \Delta MIH$ (g – g).

$\Rightarrow \dfrac{MK}{MI} = \dfrac{MI}{MH} \Rightarrow MI^2 = MK.MH$ (đpcm)

3) Chứng minh $EF \perp MI$..

Có $\widehat{EIF} = \widehat{MIE} + \widehat{MIF} = \widehat{MIH} + \widehat{MIK}$

Từ (4) và (6) $\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{MIH}$

Từ (5) và (7) $\Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{MBI}$

Do đó: $\widehat{EIF} = \widehat{MCI} + \widehat{MBI}$

Xét ΔMBC có: $\widehat{MBI} + \widehat{MCI} + \widehat{EMF} = 180^o$ (tổng ba góc trong tam giác).

$\Rightarrow \widehat{EIF} + \widehat{EMF} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MIF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MF}$) hay $\widehat{MEF} = \widehat{MIK}$

Mà theo (1) và (3) có: $\widehat{MIK} = \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MBC}$

Mà $\widehat{MEF}$, $\widehat{MBC}$ là hai góc đồng vị $\Rightarrow FE \parallel BC$.

Mà $MI \perp BC$

$\Rightarrow EF \perp MI$ (đpcm).

4) Đường tròn ngoại tiếp ΔMFK và đường tròn ngoại tiếp ΔMEH cắt nhau tại điểm thứ 2 là N. Chứng tỏ khi M di động trên cung nhỏ BC $(M \neq B; M \neq C)$ thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi MN cắt EF tại P và cắt BC tại Q.

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác MEH, có:

$\widehat{PNE} = \widehat{MHI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ME}$)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEIF có:

$\widehat{MEP} = \widehat{MIK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MF}$)

Mà $\widehat{MIK} = \widehat{MHI}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{PNE} = \widehat{MEP}$

Mà ΔPNE và ΔPEM có $\widehat{MPE}$ chung.

$\Rightarrow \Delta PNE \backsim \Delta PEM$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{PM}{PE} = \dfrac{PE}{PN} \Rightarrow PM.PN = PE^2$

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác MFK, có:

$\widehat{PNF} = \widehat{MKI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MF}$)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEIF có:

$\widehat{MFP} = \widehat{MIH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ME}$)

Mà $\widehat{MIH} = \widehat{MKI}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{PNF} = \widehat{MFP}$

Mà ΔPMF và ΔPFN có $\widehat{MPF}$ chung.

$\Rightarrow \Delta PMF \backsim \Delta PFN$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{PM}{PF} = \dfrac{PF}{PN} \Rightarrow PM.PN = PF^2$

Do đó: $PE = PF$ hay P là trung điểm của EF.

Lại có $FE \parallel BC \Rightarrow \dfrac{PE}{QB} = \dfrac{PF}{QC} \Rightarrow QB = QC$

Mà B, C cố định nên trung điểm Q của BC cũng cố định.

Vậy MN đi qua trung điểm Q của BC cố định.

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO QUẬN ĐỐNG ĐA **ĐỀ THI THỬ VÀO 10**

TRƯỜNG THCS PHAN HUY CHÚ **NĂM HỌC 2019 – 2020**

ĐỀ SỐ 16

Bài 1. Với $x \ge 0; x \ne 1; x \ne 9$, cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ và $B == \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{7-\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

b) Chứng minh rằng $B = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{4A}{B} \le \dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$.

Bài 2. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong phong trào thi đua trồng cây dịp đầu năm mới, lớp 9A trường THCS Chiến Thắng đặt kế hoạch trồng 300 cây xanh cùng loại, mỗi học sinh trồng số cây như nhau. Đến đợt lao động, có 5 bạn được Liên đội triệu tập tham gia chiến dịch an toàn giao thông nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây để đảm bảo kế hoạch đề ra. Tính số học sinh lớp 9A.

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + y = 5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x-2}} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 1 \left(m \ne 0 \right)$.

a) Chứng minh: đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên Ox. Gọi I là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Oy. Chứng minh với mọi giá trị $m \ne 0$, tam giác IHK luôn là tam giác vuông tại I.

Bài 4. Cho đường tròn $\left(O, R \right)$ và dây AB cố định, khác đường kính. Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Kẻ đường kính IK của đường tròn $\left(O \right)$ cắt AB tại N. Lấy điểm M

bất kỳ trên cung lớn $AB\left(M\ne A,M\ne B\right)$. MK cắt AB tại D. Hai đường thẳng IM và AB cắt nhau tại C.

1. Chứng minh bốn điểm M,N,K và C cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $IB^2=IM.IC=IN.IK$

3. Hai đường thẳng ID và CK cắt nhau tại E. Chứng minh điểm E thuộc đường tròn $\left(O\right)$ và NC là tia phân giác của góc $\widehat{MNE}$.

4. Chứng minh khi điểm M thay đổi trên cung lớn $AB\left(M\ne A,M\ne B\right)$, đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho các số thực không âm a,b thỏa mãn: $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Với $x\ge 0;x\ne 1;x\ne 9$, cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ và $B==\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{7-\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

b) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{4A}{B}\le\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$.

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}+2}{\sqrt{16}-3}=\dfrac{4+2}{4-3}=6$.

b) Với $x\ge 0$, $x\ne 1;x\ne 9$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}+\frac{7-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+7-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{x+4\sqrt{x}-5+7-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ (đpcm)

c) Ta có: $\dfrac{4A}{B}\le\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}\Rightarrow 4.\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}.\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}\le\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}\Leftrightarrow\dfrac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-3}\le\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-3}-\frac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}-3}\ge 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-3\ge 0 \Rightarrow x\ge 9$$

Kết hợp điều kiện, ta có $x>9$ thì $\frac{4A}{B}\le \frac{x}{\sqrt{x}-3}$

Bài 2. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong phong trào thi đua trồng cây dịp đầu năm mới, lớp 9A trường THCS Chiến Thắng đặt kế hoạch trồng 300 cây xanh cùng loại, mỗi học sinh trồng số cây như nhau. Đến đợt lao động, có 5 bạn được Liên đội triệu tập tham gia chiến dịch an toàn giao thông nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây để đảm bảo kế hoạch đề ra. Tính số học sinh lớp 9A.

Gọi số học sinh lớp 9A ban đầu là x bạn ($x\in N^*,\ x>5$).

Số cây mỗi bạn phải trồng theo kế hoạch là $\frac{300}{x}$ (cây).

Số cây mỗi bạn phải trồng trong thực tế là $\frac{300}{x}+2$ (cây).

Theo bài ra, sau khi có 5 bạn được Liên đội triệu tập, mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây để đảm bảo kế hoạch đặt ra nên ta có phương trình

$$\left(\frac{300}{x}+2\right)\cdot\left(x-5\right)=300$$

$$\Leftrightarrow 300+2x-\frac{1500}{x}-10=300$$

$$\Leftrightarrow -10+2x-\frac{1500}{x}=0$$

$$\Rightarrow -10x+2x^2-1500=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=-25 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, $x=30$ thỏa mãn.

Vậy lớp 9A có 30 bạn.

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+y=5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d):

$y = mx + 1 (m \neq 0)$.

a) Chứng minh: đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên Ox. Gọi I là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Oy. Chứng minh với mọi giá trị $m \neq 0$, tam giác IHK luôn là tam giác vuông tại I.

1) Điều kiện: $x > 2$

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = a \quad (a > 0)$

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} a + y = 5 \\ 3a - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 (tm) \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 4)$.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = mx + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$.

$\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m

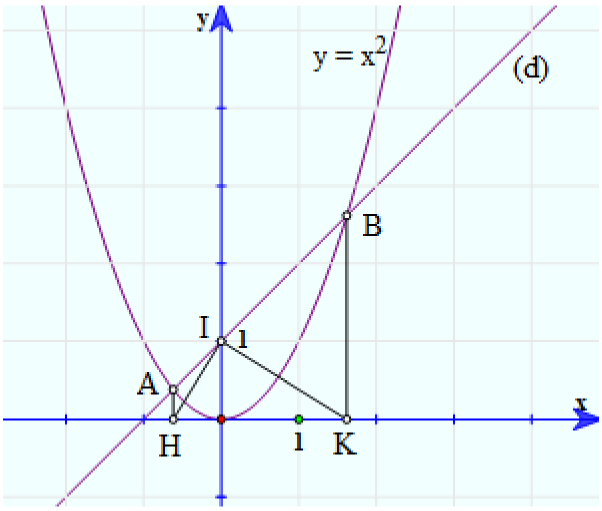
$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

2b) Ta có phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.

Hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 . x_2 = -1 \end{cases}$

Vì $x_1 . x_2 = -1 < 0$ nên hai giao điểm A và B nằm về hai phía trục tung và được biểu diễn trên hệ tọa độ như hình vẽ.



Với H, K lần lượt là hình chiếu của A và B lên trục hoành. Ta có:

$IH^2 = OI^2 + OH^2 = 1 + x_1^2$

$IK^2 = OI^2 + OK^2 = 1 + x_2^2$

$IH^2 + IK^2 = 2 + x_1^2 + x_2^2 = m^2 + 4$

$HK^2 = (OH + OK)^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = m^2 + 4$

$\Rightarrow IH^2 + IK^2 = HK^2$

Vậy tam giác IHK vuông tại I (Định lý Pitago đảo).

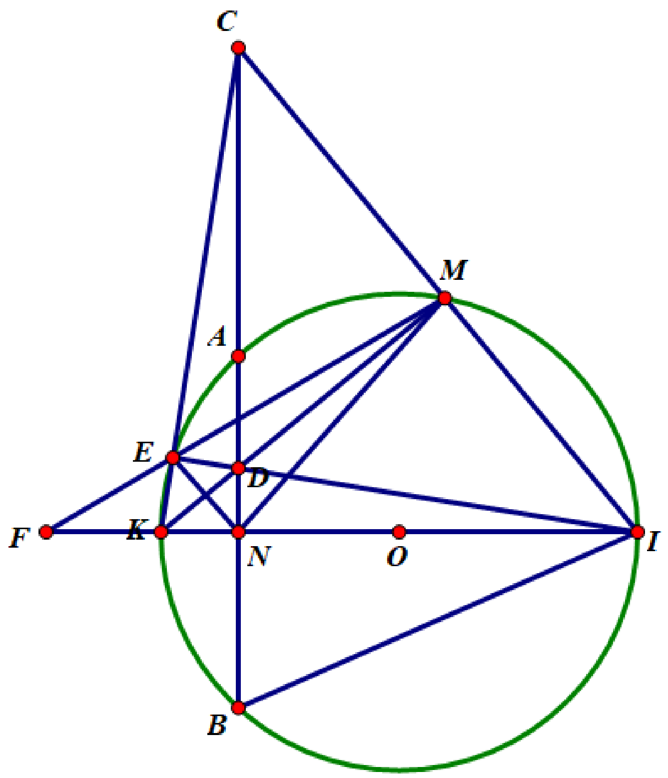
Bài 4. Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định, khác đường kính. Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Kẻ đường kính IK của đường tròn (O) cắt AB tại N. Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn AB $(M \neq A, M \neq B)$. MK cắt AB tại D. Hai đường thẳng IM và AB cắt nhau tại C.

1. Chứng minh bốn điểm M, N, K và C cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $IB^2 = IM.IC = IN.IK$

3. Hai đường thẳng ID và CK cắt nhau tại E. Chứng minh điểm E thuộc đường tròn (O) và NC là tia phân giác của góc $\widehat{MNE}$.

4. Chứng minh khi điểm M thay đổi trên cung lớn AB $(M \neq A, M \neq B)$, đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.



1. Chứng minh bốn điểm M, N, K và C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có K là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ (giả thiết)

$\Rightarrow OK \perp AB$ tại N hoặc $OK \perp CB$ tại N $\Rightarrow \widehat{CNK} = 90^{\circ}$

Xét (O) có $\widehat{KMI} = 90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow KM \perp MI$ tại M hoặc $KM \perp CI$ tại M (do C, M, I thẳng hàng) $\Rightarrow \widehat{CMK} = 90^{\circ}$

$\Rightarrow$ Hai điểm M và N cùng nhìn cạnh CK dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác CMNK nội tiếp đường tròn đường kính CK

$\Rightarrow$ bốn điểm C, M, N, K cùng thuộc đường tròn đường kính CK.

2. Chứng minh $IB^2 = IM.IC = IN.IK$

Xét ΔIBM và ΔICB có:

$\hat{I}$ chung; $\widehat{IBM} = \widehat{ICB}$ (cùng bằng $\widehat{IKM}$)

$\Rightarrow \Delta IBM \backsim \Delta ICB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IB}{IC} \Rightarrow IB^2 = IM.IC \qquad (1)$

Tứ giác CKNM nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{KCM} + \widehat{KNM} = 180^{\circ}$ (Định lý)

Mà $\widehat{MNI} + \widehat{KNM} = 180^{\circ}$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{MNI}$

Xét ΔIMN và ΔIKC có:

$\hat{I}$ chung; $\widehat{MNI} = \widehat{KCM}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta IMN \backsim \Delta IKC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IM}{IK} = \dfrac{IN}{IC} \Rightarrow IM.IC = IK.IN \qquad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow IB^2 = IM.IC = IK.IN$

3. Chứng minh điểm E thuộc đường tròn (O) và NC là tia phân giác của góc $\widehat{MNE}$.

Xét ΔCKI có: $KM \perp CI$; $CN \perp KI$ và $KM \cap CN$ tại D

$\Rightarrow D$ là trực tâm ΔCKI

$\Rightarrow ID \perp CK$ tại E (ID cắt CK tại E) (tính chất) hoặc $IE \perp CK$ tại E.

$\Rightarrow \widehat{IEK} = 90^0$

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn tâm O, đường kính IK.

Chứng minh được tứ giác $KEDN$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{EKD} = \widehat{END}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ED}$)

Chứng minh được tứ giác DMIN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DNM} = \widehat{DIM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DM}$)

Mà $\widehat{EKM} = \widehat{EIM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EM}$ của đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{END} = \widehat{DNM}$

$\Rightarrow ND$ là tia phân giác của $\widehat{ENM}$

4. Chứng minh khi điểm M thay đổi trên cung lớn $AB\,(M \neq A, M \neq B)$, đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi $F = ME \cap IK$

Tương tự ý 3), ta chứng minh được ED là phân giác của $\widehat{MEN}$.

Vì $\widehat{KEI} = 90^0 \Rightarrow EK$ là phân giác của $\widehat{NEF}$

Vậy EK, EI lần lượt là phân giác trong và ngoài tại đỉnh E của ΔNEF.

$\Rightarrow \dfrac{NK}{KF} = \dfrac{NE}{FE} = \dfrac{IN}{IF}$

$\Leftrightarrow NK.IF = IN.KF$

$\Leftrightarrow NK.(IK + KF) = IN.KF$

$\Leftrightarrow NK.IK = KF.(IN - NK)$

$\Leftrightarrow KF = \dfrac{NK.IK}{IN - NK} =$ không đổi $\Rightarrow F$ cố định.

Vậy khi điểm M thay đổi trên cung lớn AB, đường thẳng ME luôn đi qua điểm F cố định.

Bài 5. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn: $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1}$.

Cách 1:

$P^2 = 4(a+b)+2+2\sqrt{(4a+1)(4b+1)} = 10+2\sqrt{16ab+4(a+b)+1}$

$\geq 10+2\sqrt{4(a+b)+1} = 16$

$\Rightarrow P \geq 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a,b) là hoán vị của $(0;2)$.

Cách 2.

Đặt $\sqrt{4a+1} = x, \sqrt{4b+1} = y$ thì:

$1 \leq x, y \leq 3$ (do $0 \leq a, b \leq 2$) và $\dfrac{x^2-1}{4}+\dfrac{y^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 10$.

Do $\begin{cases}(x-1)(x-3) \leq 0 \\ (y-1)(y-3) \leq 0\end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases}4x \geq x^2+3 \\ 4y \geq y^2+3\end{cases} \Rightarrow 4(x+y) \geq x^2+y^2+6 = 16 \Rightarrow x+y \geq 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1, y=3$ hoặc $y=1, x=3$ hay (a,b) là hoán vị của bộ số $(0;2)$.

Cách 3:

Chứng minh bổ đề: $\sqrt{x+k^2}+\sqrt{y+k^2} \geq k+\sqrt{x+y+k^2}$ với $x, y, k \geq 0$ (*).

Chứng minh (*):

Bình phương 2 vế ta có:

$x+y+2k^2+2\sqrt{(x+k^2)(y+k^2)} \geq x+y+2k^2+2k\sqrt{x+y+k}$

Hay

$\sqrt{(x+k^2)(y+k^2)} \geq k\sqrt{x+y+k^2} \Leftrightarrow xy+(x+y)k^2+k^4 \geq (x+y)k^2+k^4 \Leftrightarrow xy \geq 0$

bất đẳng thức này luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy = 0$.

Áp dụng vào bài toán: $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1} \geq 1+\sqrt{1+4(a+b)} = 1+3 = 4$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b là hoán vị của $(0;2)$.

TRƯỜNG THCS PHƯƠNG LIỆT
NĂM HỌC 2017 – 2018

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LỚP 9
MÔN: TOÁN

Đề số 17

Bài I. Cho $A=\dfrac{3\sqrt{x}-9}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}, x\ge 0; x\ne 9.$

1) Tính giá trị của A khi $x=2.$

2) Chứng tỏ rằng biểu thức B luôn dương với mọi giá trị x thỏa mãn ĐKXĐ.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{B}{A}.$

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải làm được 330 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện do tổ một làm vượt mức kế hoạch 10%, tổ hai làm giảm 15% so với mức kế hoạch nên cả hai tổ làm được 318 sản phẩm. Tính số sản phẩm mà mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x-y+1)-2\sqrt{y-1}=1 \\ 2(x-y+1)+\sqrt{y-1}=3 \end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1$ (m là tham số, $m\neq 0$)

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ -1.

b) Tìm m để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ sao cho: $y_1+y_2=5$.

Bài IV. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn sao cho $OA=2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC với đường tròn (O) (B,C là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d thay đổi đi qua A luôn cắt đường tròn tại hai điểm D và E (D thuộc cung nhỏ BC, cung BD lớn hơn cung CD). Gọi I là trung điểm của DE, H là giao điểm của AO và BC.

1) Chứng minh năm điểm A,B,C,O,I cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $AH.AO=AD.AE=3R^2$.

3) Chứng minh HC là tia phân giác của góc DHE.

4) Gọi G là trọng tâm tam giác BDE. Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Bài V. Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=abc$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. Cho $A=\frac{3\sqrt{x}-9}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}$ và $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}, x\geq 0; x\neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x=2$.

2) Chứng tỏ rằng biểu thức B luôn dương với mọi giá trị x thỏa mãn ĐKXĐ.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{B}{A}$.

1) Ta có: $A=\frac{3\sqrt{x}-9}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3(\sqrt{x}-3)}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3}{x+7}$

Với $x=2$, có $A=\dfrac{3}{2+7}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

2) $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-3x-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$

$$=\frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{3\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

Vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi x thỏa mãn ĐKXĐ $\Rightarrow \sqrt{x}+3>0 \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}>0$ hay $B>0$ với mọi x thỏa mãn ĐKXĐ.

3) $P=\dfrac{B}{A}=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}:\dfrac{3}{x+7}=\dfrac{x+7}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3+\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+3+\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}-6$

Áp dụng BĐT Cô Si cho 2 số dương $\sqrt{x}+3>0$ và $\dfrac{16}{\sqrt{x}+3}>0$ ta có:

$$\sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}\ge 2\sqrt{16}=8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}-6\ge 2$$

$$\Leftrightarrow P\ge 2$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2, khi đó dấu " = " xảy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=\frac{16}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+3\right)^2=16\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=4\Leftrightarrow x=1.\ \text{(thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy $P_{max}=2$ khi $x=1$.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải làm được 330 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện do tổ một làm vượt mức kế hoạch 10%, tổ hai làm giảm 15% so với mức kế hoạch nên cả hai tổ làm được 318 sản phẩm. Tính số sản phẩm mà mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Gọi số sản phẩm mà đội 1 làm theo kế hoạch là x (sản phẩm)

Gọi số sản phẩm mà đội 2 làm theo kế hoạch là y (sản phẩm)

Điều kiện: $x;y\in N$, $0<x;y<330$

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được 330 sản phẩm ta có phương trình:

$x+y=330$ (sản phẩm) (1)

Số sản phẩm thực tế đội 1 làm được là: $x+10\%x=x+\frac{10}{100}x=\frac{110}{100}x=1,1x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm thực tế đội 2 làm được là: $y-15\%y=y-\frac{15}{100}y=\frac{85}{100}y=0,85y$ (sản phẩm)

Cả hai tổ thực tế làm được 318 sản phẩm nên ta có phương trình:

$1,1x+0,85y=318$ (sản phẩm) (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=330\\1,1x+0,85y=318\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1,1x+1,1y=363\\1,1x+0,85y=318\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,25y=45\\1,1x+0,85y=318\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=180\\x=150\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy số sản phẩm đội 1 làm theo kế hoạch là 150 sản phẩm

Số sản phẩm đội 2 làm theo kế hoạch là 180 sản phẩm.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3(x-y+1)-2\sqrt{y-1}=1\\2(x-y+1)+\sqrt{y-1}=3\end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1$ (m là tham số, $m\neq 0$)

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ -1.

b) Tìm m để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ sao cho: $y_1+y_2=5$.

1) $\begin{cases}3(x-y+1)-2\sqrt{y-1}=1\\2(x-y+1)+\sqrt{y+1}=3\end{cases}$ ĐK $y\geq 1$

Đặt $a=(x-y+1)$; $b=\sqrt{y-1}>0$

Phương trình trở thành

$$\begin{cases}3a-2b=1\\2a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2(3-2a)=1\\b=3-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=1\\b=3-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\text{(T/m).}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+1=1 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2+1=1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;2)$

2a) (d) cắt trục hoành tại điểm (- 1; 0), thay vào (d) ta được:

$$0=m(-1)-\frac{1}{2}m^2+m+1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}m^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow m^2=2$$

$$\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2} \quad \text{(T/m).}$$

2b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$\frac{1}{2}x^2=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-2m-2=0 \qquad (1)$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow \mathrm{m}^2-(m^2-2m-2)>0$$

$$\Leftrightarrow 2m+2>0$$

$$\Leftrightarrow m>-1$$

Theo viet: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=m^2-2m-2 \end{cases}$

Ta có $y_1+y_2=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2=5$

$$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=10$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$$

$$\Leftrightarrow (2m)^2-2(m^2-2m-2)=10$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-2m^2+4m+4-10=0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2+4m-6=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=1 & (T/m) \\ m=-3 & (Loai) \end{array}\right.$$

Vậy $m = 1$.

Bài IV. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn sao cho

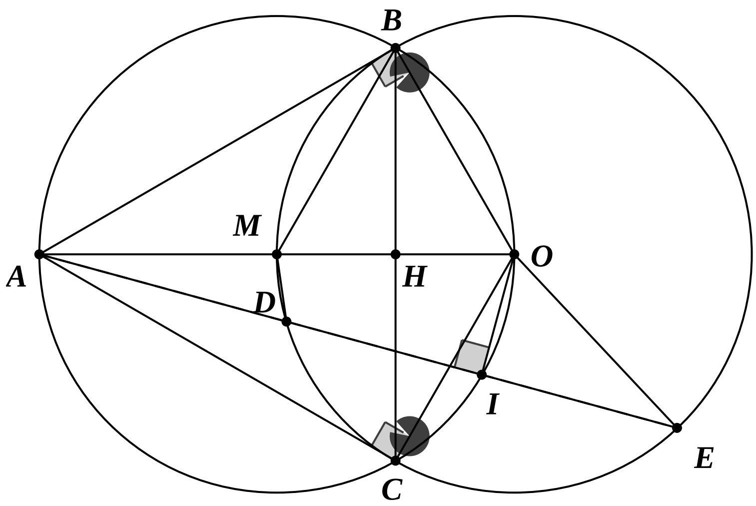
$OA = 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d thay đổi đi qua A luôn cắt đường tròn tại hai điểm D và E (D thuộc cung nhỏ BC, cung BD lớn hơn cung CD). Gọi I là trung điểm của DE, H là giao điểm của AO và BC.

1) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $AH.AO = AD.AE = 3R^2$.

3) Chứng minh HC là tia phân giác của góc DHE.

4) Gọi G là trọng tâm tam giác BDE. Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.



1) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, I cùng thuộc một đường tròn.

Gọi M là trung điểm của AO

Ta có I là trung điểm của DE (giả thiết).

$\Rightarrow OI \perp DE$ (đường kính đi qua trung điểm của dây cung thì vuông góc với dây cung)

$\Rightarrow \widehat{AIO} = 90^0$

AB và AC lần lượt là hai tiếp tuyến của (O) (giả thiết)

$\Rightarrow AB \perp OB$ và $AC \perp OC$

$\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0$; $\widehat{ACO} = 90^0$

Xét tứ giác ABOC có hai góc đối là $\widehat{ABO}$; $\widehat{ACO}$ và $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO

Xét tứ giác ACIO có hai đỉnh kề C và I cùng nhìn AO dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACIO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO

Vậy 5 điểm A; B; O; I; C cùng thuộc một đường tròn. (tâm là M)

2) Chứng minh AH.AO = AD.AE = $3R^2$.

Ta có AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

OC = OB = R

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC hay $AO \perp BC$.

Tam giác ABO vuông tại B; đường cao BH ta có:

$AH.AO = AB^2$ (Hệ thức lượng) (1)

Xét ΔADC và ΔACE có:

$\widehat{ACD} = \widehat{CEA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến -dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{DC}$ của (O))

$\widehat{CAE}$ chung.

Vậ $\Delta ADC \sim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC^2$

Mà $AC = AB$ nên $AD.AE = AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AH.AO = AD.AE = AB^2$

Tam giác ABO vuông tại B ta có: $AB^2 = AO^2 - OB^2$ (định lí Pitago)

$\Rightarrow AB^2 = 3R^2$

Vậy $AH.AO = AD.AE = AB^2 = 3R^2$

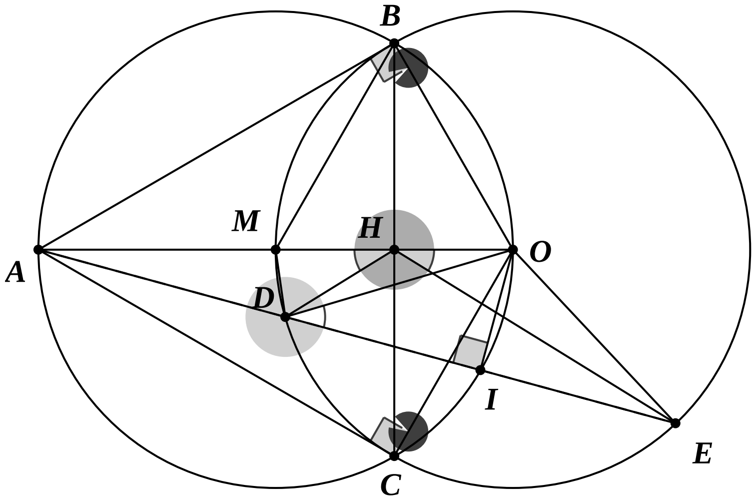
3) Chứng minh HC là tia phân giác của góc DHE.

Ta có: $AH.AO = AD.AE \Rightarrow \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AD}{AO}$

Xét ΔAHD và ΔAEO có

$\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AD}{AO}$ và $\widehat{EAO}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta$AHD ~ΔAEO $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{AHD} = \widehat{DEO}$ (3)



Tứ giác HOED là tứ giác nội tiếp (có $\widehat{DEO}+\widehat{DHO}=\widehat{DHO}+\widehat{AHD}=180^0$)

Vậy $\widehat{ODE}=\widehat{EHO}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{OE}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác HOED)

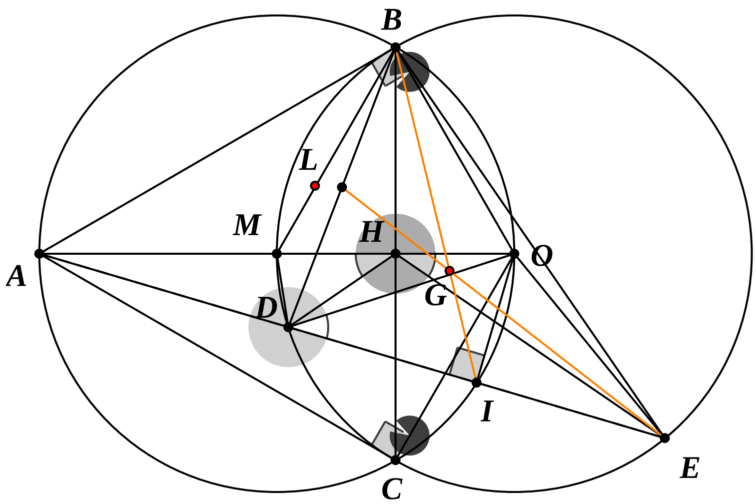
Mặt khác $\widehat{ODE}=\widehat{DEO}$ (do tam giác ODE cân tại O) (5)

Từ (3); (4); (5) ta có $\widehat{AHD}=\widehat{EHO}$

Mà $\widehat{AHC}=\widehat{CHO}=90^0 \Rightarrow \widehat{AHC}-\widehat{AHD}=\widehat{CHO}-\widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{DHC}=\widehat{EHC}$

$\Rightarrow$ HC là tia phân giác của góc DHC.

4) Gọi G là trọng tâm tam giác BDE. Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.



G là trọng tâm của tam giác DBE nên $BG=\dfrac{2}{3}BI$. (6)

Trên đoạn thẳng BM lấy điểm L sao cho $BL = \frac{2}{3}BM$. (7)

Ta có A, O, B, C cố định, khi đó:

M là trung điểm của AO nên M cố định.

Theo (7) thì L cũng sẽ cố định.

Theo câu a) thì I thuộc đường tròn tâm M hay MI = R.

Xét tam giác BMI có $\frac{BL}{BM} = \frac{BG}{BI} \Rightarrow LG//MI$ và $\frac{LG}{MI} = \frac{BL}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow LG = \frac{2}{3}R$.

Do L cố định, $LG = \frac{2}{3}R$ không đổi nên khi d thay đổi thì G luôn thuộc đường tròn tâm L, bán kính $\frac{2}{3}R$ cố định.

Bài V. Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = abc.$

Ta có: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2 \qquad a,b,c > 0$

$$\frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c}$$

$$\frac{1}{1+a} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}} \qquad \text{(Theo BĐT Cô Si)}$$

$$\frac{1}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$$

Tương tự $\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}$; $\frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$

Nhân vế với vế ta được

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2}} = \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{8}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ khi đó $\frac{3}{1+a} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 1 + a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

Vậy $Q_{max} = \frac{1}{8}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

PHÒNG GDĐT QUẬN ĐỐNG ĐA
TRƯỜNG THCS BẾ VĂN ĐÀN

ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LẦN 3
MÔN: TOÁN.
NĂM HỌC 2017 – 2018

Đề số 18

Ngày thi: 12/5/2018

Bài I. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{x+1}{x-\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{x-1}{\sqrt{x}}, x > 0, x \neq 1.$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại x = 49.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị của x thỏa mãn A + B = 2.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc, một chiếc canô xuôi dòng từ A đến B và một chiếc bè cũng trôi từ A đến B với vận tốc 3km/h. Sau khi đến B, canô quay về A ngay và gặp chiếc bè ở một địa điểm cách B là 32km. Tính vận tốc của canô?

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{|x-2|}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{6}{|x-2|}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$

2) Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị kí hiệu là (P) và hàm số $y=(m+1)x-\dfrac{1}{2}m-\dfrac{3}{4}$ có đồ thị kí hiệu là (d).

a) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm m để 2 giao điểm nói trên nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ Oy và thỏa mãn $x_1=4|x_2|$, $(x_1, x_2$ là hoành độ của các giao điểm nói trên).

Bài IV. Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn, kẻ tia Ax vuông gócvới AB, trên đó lấy điểm C (C khác A). Kẻ tiếp tuyến CM tới đường tròn (M là tiếp điểm). Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt đường thẳng CM tại D.

1) Chứng minh tứ giác AOMC nội tiếp.

2) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3) OC cắt MA tại E, OD cắt MB tại F, MH vuông góc AB (H thuộc AB). Chứng minh: HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

4) Chứng minh ba đường thẳng BC, EF và MH đồng quy.

Bài V. Giải phương trình $\sqrt{4x^2-2x+\dfrac{1}{4}}=4x^3-x^2+8x-2$.

HƯỚNG DẪN

Bài I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{x+1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, với $x>0, x\neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A tại x = 49.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị của x thỏa mãn A + B = 2.

1) Tại $x=49$ (thỏa mãn ĐK) thì $A=\dfrac{\sqrt{49}+1}{\sqrt{49}}=\dfrac{7+1}{7}=\dfrac{8}{7}$

2) Ta có:

$$B=\left(\frac{x+1}{x-\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{x-1}{\sqrt{x}}, x>0, x\neq 1.$$

$$B=\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$B=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}.\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B=\frac{(\sqrt{x}-1)^2.\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2.(\sqrt{x}+1)}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x>0, x\neq 1.$

3) Ta có: $\mathrm{A}+\mathrm{B}=2$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-2x-2\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow -x+\sqrt{x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(\text{tmdk}) \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}(\text{ktmdk}) \end{array}\right.$$

Vậy $A+B = 2$ khi $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc, một chiếc canô xuôi dòng từ A đến B và một chiếc bè cũng trôi từ A đến B với vận tốc 3km/h. Sau khi đến B, canô quay về A ngay và gặp chiếc bè ở một địa điểm cách B là 32km. Tính vận tốc của canô?

Gọi x là vận tốc của canô (x > 0).

Lúc đó: x + 3 (km/h) là vận tốc canô xuôi dòng, x – 3 (km/h) là vận tốc canô ngược dòng.

Ta có:

$\frac{40}{x+3}$ là thời gian cano đi từ A đến B,

$\frac{32}{x-3}$ là thời gian cano đi từ B đến A gặp chiếc bè trôi,

$\frac{40-32}{3}=\frac{8}{3}$ là thời gian bè trôi, cũng là thời gian ca nô đi từ A đến lúc gặp chiếc bè.

Theo đề, ta có phương trình: $\frac{40}{x+3}+\frac{32}{x-3}=\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 40.3(x-3)+32.3(x+3)=8(x+3)(x-3)$

$\Leftrightarrow 120x-360+96x+288=8x^2-72$

$\Leftrightarrow 8x^2-216x=0$

$\Leftrightarrow 8x(x-27)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & (\text{ktmdk}) \\ x=27 & (\text{tmdk}) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc của canô là 27 km/h

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{|x-2|}+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{6}{|x-2|}-\frac{2}{y}=1 \end{cases}$

2) Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị kí hiệu là (P) và hàm số $y=(m+1)x-\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}$ có đồ thị kí hiệu là (d).

a) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm m để 2 giao điểm nói trên nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ Oy và thỏa mãn $x_1=4|x_2|$, (x_1, x_2 là hoành độ của các giao điểm nói trên).

1) Điều kiện: $x\neq 2; y\neq 0$.

$$\begin{cases}\dfrac{2}{|x-2|}+\dfrac{1}{y}=2\\ \dfrac{6}{|x-2|}-\dfrac{2}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6}{|x-2|}+\dfrac{3}{y}=6\\ \dfrac{6}{|x-2|}-\dfrac{2}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{y}=5\\ \dfrac{2}{|x-2|}+\dfrac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\ (\text{tmdk})\\ \dfrac{2}{|x-2|}+\dfrac{1}{1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ |x-2|=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1\\ x-2=2\end{cases}\\ \begin{cases}y=1\\ x-2=-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1\\ x=4(\text{tmdk})\end{cases}\\ \begin{cases}y=1\\ x=0(\text{tmdk})\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm là $(x;y)=(4;1);\ (0;1)$

2a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$(m+1)x-\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}=-x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+(m+1)x-\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}=0$$

$$\Delta=(m+1)^2-4.1.(-\frac{1}{2}m-\frac{3}{4})=m^2+4m+4=(m+2)^2$$

Để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì

$\Delta>0\Leftrightarrow(m+2)^2>0\Leftrightarrow m+2\neq 0\Leftrightarrow m\neq -2$

2b) Theo hệ thức viet có $\begin{cases}x_1+x_2=-(m+1)\\ x_1x_2=-(\dfrac{1}{2}m+\dfrac{3}{4})\end{cases}$

Để 2 giao điểm nói trên nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ Oy thì $x_1x_2<0$

$$\Leftrightarrow -(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4})<0\Leftrightarrow\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}>0\Leftrightarrow m>-\frac{3}{2}$$

Theo đề ta có: $x_1=4|x_2|\Rightarrow x_1=-4x_2$, thay vào hệ thức Viet ta có:

$$\begin{cases}-3x_2=-(m+1)\\ -4x_2^2=-\left(\dfrac{1}{2}m+\dfrac{3}{4}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{m+1}{3}\\ -4.\left(\dfrac{m+1}{3}\right)^2=-\left(\dfrac{1}{2}m+\dfrac{3}{4}\right)\quad(1)\end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow\dfrac{4}{9}.(m+1)^2=\dfrac{1}{4}(2m+3)$

$\Leftrightarrow 16(m^2+2m+1)=9(2m+3)$

$\Leftrightarrow 16m^2+14m-11=0$

$\Leftrightarrow (2m-1)(8m+11)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \quad (tmdk) \\ m=\dfrac{-11}{8} (tmdk) \end{array}\right.$$

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ hay $m=\dfrac{-11}{8}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

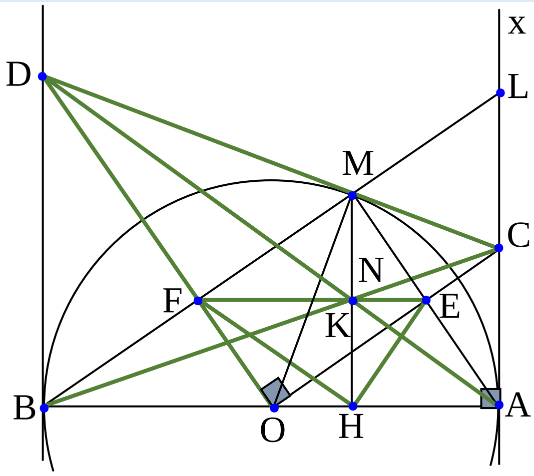
Bài IV. Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn, kẻ tia Ax vuông góc với AB, trên đó lấy điểm C (C khác A). Kẻ tiếp tuyến CM tới đường tròn (M là tiếp điểm). Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt đường thẳng CM tại D.

1) Chứng minh tứ giác AOMC nội tiếp.

2) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3) OC cắt MA tại E, OD cắt MB tại F, MH vuông góc AB (H thuộc AB). Chứng minh: HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

4) Chứng minh ba đường thẳng BC, EF và MH đồng quy.



1) Ta có CD và CA lần lượt là tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (O) (giả thiết).

$\Rightarrow AC\perp AO$ tại A ; $CD\perp OM$ tại M.

$\Rightarrow \widehat{CAO}=90^0$; $\widehat{CMO}=90^0$

Xét tứ giác AOMC có $\widehat{CAO}$; $\widehat{CMO}$ là hai góc đối và $\widehat{CAO}+\widehat{CMO}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác AOMC nội tiếp.

2) Ta có: $\widehat{COM}+\widehat{MOD}=\widehat{COD}=90^0$ (vì $CO\perp OD$ tại O).

$\widehat{COA}+\widehat{COM}+\widehat{MOD}+\widehat{DOB}=180^0$.

$\Rightarrow \widehat{COA}+\widehat{DOB}=180^0$.

Ta có OC là phân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{COA}=\widehat{COM}$.

$\Rightarrow \widehat{MOD}=\widehat{DOB}$.

Xét ΔMOD và ΔBOD có:

$OM=OB=R$

$\widehat{MOD}=\widehat{DOB}$

OD chung

$\Rightarrow \Delta MOD=\Delta BOD(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{OMD}=\widehat{OBD}$ (cặp góc tương ứng).

Mà $\widehat{OMD}=90^0$ (vì $CD\perp OM$ tại M)

$\Rightarrow \widehat{OBD}=90^0$ hay $OB\perp BD$ tại B.

Vậy BD là tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm).

3) Chứng minh: HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

ΔMOA cân tại O có OE là phân giác của $\widehat{AOM}$ (vì $E\in OC$).

$\Rightarrow$ OE cũng là đường trung tuyến của ΔMOA.

$\Rightarrow$ E là trung điểm của AM.

Ta có OD là phân giác của $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Xét ΔMOB cân tại O có OF là phân giác của $\widehat{BOM}$ (vì $F\in OD$).

$\Rightarrow$ OF cũng là đường trung tuyến của ΔMOB

$\Rightarrow$ F là trung điểm của BM

ΔMAH vuông tại H có $HE=\dfrac{AM}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

ΔMBH vuông tại H có $HF=\dfrac{BM}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

ΔMAB vuông tại M có $AM^2+BM^2=AB^2=4R^2$ (định lý Pitago)

$\Rightarrow HE^2+HF^2=\dfrac{AM^2+BM^2}{4}=R^2$

Vậy HE^2+HF^2 có giá trị không đổi khi C chuyển động trên tia Ax.

4) Ta có E, F lần lượt là trung điểm của cạnh MA, MB

$\Rightarrow$ EF là đường trung bình của ΔMAB

$\Rightarrow$ EF//AB

$\Rightarrow$ EK//AH ($K \in$ EF; $H \in AB$)

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MK}{MH} = \dfrac{1}{2}$ (định lý talet)

$\Rightarrow$ EF giao với MH tại K là trung điểm của MH (*)

Gọi giao điểm của BC với MH là N; giao điểm của tia BM với tia Ax là L

ΔLAB có LB // CO (cùng $\perp$ AM) ; AO = OB = R

$\Rightarrow$ CA = CL (1)

Ta có CA // NH (cùng $\perp$ AB)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{NH} = \dfrac{BC}{BN}$ (hệ quả định lý talet) (2)

Lại có CL // MN

$\Rightarrow \dfrac{CL}{NM} = \dfrac{BC}{BN}$ (hệ quả định lý talet) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ NH = NM $\Rightarrow$ N là trung điểm của MH $\Rightarrow$ N trùng với K

$\Rightarrow$ BC đi qua trung điểm K của MH (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow$ Ba đường thẳng BC, EF và MH đồng quy.

Bài V. Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 2x + \dfrac{1}{4}} = 4x^3 - x^2 + 8x - 2.$

$$\sqrt{4x^2 - 2x + \frac{1}{4}} = 4x^3 - x^2 + 8x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2} = 4x^3 - x^2 + 8x - 2$$

$$\Leftrightarrow \left|2x - \frac{1}{2}\right| = 4x^3 - x^2 + 8x - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{2} = 4x^3 - x^2 + 8x - 2 \\ -2x + \frac{1}{2} = 4x^3 - x^2 + 8x - 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3 - x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \\ 4x^3 - x^2 + 10x - \frac{5}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (4x-1)(x^2 + \frac{3}{2}) = 0 \\ (4x-1)(x^2 + \frac{5}{2}) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm $x = \dfrac{1}{4}$

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 LẦN 1

Năm học: 2019 – 2020

Môn: TOÁN

Đề số 19 **Thời gian làm bài: 120 phút.**

Bài 1: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x\geq 0;\ x\neq 4;\ x\neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=25$.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để A > B.

Bài 2 (2 điểm). *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai bạn Trang và Linh ở hai địa điểm cách nhau 18km đạp xe đi ngược chiều nhau để gặp nhau. Nếu hai bạn khởi hành cùng một lúc thì sẽ gặp nhau sau 40 phút. Nhưng nếu Trang khởi hành trước 18 phút thì các bạn sẽ gặp nhau sau 30 phút tính từ lúc Linh bắt đầu đi. Tính vận tốc của mỗi bạn?

Bài 3 (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-3}+\dfrac{12}{y-2x}=8 \\ 3\sqrt{4x-12}+\dfrac{3}{2x-y}=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

2) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y=(2m-1)x+m+1$ và đường thẳng (d') có phương trình $y=x+3$.

a) Tính giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') tại một điểm trên trục tung.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất và giá trị lớn nhất đó bằng bao nhiêu?

Bà 4 (3,5 điểm): Cho (O,R) và điểm A cố định sao cho $OA=2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B,C,M,N thuộc đường tròn và $AM<AN$). Gọi D là trung điểm của MN , CD kéo dài cắt (O) tại E .

a) Chứng minh 5 điểm A,B,O,D,C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OA\perp BC$ tại H và tính diện tích tam giác OBC.

c) Chứng minh BE song song với MN .

d) MH cắt đường tròn tại P , BN cắt CP tại K . Chứng minh A, O, K thẳng hàng.

Bài 5 (0,5 điểm): Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{\left(a+b-2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a+b}$

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0;\ x \neq 4;\ x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 25$.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để A > B.

a) Với $x = 25$ (TMĐK) $\Rightarrow \sqrt{x} = 5$, thay vào biểu thức B ta được: $B = \dfrac{5+2}{5-2} = \dfrac{7}{3}$

b) $A = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \geq 0;\ x \neq 4;\ x \neq 9$.

$$= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right) - \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right) + 2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$= \frac{x-9-x+4+2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $A = \dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0;\ x \neq 4;\ x \neq 9$.

c) Ta có

$$A > B \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} > \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \text{ (Vì } \sqrt{x} > 0 \text{ với mọi } x > 0;\ x \neq 4;\ x \neq 9)$$

$$\Rightarrow x < 4$$

Vậy với 0 < x < 4 thì A > B.

Mà $x \in Z \Rightarrow x \in \{1,\ 2,\ 3\}$ là các giá trị nguyên thỏa mãn A > B.

Bài 2 (2 điểm). *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai bạn Trang và Linh ở hai địa điểm cách nhau 18km đạp xe đi ngược chiều nhau để gặp nhau. Nếu hai bạn khởi hành cùng một lúc thì sẽ gặp nhau sau 40 phút. Nhưng nếu Trang khởi hành trước 18 phút thì các bạn sẽ gặp nhau sau 30 phút tính từ lúc Linh bắt đầu đi. Tính vận tốc của mỗi bạn?

Gọi vận tốc của Trang là x (km/h), vận tốc của Linh là y (km/h).

Điều kiện: x > 0; y > 0

Đổi: 40 phút = $\frac{2}{3}$ giờ; 18 phút = $\frac{3}{10}$ giờ; 30phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Trang và Linh ở hai địa điểm cách nhau 18km đạp xe đi ngược chiều nhau nên khi gặp nhau thì tổng quãng đường hai bạn đi được bằng 18km (1)

* Nếu hai bạn khởi hành cùng một lúc thì sẽ gặp nhau sau 40 phút ($\frac{2}{3}$ giờ), nên thời gian của mỗi bạn tính từ lúc đi đến lúc gặp nhau là $\frac{2}{3}$ giờ. Khi đó:

+ Quãng đường Trang đi được là: $\frac{2}{3}.x$ (km)

+ Quãng đường Linh đi được là: $\frac{2}{3}.y$ (km)

+ Theo (1) ta có phương trình: $\frac{2}{3}.x + \frac{2}{3}.y = 18 \Leftrightarrow x + y = 27$ (2)

* Nếu Trang khởi hành trước 18 phút ($\frac{3}{10}$ giờ) thì các bạn sẽ gặp nhau sau 30 phút ($\frac{1}{2}$ giờ) tính từ lúc Linh bắt đầu đi. Khi đó:

+ Thời gian của Linh tính từ lúc đi đến lúc gặp nhau là $\frac{1}{2}$ giờ, nên quãng đường Linh đi được là: $\frac{1}{2}y$ (km)

+ Thời gian của Trang tính từ lúc đi đến lúc gặp nhau là $\frac{3}{10}$ giờ + $\frac{1}{2}$ giờ = $\frac{4}{5}$ giờ, nên quãng đường Trang đi được là: $\frac{4}{5}x$ (km)

+ Theo (1) ta có phương trình: $\frac{4}{5}.x+\frac{1}{2}.y=18 \Leftrightarrow 8x+5y=180$ (3)

Từ (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=27 \\ 8x+5y=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 & (tm) \\ y=12 & (tm) \end{cases}$

Vậy vận tốc của Trang là 15 (km/h), vận tốc của Linh là 12 (km/h).

Bài 3 (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-3}+\dfrac{12}{y-2x}=8 \\ 3\sqrt{4x-12}+\dfrac{3}{2x-y}=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

2) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y=(2m-1)x+m+1$ và đường thẳng (d') có phương trình $y=x+3$.

a) Tính giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') tại một điểm trên trục tung.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất và giá trị lớn nhất đó bằng bao nhiêu?

1) Điều kiện: $x \geq 3$; $2x \neq y$.

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-3}+\dfrac{12}{y-2x}=8 \\ 3\sqrt{4x-12}+\dfrac{3}{2x-y}=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-3}+\dfrac{12}{y-2x}=8 \\ 6\sqrt{x-3}-\dfrac{3}{y-2x}=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}+\dfrac{6}{y-2x}=4 \\ 12\sqrt{x-3}-\dfrac{6}{y-2x}=9 \end{cases}$$

Đặt $a=\sqrt{x-3}\geq 0$ và $b=\dfrac{1}{y-2x}$. Ta có:

$$\begin{cases} a+6b=4 \\ 12a-6b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+6b=4 \\ 13a=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=1 \end{cases} \quad (t/m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}=1 \\ \dfrac{1}{y-2x}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=10 \end{cases} \quad (TMĐK)$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(4,10)$

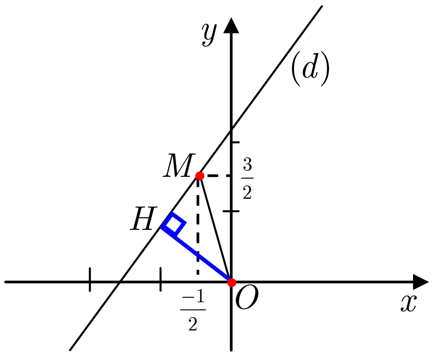
2a) Để (d) và (d') cắt nhau tại một điểm trên trục tung

$\Leftrightarrow$ (d) và (d') có cùng tung độ gốc.

$\Leftrightarrow$ $m+1=3 \Leftrightarrow m=2$

Vậy với $m=2$ thì (d) và (d') cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

2b) Giả sử đường thẳng (d): $y=(2m-1)x+m+1$ đi qua điểm cố định $M(x_o, y_o)$



$\Leftrightarrow y_o=(2m-1)x_o+m+1$ thỏa mãn với mọi m .

$\Leftrightarrow (2x_o+1)m-x_o-y_o+1=0$ thỏa mãn với mọi m

.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_o+1=0 \\ -x_o-y_o+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o=\dfrac{-1}{2} \\ y_o=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ là điểm cố định thuộc (d).

Kẻ OH vuông góc với (d) tại H, ta có khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng OH.

Khi (d) thay đổi theo m và luôn đi qua điểm $M\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ cố định, ta luôn có: $OH \le OM$

$$\Rightarrow OH_{\max}=OM=\sqrt{x_m^2+y_m^2}=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$\Leftrightarrow H$ trùng với $M \Leftrightarrow OM \perp (d)$ tại M (*)

Đường thẳng (OM) có dạng: $y=ax$ đi qua $M\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}a \Rightarrow a=-3$

Điều kiện (*) $\Leftrightarrow (2m-1).(-3)=-1 \Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$.

Vậy với $m=\dfrac{2}{3}$ thì khoảng các từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) đạt GTLN bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

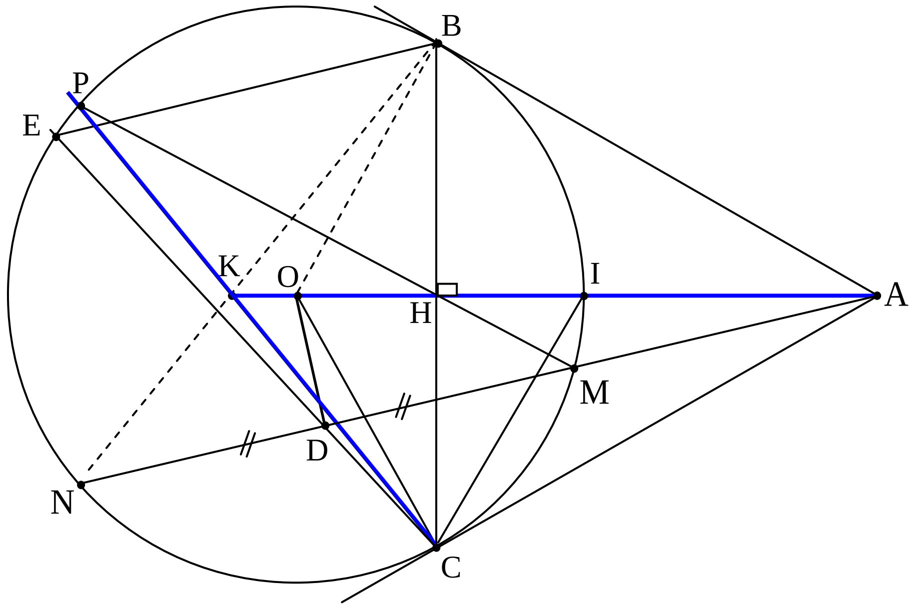
Bà 4 (3,5 điểm): Cho (O,R) và điểm A cố định sao cho $OA=2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và $AM < AN$). Gọi D là trung điểm của MN , CD kéo dài cắt (O) tại E .

a) Chứng minh 5 điểm A, B, O, D, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OA \perp BC$ tại H và tính diện tích tam giác OBC.

c) Chứng minh BE song song với MN .

d) MH cắt đường tròn tại P , BN cắt CP tại K . Chứng minh A, O, K thẳng hàng.



a) Ta có AB, AC lần lượt là tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) (giả thiết)

$$\Rightarrow \begin{cases} OB \perp AB \\ OC \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABO} = 90^o \\ \widehat{AOC} = 90^o \end{cases}$$

Ta có D là trung điểm của dây MN của đường tròn (O) (giả thiết)

$\Rightarrow OD \perp MN$ tại D $\Rightarrow \widehat{ADO} = 90^o$

Xét tứ giác $ABOD$ có hai góc đối $\widehat{ABO}, \widehat{ADO}$ mà $\widehat{ABO} + \widehat{ADO} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABOD$ nội tiếp đường tròn đường kính AO. (1)

Xét tứ giác $ABOC$ có hai góc đối $\widehat{ABO}, \widehat{ACO}$ mà $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO. (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, B, O, D, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA. (đpcm)

b) Ta có $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$OB = OC = R$

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của BC

$\Rightarrow$ $AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC (đpcm)

Ta có OA = 2R nên giao điểm I của OA với (O, R) sẽ là trung điểm của OA.

Mà ΔOAC vuông tại C

$$\Rightarrow OC = OI = IC = \frac{OA}{2} = R$$

$\Rightarrow \Delta IOC$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{IOC} = 60^o$ hoặc $\widehat{HOC} = 60^o$.

Xét ΔOHC vuông tại H có:

$$cos\widehat{HOC} = \frac{HO}{OC} \Rightarrow cos60^o = \frac{HO}{R} \Rightarrow HO = \frac{R}{2}$$

$$\sin\widehat{HOC} = \frac{HC}{OC} \Rightarrow \sin 60^o = \frac{HC}{R} \Rightarrow HC = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2HC = R\sqrt{3}$$

Vậy $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}.OH.BC = \frac{1}{2}.\frac{R}{2}.R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt)

c) Xét đường tròn đường kính OA có:

$\widehat{CBA} = \widehat{CDA}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CA}$)

Xét đường tròn (O, R) có:

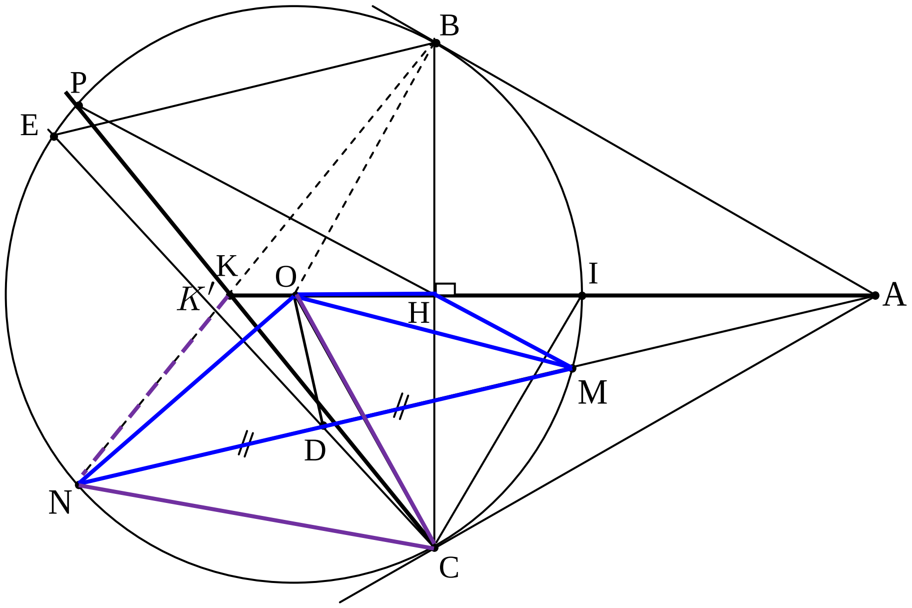
$\widehat{CBA} = \widehat{CEB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến – dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CDA}$

Mà $\widehat{CEB}$, $\widehat{CDA}$ là hai góc đồng vị.

$\Rightarrow EB\ //\ DA$ hay $EB\ //\ MN$ (đpcm)

d) Gọi K' là giao điểm của AO và BN (**cần chứng minh** K' **trùng với** K **)**



$\Delta ANC \backsim \Delta ACM$ (g - g) $\Rightarrow AM.AN = AC^2$

ΔACO vuông tại C, đường cao CH $\Rightarrow AH.AO = AC^2$ (Hệ thức lượng)

Do đó $\Rightarrow AM.AN = AH.AO$ (3)

Xét ΔAMO và ΔAHN có: $\widehat{MAH}$ chung; $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AH}{AN}$ (theo đẳng thức (3))

$\Rightarrow \Delta AMO \backsim \Delta AHN$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{HNA}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{HOM} = \widehat{HNM}$

Mà O và N là hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh HM của tứ giác HONM

$\Rightarrow$ Tứ giác HONM nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NOK'} = \widehat{NMH}$ (vì cùng cộng với $\widehat{NOH}$ bằng 180°) (4)

Ta có K' thuộc trung trực AO của BC $\Rightarrow K'B = K'C \Rightarrow \Delta BK'C$ cân $\widehat{K'BC} = \widehat{K'CB}$

OB = OC = R $\Rightarrow \Delta BOC$ cân $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

$\widehat{K'BO} = \widehat{K'BC} - \widehat{OBC}$; $\widehat{K'CO} = \widehat{K'CB} - \widehat{OCB}$.

$\Rightarrow \widehat{K'BO} = \widehat{K'CO}$

Mà ΔBON cân $\Rightarrow \widehat{K'NO} = \widehat{K'BO}$

$\Rightarrow \widehat{K'NO} = \widehat{K'CO}$

Mà C và N là hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh $K'O$ của tứ giác $K'NCO$

$\Rightarrow K'NCO$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NCK'} = \widehat{NOK'}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{K'N}$) (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{NMH} = \widehat{NCK'}$

Mà $\widehat{NMH} = \widehat{NCK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NP}$ của (O)).

$\Rightarrow \widehat{NCK} = \widehat{NCK'}$

Mà hai tia CK, CK' cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng CN và K, K' cùng thuộc NB.

$\Rightarrow CK$ trùng với CK' hoặc K trùng với K'.

$\Rightarrow$ A, O, K thẳng hàng.

Bài 5 (0,5 điểm): Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{\left(a+b-2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a+b}$.

Ta có $P = \dfrac{\left(a+b-2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a+b} = \left(1 - \dfrac{2}{a+b}\right)\left(a^2+b^2\right)$ với $ab = 4$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cosi, ta có:

$a+b \geq 2\sqrt{ab} = 4$ (1) $\Leftrightarrow -\dfrac{2}{a+b} \geq \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow 1-\dfrac{2}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}$

$a^2+b^2 \geq 2ab = 8$ (2)

Do đó: $P \geq \dfrac{1}{2}.8 = 4$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở các bất đẳng thức Cosi (1) và (2) đồng thời xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a.b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$

Vậy $P_{min} = 4 \Leftrightarrow a = b = 2$.

TRƯỜNG THCS ARCHIMEDES ACADEMY ĐỀ THI THỬ LẦN THỨ NHẤT

Năm học: 2017 – 2018 **MÔN: TOÁN 9**

Đề số 20

Câu I. Cho hai biểu thức $A=\frac{x+4\sqrt{x}}{x-16}$ và $B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{x+9\sqrt{x}}{9-x}, x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

1) Rút gọn biểu thức A và tính giá trị của A khi $x=18-8\sqrt{2}$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P=B:A<0$.

Câu II. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 6 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 2 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

Câu III.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2|x-1|-\sqrt{y+2}=4 \\ |x-1|+3\sqrt{y+2}=9 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+10=0(1)$ với m là tham số

a) Giải phương trình khi m = - 4

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

c) Giả sử phương trình có nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=x_1{}^2+x_2{}^2+8x_1x_2$.

Câu IV. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi I là trung điểm của AO. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O), lấy D thuộc Ax, E thuộc By sao cho góc DIE $=90^0$. Kẻ IF vuông góc với DE (F thuộc DE).

1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE=AI.IB=\frac{3R^2}{4}$.

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Câu V. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge 3\sqrt{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+4\sqrt{x}}{x-16}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{x+9\sqrt{x}}{9-x}, x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

1. Rút gọn biểu thức A và tính giá trị của A khi $x=18-8\sqrt{2}$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm giá trị của x để biểu thức $P=B:A<0$.

1) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

$$A=\frac{x+4\sqrt{x}}{x-16}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$$

Ta có: $x=18-8\sqrt{2}=\left(4-\sqrt{2}\right)^2$ (thỏa mãn ĐK) $\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}=\left|4-\sqrt{2}\right|=4-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow A=\frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}-4}=\frac{4-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{2-4\sqrt{2}}{2}=1-2\sqrt{2}.$$

Vậy khi $x=18-8\sqrt{2}$ thì $A=1-2\sqrt{2}$

2) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

$$B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{x+9\sqrt{x}}{9-x}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x+9\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{2x+6\sqrt{x}-x-9\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{x-3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

3) Ta có: $P=B:A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}:\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$

Với $x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+3>0$

$$\Rightarrow P<0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}<0\Leftrightarrow \sqrt{x}-4<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<4\Rightarrow x<16$$

Kết hợp điều kiện, ta có: $0\le x<16; x\ne 9$ thì $P<0$

Câu II. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 6 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 2 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

Gọi thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ nhất là x (giờ) ($x > 6$), thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ hai là y (giờ) ($y > 6$)

Trong 1 giờ, vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ (bể).

Vì hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 6 giờ sẽ đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$

Vòi I chảy trong 3 giờ và vòi II chảy trong 2 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể nước nên ta có phương trình: $3.\frac{1}{x}+2.\frac{1}{y}=\frac{2}{5}$

Ta có hệ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{16}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=15\\ y=10\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ nhất là 15 giờ, thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ hai là 10 giờ.

Câu III.

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2|x-1|-\sqrt{y+2}=4\\ |x-1|+3\sqrt{y+2}=9\end{cases}$

2. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$ (1) với m là tham số

a) Giải phương trình khi m = - 4

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

c) Giả sử phương trình có nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+8x_1x_2$.

1) Điều kiện: $y \ge -2$.

$$\begin{cases} 2|x-1|-\sqrt{y+2}=4 \\ |x-1|+3\sqrt{y+2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x-1|-\sqrt{y+2}=4 \\ 2|x-1|+6\sqrt{y+2}=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{y+2}=14 \\ |x-1|=9-3\sqrt{y+2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+2}=2 \\ |x-1|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2=4 \\ \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x\,;\,y)\in\{(-2;2);(4;2)\}$

2 a) Khi m = - 4, phương trình (1) trở thành: $x^2+6x+2=0$

Ta có $\Delta'=3^2-2.1.2=5>0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=-3+\sqrt{5}$; $x_2=-3-\sqrt{5}$

Vậy với $m=-4$ thì phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{-3+\sqrt{5};-3-\sqrt{5}\right\}$

2b) Xét phương trình (1) có $\Delta'=\left[-(m+1)\right]^2-1.(2m+10)=m^2+2m+1-2m-10=m^2-9$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow\ \Delta'\ge 0\Leftrightarrow m^2\ge 9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m\le -3 \end{array}\right.$

Vậy (1) có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m\le -3 \end{array}\right.$

2c) Với $\left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m\le -3 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có nghiệm x_1,x_2.

Hệ thức Vi – et: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1.x_2=2m+10 \end{cases}$

Ta có: $P=x_1{}^2+x_2{}^2+8x_1x_2=(x_1+x_2)^2+6x_1x_2$

$\Rightarrow P=\left[2(m+1)\right]^2+6(2m+10)=4m^2+20m+64=(2m+5)^2+39$

<u>Sai lầm mắc phải</u>:

Vì $(2m+5)^2\ge 0\Rightarrow P\ge 39$.

Do đó $P_{min}=39\Leftrightarrow(2m+5)^2=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-5}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy không có giá trị của m để P nhỏ nhất.

<u>Lời giải đúng</u>:

Khi $m\le -3\Rightarrow 2m+5\le -1\Rightarrow(2m+5)^2\ge 1\Rightarrow P=(2m+5)^2+39\ge 40$

Khi $m \geq 3 \Rightarrow 2m + 5 \geq 11 \Rightarrow (2m+5)^2 \geq 121 \Rightarrow P = (2m+5)^2 + 39 \geq 160$

Như vậy với mọi m thỏa mãn ĐK, ta có: $P \geq 40$

$\Rightarrow$ Min P = 40 khi m = - 3

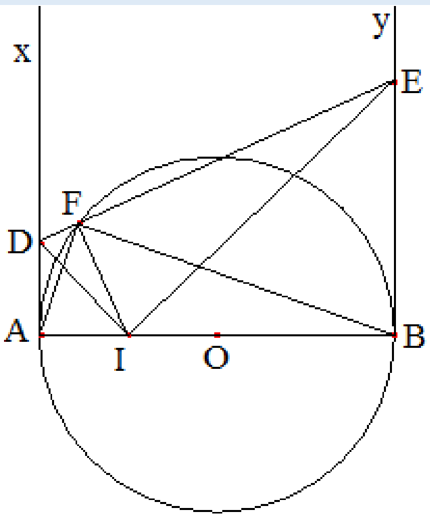
Câu IV. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi I là trung điểm của AO. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O), lấy D thuộc Ax, E thuộc By sao cho góc DIE bằng 90^0. Kẻ IF vuông góc với DE (F thuộc DE).

1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE = AI.IB = \frac{3R^2}{4}$.

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.



1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

Ta có Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) (giả thiết); $D \in Ax$

$\Rightarrow AD \perp AB$ tại A $\Rightarrow \widehat{IAD} = 90^o$

Ta có $IF \perp DE$ tại F $\Rightarrow \widehat{IFD} = 90^o$

Cách 1:

$\Rightarrow$ Tứ giác có hai đỉnh A và F cùng nhìn cạnh ID dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn đường kính DI

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn đường kính DI.

Cách 2:

Xét tứ giác $IADF$ có $\widehat{IAD}$, $\widehat{IFD}$ là hai góc đối và $\widehat{IAD} + \widehat{IFD} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$.

Xét ΔADI và ΔBIE có

$\widehat{DAI} = \widehat{IBE} = 90^0$ (tính chất của tiếp tuyến)

$\widehat{AID} = \widehat{BEI}$ (cùng phụ với $\widehat{BIE}$ do $\widehat{DIE} = 90^o$)

$\Rightarrow \Delta ADI \sim \Delta BIE \Rightarrow \dfrac{AD}{BI} = \dfrac{AI}{BE} \Rightarrow AD.BE = BI.AI$

Theo giả thiết lại có $AI = \dfrac{R}{2}; BI = \dfrac{3}{2}R \Rightarrow AD.BE = BI.AI = \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$

Vậy $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{DFA} = \widehat{DIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

Tương tự chứng minh được tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{BIE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Vậy $\widehat{DFA} + \widehat{BFE} = \widehat{DIA} + \widehat{BIE} = 90^0$ (Vì $\widehat{DIE} = 90^0$)

$\Rightarrow \widehat{AFB} = 180^0 - (\widehat{DFA} + \widehat{BFE}) = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow$ F thuộc đường tròn đường kính AB hay F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Ta có $S_{DIE} = ID.IE \Rightarrow S_{DIE}{}^2 = ID^2.IE^2 = (AD^2 + AI^2)(BI^2 + BE^2)$

Áp dụng B Đ T cosi có: $AD^2 + AI^2 \geq 2AD.AI$; $BI^2 + BE^2 \geq 2BI.BE$

Và có $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$ (cmt)

$$\Rightarrow S_{DIE}{}^2 \geq 2AD.AI.2BI.BE = 4(AI.BI)^2 = 4.\left(\dfrac{3R^2}{4}\right)^2 = \dfrac{9R^4}{4} \Rightarrow S_{DIE} \geq \dfrac{3R^2}{2}$$

Vậy Min $S_{DIE}=\dfrac{3R^2}{2}$ khi $AD=AI$; $BE=BI$

Vậy diện tích tam giác DIE nhỏ nhất khi D và E thuộc Ax, By sao cho $AD=AI$; $BE=BI$

Câu V. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge 3\sqrt{3}$

$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge 3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2+2ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+2bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+2ca+2a^2}\ge 3\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+(a+b)^2}+\sqrt{b^2+c^2+(b+c)^2}+\sqrt{a^2+c^2+(a+c)^2}\ge 3\sqrt{6}$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-ki: $x.a+y.b\le\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}$

<u>Chứng minh</u>: $x.a+y.b\le\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}$

$\Leftrightarrow (x.a+y.b)^2\le x^2a^2+y^2b^2+x^2b^2+y^2a^2 \Leftrightarrow x^2b^2+y^2a^2-2x.a.y.b\ge 0$

$\Leftrightarrow (xb-ya)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

Áp dụng cho bài toán:

$$a+b\le\sqrt{(1^1+1^2).(a^2+b^2)}=\sqrt{2(a^2+b^2)}\Leftrightarrow a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2} \quad (1)$$

$$b+c\le\sqrt{(1^1+1^2).(b^2+c^2)}=\sqrt{2(b^2+c^2)}\Leftrightarrow b^2+c^2\ge\frac{(b+c)^2}{2} \quad (2)$$

$$a+c\le\sqrt{(1^1+1^2).(a^2+c^2)}=\sqrt{2(a^2+c^2)}\Leftrightarrow a^2+c^2\ge\frac{(a+c)^2}{2} \quad (3)$$

Do đó:

$\sqrt{a^2+b^2+(a+b)^2}+\sqrt{b^2+c^2+(b+c)^2}+\sqrt{a^2+c^2+(a+c)^2}$

$\ge\sqrt{\frac{3}{2}(a+b)^2}+\sqrt{\frac{3}{2}(b+c)^2}+\sqrt{\frac{3}{2}(a+c)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}(2a+2b+2c)=3\sqrt{6}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1), (2), (3) đồng thời xảy ra và thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

$\Leftrightarrow a=b=c=1$

SỞ GD & ĐT HÀ NỘI
TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH
Đề thi thử lần 2 – 03.03.2019
Đề số 21

ĐỀ THI THỬ VÀO 10
Môn: TOÁN – Năm học: 2019 – 2020
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I: (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ (với $x>0; x\neq 1$)

a) Rút gọn và tính giá trị biểu thức A khi $x=4-2\sqrt{3}$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Đặt $M=B:A$, tìm x để $\dfrac{1}{M}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1$

Câu II: (2 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hay lập hệ phương trình.*

Hai trường thcs A và B có học sinh đi thi tuyển 10 thì có 420 học sinh đỗ chiếm 84% tổng số học sinh. Biết nếu tính riêng từng trường thì trường A có 80% học sinh thi đỗ,còn trường B là 90% học sinh thi đỗ. Tìm số học sinh mỗi trường dự thi.

Câu III (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y+\sqrt{x+1}=13 \end{cases}$

2. Cho phương trình: $x^2-5x+m-2=0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm là 2, tìm nghiệm còn lại (nếu có).

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right)=3$

Câu IV: (3,5 điểm) Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (O,R). Qua điểm M bất kỳ thuộc nửa đường tròn này kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại E và F. Nối AM cắt OE By tại P, nối BM cắt OF tại Q. Hạ MH vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $AE.BF=R^2$

c) Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng $MK=HK$.

d) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔEOF. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{3}<\dfrac{r}{R}<\dfrac{1}{2}$.

Câu V (0,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (2 điểm) Cho biểu thức: $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ (với $x>0;x\neq 1$)

a) Rút gọn và tính giá trị biểu thức A khi $x=4-2\sqrt{3}$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Đặt $M=B:A$, tìm x để $\dfrac{1}{M}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1$

1) $A=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$

Thay $x=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$ (Thỏa mãn ĐK) và $\sqrt{x}=\sqrt{3}-1$ vào biểu thức A, ta được

$$A=\frac{2\sqrt{3}-2}{3-2\sqrt{3}}=\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}$$

2) Điều kiện: $x>0;x\neq 1$

$$B=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2-x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

3) Xét biểu thức: $M=B:A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ với $x>0;x\neq 1$

$$\frac{1}{M}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x}-(x+2\sqrt{x}+1)}{8(\sqrt{x}+1)}-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+14\sqrt{x}-1-8\sqrt{x}-8}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+6\sqrt{x}-9}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x}-(x+2\sqrt{x}+1)}{8(\sqrt{x}+1)}-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+14\sqrt{x}-1-8\sqrt{x}-8}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+6\sqrt{x}-9}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)}\le 0$$

Do $x>0\Rightarrow \sqrt{x}+1>1$ với mọi $x>0$ nên $\left(\sqrt{x}-3\right)^2\ge 0\Rightarrow \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)}\ge 0\quad \forall x>0.$

Yêu cầu bài toán chỉ thỏa mãn $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)}=0\Rightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2=0\Leftrightarrow x=9$ (Thỏa mãn ĐK)

Vậy $x=9$ thì $\frac{1}{M}-\frac{\sqrt{x}+1}{8}\ge 1$

Câu 2: (2 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hay lập hệ phương trình.*

Hai trường thcs A và B có học sinh đi thi tuyển 10 thì có 420 học sinh đỗ chiếm 84% tổng số học sinh. Biết nếu tính riêng từng trường thì trường A có 80% học sinh thi đỗ,còn trường B là 90% học sinh thi đỗ. Tìm số học sinh mỗi trường dự thi.

Gọi số học sinh của trường A và B dự thi lần lượt là x và y (học sinh), $(x;y\in\mathbb{N}^*)$

Vì cả 2 trường có 420 học sinh thi đỗ đạt tỉ lệ 84% nên :

$$x+y=420:84\%=500 \qquad (1)$$

Vì cả hai trường có 420 học sinh thi đỗ nên :

$$0,8x+0,9y=420 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,8x + 0,9y = 420 \end{cases}$

Vậy trường A có 300 học sinh dự thi và trường B có 200 học sinh dự thi.

Câu III (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y + \sqrt{x+1} = 13 \end{cases}$

2. Cho phương trình: $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm là 2, tìm nghiệm còn lại (nếu có).

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right) = 3$

1) Điều kiện: $x \geq -1$

$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y + \sqrt{x+1} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x + \sqrt{x+1} = 5 \ (*) \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x+1} = t \ (t \geq 0)$:

$(*) \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow t - 2 = 0$ (vì $t \geq 0$ nên $t + 3 > 0$) $\Rightarrow t = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$ (Thỏa mãn) $\Rightarrow y = 5$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x; y) = (3; 5)

2a) Ta có $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (1)

$\Leftrightarrow 2^2 - 5.2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 8$

Khi đó, ta có phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy $m = 8$ thì phương trình (1) có một nghiệm là 2, nghiệm còn lại là 3.

2b) Phương trình: $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ (1)

$\Delta = 25 - 4m + 8 = 33 - 4m$

Để để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 33 - 4m > 0 \Rightarrow m < \dfrac{33}{4}$

Với $m < \dfrac{33}{4}$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, theo vi – et ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = m - 2 \end{cases}$

Để hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức bài cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0, x_2 > 0 & (2) \\ 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\right) = 3 & (3) \end{cases}$

.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 4(m-2) > 0 \\ S = 5 > 0 \\ P = m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < \frac{33}{4}$$

$$(3) \Leftrightarrow 2.\frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}} = 3 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right) = 3\sqrt{x_1.x_2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}) = 9x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow 4(5 + 2\sqrt{m-2}) = 9(m-2)$$

$$\Leftrightarrow \left(9\sqrt{m-2} + 10\right)\left(\sqrt{m-2} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m-2} = 2 \Leftrightarrow m = 6 \\ \sqrt{m-2} = \dfrac{-10}{9} (L) \end{array}\right.$$

Kết hợp các điều kiện ta được $m = 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

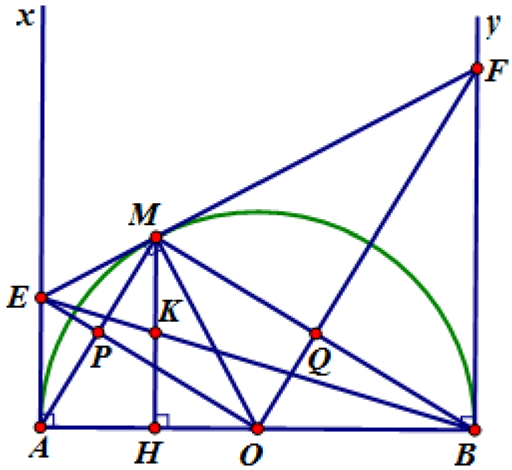
Câu IV: (3,5 điểm) Cho nửa đường tròn (O,R) đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (O,R). Qua điểm M bất kỳ thuộc nửa đường tròn này kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại E và F. Nối AM cắt OE By tại P, nối BM cắt OF tại Q. Hạ MH vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $AE.BF = R^2$

c) Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng $MK = HK$.

d) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔEOF. Chứng minh rằng $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$.



a) Chứng minh 5 điểm M, P, H, O, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có EF, EA, FB lần lượt là các tiếp tuyến tại M, A, B của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow$ EM = EA ; FB = FM (tính chất tiếp tuyến tuyến cắt nhau).

Xét EM = EA và OM = OA = R

$\Rightarrow$ OE là đường trung trực của AM

$\Rightarrow OE \perp AM$ tại P và P là trung điểm của AM.

$\Rightarrow \widehat{OPM} = 90^o$

Xét FM = FA và OM = OB = R

$\Rightarrow$ OF là đường trung trực của BM

$\Rightarrow OF \perp BM$ tại Q và Q là trung điểm của BM.

$\Rightarrow \widehat{OQM} = 90^o$

Ta có $MH \perp AB$ tại H (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{OHM} = 90^o$

Do đó: $\widehat{OPM} = \widehat{OQM} = \widehat{OHM} = 90^o$ hoặc P, Q, H cùng nhìn cạnh OM dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ P, Q, H cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

$\Rightarrow$ 5 điểm M, P, O, Q, H cùng thuộc đường tròn đường kính OM. (đpcm)

b) **Chứng minh rằng** $AE.BF = R^2$

Ta có: OE là tia hân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{MOE} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2}$

Ta có: OF là tia hân giác của $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{BOF} = \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{BOM}}{2}$

Mà $\widehat{EOF} = \widehat{MOE} + \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{AOM} + \widehat{BOM}}{2}$; $\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^o$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{EOF} = 90^o$ hoặc ΔEOF vuông tại O.

Xét ΔEOF vuông tại O và $OM \perp EF$ tại M (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow OM^2 = EM.FM$ (hệ thức lượng)

Mà EM = EA ; FB = FM (tính chất tiếp tuyến tuyến cắt nhau); OM = R.

$\Rightarrow R^2 = AE.BF$ (đpcm)

c) Gọi K là giao điểm của MH và BE. Chứng minh rằng $MK = HK$.

Ta có: $AE \perp AB$ (tính chất tiếp tuyến); $BF \perp AB$ (tính chất tiếp tuyến); $MH \perp AB$ (giả thiết)

$\Rightarrow MH // AE // BF$ hoặc $MK // BF$; $HK // AE$

Xét MK//BF, có:

$\Delta KEM \backsim \Delta BEF$ (Định lý) $\Rightarrow \dfrac{MK}{BF} = \dfrac{EM}{EF} \Rightarrow \dfrac{MK}{EM} = \dfrac{BF}{EF} = \dfrac{FM}{EF}$ (do BF = MF)

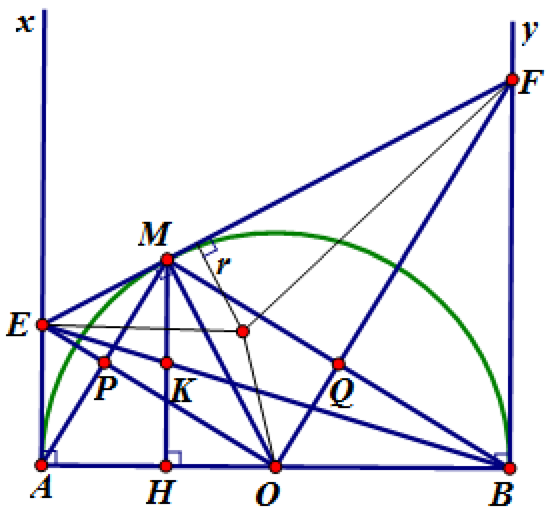
$\dfrac{FM}{EF} = \dfrac{BK}{BE}$ (Định lý Ta - let)

Xét KH//AE, có:

$\Delta BKH \backsim \Delta BEA$ (Định lý) $\Rightarrow \dfrac{BK}{BE} = \dfrac{KH}{AE}$ (tính chất)

Do vậy $\dfrac{MK}{EM} = \dfrac{KH}{AE}$, mà AE = EM suy ra MK = KH

d) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔEOF. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{3} < \dfrac{r}{R} < \dfrac{1}{2}$.



Vì r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔEOF nên $S_{EOF} = \dfrac{1}{2}r(OE + OF + EF)$

Mà $S_{EOF} = \frac{1}{2}OM.EF = \frac{1}{2}R.EF$

$\Rightarrow r\left(OE + OF + EF\right) = R.EF \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{EF}{OE + OF + EF}$

Theo BĐT tam giác ta có

$EF < OE + OF \Leftrightarrow 2EF < OE + OF + EF$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{EF}{OE + OF + EF} < \frac{1}{2}$ (1)

Ta cũng có $EF > OE,\ EF > OF \Leftrightarrow 2EF > OE + OF$

$\Leftrightarrow 3EF > OE + OF + EF \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{EF}{OE + OF + EF} > \frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$

Câu V (0,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \ge \frac{3}{4}$$

Cách 1: Áp dụng B Đ T: $\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\right)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)$

$$\left[a(c+a) + b(a+b) + c(b+c)\right]^2$$

$$\le \left[\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2\right].\left[(a+b)^2(c+a)^2 + (b+c)^2(a+b)^2 + (c+a)^2(b+c)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2$$

$$\ge \frac{\left[a(c+a) + b(a+b) + c(b+c)\right]^2}{\left[(a+b)^2(c+a)^2 + (b+c)^2(a+b)^2 + (c+a)^2(b+c)^2\right]}$$

$$= \frac{\left[2a(c+a) + 2b(b+a) + 2c(b+c)\right]^2}{4\left[(a+b)^2(c+a)^2 + (b+c)^2(a+b)^2 + (c+a)^2(b+c)^2\right]}$$

$$= \frac{\left[(a+b)^2 + (c+a)^2 + (b+c)^2\right]^2}{4\left[(a+b)^2(c+a)^2 + (b+c)^2(a+b)^2 + (c+a)^2(b+c)^2\right]}$$

Đặt $(a+b)^2 = x;\ (c+a)^2 = y;\ (b+c)^2 = z$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx \Rightarrow (x+y+z)^2 \ge 3(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow \left[(a+b)^2 + (c+a)^2 + (b+c)^2\right]^2$$

$$\geq 3\left[(a+b)^2(c+a)^2+(b+c)^2(a+b)^2+(c+a)^2(b+c)^2\right]$$

$$\frac{\left[(a+b)^2+(c+a)^2+(b+c)^2\right]^2}{4\left[(a+b)^2(c+a)^2+(b+c)^2(a+b)^2+(c+a)^2(b+c)^2\right]}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

Vậy $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\geq\frac{3}{4}$

Cách 2:

Ta có: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\frac{1}{4}+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\frac{1}{4}+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$

Áp dụng B Đ T cosi có:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{a}{a+b};\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{b}{b+c};\left(\frac{c}{c+a}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{c}{c+a}$$

Do đó:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\geq\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}-\frac{3}{4}$$

Chứng minh được $\frac{a}{a+b}-\frac{1}{2}+\frac{b}{b+c}-\frac{1}{2}+\frac{c}{c+a}-\frac{1}{2}\geq 0\Rightarrow\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\geq\frac{3}{2}$

Khi đó có: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\geq\frac{3}{4}$

TRƯỜNG THCS ARCHIMEDES ACADEMY

Năm học: 2017 – 2018

Đề số 22

ĐỀ THI THỬ LẦN THỨ NHẤT

MÔN: TOÁN 9

Câu I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+4\sqrt{x}}{x-16}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{x+9\sqrt{x}}{9-x}, x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

1) Rút gọn biểu thức A và tính giá trị của A khi $x=18-8\sqrt{2}$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P=B:A<0$.

Câu II. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 6 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 2 giờ thì được $\dfrac{2}{5}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

Câu III.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2|x-1|-\sqrt{y+2}=4\\ |x-1|+3\sqrt{y+2}=9\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+10=0\,(1)$ với m là tham số

a) Giải phương trình khi m = - 4

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

c) Giả sử phương trình có nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=x_1{}^2+x_2{}^2+8x_1x_2$.

Câu IV. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi I là trung điểm của AO. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O), lấy D thuộc Ax, E thuộc By sao cho góc DIE $=90^0$. Kẻ IF vuông góc với DE (F thuộc DE).

1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE=AI.IB=\dfrac{3R^2}{4}$.

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Câu V. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge 3\sqrt{3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+4\sqrt{x}}{x-16}$ và $B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{x+9\sqrt{x}}{9-x}, x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

1. Rút gọn biểu thức A và tính giá trị của A khi $x=18-8\sqrt{2}$.

2. Rút gọn biểu thức B.

3. Tìm giá trị của x để biểu thức $P=B:A<0$.

1) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

$$A=\frac{x+4\sqrt{x}}{x-16}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$$

Ta có: $x=18-8\sqrt{2}=\left(4-\sqrt{2}\right)^2$ (thỏa mãn ĐK) $\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}=\left|4-\sqrt{2}\right|=4-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow A=\frac{4-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}-4}=\frac{4-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{2-4\sqrt{2}}{2}=1-2\sqrt{2}.$$

Vậy khi $x=18-8\sqrt{2}$ thì $A=1-2\sqrt{2}$

2) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 9; x\ne 16$

$$B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}+\frac{x+9\sqrt{x}}{9-x}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x+9\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{2x+6\sqrt{x}-x-9\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{x-3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

3) Ta có: $P=B:A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}:\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$

Với $x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+3>0$

$$\Rightarrow P<0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}<0\Leftrightarrow \sqrt{x}-4<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<4\Rightarrow x<16$$

Kết hợp điều kiện, ta có: $0\le x<16; x\ne 9$ thì $P<0$

Câu II. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 6 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 2 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

Gọi thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ nhất là x (giờ) ($x > 6$), thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ hai là y (giờ) ($y > 6$)

Trong 1 giờ, vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ (bể).

Vì hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 6 giờ sẽ đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$

Vòi I chảy trong 3 giờ và vòi II chảy trong 2 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể nước nên ta có phương trình: $3.\frac{1}{x}+2.\frac{1}{y}=\frac{2}{5}$

Ta có hệ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{16}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=15\\ y=10\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ nhất là 15 giờ, thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ hai là 10 giờ.

Câu III.

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}2|x-1|-\sqrt{y+2}=4\\ |x-1|+3\sqrt{y+2}=9\end{cases}$

2. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+10=0\ (1)$ với m là tham số

a) Giải phương trình khi m = - 4

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

c) Giả sử phương trình có nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=x_1^2+x_2^2+8x_1x_2$.

1) Điều kiện: $y \geq -2$.

$$\begin{cases} 2|x-1| - \sqrt{y+2} = 4 \\ |x-1| + 3\sqrt{y+2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x-1| - \sqrt{y+2} = 4 \\ 2|x-1| + 6\sqrt{y+2} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{y+2} = 14 \\ |x-1| = 9 - 3\sqrt{y+2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+2} = 2 \\ |x-1| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2 = 4 \\ \left[\begin{array}{l} x-1 = 3 \\ x-1 = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x\,;\,y) \in \{(-2;2);(4;2)\}$

2 a) Khi m = - 4, phương trình (1) trở thành: $x^2 + 6x + 2 = 0$

Ta có $\Delta' = 3^2 - 2.1.2 = 5 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -3 + \sqrt{5}\,;\, x_2 = -3 - \sqrt{5}$

Vậy với $m = -4$ thì phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-3 + \sqrt{5}; -3 - \sqrt{5}\right\}$

2b) Xét phương trình (1) có $\Delta' = \left[-(m+1)\right]^2 - 1.(2m+10) = m^2 + 2m + 1 - 2m - 10 = m^2 - 9$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \ \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$

Vậy (1) có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$

2c) Với $\left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2.

Hệ thức Vi – et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m + 10 \end{cases}$

Ta có: $P = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + 8x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 6x_1x_2$

$\Rightarrow P = \left[2(m+1)\right]^2 + 6(2m+10) = 4m^2 + 20m + 64 = (2m+5)^2 + 39$

__Sai lầm mắc phải__:

Vì $(2m+5)^2 \geq 0 \Rightarrow P \geq 39$.

Do đó $P_{min} = 39 \Leftrightarrow (2m+5)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-5}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy không có giá trị của m để P nhỏ nhất.

__Lời giải đúng__:

Khi $m \le -3 \Rightarrow 2m+5 \le -1 \Rightarrow (2m+5)^2 \ge 1 \Rightarrow P = (2m+5)^2 + 39 \ge 40$

Khi $m \ge 3 \Rightarrow 2m+5 \ge 11 \Rightarrow (2m+5)^2 \ge 121 \Rightarrow P = (2m+5)^2 + 39 \ge 160$

Như vậy với mọi m thỏa mãn ĐK, ta có: $P \ge 40$

$\Rightarrow$ Min P = 40 khi m = - 3

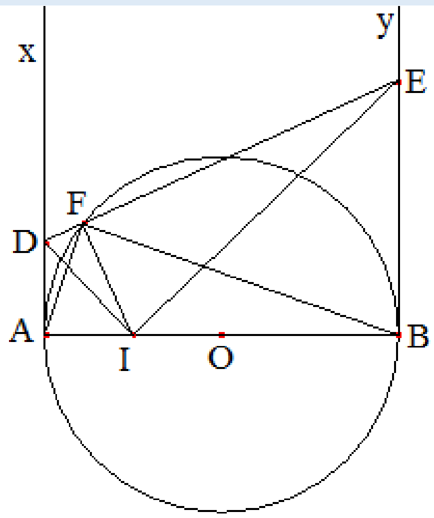
Câu IV. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi I là trung điểm của AO. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn (O), lấy D thuộc Ax, E thuộc By sao cho góc DIE bằng 90^0. Kẻ IF vuông góc với DE (F thuộc DE).

1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE = AI.IB = \dfrac{3R^2}{4}$.

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.



1) Chứng minh bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc một đường tròn.

Ta có Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) (giả thiết); $D \in Ax$

$\Rightarrow AD \perp AB$ tại A $\Rightarrow \widehat{IAD} = 90^\circ$

Ta có $IF \perp DE$ tại F $\Rightarrow \widehat{IFD} = 90^\circ$

Cách 1:

$\Rightarrow$ Tứ giác có hai đỉnh A và F cùng nhìn cạnh ID dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn đường kính DI

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn đường kính DI.

Cách 2:

Xét tứ giác $IADF$ có $\widehat{IAD}$, $\widehat{IFD}$ là hai góc đối và $\widehat{IAD}+\widehat{IFD}=90^{o}+90^{o}=180^{o}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow$ bốn điểm A, I, F, D cùng thuộc đường tròn.

2) Chứng minh rằng $AD.BE=AI.IB=\dfrac{3R^2}{4}$.

Xét ΔADI và ΔBIE có

$\widehat{DAI}=\widehat{IBE}=90^{0}$ (tính chất của tiếp tuyến)

$\widehat{AID}=\widehat{BEI}$ (cùng phụ với $\widehat{BIE}$ do $\widehat{DIE}=90^{o}$)

$\Rightarrow \Delta ADI \sim \Delta BIE \Rightarrow \dfrac{AD}{BI}=\dfrac{AI}{BE} \Rightarrow AD.BE=BI.AI$

Theo giả thiết lại có $AI=\dfrac{R}{2}; BI=\dfrac{3}{2}R \Rightarrow AD.BE=BI.AI=\dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2}=\dfrac{3R^2}{4}$

Vậy $AD.BE=AI.IB=\dfrac{3R^2}{4}$

3) Chứng minh điểm F thuộc đường tròn tâm O.

Tứ giác $ADFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{DFA}=\widehat{DIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AD}$)

Tương tự chứng minh được tứ giác $BEFI$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{BFE}=\widehat{BIE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{BE}$)

Vậy $\widehat{DFA}+\widehat{BFE}=\widehat{DIA}+\widehat{BIE}=90^{0}$ (Vì $\widehat{DIE}=90^{0}$)

$\Rightarrow \widehat{AFB}=180^{0}-(\widehat{DFA}+\widehat{BFE})=180^{0}-90^{0}=90^{0}$

$\Rightarrow$ F thuộc đường tròn đường kính AB hay F thuộc đường tròn tâm O.

4) Xác định vị trí của D và E trên Ax, By để diện tích tam giác DIE nhỏ nhất.

Ta có $S_{DIE}=ID.IE \Rightarrow {S_{DIE}}^2=ID^2.IE^2=(AD^2+AI^2)(BI^2+BE^2)$

Áp dụng B Đ T cosi có: $AD^2+AI^2 \ge 2AD.AI$; $BI^2+BE^2 \ge 2BI.BE$

Và có $AD.BE=AI.IB=\dfrac{3R^2}{4}$ (cmt)

$$\Rightarrow {S_{DIE}}^2 \ge 2AD.AI.2BI.BE=4\left(AI.BI\right)^2=4.\left(\frac{3R^2}{4}\right)^2=\frac{9R^4}{4} \Rightarrow S_{DIE} \ge \frac{3R^2}{2}$$

Vậy Min $S_{DIE} = \frac{3R^2}{2}$ khi $AD = AI$; $BE = BI$

Vậy diện tích tam giác DIE nhỏ nhất khi D và E thuộc Ax, By sao cho $AD = AI$; $BE = BI$

Câu V. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \ge 3\sqrt{3}$

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \ge 3\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + 2ab + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + 2bc + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + 2ca + 2a^2} \ge 3\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + (a+b)^2} + \sqrt{b^2 + c^2 + (b+c)^2} + \sqrt{a^2 + c^2 + (a+c)^2} \ge 3\sqrt{6}$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-ki: $x.a + y.b \le \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$

<u>Chứng minh</u>: $x.a + y.b \le \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$

$$\Leftrightarrow (x.a + y.b)^2 \le x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2 \Leftrightarrow x^2b^2 + y^2a^2 - 2x.a.y.b \ge 0$$

$\Leftrightarrow (xb - ya)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Áp dụng cho bài toán:

$$a + b \le \sqrt{(1^1 + 1^2).(a^2 + b^2)} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2} \quad (1)$$

$$b + c \le \sqrt{(1^1 + 1^2).(b^2 + c^2)} = \sqrt{2(b^2 + c^2)} \Leftrightarrow b^2 + c^2 \ge \frac{(b+c)^2}{2} \quad (2)$$

$$a + c \le \sqrt{(1^1 + 1^2).(a^2 + c^2)} = \sqrt{2(a^2 + c^2)} \Leftrightarrow a^2 + c^2 \ge \frac{(a+c)^2}{2} \quad (3)$$

Do đó:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + (a+b)^2} + \sqrt{b^2 + c^2 + (b+c)^2} + \sqrt{a^2 + c^2 + (a+c)^2}$$
$$\ge \sqrt{\frac{3}{2}(a+b)^2} + \sqrt{\frac{3}{2}(b+c)^2} + \sqrt{\frac{3}{2}(a+c)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(2a + 2b + 2c) = 3\sqrt{6} \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1), (2), (3) đồng thời xảy ra và thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$.

$\Leftrightarrow a = b = c = 1$

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO QUẬN ĐỐNG ĐA **ĐỀ THI THỬ VÀO 10**

TRƯỜNG THCS PHAN HUY CHÚ **NĂM HỌC 2019 – 2020**

ĐỀ SỐ 23

Bài 1. Với $x \ge 0; x \ne 1; x \ne 9$, cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ và $B == \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{7-\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

b) Chứng minh rằng $B = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{4A}{B} \le \dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$.

Bài 2. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong phong trào thi đua trồng cây dịp đầu năm mới, lớp 9A trường THCS Chiến Thắng đặt kế hoạch trồng 300 cây xanh cùng loại, mỗi học sinh trồng số cây như nhau. Đến đợt lao động, có 5 bạn được Liên đội triệu tập tham gia chiến dịch an toàn giao thông nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây để đảm bảo kế hoạch đề ra. Tính số học sinh lớp 9A.

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + y = 5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x-2}} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 1 \left(m \ne 0\right)$.

a) Chứng minh: đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên Ox. Gọi I là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Oy. Chứng minh với mọi giá trị $m \ne 0$, tam giác IHK luôn là tam giác vuông tại I.

Bài 4. Cho đường tròn $\left(O, R\right)$ và dây AB cố định, khác đường kính. Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Kẻ đường kính IK của đường tròn $\left(O\right)$ cắt AB tại N. Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn $AB \left(M \ne A, M \ne B\right)$. MK cắt AB tại D. Hai đường thẳng IM và AB cắt nhau tại C.

1. Chứng minh bốn điểm M, N, K và C cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $IB^2 = IM.IC = IN.IK$

3. Hai đường thẳng ID và CK cắt nhau tại E. Chứng minh điểm E thuộc đường tròn (O) và NC là tia phân giác của góc $\widehat{MNE}$.

4. Chứng minh khi điểm M thay đổi trên cung lớn $AB\left(M \neq A, M \neq B\right)$, đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn: $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$, cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ và $B==\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{7-\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

b) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{4A}{B} \leq \dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$.

a) Thay $x=16$ (thỏa mãn) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}+2}{\sqrt{16}-3}=\dfrac{4+2}{4-3}=6$.

b) Với $x \geq 0,\ x \neq 1; x \neq 9$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}+\frac{7-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+7-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{x+4\sqrt{x}-5+7-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ (đpcm)

c) Ta có: $\dfrac{4A}{B} \leq \dfrac{x}{\sqrt{x}-3} \Rightarrow 4.\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}.\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \leq \dfrac{x}{\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow \dfrac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-3} \leq \dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-3}-\frac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}-3}\ge 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-3\ge 0 \Rightarrow x\ge 9$$

Kết hợp điều kiện, ta có $x>9$ thì $\frac{4A}{B}\le \frac{x}{\sqrt{x}-3}$

Bài 2. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Trong phong trào thi đua trồng cây dịp đầu năm mới, lớp 9A trường THCS Chiến Thắng đặt kế hoạch trồng 300 cây xanh cùng loại, mỗi học sinh trồng số cây như nhau. Đến đợt lao động, có 5 bạn được Liên đội triệu tập tham gia chiến dịch an toàn giao thông nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây để đảm bảo kế hoạch đề ra. Tính số học sinh lớp 9A.

Gọi số học sinh lớp 9A ban đầu là x bạn ($x\in \mathbb{N}^*,\ x>5$).

Số cây mỗi bạn phải trồng theo kế hoạch là $\frac{300}{x}$ (cây).

Số cây mỗi bạn phải trồng trong thực tế là $\frac{300}{x}+2$ (cây).

Theo bài ra, sau khi có 5 bạn được Liên đội triệu tập, mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây để đảm bảo kế hoạch đặt ra nên ta có phương trình

$$\left(\frac{300}{x}+2\right)\cdot\left(x-5\right)=300$$

$$\Leftrightarrow 300+2x-\frac{1500}{x}-10=300$$

$$\Leftrightarrow -10+2x-\frac{1500}{x}=0$$

$$\Rightarrow -10x+2x^2-1500=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=-25 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, $x=30$ thỏa mãn.

Vậy lớp 9A có 30 bạn.

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+y=5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d):

$y = mx + 1 \left(m \neq 0\right)$.

a) Chứng minh: đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên Ox. Gọi I là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Oy. Chứng minh với mọi giá trị $m \neq 0$, tam giác IHK luôn là tam giác vuông tại I.

1) Điều kiện: $x > 2$

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = a \quad (a > 0)$

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} a + y = 5 \\ 3a - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(tm) \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 4)$.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = mx + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$.

$\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m

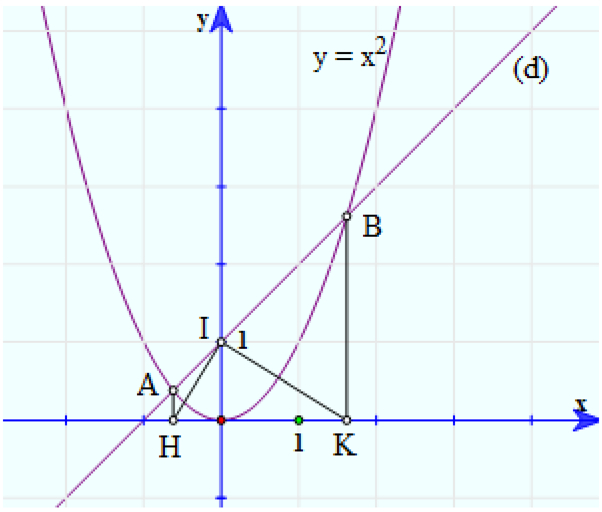
$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

2b) Ta có phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.

Hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -1 \end{cases}$

Vì $x_1.x_2 = -1 < 0$ nên hai giao điểm A và B nằm về hai phía trục tung và được biểu diễn trên hệ tọa độ như hình vẽ.



Với H, K lần lượt là hình chiếu của A và B lên trục hoành. Ta có:

$IH^2 = OI^2 + OH^2 = 1 + x_1^2$

$IK^2 = OI^2 + OK^2 = 1 + x_2^2$

$IH^2 + IK^2 = 2 + x_1^2 + x_2^2 = m^2 + 4$

$HK^2 = (OH + OK)^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = m^2 + 4$

$\Rightarrow IH^2 + IK^2 = HK^2$

Vậy tam giác IHK vuông tại I (Định lý Pitago đảo).

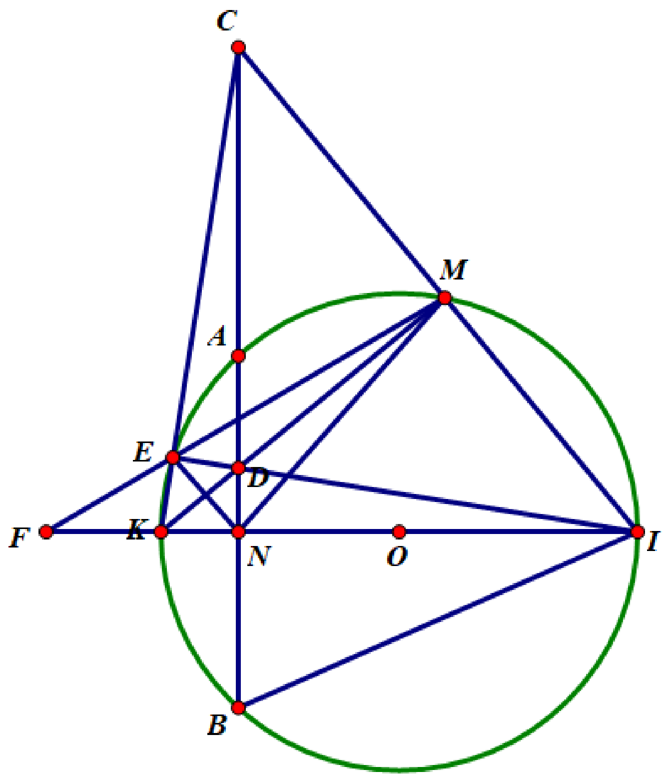
Bài 4. Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định, khác đường kính. Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Kẻ đường kính IK của đường tròn (O) cắt AB tại N. Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn $AB\,(M \neq A, M \neq B)$. MK cắt AB tại D. Hai đường thẳng IM và AB cắt nhau tại C.

1. Chứng minh bốn điểm M, N, K và C cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $IB^2 = IM.IC = IN.IK$

3. Hai đường thẳng ID và CK cắt nhau tại E. Chứng minh điểm E thuộc đường tròn (O) và NC là tia phân giác của góc $\widehat{MNE}$.

4. Chứng minh khi điểm M thay đổi trên cung lớn $AB\,(M \neq A, M \neq B)$, đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.



1. Chứng minh bốn điểm M, N, K và C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có K là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ (giả thiết)

$\Rightarrow OK \perp AB$ tại N hoặc $OK \perp CB$ tại N $\Rightarrow \widehat{CNK} = 90^o$

Xét (O) có $\widehat{KMI} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow KM \perp MI$ tại M hoặc $KM \perp CI$ tại M (do C, M, I thẳng hàng) $\Rightarrow \widehat{CMK} = 90^o$

$\Rightarrow$ Hai điểm M và N cùng nhìn cạnh CK dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác CMNK nội tiếp đường tròn đường kính CK

$\Rightarrow$ bốn điểm C, M, N, K cùng thuộc đường tròn đường kính CK.

2. Chứng minh $IB^2 = IM.IC = IN.IK$

Xét ΔIBM và ΔICB có:

$\hat{I}$ chung; $\widehat{IBM} = \widehat{ICB}$ (cùng bằng $\widehat{IKM}$)

$\Rightarrow \Delta IBM \backsim \Delta ICB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IB}{IC} \Rightarrow IB^2 = IM.IC$ $\quad (1)$

Tứ giác CKNM nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{KCM} + \widehat{KNM} = 180^o$ (Định lý)

Mà $\widehat{MNI} + \widehat{KNM} = 180^o$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{MNI}$

Xét ΔIMN và ΔIKC có: $\hat{I}$ chung; $\widehat{MNI} = \widehat{KCM}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta IMN \backsim \Delta IKC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IM}{IK} = \dfrac{IN}{IC} \Rightarrow IM.IC = IK.IN$ $\quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow IB^2 = IM.IC = IK.IN$

3. Chứng minh điểm E **thuộc đường tròn** (O) **và** NC **là tia phân giác của góc** $\widehat{MNE}$.

Xét ΔCKI có: $KM \perp CI$; $CN \perp KI$ và $KM \cap CN$ tại D

$\Rightarrow D$ là trực tâm ΔCKI

$\Rightarrow ID \perp CK$ tại E (ID cắt CK tại E) (tính chất) hoặc $IE \perp CK$ tại E.

$\Rightarrow \widehat{IEK} = 90^0$

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn tâm O, đường kính IK.

Chứng minh được tứ giác $KEDN$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{EKD} = \widehat{END}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ED}$)

Chứng minh được tứ giác DMIN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DNM} = \widehat{DIM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DM}$)

Mà $\widehat{EKM} = \widehat{EIM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{EM}$ của đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{END} = \widehat{DNM}$

$\Rightarrow$ ND là tia phân giác của $\widehat{ENM}$

4. Chứng minh khi điểm M thay đổi trên cung lớn $AB\left(M\ne A,M\ne B\right)$, đường thẳng ME luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi $F=ME\cap IK$

Tương tự ý 3), ta chứng minh được ED là phân giác của $\widehat{MEN}$.

Vì $\widehat{KEI}=90^{0}\Rightarrow EK$ là phân giác của $\widehat{NEF}$

Vậy EK,EI lần lượt là phân giác trong và ngoài tại đỉnh E của ΔNEF.

$\Rightarrow \dfrac{NK}{KF}=\dfrac{NE}{FE}=\dfrac{IN}{IF}$

$\Leftrightarrow NK.IF=IN.KF$

$\Leftrightarrow NK.\left(IK+KF\right)=IN.KF$

$\Leftrightarrow NK.IK=KF.\left(IN-NK\right)$

$\Leftrightarrow KF=\dfrac{NK.IK}{IN-NK}=$ không đổi $\Rightarrow F$ cố định.

Vậy khi điểm M thay đổi trên cung lớn AB, đường thẳng ME luôn đi qua điểm F cố định.

Bài 5. Cho các số thực không âm a,b thỏa mãn: $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}$.

Cách 1:

$P^{2}=4\left(a+b\right)+2+2\sqrt{\left(4a+1\right)\left(4b+1\right)}=10+2\sqrt{16ab+4\left(a+b\right)+1}$

$\ge 10+2\sqrt{4\left(a+b\right)+1}=16$

$\Rightarrow P\ge 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(a,b\right)$ là hoán vị của $\left(0;2\right)$.

Cách 2.

Đặt $\sqrt{4a+1}=x,\sqrt{4b+1}=y$ thì:

$1\le x,y\le 3$ (do $0\le a,b\le 2$) và $\dfrac{x^{2}-1}{4}+\dfrac{y^{2}-1}{4}=2\Leftrightarrow x^{2}+y^{2}=10$.

Do $\begin{cases}\left(x-1\right)\left(x-3\right)\le 0\\ \left(y-1\right)\left(y-3\right)\le 0\end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases}4x\ge x^{2}+3\\ 4y\ge y^{2}+3\end{cases}\Rightarrow 4\left(x+y\right)\ge x^{2}+y^{2}+6=16\Rightarrow x+y\ge 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=3$ hoặc $y=1,x=3$ hay $\left(a,b\right)$ là hoán vị của bộ số $\left(0;2\right)$.

Cách 3:

Chứng minh bổ đề: $\sqrt{x+k^2}+\sqrt{y+k^2}\ge k+\sqrt{x+y+k^2}$ với $x,y,k\ge 0$ (*).

<u>Chứng minh (*)</u>:

Bình phương 2 vế ta có:

$$x+y+2k^2+2\sqrt{\left(x+k^2\right)\left(y+k^2\right)}\ge x+y+2k^2+2k\sqrt{x+y+k}$$

Hay

$$\sqrt{\left(x+k^2\right)\left(y+k^2\right)}\ge k\sqrt{x+y+k^2}\Leftrightarrow xy+\left(x+y\right)k^2+k^4\ge\left(x+y\right)k^2+k^4\Leftrightarrow xy\ge 0$$

bất đẳng thức này luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy=0$.

Áp dụng vào bài toán: $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}\ge 1+\sqrt{1+4\left(a+b\right)}=1+3=4$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a,b là hoán vị của $\left(0;2\right)$.

TRƯỜNG THCS PHƯƠNG LIỆT
NĂM HỌC 2017 – 2018
Đề số 24

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LỚP 9
MÔN: TOÁN

Bài I. Cho $A=\dfrac{3\sqrt{x}-9}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}, x\ge 0; x\ne 9.$

1) Tính giá trị của A khi $x=2$.

2) Chứng tỏ rằng biểu thức B luôn dương với mọi giá trị x thỏa mãn ĐKXĐ.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{B}{A}$.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải làm được 330 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện do tổ một làm vượt mức kế hoạch 10%, tổ hai làm giảm 15% so với mức kế hoạch nên cả hai tổ làm được 318 sản phẩm. Tính số sản phẩm mà mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3(x-y+1)-2\sqrt{y-1}=1\\2(x-y+1)+\sqrt{y-1}=3\end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-\dfrac{1}{2}m^2+m+1$ (m là tham số, $m\ne 0$)

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ -1.

b) Tìm m để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ sao cho: $y_1+y_2=5$.

Bài IV. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn sao cho $OA=2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d thay đổi đi qua A luôn cắt đường tròn tại hai điểm D và E (D thuộc cung nhỏ BC, cung BD lớn hơn cung CD). Gọi I là trung điểm của DE, H là giao điểm của AO và BC.

1) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $AH.AO=AD.AE=3R^2$.

3) Chứng minh HC là tia phân giác của góc DHE.

4) Gọi G là trọng tâm tam giác BDE. Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Bài V. Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=abc.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. Cho $A=\frac{3\sqrt{x}-9}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}$ và $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}, x\ge 0; x\ne 9.$

1) Tính giá trị của A khi $x=2.$

2) Chứng tỏ rằng biểu thức B luôn dương với mọi giá trị x thỏa mãn ĐKXĐ.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{B}{A}.$

1) Ta có: $A=\frac{3\sqrt{x}-9}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3(\sqrt{x}-3)}{(x+7)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3}{x+7}$

Với $x=2$, có $A=\frac{3}{2+7}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

2) $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-3x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$

$=\frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{3}{\sqrt{x}+3}$

Vì $\sqrt{x}\ge 0$ với mọi x thỏa mãn ĐKXĐ $\Rightarrow \sqrt{x}+3>0\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3}>0$ hay $B>0$ với mọi x thỏa mãn ĐKXĐ.

3) $P=\frac{B}{A}=\frac{3}{\sqrt{x}+3}:\frac{3}{x+7}=\frac{x+7}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}-3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}=\sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}-6$

Áp dụng BĐT Cô Si cho 2 số dương $\sqrt{x}+3>0$ và $\frac{16}{\sqrt{x}+3}>0$ ta có:

$\sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}\ge 2\sqrt{16}=8$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+3+\frac{16}{\sqrt{x}+3}-6\ge 2$

$\Leftrightarrow P\ge 2$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2, khi đó dấu " = " xảy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+3=\frac{16}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+3\right)^2=16 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3=4 \Leftrightarrow x=1.\ \text{(thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy $P_{max} = 2$ khi $x = 1$.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất phải làm được 330 sản phẩm. Nhưng khi thực hiện do tổ một làm vượt mức kế hoạch 10%, tổ hai làm giảm 15% so với mức kế hoạch nên cả hai tổ làm được 318 sản phẩm. Tính số sản phẩm mà mỗi tổ phải làm theo kế hoạch.

Gọi số sản phẩm mà đội 1 làm theo kế hoạch là x (sản phẩm)

Gọi số sản phẩm mà đội 2 làm theo kế hoạch là y (sản phẩm)

Điều kiện: $x; y \in N$, $0 < x; y < 330$

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được 330 sản phẩm ta có phương trình:

$x + y = 330$ (sản phẩm) (1)

Số sản phẩm thực tế đội 1 làm được là: $x+10\%x = x+\frac{10}{100}x=\frac{110}{100}x=1{,}1x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm thực tế đội 2 làm được là: $y-15\%y = y-\frac{15}{100}y=\frac{85}{100}y=0{,}85y$ (sản phẩm)

Cả hai tổ thực tế làm được 318 sản phẩm nên ta có phương trình:

$1{,}1x+0{,}85y=318$ (sản phẩm) (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=330 \\ 1{,}1x+0{,}85y=318 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}1x+1{,}1y=363 \\ 1{,}1x+0{,}85y=318 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}25y=45 \\ 1{,}1x+0{,}85y=318 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=180 \\ x=150 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy số sản phẩm đội 1 làm theo kế hoạch là 150 sản phẩm

Số sản phẩm đội 2 làm theo kế hoạch là 180 sản phẩm.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x-y+1)-2\sqrt{y-1}=1 \\ 2(x-y+1)+\sqrt{y-1}=3 \end{cases}$

2) Cho Parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1$ (m là tham số, $m \neq 0$)

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ -1.

b) Tìm m để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ sao cho: $y_1+y_2=5$.

1) $\begin{cases}3(x-y+1)-2\sqrt{y-1}=1\\2(x-y+1)+\sqrt{y+1}=3\end{cases}$ ĐK $y\ge1$

Đặt $a=(x-y+1)$; $b=\sqrt{y-1}>0$

Phương trình trở thành

$$\begin{cases}3a-2b=1\\2a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2(3-2a)=1\\b=3-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=1\\b=3-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\text{ (T/m).}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y+1=1\\\sqrt{y-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2+1=1\\y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;2)$

2a) (d) cắt trục hoành tại điểm (- 1; 0), thay vào (d) ta được:

$$0=m(-1)-\frac{1}{2}m^2+m+1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}m^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow m^2=2$$

$$\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}\text{ (T/m).}$$

2b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$\frac{1}{2}x^2=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-2m-2=0 \qquad (1)$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow \mathrm{m}^2-(m^2-2m-2)>0$$

$$\Leftrightarrow 2m+2>0$$

$$\Leftrightarrow m>-1$$

Theo viet: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1.x_2=m^2-2m-2\end{cases}$

Ta có $y_1 + y_2 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 5$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 10$$
$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$
$$\Leftrightarrow (2m)^2 - 2(m^2 - 2m - 2) = 10$$
$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m^2 + 4m + 4 - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 1 & (T/m) \\ m = -3 & (Loai) \end{array}\right.$$

Vậy $m = 1.$

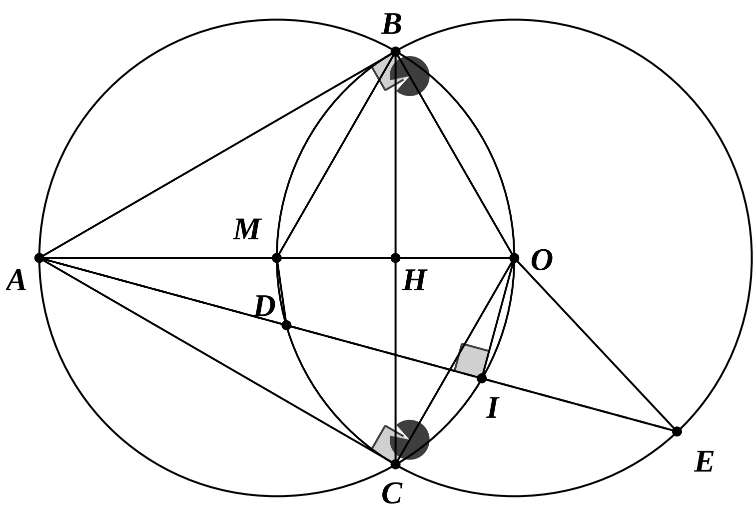
Bài IV. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R.$ Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d thay đổi đi qua A luôn cắt đường tròn tại hai điểm D và E (D thuộc cung nhỏ $BC,$ cung BD lớn hơn cung CD). Gọi I là trung điểm của $DE,$ H là giao điểm của AO và $BC.$

1) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $AH.AO = AD.AE = 3R^2.$

3) Chứng minh HC là tia phân giác của góc $DHE.$

4) Gọi G là trọng tâm tam giác $BDE.$ Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.



1) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, I cùng thuộc một đường tròn.

Gọi M là trung điểm của AO

Ta có I là trung điểm của DE (giả thiết).

$\Rightarrow OI \perp DE$ (đường kính đi qua trung điểm của dây cung thì vuôn góc với dây cung)

$\Rightarrow \widehat{AIO} = 90^0$

AB và AC lần lượt là hai tiếp tuyến của (O) (giả thiết)

$\Rightarrow AB \perp OB$ và $AC \perp OC$

$\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0$; $\widehat{ACO} = 90^0$

Xét tứ giác ABOC có hai góc đối là $\widehat{ABO}$; $\widehat{ACO}$ và $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^o$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO

Xét tứ giác ACIO có hai đỉnh kề C và I cùng nhìn AO dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACIO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO

Vậy 5 điểm A; B; O; I; C cùng thuộc một đường tròn. (tâm là M)

2) Chứng minh AH.AO = AD.AE = $3R^2$.

Ta có AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

OC = OB = R

$\Rightarrow$ AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC hay $AO \perp BC$.

Tam giác ABO vuông tại B; đường cao BH ta có:

$AH.AO = AB^2$ (Hệ thức lượng) (1)

Xét ΔADC và ΔACE có:

$\widehat{ACD} = \widehat{CEA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến -dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$ của (O))

$\widehat{CAE}$ chung.

Vậ $\Delta ADC \sim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC^2$

Mà $AC = AB$ nên $AD.AE = AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AH.AO = AD.AE = AB^2$

Tam giác ABO vuông tại B ta có: $AB^2 = AO^2 - OB^2$ (định lí Pitago)

$\Rightarrow AB^2 = 3R^2$

Vậy $AH.AO = AD.AE = AB^2 = 3R^2$

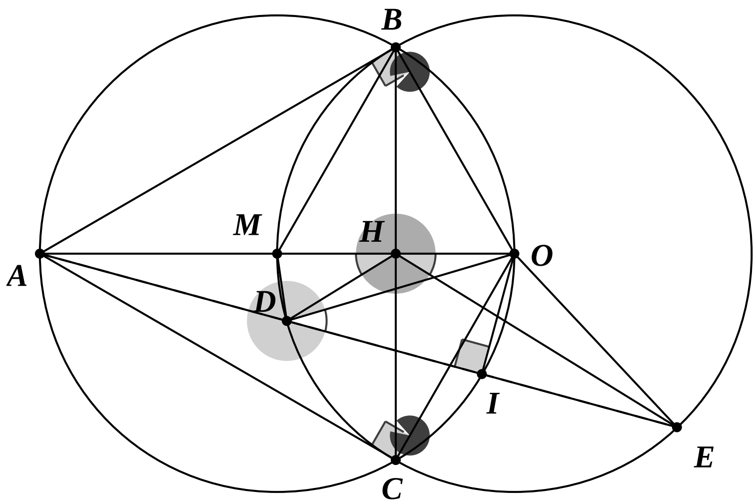
3) Chứng minh HC là tia phân giác của góc DHE.

Ta có: $AH.AO = AD.AE \Rightarrow \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AD}{AO}$

Xét ΔAHD và ΔAEO có

$\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AD}{AO}$ và $\widehat{EAO}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta AHD \sim \Delta AEO \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{AHD} = \widehat{DEO}$ (3)



Tứ giác HOED là tứ giác nội tiếp (có $\widehat{DEO} + \widehat{DHO} = \widehat{DHO} + \widehat{AHD} = 180^0$)

Vậy $\widehat{ODE} = \widehat{EHO}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OE}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác HOED)

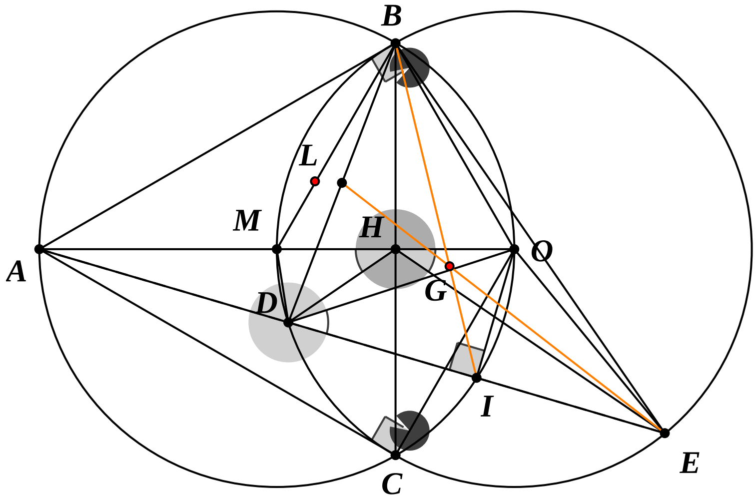
Mặt khác $\widehat{ODE} = \widehat{DEO}$ (do tam giác ODE cân tại O) (5)

Từ (3); (4); (5) ta có $\widehat{AHD} = \widehat{EHO}$

Mà $\widehat{AHC} = \widehat{CHO} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AHC} - \widehat{AHD} = \widehat{CHO} - \widehat{EHO} \Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{EHC}$

$\Rightarrow$ HC là tia phân giác của góc DHC.

4) Gọi G là trọng tâm tam giác BDE. Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.



G là trọng tâm của tam giác DBE nên $BG = \frac{2}{3}BI$.   (6)

Trên đoạn thẳng BM lấy điểm L sao cho $BL = \frac{2}{3}BM$.   (7)

Ta có A, O, B, C cố định, khi đó:

M là trung điểm của AO nên M cố định.

Theo (7) thì L cũng sẽ cố định.

Theo câu a) thì I thuộc đường tròn tâm M hay MI = R.

Xét tam giác BMI có $\frac{BL}{BM} = \frac{BG}{BI} \Rightarrow LG//MI$ và $\frac{LG}{MI} = \frac{BL}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow LG = \frac{2}{3}R$.

Do L cố định, $LG = \frac{2}{3}R$ không đổi nên khi d thay đổi thì G luôn thuộc đường tròn tâm L, bán kính $\frac{2}{3}R$ cố định.

Bài V. Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = abc.$

Ta có: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2 \qquad a,b,c > 0$

$$\frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c}$$

$$\frac{1}{1+a} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}} \qquad \text{(Theo BĐT Cô Si)}$$

$$\frac{1}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$$

Tương tự $\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}$; $\frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$

Nhân vế với vế ta được

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2}} = \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{8}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ khi đó $\frac{3}{1+a} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 1 + a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

Vậy $Q_{max} = \frac{1}{8}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

PHÒNG GD & ĐT PHÚC THỌ	**THI THỬ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT**
TRƯỜNG THCS PHỤNG THƯỢNG	**LẦN 3**
	MÔN: TOÁN 9
Đề số 25	**Năm học 2019 – 2029**
	Ngày thi: 21/3/2019
	Thời gian làm bài 120 phút

Bài I (2 điểm): Hai biểu thức $A=\dfrac{2019}{\sqrt{x}+8}$; $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-21}{9-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$ với $x\geq 0\,;x\neq 9.$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 36.

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P, với $P=A.B$.

Bài II (2 điểm): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một ô tô dự định đi từ A đến B dài 80km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu ô tô đi với vận tốc nhỏ hơn vận tốc dự định là 6 km/h. Trong nửa quãng đường còn lại ô tô đi với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định là 12 km/h. Biết rằng ô tô đến B đúng thời gian đã định. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Bài III (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2}{2-y}=4\\ \dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{1}{y-2}=5\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2+mx+m-1=0$ (1) (ẩn x).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=x_1^2-4x_1+x_2^2-4x_2$.

Bài IV (3, 5 điểm): Cho đường tròn $(O\,;\,R)$ và một điểm A sao cho OA = 3R. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O) với P và Q là hai tiếp điểm. Từ P kẻ PM song song với AQ với M thuộc đường tròn (O). Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O) (N thuộc AM). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1) Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $\widehat{NAK} = \widehat{APN}$ và $KA^2 = KN.KP$.

3) Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$ và $\widehat{PAN} + \widehat{AMP} = 2\widehat{MNS}$.

4) Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính $\tan\widehat{AGK}$ theo bán kính R.

Bài V (0,5 điểm): Cho x, y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \dfrac{(x+y)^2}{xy}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I (2 điểm): Hai biểu thức $A = \dfrac{2019}{\sqrt{x}+8}$; $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{\sqrt{x}-21}{9-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$ với $x \ge 0; x \ne 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.

2) Chứng minh $B = \dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P, với $P = A.B$.

1) Với $x = 36$ (thỏa mãn ĐK), thay vào A ta được: $P = \dfrac{2019}{\sqrt{36}+8} = \dfrac{2019}{6+8} = \dfrac{2019}{14}$.

2) Điều kiện: $x \ge 0$; $x \ne 9$.

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-21}{9-x} + \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-21}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{\sqrt{x}.(\sqrt{x}+3) + \sqrt{x} - 21 + (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x+5\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy $B = \dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$ với $x \ge 0$; $x \ne 9$. (đpcm).

3) Ta có: $P = A.B = \dfrac{2019}{\sqrt{x}+8}.\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{2019}{\sqrt{x}+3}$ với $x \ge 0$; $x \ne 9$.

Vì $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \ge 3 \Rightarrow P = \dfrac{2019}{\sqrt{x}+3} \le \dfrac{2019}{3} = 673$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $P_{max} = 673 \Leftrightarrow x = 0$

Bài II (2 điểm): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một ô tô dự định đi từ A đến B dài 80km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu ô tô đi với vận tốc nhỏ hơn vận tốc dự định là 6 km/h. Trong nửa quãng đường còn lại ô tô đi với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định là 12 km/h. Biết rằng ô tô đến B đúng thời gian đã định. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) $(x > 6)$.

Thời gian dự định ô tô đi từ A đến B là: $\dfrac{80}{x}$ (h)

Vận tốc ô tô đi trên nửa quãng đường đầu (40km) là $x-6$ (km/h), nên ô tô đi nửa quãng đường đầu hết thời gian là: $\dfrac{40}{x-6}$ (h).

Vận tốc ô tô đi trên nửa quãng đường sau (40km) là $x+12$ (km/h), nên ô tô đi nửa quãng đường sau hết thời gian là: $\dfrac{40}{x+12}$ (h).

Thời gian thực tế ô tô đi từ A đến B là $\dfrac{40}{x-6}+\dfrac{40}{x+12}$ (h)

Vì ô tô đến B đúng thời gian đã định, nên ta có phương trình: $\dfrac{40}{x-6}+\dfrac{40}{x+12}=\dfrac{80}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+12}=\frac{2}{x}$$
$$\Leftrightarrow (2x+6).x = 2(x-6)(x+12)$$
$$\Leftrightarrow 6x = 12x - 144$$
$$\Leftrightarrow 6x = 144$$
$$\Rightarrow x = 24 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc dự định của ô tô là 24 (km/h).

Bài III (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2}{2-y}=4 \\ \dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{1}{y-2}=5 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2+mx+m-1=0$ (1) (ẩn x).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=x_1^2-4x_1+x_2^2-4x_2$.

1) Điều kiện: $x\neq -1$; $y\neq 2$.

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2}{2-y}=4 \\ \dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{1}{y-2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2}{2-y}=4 \\ \dfrac{4x}{x+1}-\dfrac{2}{2-y}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2}{2-y}=4 \\ \dfrac{7x}{x+1}=14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}=4-\dfrac{3x}{x+1} \\ \dfrac{x}{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}=-2 \\ \dfrac{x}{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x\,;\,y)=(-2\,;\,3)$

2a) Phương trình $x^2+mx+m-1=0$ (1) (ẩn x).

$\Delta=m^2-4m+4=(m-2)^2\geq 0$ với mọi m

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

2b) Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 , x_2

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow (m-2)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 2$ (2)

Hệ thức vi – ét: $\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1.x_2=m-1 \end{cases}$ (3)

Ta có: $B=x_1^2-4x_1+x_2^2-4x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4(x_1+x_2)$ (4)

Thay (3) vào (4) ta được:

$B=m^2-2(m-1)-4(-m)=m^2+6m+2=(m+3)^2-7$

Vì $\left(m+3\right)^2 \ge 0$ với mọi m, nên $B=\left(m+3\right)^2-7\ge -7$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(m+3\right)^2=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn ĐK (2))

Vậy $B=-7 \Leftrightarrow m=-3$

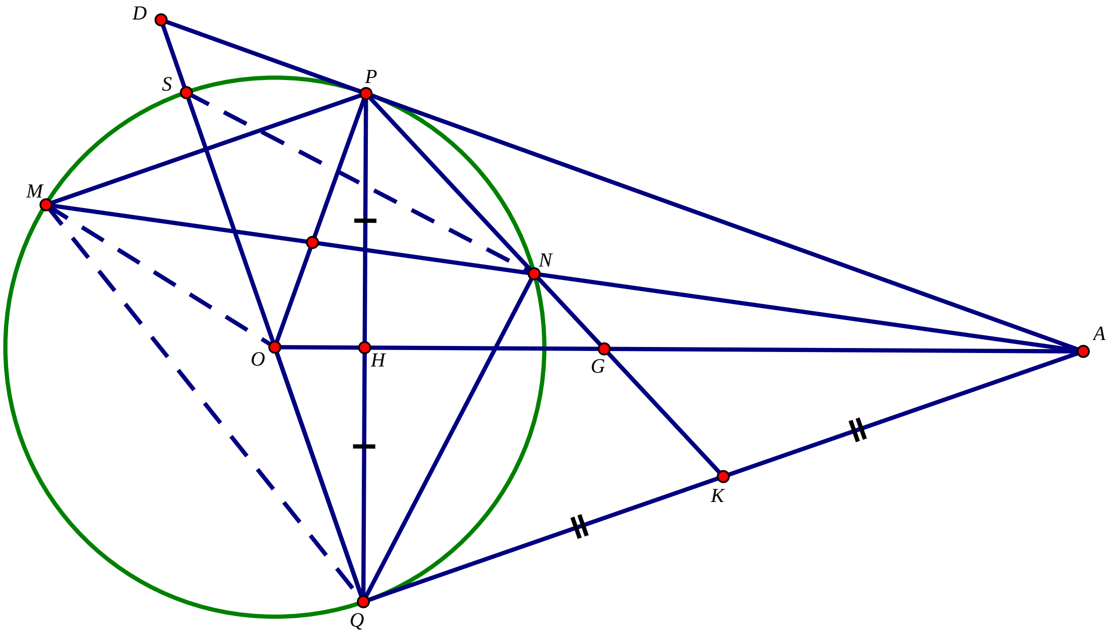
Bài IV (3, 5 điểm): Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một điểm A sao cho OA = 3R. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O) với P và Q là hai tiếp điểm. Từ P kẻ PM song song với AQ với M thuộc đường tròn (O). Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O) (N thuộc AM). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1) Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $\widehat{NAK}=\widehat{APN}$ và $KA^2=KN.KP$.

3) Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$ và $\widehat{PAN}+\widehat{AMP}=2\widehat{MNS}$.

4) Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK. Tính $\tan\widehat{AGK}$ theo bán kính R.



1) Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp.

AP là tiếp tuyến của (O) (gt)$\Rightarrow OP\perp AP$ (t/c)$\Rightarrow \widehat{OPA}=90^0$

AQ là tiếp tuyến của (O) (gt)$\Rightarrow OQ\perp AQ$ (t/c)$\Rightarrow \widehat{OQA}=90^0$

Xét tứ giác OPAQ có: $\widehat{OPA}+\widehat{OQA}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác OPAQ là tứ giác nội tiếp (có tổng hai góc ở đỉnh đối diện bằng 180^0) (đpcm)

2) Chứng minh $\widehat{NAK}=\widehat{APN}$ và $KA^2=KN.KP$.

Vì PM//AQ (gt)$\Rightarrow \widehat{PMN}=\widehat{NAK}$ (so le trong) (1)

$\widehat{APN}=\widehat{PMN}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PN}$ của (O)) (2)

Từ (1) và (2)$\Rightarrow \widehat{NAK}=\widehat{APN}$ (đpcm)

Xét ΔKAN và ΔKPA có:

$\widehat{K}$ chung

$\widehat{NAK}=\widehat{APN}$ (cmt) hay $\widehat{NAK}=\widehat{KPA}$ (vì $N\in PK$)

$\Rightarrow \Delta KAN \backsim \Delta KPA$ (g . g)

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KP}=\dfrac{KN}{KA}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow KA^2=KN.KP$ (đpcm)

3) Chứng minh NS là tia phân giác của $\widehat{PNM}$ và $\widehat{PAN}+\widehat{AMP}=2\widehat{MNS}$.

$\widehat{MNQ}=\widehat{NAQ}+\widehat{NQA}$ (đ/l góc ngoài của tam giác) (3)

$\widehat{NQA}=\widehat{QMN}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{QN}$ của (O)) (4)

Ta có $\widehat{NAK}=\widehat{PMN}$ (cmt) hay $\widehat{NAQ}=\widehat{PMN}$ (vì $K\in AQ$) (5)

Từ (3),(4),(5) $\Rightarrow \widehat{MNQ}=\widehat{NMP}+\widehat{NMQ}=\widehat{PMQ}\Rightarrow$ cung nhỏ $\overset{\frown}{MQ}=\overset{\frown}{PQ}$ (hệ quả)

$\Rightarrow \overset{\frown}{SM}=\overset{\frown}{SP}\Rightarrow \widehat{SNM}=\widehat{SNP}$ (hệ quả)$\Rightarrow$NS là tia phân giác của $\widehat{MNP}$ (đpcm)

Kéo dài AP cắt QS tại D $\Rightarrow$ DP là tiếp tuyến của (O) (vì AP là tiếp tuyến của (O) (gt))

$\Rightarrow \widehat{DPM}=\widehat{MQP}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MP}$ của (O)) (6)

$\widehat{MNP}=\widehat{MQP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MP}$ của (O)) (7)

$\widehat{MNS}=\dfrac{1}{2}\widehat{MNP}$ (tính chất tia phân giác)$\Rightarrow 2\widehat{MNS}=\widehat{MNP}$ (8)

Ta có : $\widehat{DPM}=\widehat{PMA}+\widehat{PAM}$ (định lý góc ngoài tam giác)

hay $\widehat{DPM}=\widehat{PMA}+\widehat{PAN}$ (vì $N\in AM$) (9)

Từ (6),(7),(8),(9) $\Rightarrow \widehat{PAN}+\widehat{AMP}=2\widehat{MNS}$ (đpcm).

4) Tính $\tan\widehat{AGK}$ **theo bán kính R.**

Chứng minh $\Delta KQN \backsim \Delta KPQ$ (g - g) $\Rightarrow KQ^2 = KN.KP$

Mà $KA^2 = KN.KP$ (cmt) $\Rightarrow KQ = KA \Rightarrow$ K là trung điểm của AQ

Gọi H là giao điểm của AO và PQ

Ta có $AP = AQ$ (tính chất tiếp tuyến) và $OP = OQ$ (vì P và Q đều thuộc (O))

$\Rightarrow$ AO là trung trực của PQ $\Rightarrow AO \perp PQ$ tại H và H là trung điểm của PQ (t/c đường trung trực)

Xét ΔAPQ có :

K là trung điểm của AQ (cmt)

H là trung điểm của PQ (cmt)

A H và PK cắt nhau tại G (gt)

$\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác $\Delta APQ \Rightarrow HG = \frac{1}{3}AH$ (t/c) (10)

Xét ΔAPO vuông tại P có đường cao PH ta có : $PO^2 = OH.AO \Rightarrow OH = \frac{PO^2}{AO} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$

$\Rightarrow AH = AO - OH = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8}{3}R \Rightarrow HG = \frac{8}{9}R$

Xét ΔHPO vuông tại H ta có : $OH^2 + HP^2 = PO^2$ (đ/l pytago)

$\Rightarrow HP = \sqrt{PO^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$

Ta có $\widehat{PGH} = \widehat{AGK}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \tan\widehat{AGK} = \tan\widehat{PGH} = \frac{PH}{HG} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)}{\frac{8}{9}R} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Bài V (0,5 điểm): Cho x, y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}$.

$$S=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2$$

Áp dụng B Đ T cosi ta có: $x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$

Do đó: $S\ge\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{4(x^2+y^2)}{(x+y)^2}+2\underset{BDT\ \ Cosi}{\ge}2\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.\frac{4(x^2+y^2)}{(x+y)^2}}+2=6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở các B Đ T cosi xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Vậy $S_{min}=6\Leftrightarrow x=y$.

TRƯỜNG THPT TRẦN NHÂN TÔNG

Đề số 26

KÌ THI THỬ LỚP 10 THPT

NĂM HỌC 2019 – 2020

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài 120 phút

(không kể thời gian phát đề)

Bài I (2 điểm): Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-x-3}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}\right)$ với $x\geq 0$; $x\neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{2}{2\sqrt{x}+3}$ khi x = 9.

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Tìm giá trị của x để 3P là số nguyên.

Bài II (2 điểm): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một hình chữ nhật có diện tích bằng 120m². Nếu tăng chiều rộng thêm 2m đồng thời giảm chiều dài đi 5m, thì thu được một hình vuông. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu theo mét.

Bài III (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x-4}}+\dfrac{4}{y+2}=7\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-4}}-\dfrac{1}{y+2}=4\end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2m=0$ (ẩn x, tham số m).

a) Giải phương trình khi m = 1.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $x_1^2+x_2^2$ nhỏ nhất.

Bài IV (3, 5 điểm): Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định không đi qua O. A là một điểm di động trên cung lớn BC (AB < AC) sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi H là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC.

1) CHứng minh tứ giác BCEF nội tiếp.

2) Chứng minh KB.KC = KE. KF.

3) Gọi M là gia điểm của AK với đường tròn (O) (M khác A). Chứng minh MH vuông góc với AK.

4) Chứng minh đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC.

Bài V (0,5 điểm): Với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^4+b^4+ab$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I (2 điểm): Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-x-3}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}\right)$ với $x\ge 0\,;\,x\ne 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{2}{2\sqrt{x}+3}$ khi x = 9.

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Tìm giá trị của x để 3P là số nguyên.

1) Với x = 9 (thỏa mãn ĐK), thay vào biểu thức A ta được: $P=\dfrac{2}{2\sqrt{9}+3}=\dfrac{2}{2.3+3}=\dfrac{2}{9}$.

2) Điều kiện: $x\ge 0\,;\,x\ne 1$.

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{x\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}-x-3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}-x-3+x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{x+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{x}+3}$$

Vậy $P=\dfrac{2}{2\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0\,;\,x\ne 1$.

3) Ta có: $3P=\dfrac{6}{2\sqrt{x}+3}>0$ với $x\ge 0\,;\,x\ne 1$.

Với $x\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{x}+3\ge 3\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}+3}\ge \dfrac{1}{3}$, do đó: $0<\dfrac{6}{2\sqrt{x}+3}\le 2$ hay $0<3P\le 2$

$\Rightarrow 3P\in \mathbb{Z}\Leftrightarrow 3P\in \{1\,;\,2\}$

Xét $3P=1\Leftrightarrow \dfrac{6}{2\sqrt{x}+3}=1\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+3=6\Rightarrow x=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn ĐK)

Xét $3P=2\Leftrightarrow \dfrac{6}{2\sqrt{x}+3}=2\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+3=3\Rightarrow x=0$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy với $x\in \left\{0\,;\,\dfrac{9}{4}\right\}$ thì 3P là số nguyên.

Bài II (2 điểm): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một hình chữ nhật có diện tích bằng 120m². Nếu tăng chiều rộng thêm 2m đồng thời giảm chiều dài đi 5m, thì thu được một hình vuông. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu theo mét.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu lần lượt là x (m) và y (m).

Điều kiện: $x>5\,;\,y>0;\,x>y$.

Vì ban đầu hình chữ nhật có diện tích bằng 120m², nên ta có phương trình:
$x.y=120\ (m^2)$

Nếu tăng chiều rộng thêm 2m đồng thời giảm chiều dài đi 5m, thì thu được một hình vuông, nên ta có phương trình: $x-5=y+2\Leftrightarrow x-y=7$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x.y=120\\x-y=7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(7+y).y=120\\x=7+y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y^2+7y-120=0 & (1)\\x=7+y & (2)\end{cases}$

Giải (1), ta được: $y=8$ (thỏa mãn) ; $y=-15$ (loại)

Với y = 8 $\Rightarrow x=15$ (thỏa mãn).

Vậy hình chữ nhật ban đầu có chiều dài là 15 mét, chiều rộng là 8 mét.

Bài III (2 điểm):

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x-4}} + \dfrac{4}{y+2} = 7 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-4}} - \dfrac{1}{y+2} = 4 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$ (ẩn x, tham số m).

a) Giải phương trình khi m = 1.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất.

1) Điều kiện: $x > 4$; $y \neq -2$.

$$\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x-4}} + \dfrac{4}{y+2} = 7 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-4}} - \dfrac{1}{y+2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x-4}} + \dfrac{4}{y+2} = 7 \\ \dfrac{20}{\sqrt{x-4}} - \dfrac{4}{y+2} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{23}{\sqrt{x-4}} = 23 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-4}} - \dfrac{1}{y+2} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4} = 1 \\ \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{5}{\sqrt{x-4}} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4} = 1 \\ \dfrac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 1 \\ y+2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(x\,;\,y\right) = \left(5\,;\,-1\right)$.

2a) Với m = 1, phương trình trở thành:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x+3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Vậy m = 1, thì phương trình có hai nghiệm $x = 1\,;\, x = -3$.

2b) Phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$

$\Delta = 4\left(m+1\right)^2 - 4\left(m^2 + 2m\right) = 4 > 0$ với mọi m.

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1\,;\,x_2$ với mọi m.

Hệ thức Vi – ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = m^2 + 2m \end{cases}$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1.x_2$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 4\left(m+1\right)^2 - 2\left(m^2 + 2m\right) = 2m^2 + 4m + 4 = 2(m^2 + 2m + 1) + 2 = 2\left(m+1\right)^2 +$

Vì $(m+1)^2 \geq 0$ với mọi m, nên $2(m+1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2$

Khi đó: $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy m = - 1, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

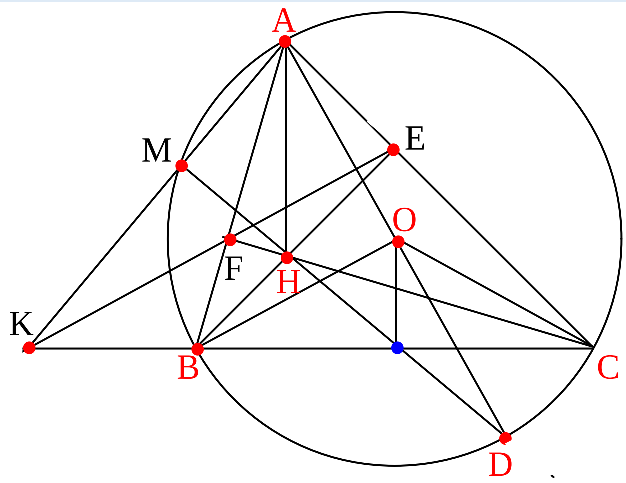
Bài IV (3, 5 điểm): Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định không đi qua O. A là một điểm di động trên cung lớn BC (AB < AC) sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC.

1) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp.

2) Chứng minh KB.KC = KE. KF.

3) Gọi M là gia điểm của AK với đường tròn (O) (M khác A). Chứng minh MH vuông góc với AK.

4) Chứng minh đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC.



1) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp.

Trong tam giác ΔABC ta có:

$BE \perp AC$ tại E (tính chất đường cao) $\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$

$CF \perp AB$ tại F (tính chất đường cao) $\Rightarrow \widehat{BFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ và F, E là hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh BC.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

2) Chứng minh KB.KC = KE. KF.

Xét ΔKBE và ΔKFC có:

$\widehat{BKF}$ chung

$\widehat{KEB} = \widehat{KCF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$)

$\Rightarrow \Delta KBE \backsim \Delta KFC$ $(g - g)$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{KF} = \dfrac{KE}{KC}$ (tính chất)

$\Rightarrow KB.KC = KE.KF$ (đpcm)

3) Chứng minh MH vuông góc với AK.

Xét ΔKCM và ΔKAB có:

$\widehat{BKM}$ chung

$\widehat{KCM} = \widehat{KAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$ của đường tròn (O))

$\Rightarrow \Delta KCM \backsim \Delta KAB$ $(g - g)$

$\Rightarrow \dfrac{KC}{KA} = \dfrac{KM}{KB}$ (tính chất)

$\Rightarrow KB.KC = KA.KM$

Mà $KB.KC = KE.KF$ (cmt)

$\Rightarrow KE.KF = KA.KM \Rightarrow \dfrac{KF}{KM} = \dfrac{KA}{KE}$

Mà ΔKFA và ΔKME còn có $\widehat{MKF}$ chung.

$\Rightarrow \Delta KFA \backsim \Delta KME$ $(c - g - c)$

$\Rightarrow \widehat{KAF} = \widehat{KEM}$ (cặp góc tương ứng) hoặc $\widehat{MAF} = \widehat{FEM}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAEF$ có hai đỉnh kề A, E cùng nhìn cạnh MF dưới một góc bằng nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $MAEF$ nội tiếp. (1)

Cũng có BE và CF cắt nhau tại H và:

$BE \perp AC$ tại E (tính chất đường cao) $\Rightarrow \widehat{HEA} = 90^{o}$

$CF \perp AB$ tại F (tính chất đường cao) $\Rightarrow \widehat{HFA} = 90^{o}$

$\Rightarrow$ tứ giác AEHF có các đỉnh E, F cùng nhìn cạnh AH dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH (Định lý).   (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Các điểm A, E, H, F, M cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

$\Rightarrow \widehat{AMH} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AM \perp MH$ hoặc $AK \perp MH$ (đpcm).

4) Chứng minh đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC.

Gọi D là giao điểm của MH với (O)

Ta có $\widehat{AMH} = 90^o$ (cmt), nên $\widehat{AMD} = 90^o = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$ của (O))

$\Rightarrow$ AD là đường kính của (O).

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^o$ và $\widehat{ACD} = 90^o$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow AB \perp BD$ và $AC \perp CD$

Mà $CH \perp AB$; $BH \perp AC$ (do H là giao điểm các đường cao BE và CF của ΔABC).

$\Rightarrow DB // CH$ và $DC // CH$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCD là hình bình hành.

$\Rightarrow$ HD và BC cắt nhau tại I là trung điểm của chúng.

Mà BC cố định không đổi, nên trung điểm I cố định.

$\Rightarrow$ MH luôn đi qua điểm I cố định là trung điểm của BC khi A di động trên cung lớn BC.

Bài V (0,5 điểm): Với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^4 + b^4 + 4ab$.

$P = a^4 + b^4 + 4ab = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + 4ab = -2a^2b^2 + 4ab + 16$ (vì $a^2 + b^2 = 4$)

Áp dụng B Đ T cosi, ta có: $a^2 + b^2 = 4 \geq 2ab$

$\Rightarrow 4ab \geq 2a^2b^2$

$\Rightarrow P = -2a^2b^2 + 4ab + 16 \geq -2a^2b^2 + 2a^2b^2 + 16 = 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở B Đ T cosi xảy ra và thỏa mãn giả thiết

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{2} \\ b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $P_{min} = 16 \Leftrightarrow (a\,;\,b) \in \left\{(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}),(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2}),(\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2}),(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2})\right\}$

TRƯỜNG THCS NGHĨA TÂN **ĐỀ THI THỬ VÀO 10 LẦN 3**

NĂM HỌC 2017 – 2018 **MÔN: TOÁN**

Đề số 27

Bài I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}$ và $B=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ với $x>0, x\neq 1$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=25$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

3) Tìm x để biểu thức $\dfrac{A}{B}>1$.

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một đội xe dự định một số xe cùng loại để chở hết 60 tấn hàng. Khi khởi hành có 2 xe phải điều đi nhận hợp đồng khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm một tấn hàng. Tính số xe lúc đầu mà đội điều động (*biết rằng số lượng trên mỗi xe phải chở là như nhau*).

Bài III.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(x-2)-2(x-y)=2 \\ 2x(x-2)+(4x+y)=9 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=2x-2m+2$ và Parabol $(P): y=x^2$

a) Xác định các tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$;$B(x_2;y_2)$ sao cho $y_1+y_2=4(x_1+x_2)$.

Bài IV. Cho nửa đường tròn (O), đường kính BC. Gọi D là điểm cố định thuộc đoạn thẳng $OC(D\neq O; D\neq C)$. Dựng đường thẳng d cuông góc với BC tại điểm D, đường thẳng d cắt nửa đường tròn (O) tại điểm A. Trên cung nhỏ AC lấy điểm M bất kì $(M\neq A; M\neq C)$, tia BM cắt đường thẳng d tại điểm K, tia CM cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng BE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm $N(N\neq B)$.

1) Chứng minh: Tứ giác $CDNE$ nội tiếp một đường tròn.

2) Chứng minh: $KE.KD=KB.KM$ và ba điểm C,K,N thẳng hàng.

3) Tiếp tuyến tại N của đường tròn (O) cắt đường thẳng d tại F. Chứng minh: F là trung điểm của KE và $OF\perp MN$.

4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBKE. Chứng minh khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì I di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Bài V. Giải phương trình: $x^2+\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=5x$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}$ và $B=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ với $x>0, x\neq 1$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=25$.

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

3) Tìm x để biểu thức $\dfrac{A}{B}>1$.

1) $x=25\Rightarrow A=\dfrac{25+2\sqrt{25}}{25-1}=\dfrac{35}{24}$

2) Với $x>0, x\neq 1$;

$$B=\frac{2}{x}-\frac{2-x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)-(2-x)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+2-2+x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\sqrt{x}+x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

3) với $x>0, x\neq 1$.

$$\frac{A}{B}>1\Leftrightarrow \frac{x+2\sqrt{x}}{x-1}:\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}>1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+2}>1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1}-1>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}>0\Leftrightarrow \sqrt{x}-1>0\Leftrightarrow \sqrt{x}>1\Leftrightarrow x>1$$

Vậy $x > 1$ thì $\frac{A}{B} > 1$

Bài II. *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một đội xe dự định một số xe cùng loại để chở hết 60 tấn hàng. Khi khởi hành có 2 xe phải điều đi nhận hợp đồng khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm một tấn hàng. Tính số xe lúc đầu mà đội điều động (*biết rằng số lượng trên mỗi xe phải chở là như nhau*).

Gọi số xe lúc đầu mà đội điều động là x (xe) ($x \in N^*$)

Ta có, số hàng mỗi xe dự định chở là $\frac{60}{x}$ tấn.

Thực tế mỗi xe phải chở là $\frac{60}{x-2}$ tấn.

Nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x} + 1 = \frac{60}{x-2}$$
$$\Leftrightarrow 60(x-2) + x(x-2) = 60x$$
$$\Leftrightarrow 60x - 120 + x^2 - 2x = 60x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12\,(\text{thoa man}) \\ x = -10\,(\text{loai}) \end{array}\right.$$

Vậy lúc đầu đội điều động 12 xe

Bài III.

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(x-2) - 2(x-y) = 2 \\ 2x(x-2) + (4x+y) = 9 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = 2x - 2m + 2$ và Parabol $(P): y = x^2$

a) Xác định các tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) khi $m = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 = 4(x_1 + x_2)$.

1)

$$\begin{cases} x(x-2)-2(x-x)=2 \\ 2x(x-2)+(4x+y)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=2 \\ 2.2+4x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=3 \\ y=5-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ y=5-4x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ y=1-4\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\sqrt{3} \\ y=1+4\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là $(1+\sqrt{3};1-4\sqrt{3});(1-\sqrt{3};1+4\sqrt{3})$

2a) $m=-\dfrac{1}{2}$ thì phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) có dạng

$$x^2=2x-2.\frac{1}{2}+2 \Leftrightarrow x^2-2x=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$x=1+\sqrt{2} \Rightarrow y=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$$

$$x=1-\sqrt{2} \Rightarrow y=\left(1-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}$$

Vậy khi $m=-\dfrac{1}{2}$ thì (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm $\left(1+\sqrt{2};3+2\sqrt{2}\right);\left(1-\sqrt{2};3-2\sqrt{2}\right)$

2b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2=2x-2m+2 \Leftrightarrow x^2-2x+2m-2=0 \ (1)$$

Để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (-1)^2-1.(2m-2)>0 \Leftrightarrow 1-2m+2>0 \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$$

Khi đó theo hệ thức Vi - et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=2m-2 \end{cases}$

Theo bài ra: $y_1+y_2=4(x_1+x_2) \Leftrightarrow {x_1}^2+{x_2}^2=4(x_1+x_2)$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(x_1+x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2^2-2(2m-2)=4.2 \Leftrightarrow 4-4m+4=8 \Leftrightarrow m=0 \ \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm

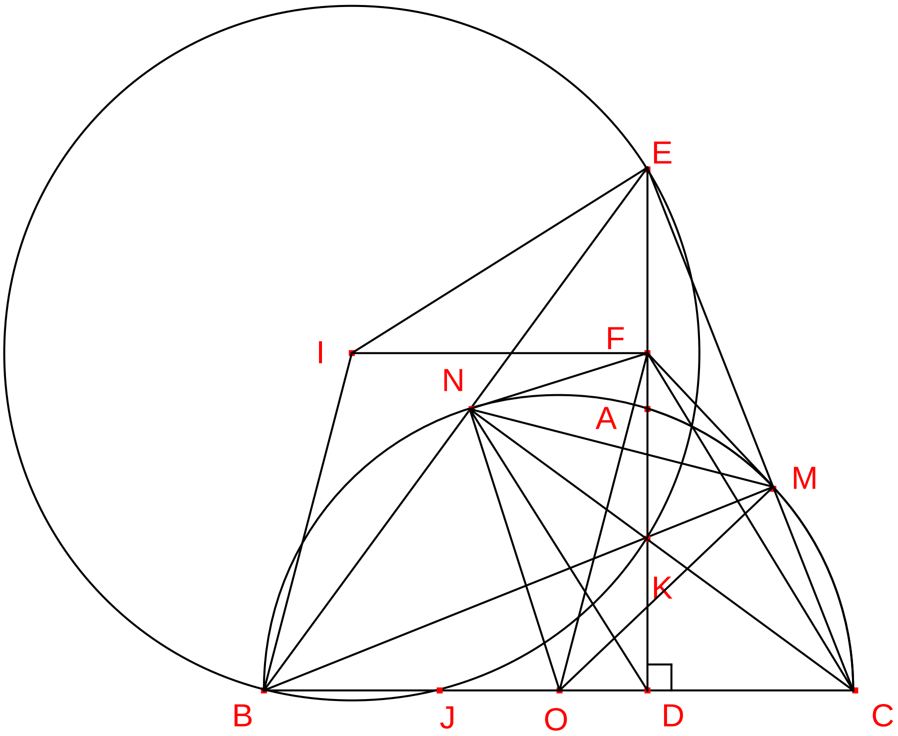
Bài IV. Cho nửa đường tròn (O), đường kính BC. Gọi D là điểm cố định thuộc đoạn thẳng $OC(D \neq O; D \neq C)$. Dựng đường thẳng d cuông góc với BC tại điểm D, đường thẳng d cắt nửa đường tròn (O) tại điểm A. Trên cung nhỏ AC lấy điểm M bất kì $(M \neq A; M \neq C)$, tia BM cắt đường thẳng d tại điểm K, tia CM cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng BE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm $N (N \neq B)$.

1) Chứng minh: Tứ giác $CDNE$ nội tiếp một đường tròn.

2) Chứng minh: $KE.KD = KB.KM$ và ba điểm C, K, N thẳng hàng.

3) Tiếp tuyến tại N của đường tròn (O) cắt đường thẳng d tại F. Chứng minh: F là trung điểm của KE và $OF \perp MN$.

4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBKE. Chứng minh khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì I di chuyển trên một đường thẳng cố định.



1) Chứng minh: Tứ giác $CDNE$ nội tiếp một đường tròn.

Tứ giác $CDNE$ có:

$\widehat{CDE} = 90^0 (GT)$

$\widehat{CNB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CNE} = 90^0$ (Kề bù với $\widehat{CNB}$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDNE$ nội tiếp đường tròn đường kính CE.

2) Chứng minh: $KE.KD = KB.KM$ và ba điểm C, K, N thẳng hàng.

Ta có $\widehat{BMC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BME} = 90^0$ (Kề bù với $\widehat{BMC}$)

Xét ΔBKD và ΔEKM có

$\widehat{BDK} = \widehat{EMK} = 90^0$ (GT và chứng minh trên)

$\widehat{BKD} = \widehat{EKM}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BKD \sim \Delta EKM(g.g) \Rightarrow \dfrac{BK}{EK} = \dfrac{DK}{KM} \Rightarrow KE.KD = KB.KM$

Lại có $BM \perp CE; ED \perp BC \Rightarrow ED, BM$ là các đường cao của tam giác $BCE \Rightarrow K$ là trọng tâm của tam giác $BCE \Rightarrow CK$ là đường cao của tam giác $BCE \Rightarrow CK \perp BE$, mà $CN \perp BE$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow C, N, K$ thẳng hàng (Tiên đề Ơ cơ lít)

3) Chứng minh: F là trung điểm của KE và $OF \perp MN$.

NF là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow NF \perp ON \Leftrightarrow \widehat{ONF} = 90^0$

Vì ΔOBN cân tại O nên $\widehat{OBN} = \widehat{ONB}$ mà $\widehat{OBN} + \widehat{NEF} = 90^0 (ED \perp BC)$

$\Rightarrow \widehat{ONB} + \widehat{NEF} = 90^0$

Lại có $\widehat{ONB} + \widehat{ENF} = 90^0$ ($\widehat{ONF} = 90^0$)

$\Rightarrow \widehat{NEF} = \widehat{ENF} \Rightarrow \widehat{FNK} = \widehat{FKN}$ ($\widehat{KNE} = 90^0$)

Vậy các tam giác: $\Delta FNE, \Delta FNK$ cân tại $F \Rightarrow FE = FE = FK$.

Vậy F là trung điểm của EK

Vì F là trung điểm của EK; ΔKME vuông tại $M \Rightarrow FM = FK = FE$

$\Rightarrow FM = FN(= FK)$ mà $OM = ON$ (bán kính (O))

$\Rightarrow OF$ là trung trực $MN \Rightarrow OF \perp MN$

4) Chứng minh khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì I di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Gọi J là giao điểm của BC với đường tròn (I), tứ giác $BJKE$ nội tiếp (I)

$\Rightarrow DJ.DB = DK.DE$ (1)

mà $\Delta BKD \sim \Delta ECD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{KD} = \dfrac{ED}{CD} \Rightarrow DK.DE = BD.CD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $DJ.DB = BD.CD \Rightarrow DJ = CD$

Vì D cố định nên CD không đổi suy ra DJ không đổi nên J cố định.

Lại có $IB = IJ$ (bán kính của (I)) nên I thuộc trung trực của BJ cố định.

Vậy khi M di chuyển trên cung nhỏ AC thì I di chuyển trên đường trung trực của BJ cố định

Bài V. Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 5x.$

Xét phương trình $x^2 + \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 5x$ (ĐKXĐ $x \geq 3$)

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 + \sqrt{2x+1} - 3 + \sqrt{x-3} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) + \dfrac{2x+1-9}{\sqrt{2x+1}+3} + \dfrac{x-3-1}{\sqrt{x-3}+1} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) + \dfrac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3} + \dfrac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(x - 1 + \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3} + \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+1}\right) = 0$ (2)

Vì $x - 1 + \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3} + \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+1} > 0$ với mọi $x \geq 3$ nên $(2) \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 4$

TRƯỜNG THCS THỐNG NHẤT — **ĐỀ KIỂM TRA TOÁN THÁNG 2**

NHÓM TOÁN 9 — **Thời gian: 90 phút.**

Đề số 28 — **Ngày 28/2/2019**

Bài 1: (2,5 điểm). Cho biểu thức $P=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P, biết $x=\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

c) Tính giá trị của x thỏa mãn: $P\sqrt{x}=6\sqrt{x}-3-\sqrt{x-4}$.

Bài 2 (2,5 điểm). *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một hình chữ nhật có chu vi là 90 mét. Nếu tăng chiều rộng thêm 30m và giảm chiều dài đi 15m thì được một hình chữ nhật mới có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật ban đầu. Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật ban đầu.

Bài 3 (1,5 điểm). Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-my=1 & (1) \\ mx+y=3 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

b) Chứng tỏ với mọi m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn (O), bán kính R, đường thẳng d không qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Từ một điểm C trên d (A nằm giữa B và C) kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M, N thuộc (O), M và O nằm cùng phía đối với AB), MN cắt OC tại H.

a) Chứng minh tứ giác $CMON$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CM^2=CA.CB$.

c) Chứng minh $\overset{\frown}{OAB}=\overset{\frown}{CHA}$.

d) Chọn một trong hai câu:

d.1) Tia CO cắt (O) tại hai điểm I và D (I nằm giữa C và D). Chứng minh $IC.DH = DC.IH$.

d.2) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,5 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P, biết $x = \left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

c) Tính giá trị của x thỏa mãn: $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

a) Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 1$.

$$P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} : \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} . \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $P = \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

b) Ta có $x = \left(1-\sqrt{3}\right)^2$ (Thỏa mãn ĐK) thay vào biểu thức P, ta được:

$$P = \frac{\left(\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+1\right)^2}{\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\left(\left|1-\sqrt{3}\right|+1\right)^2}{\left|1-\sqrt{3}\right|} = \frac{\left(\sqrt{3}-1+1\right)^2}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

c) Phương trình $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$, với $x \geq 4$.

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)^2 - 6\sqrt{x} + 3 + \sqrt{x-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 4\sqrt{x} + 4\right) + \sqrt{x-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = 0$$

Với $x \geq 4$, ta có $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \geq 0$ và $\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \geq 0$

Do đó phương trình thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-2\right)^2 = 0 \\ \sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy x = 4 thỏa mãn phương trình bài cho.

Bài 2 (2,5 điểm). *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một hình chữ nhật có chu vi là 90 mét. Nếu tăng chiều rộng thêm 30m và giảm chiều dài đi 15m thì được một hình chữ nhật mới có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật ban đầu. Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật ban đầu.

Gọi chiều rộng hình chữ nhật ban đầu là x (mét), chiều dài hình chữ nhật ban đầu là y (mét).

Điều kiện: $0 < x < y;\ y > 15$.

Vì hình chữ nhật có chu vi là 90 mét, nên ta có phương trình:

$$2(x+y) = 90 \Leftrightarrow x + y = 45 \qquad (1).$$

Tăng chiều rộng thêm 30m, ta có chiều rộng mới là $x+30$ (m); giảm chiều dài đi 15m, ta có chiều dài mới là $y-15$ (m). Diện tích hình chữ nhật mới là $(x+30).(y-15)$ (m²).

Vì hình chữ nhật mới có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật ban đầu, nên ta có phương trình: $(x+30).(y-15) = x.y \Leftrightarrow -x+2y = 30$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=45 \\ -x+2y=30 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=45 \\ -x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=45 \\ 3y=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 & (\text{thoa man}) \\ y=25 & (\text{thoa man}) \end{cases}$$

Vậy chiều rộng hình chữ nhật ban đầu là 20 (mét), chiều dài hình chữ nhật ban đầu là 25 (mét).

Bài 3 (1,5 điểm). Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-my=1 & (1) \\ mx+y=3 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

b) Chứng tỏ với mọi m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

a) Khi $m=1.$ ta có hệ: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy khi $m=1.$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y) = (2\,;1)$.

b) **Cách 1:**

Xét hệ $\begin{cases} x-my=1 & (1) \\ mx+y=3 & (2) \end{cases}$.

Trường hợp 1: Khi $m=0$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

Trường hợp 2: Khi $m \neq 0$, ta có:

$$\begin{cases} x - my = 1 & (1) \\ mx + y = 3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{m}x - 1 & (d_1) \\ y = -mx + 3 & (d_2) \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ là số giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Vì $\dfrac{1}{m} \neq -m$ với mọi $m \neq 0$

$\Rightarrow (d_1)$ và (d_2) luôn cắt nhau tại một điểm duy nhất với $m \neq 0$.

$\Rightarrow \forall\ m \neq 0$ thì hệ luôn có nghiệm duy nhất.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

Cách 2:

Xét hệ $\begin{cases} x - my = 1 & (1) \\ mx + y = 3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 1 \\ m(my+1) + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 1 & (1') \\ (m^2+1).y = 3 - m & (2') \end{cases}$.

Xét phương trình $(2')$: Vì $m^2 + 1 \neq 0$ với $\forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình $(2')$ luôn có nghiệm $y = \dfrac{3-m}{m^2+1}$ duy nhất với mọi m.

$\Rightarrow$ Phương trình $(1')$ cũng luôn có nghiệm x duy nhất với mọi m.

Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm $(x\,;y)$ duy nhất với mọi m.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn (O), bán kính R, đường thẳng d không qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Từ một điểm C trên d (A nằm giữa B và C) kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M, N thuộc (O), M và O nằm cùng phía đối với AB), MN cắt OC tại H.

a) Chứng minh tứ giác $CMON$ nội tiếp.

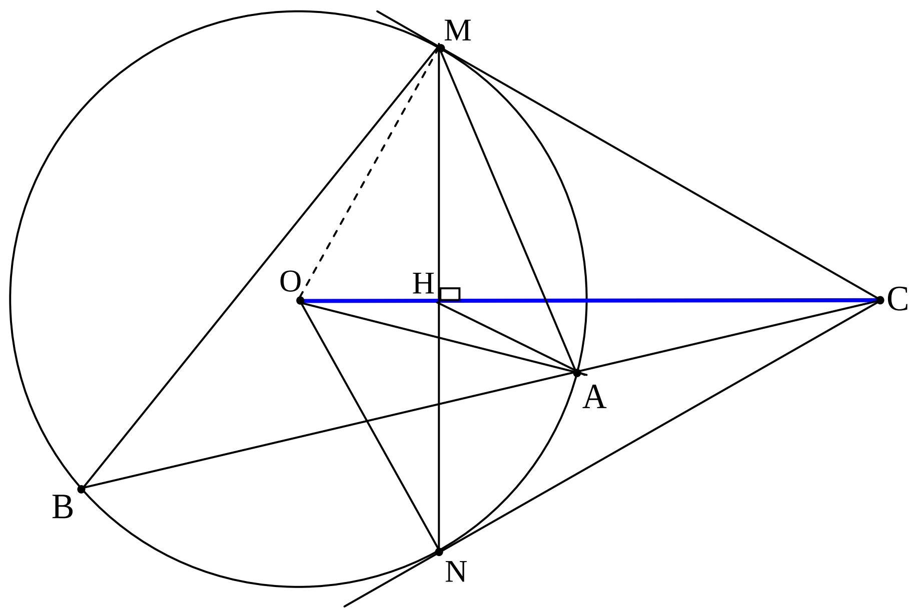
b) Chứng minh $CM^2 = CA.CB$.

c) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{CHA}$.

d) Chọn một trong hai câu:

d.1) Tia CO cắt (O) tại hai điểm I và D (I nằm giữa C và D). Chứng minh $IC.DH = DC.IH$.

d.2) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.



a) Chứng minh tứ giác $CMON$ nội tiếp.

Ta có CM, CN lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại M, N (giả thiết).

$\Rightarrow CM \perp OM$ tại M ; $CN \perp ON$ tại N.

$\Rightarrow \widehat{CMO} = 90^\circ$; $\widehat{CNO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $CMON$ có $\widehat{CMO}$; $\widehat{CNO}$ là hai góc đối và $\widehat{CMO} + \widehat{CNO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CMON$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CM^2 = CA.CB$.

Xét tam giác ΔCAM và ΔCMB có:

$\widehat{ACM}$ chung

$\widehat{CMA} = \widehat{CBM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MA}$ của (O))

$\Rightarrow \Delta CAM \backsim \Delta CMB$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CM} = \dfrac{CM}{CB}$

$\Rightarrow CA.CB = CM^2$ (đpcm)

c) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{CHA}$.

Ta có: $CM = CN$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) ; $OM = ON = R$.

$\Rightarrow OC$ là đường trung trực của MN (tính chất điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng).

$\Rightarrow OC \perp MN$ tại H và H là trung điểm của MN.

Xét ΔOMC vuông tại M (vì $\widehat{CMO} = 90^\circ$) và có MH là đường cao

$\Rightarrow CM^2 = CH.CO$ (hệ thức lượng)

Mà $CA.CB = CM^2$ (cmt)

$\Rightarrow CH.CO = CA.CB$ (1)

Xét tam giác ΔCAH và ΔCOB có:

$\dfrac{CA}{CO} = \dfrac{CH}{CB}$ (theo (1))

$\widehat{HCA}$ chung.

$\Rightarrow \Delta CAH \backsim \Delta COB$ (c – g - c)

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{CHA}$ (cặp góc tương ứng). Hay $\widehat{OBA} = \widehat{CHA}$ (2)

Ta có $OA = OB = R$

$\Rightarrow \Delta BOA$ cân tại O

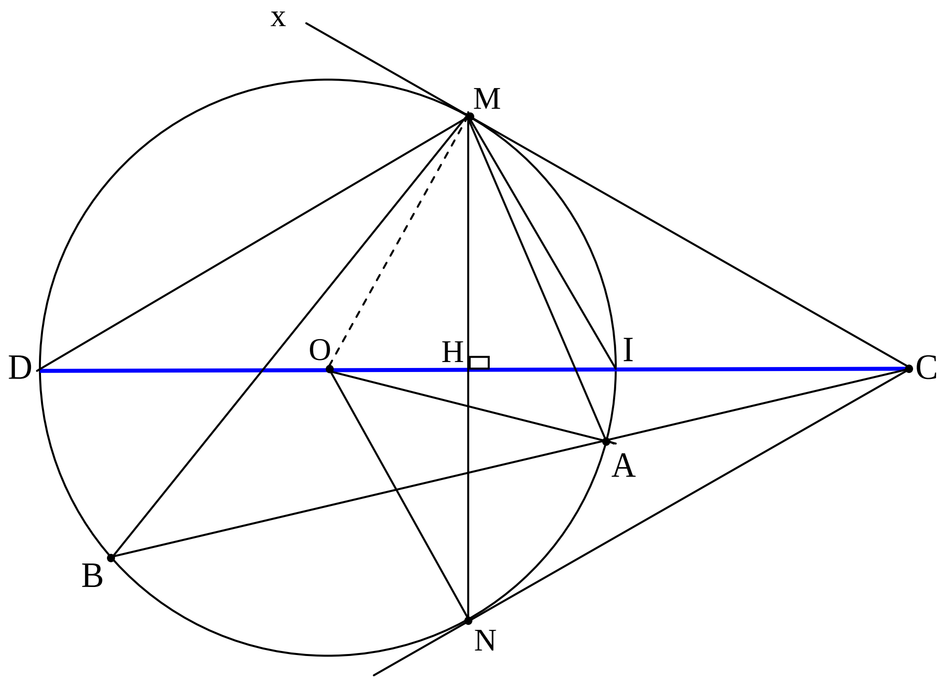
$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB}$ (3)

Từ (2) và (3)

$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{CHA}$ (đpcm).

d.1) Tia CO cắt (O) tại hai điểm I và D (I nằm giữa C và D). Chứng minh

$IC.DH = DC.IH$.



Xét (O) có $OC \perp MN$ tại H (cmt) và CO cắt (O) tại hai điểm I và D (giả thiết)

$\Rightarrow$ I và D lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ MN và cung lớn MN.

Xét I là điểm chính giữa của cung nhỏ MN,

$\Rightarrow \overset{\frown}{IM} = \overset{\frown}{IN}$

$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{NMI}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau của (O)).

$\Rightarrow MI$ là tia phân giác trong của $\widehat{CMH}$ của ΔCMH.

$\Rightarrow \dfrac{CI}{CM} = \dfrac{HI}{HM}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow \dfrac{CI}{HI} = \dfrac{CM}{HM}$ (4)

Xét D là điểm chính giữa của cung lớn MN,

$\Rightarrow \overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{DN}$

$\Rightarrow \widehat{xMD} = \widehat{NMD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau của (O)).

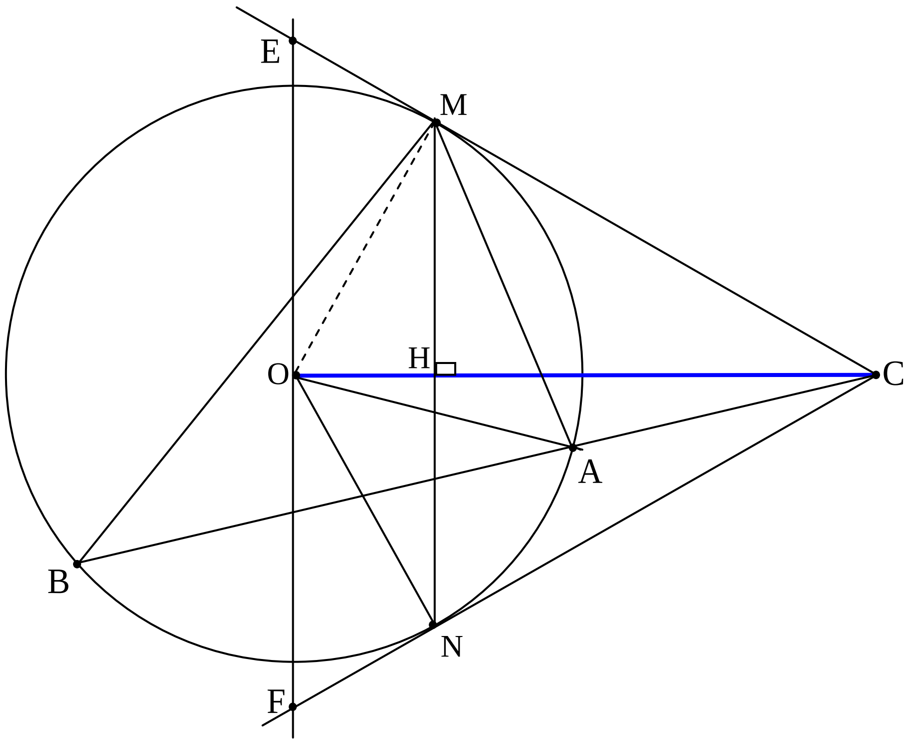
$\Rightarrow MD$ là tia phân giác ngoài của $\widehat{CMH}$ của ΔCMH (hoặc MD là tia phân giác của $\widehat{xMN}$

)

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CM} = \dfrac{HD}{HM}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow \dfrac{CD}{HD} = \dfrac{CM}{HM}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \dfrac{CI}{HI} = \dfrac{CD}{HD} \Rightarrow CI.HD = CD.HI$ (đpcm).

d.2) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.



Ta có $CM = CM$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)$\Rightarrow \Delta MCN$ cân tại C.

Mà $EF//MN$ (giả thiết) ; EF cắt tia CM tại E; EF cắt tia CN tại E.

$\Rightarrow \Delta ECF$ cân tại C.

Mà OC là đường trung trực của MN nên OC cũng là đường trung trực của EF.

$\Rightarrow S_{\Delta ECF} = 2S_{\Delta ECO} = 2.\dfrac{1}{2}.OM.EC = OM.(EM + MC)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông COE, đường cao OM, ta có: $OM^2 = EM.MC$

Áp dụng BĐT cosi ta có:

$$EM + MC \geq 2\sqrt{EM.MC} = 2\sqrt{OM^2} = 2OM = 2R$$

$\Rightarrow S_{\Delta ECF} = 2S_{\Delta ECO} \ge OM.2OM = 2OM^2 = 2R^2$ (vì $OM = R$).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở BĐT cosi xảy ra $\Leftrightarrow EM = MC = R$

$\Leftrightarrow \Delta OMC$ vuông cân tại M.

$\Leftrightarrow OC = R\sqrt{2}$

Vậy điểm C trên d sao cho khoảng cách $OC = R\sqrt{2}$ thì $\left(S_{\Delta ECF}\right)_{\min} = 2R^2$ (đvdt)

TRƯỜNG THCS NAM TỪ LIÊM
Năm học 2017 – 2018

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG THÁNG 1
Môn : Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 90 phút.

Đề số 29

Bài 1 (2đ): Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{x-5\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x\ge 0; x\ne 9$

1) Khi $x=81$ tính giá trị của biểu thức A.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Với $x>9$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A.B$

Bài 2 (2đ) : *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai máy cày làm việc trên một cánh đồng. Nếu hai máy cùng cày thì 10 ngày cày xong cả cánh đồng. Nhưng thực tế hai máy chỉ cùng cày 7 ngày đầu, sau đó máy thứ nhất cày nơi khác, máy thứ hai cày tiếp 9 ngày thì xong. Hỏi mỗi máy cày riêng thì sau bao lâu cày xong cả cánh đồng ?

Bài 3 (2đ) :

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}+y=4 \\ \sqrt{x-1}-3y=-2 \end{cases}$

b) Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} x+2y=5 \\ mx+y=4 \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất x, y thỏa mãn $x=|y|$

Bài 4 (3,5đ): Cho (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AO lấy điểm M (Điểm M khác O, A). Đường thẳng CM cắt đường tròn (O) tại N. Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với AB. Kẻ tiếp tuyến với (O) tại N cắt đường thẳng d tại P.

a) Chứng minh 4 điểm O, M, N, P thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng : $\Delta CMO \backsim \Delta CDN$ và tích CM.CN không đổi khi M chuyển động trên đoạn AO.

c) Chứng minh: Tứ giác CMPO là hình bình hành.

d) Khi M chuyển động trên đoạn OA thì P chuyển động trên đường nào ?

Bài 5 (0,5đ): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$

Chứng minh rằng : $\frac{xy}{x^2+y^2+xy}+\frac{yz}{y^2+z^2+yz}+\frac{xz}{x^2+z^2+xz}\le 1$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

Bài 1 (2đ): Cho hai biểu thức $A=\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\frac{3}{\sqrt{x}-3}+\frac{2}{\sqrt{x}+3}+\frac{x-5\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x\ge 0; x\ne 9$

1) Khi $x=81$ tính giá trị của biểu thức A.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Với $x>9$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=A.B$

1) Với $x=81$(tmđk) => $\sqrt{x}=9$ thay vào biểu thức A ta được: $A=\frac{81-9}{9-3}=12$

2)

$$B=\frac{3}{\sqrt{x}-3}+\frac{2}{\sqrt{x}+3}+\frac{x-5\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$=\frac{3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}+\frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}+\frac{x-5\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}+9+2\sqrt{x}-6+x-5\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\frac{x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\frac{x}{x-9}$$

Vậy $B=\frac{x}{x-9}$

3) $P=A.B=\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}.\frac{x}{x-9}=\frac{x}{\sqrt{x}-3}$

Ta có $(\sqrt{x}-6)^2\ge 0$ với mọi $x\ge 0$

$\Rightarrow x-12\sqrt{x}+36\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 12(\sqrt{x}-3) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-3}\ge 12$ (Do $x>9 \Rightarrow \sqrt{x}-3>0$)

$\Rightarrow P\ge 12$

Dấu $"="\Leftrightarrow \sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=6\Leftrightarrow x=36$ (tmđk)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 12 đạt được khi $x=36$

Bài 2 (2đ) : *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai máy cày làm việc trên một cánh đồng. Nếu hai máy cùng cày thì 10 ngày cày xong cả cánh đồng. Nhưng thực tế hai máy chỉ cùng cày 7 ngày đầu, sau đó máy thứ nhất cày nơi khác, máy thứ hai cày tiếp 9 ngày thì xong. Hỏi mỗi máy cày riêng thì sau bao lâu cày xong cả cánh đồng ?

Gọi thời gian để máy cày thứ nhất cày một mình xong cả cánh đồng là : x(ngày)
Thời gian để máy cày thứ nhất cày một mình xong cả cánh đồng là : y(ngày)
Điều kiện $x>0, y>0$

Mỗi ngày máy thứ nhất cày được $\frac{1}{x}$(cánh đồng)

Mỗi ngày máy thứ nhất cày được $\frac{1}{y}$(cánh đồng)

Hai máy cùng cày thì 10 ngày cày xong cả cánh đồng nên ta có:

$$10.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10} \qquad (1)$$

Hai máy chỉ cùng cày 7 ngày đầu, sau đó máy thứ nhất cày nơi khác, máy thứ hai cày tiếp 9 ngày thì xong nên ta có :

$$7.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{x}=1\Leftrightarrow \frac{16}{x}+\frac{7}{y}=1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\\ \frac{16}{x}+\frac{7}{y}=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\frac{1}{y}\\ 16.\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{y}\right)+\frac{7}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\frac{1}{y}\\ \frac{16}{10}-\frac{16}{y}+\frac{7}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\frac{1}{y}\\ -\frac{9}{y}=\frac{-6}{10}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{30}\\ y=15\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=30\\ y=15\end{cases}(\text{tmdk})$$

Vậy mỗi máy cày riêng để xong cánh đồng thì mấy thứ nhất mất 30 ngày và máy thứ hai mất 15 ngày .

Bài 3 (2đ) :

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3\sqrt{x-1}+y=4\\ \sqrt{x-1}-3y=-2\end{cases}$

b) Cho hệ phương trình sau $\begin{cases}x+2y=5\\ mx+y=4\end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất x, y thỏa mãn $x=|y|$

a) Đk : $x\ge 1$

$$(I)\begin{cases}3\sqrt{x-1}+y=4\\ \sqrt{x-1}-3y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9\sqrt{x-1}+3y=12\\ \sqrt{x-1}-3y=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10\sqrt{x-1}=10\\ \sqrt{x-1}-3y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\ \sqrt{x-1}+2=3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ 1+2=3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}(tmdk)$$

Vậy hệ (I) có nghiệm là $(x;y)=(2;1)$

b) $\begin{cases}x+2y=5\\ mx+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y\\ m(5-2y)+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2y & (1)\\ (1-2m).y=4-5m & (2)\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm y duy nhất $\Leftrightarrow 1-2m\ne 0\Leftrightarrow m\ne\frac{1}{2}$

Với $m\ne\frac{1}{2}$ ta có: $(2)\Rightarrow y=\frac{4-5m}{1-2m}$ thế vào (1) ta có: $x=\frac{-3}{1-2m}$

Ta có: $x=|y|\Leftrightarrow\frac{-3}{1-2m}=\left|\frac{4-5m}{1-2m}\right|\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m<0\\ \left[\begin{array}{l}\frac{4-5m}{1-2m}=\frac{-3}{1-2m}\\ \frac{4-5m}{1-2m}=\frac{3}{1-2m}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}4-5m=-3\\ 4-5m=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m=\frac{7}{5}\\ m=\frac{1}{5}\end{array}\right.\end{cases}$

$\Rightarrow m=\frac{7}{5}$ (TMĐK)

Vậy $m=\frac{7}{5}$ thì hệ phương trình (II) có nghiệm duy nhất x, y thỏa mãn $x=|y|$.

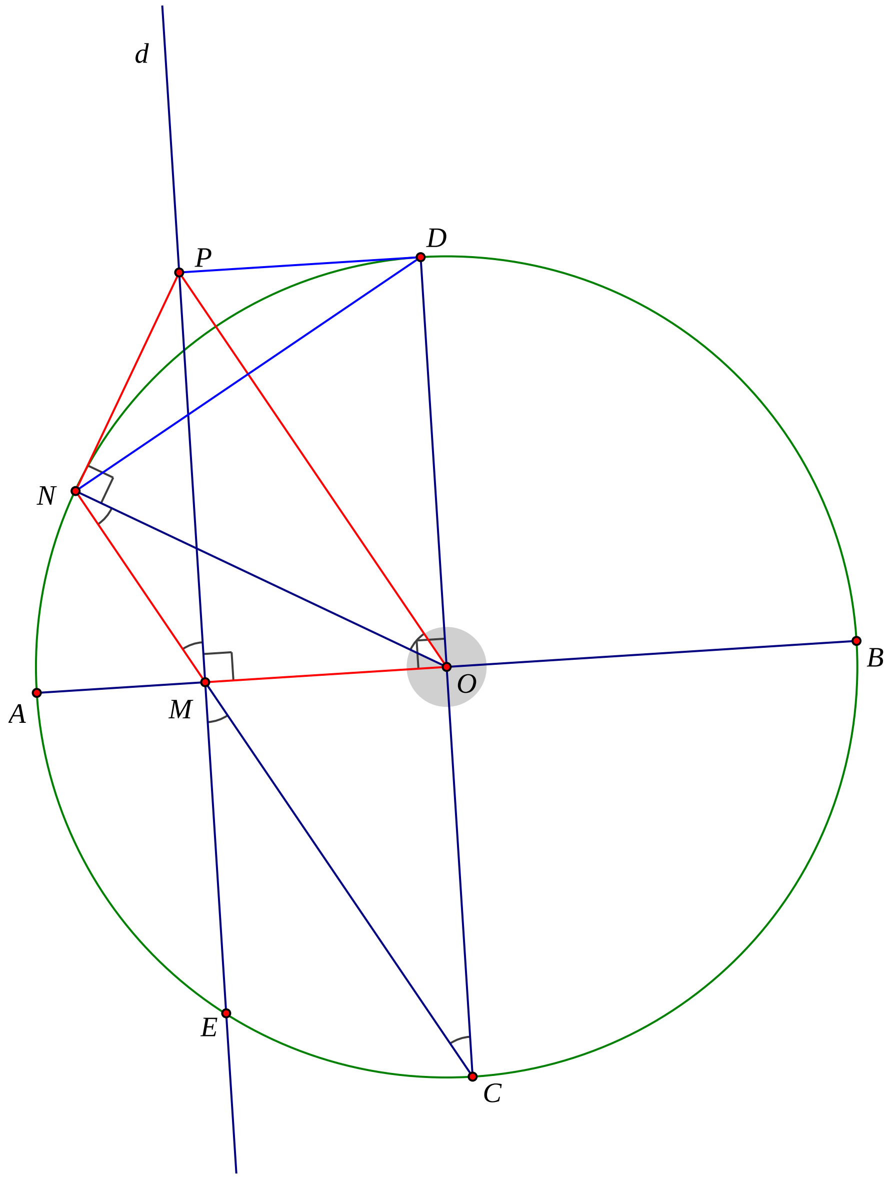
Bài 4 (3,5đ): Cho (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AO lấy điểm M (Điểm M khác O, A). Đường thẳng CM cắt đường tròn (O) tại N. Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với AB. Kẻ tiếp tuyến với (O) tại N cắt đường thẳng d tại P.

a) Chứng minh 4 điểm O, M, N, P thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng : $\Delta CMO \# \Delta CDN$ và tích CM.CN không đổi khi M chuyển động trên đoạn AO.

c) Chứng minh: Tứ giác CMPO là hình bình hành.

d) Khi M chuyển động trên đoạn OA thì P chuyển động trên đường nào ?



a) Ta có $PM \perp AB(gt) \Rightarrow \widehat{PMO} = 90^0$

PN là tiếp tuyến của (O) (gt) $\Rightarrow NO \perp PN \quad (t/c) \Rightarrow \widehat{PNO} = 90^0$

Xét tứ giác MOPN có đỉnh M và N là hai đỉnh kề nhau và $\widehat{PNO} = \widehat{PMO} = 90^0$

=> tứ giác MOPN là tứ giác nội tiếp (có hai đỉnh liền kề cùng nhìn đoạn PO dưới hai góc bằng nhau) => 4 điểm O, M, N, P thuộc một đường tròn (đpcm)

b) Ta có $CD \perp AB(gt) \Rightarrow \widehat{MOC} = 90^0$

Ta lại có $\widehat{CND} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{MOC} = \widehat{CND} = 90^0$

Xét ΔCMO và ΔCDN có : $\begin{cases} \widehat{MOC} = \widehat{CND} \\ \widehat{MCO} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta CMO \backsim \Delta CDN$ (g-g) (đpcm)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CM.CN = CO.CD = R.2R = 2R^2$$

Do R có giá trị không đổi nên tích CM.CN có giá trị không đổi khi M chuyển động trên OA (đpcm)

c) Goi E là giao điểm của đường thẳng (d) với (O)

Ta có: $PM \perp AB(gt)$; $CD \perp AB(gt)$

$=> PM//CD$ hay $PM//OC$ (1)

Từ (1) $=> \widehat{MCO} = \widehat{EMC}$ (So le trong) (2)

Ta có: $\widehat{NMP} = \widehat{EMC}$ (đối đỉnh) (3)

Tứ giác MNPO là tứ giác nội tiếp $=> \widehat{NMP} = \widehat{NOP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{NP}$) (4)

Ta có $OC = ON => \Delta OCN$ cân tại O $=> \widehat{OCN} = \widehat{ONC}$ (t/c) hay $\widehat{ONC} = \widehat{MCO}$ (5)

Từ (2),(3),(4),(5) $=> \widehat{CNO} = \widehat{PON}$

$=> PO//NC$ (có hai góc so le bằng nhau) hay $MC//PO$ (6)

Từ (1) và (6) => Tứ giác POCM là hình bình hành (dhnb) (đpcm)

d) Tứ giác POCM là hình bình hành (cmt) $=> MP = OC$ (t/c)

Ta lại có $OC = OD(gt) => MP = OD$ (7)

Từ (1) $=> PM//OD$ (8)

Từ (7) và (8) => Tứ giác MPDO là hình bình hành

Ta lại có $PM \perp AB(gt) => \widehat{PMO} = 90^0$ => Tứ giác MPDO là HCN (dhnb)

$=> PD \perp DO$ (t/c).

Mà DO cố định nên

=> P chuyển động trên đường thẳng vuông góc với OD tại D khi M chuyển động trên OA.

Bài 5 (0,5đ): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$

Chứng minh rằng : $\dfrac{xy}{x^2+y^2+xy} + \dfrac{yz}{y^2+z^2+yz} + \dfrac{xz}{x^2+z^2+xz} \le 1$

Ta có $x^2+y^2 \ge 2xy => x^2+y^2+xy \ge 3xy => \dfrac{xy}{x^2+y^2+xy} \le \dfrac{1}{3}(1)$

Tương tự ta chứng minh được :

$\dfrac{yz}{y^2+z^2+yz} \le \dfrac{1}{3}(2)$ $\dfrac{xz}{x^2+z^2+xz} \le \dfrac{1}{3}(3)$

Cộng vế- vế của (1),(2),(3) ta có: $\dfrac{xy}{x^2+y^2+xy} + \dfrac{yz}{y^2+z^2+yz} + \dfrac{xz}{x^2+z^2+xz} \le 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy $\dfrac{xy}{x^2+y^2+xy} + \dfrac{yz}{y^2+z^2+yz} + \dfrac{xz}{x^2+z^2+xz} \le 1$ (đpcm)

PHÒNG GD & ĐT BA ĐÌNH
TRƯỜNG THCS MẠC ĐĨNH CHI
THCS PHAN CHU TRINH

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10
Môn: TOÁN
Ngày thi 3/3/2018

Đề số 30

Câu 1. (2,0 điểm).

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-1}$. (Với $x\ge 0, x\ne 1$). Tìm giá trị của x để $A=4$.

2) Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$ (Với $x\ge 0, x\ne 4$)

3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{18}{A.B}$.

Câu 2 (2,0 điểm). *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Để hoàn thành một công việc theo dự định, cần một số công nhân làm trong số ngày nhất định. Nếu bớt đi 2 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày mới hoàn thành công việc. Nếu thêm 5 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 4 ngày. Hỏi theo dự định cần bao nhiêu công nhân và làm bao nhiêu ngày?

Câu 3 (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{80}{x+y}+\dfrac{48}{x-y}=7\\[2mm] \dfrac{100}{x+y}-\dfrac{32}{x-y}=3\end{cases}$.

2) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-m^2+m-1=0$ (x là ẩn số)

a) Giải phương trình khi $m=2$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi số thực m .

Câu 4 (3,5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), đường cao AN , CK của tam giác ABC cắt nhau tại H .

1) Chứng minh tứ giác $BKHN$ là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BKHN.

2) Chứng minh: $\widehat{KBH}=\widehat{KCA}$.

3) Gọi E là trung điểm của AC . Chứng minh KE là tiếp tuyến của đường tròn (I).

4) Đường tròn (I) cắt (O) tại M . Chứng minh BM vuông góc với ME .

Câu 5 (0,5 điểm). Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-1}$. (Với $x\ge 0, x\ne 1$). Tìm giá trị của x để $A=4$.

2) Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$ (Với $x\ge 0, x\ne 4$)

3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{18}{A.B}$.

1) Ta có $A=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-1}$. Điều kiện: $x\ge 0, x\ne 1$

$$A=4\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}-1}=4\Leftrightarrow x-4=4\left(\sqrt{x}-1\right)\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}=0\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ \sqrt{x}-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=16\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện xác định vậy $x=0$ hoặc $x=16$.

2) Điều kiện: $x\ge 0, x\ne 4$.

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}+2\right).\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right).\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$=\frac{x-1-x+4}{\left(\sqrt{x}-2\right).\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{x}-2\right).\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$

3) Ta có $A.B=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-1}.\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$.

$\Rightarrow \dfrac{18}{A.B}=\dfrac{18\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+2}=18-\dfrac{54}{\sqrt{x}+2}$. Điều kiện: $x\ge 0$, $x\ne 1$, $x\ne 4$

Vì $x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow \dfrac{54}{\sqrt{x}+2}\le \dfrac{54}{2}=27$.

$\Rightarrow 18-\dfrac{54}{\sqrt{x}+2}\ge 18-27=-9\Rightarrow \dfrac{18}{A.B}\ge -9$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 0 (thỏa mãn ĐK).

Vậy $\left(\dfrac{18}{A.B}\right)_{\min} = -9 \Leftrightarrow \text{x} = 0$

Câu 2 (2,0 điểm). *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Để hoàn thành một công việc theo dự định, cần một số công nhân làm trong số ngày nhất định. Nếu bớt đi 2 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày mới hoàn thành công việc. Nếu thêm 5 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 4 ngày. Hỏi theo dự định cần bao nhiêu công nhân và làm bao nhiêu ngày?

Gọi số công nhân theo dự định cần để hoàn thành công việc là x (người, $x \in \mathbb{N}, x > 2$);

Số ngày dự định hoàn thành công việc là y (ngày, $y \in \mathbb{N}, \text{y} > 4$).

Mỗi ngày, mỗi công nhân thực hiện được một công lao động, nên theo dự định, để hoàn thành công việc đó cần số công lao động là: xy (công)

Số công lao động cần dùng để hoàn thành công việc là không đổi. Do đó:

+ Vì nếu bớt đi 2 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày mới hoàn thành công việc nên ta có phương trình:

$$\left(x-2\right)\left(y+3\right) = xy \qquad (1).$$

+ Vì nếu thêm 5 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 4 ngày nên ta có phương trình:

$$\left(x+5\right)\left(y-4\right) = xy \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(x-2\right)\left(y+3\right) = xy \\ \left(x+5\right)\left(y-4\right) = xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y=6 \\ -4x+5y=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10 \\ y=12\end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy theo dự định cần 10 công nhân và làm trong 12 ngày thì hoàn thành công việc.

Câu 3 (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{80}{x+y}+\dfrac{48}{x-y}=7 \\ \dfrac{100}{x+y}-\dfrac{32}{x-y}=3\end{cases}$.

2) Cho phương trình $x^2-2\left(m-1\right)x-m^2+m-1=0$ (x là ẩn số)

a) Giải phương trình khi $m=2$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi số thực m.

1) Điều kiện: $x \neq \pm y$. Đặt $a=\dfrac{20}{x+y}$; $b=\dfrac{16}{x-y}$.

Khi đó hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}4a+3b=7 \\ 5a-2b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=10-9a \\ 5a-2\left(10-9a\right)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1 \\ b=1\end{cases}$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20}{x+y}=1 \\ \dfrac{16}{x-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=20 \\ x-y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=2 \end{cases}$ (tmđk).

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x;y)=(18;2)$.

2a) Phương trình: $x^2-2(m-1)x-m^2+m-1=0 \quad (*)$:

Thay $m=2$ vào phương trình $(*)$ ta có:

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy với $m=2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x=-1$; $x=3$.

2b) Phương trình: $x^2-2(m-1)x-m^2+m-1=0 \ (*)$:

$$\Delta'=(m-1)^2+m^2-m+1=2m^2-3m+2$$

$$=2\left(m^2-\frac{3}{2}m+1\right)=2\left(m^2-2.\frac{3}{4}m+\frac{9}{16}+\frac{7}{16}\right)$$

$$=2\left(m-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{14}{16}>0, \forall m\in\mathbb{R}.$$

Vậy $\forall m\in\mathbb{R}$ phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

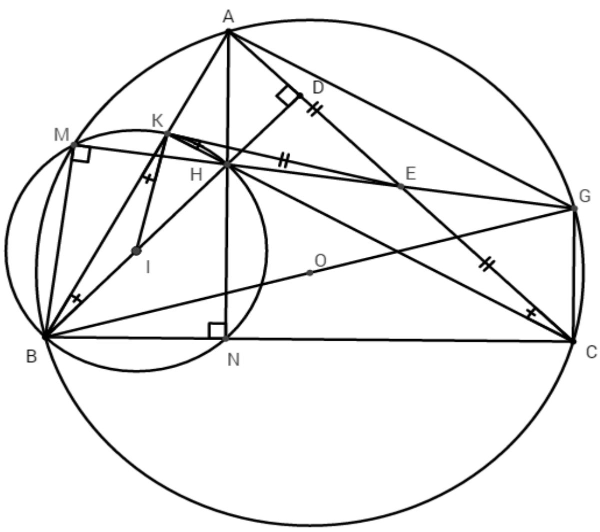
Câu 4 (3,5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), đường cao AN, CK của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh tứ giác $BKHN$ là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BKHN.

2) Chứng minh: $\widehat{KBH}=\widehat{KCA}$.

3) Gọi E là trung điểm của AC. Chứng minh KE là tiếp tuyến của đường tròn (I).

4) Đường tròn (I) cắt (O) tại M. Chứng minh BM vuông góc với ME.



1) Chứng minh tứ giác $BKHN$ là tứ giác nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BKHN.

Ta có: AN, CK là đường cao cắt nhau tại H của tam giác ABC (giả thiết). (1)

$\Rightarrow \mathrm{HN} \perp \mathrm{BC}$ tại N ; $\mathrm{HK} \perp \mathrm{AB}$ tại K. (2)

$\Rightarrow \widehat{HKB} = 90°$; $\widehat{HNB} = 90°$.

Xét tứ giác BKHN có $\widehat{\mathrm{HKB}}°$; $\widehat{\mathrm{HNB}}$ là hai góc đối và $\widehat{\mathrm{HKB}} + \widehat{\mathrm{HNB}} = 90^{\mathrm{o}} + 90^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BKHN$ là tứ giác nội tiếp (dhnb). (3)

Mà $\widehat{HKB} = \widehat{HNB} = 90°$ là các góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{\mathrm{HB}}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKHN$

$\Rightarrow$ HB là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKHN$ và trung điểm I của đoạn BH làm tâm.

2) Chứng minh: $\widehat{KBH} = \widehat{KCA}$.

Gọi D là giao điểm của BH và AC.

Theo (1) có H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow BD \perp AC$ tại D hay $\widehat{BDA} = 90°$.

Theo (2) có $\widehat{\mathrm{AKC}} = 90^{\mathrm{O}}$.

Xét tam giác ADB ta có: $\widehat{ABD} + \widehat{BDA} + \widehat{BAD} = 180° \Rightarrow \widehat{ABD} = 90° - \widehat{BAD}$

Xét tam giác AKC ta có: $\widehat{AKC} + \widehat{KCA} + \widehat{KAC} = 180° \Rightarrow \widehat{KCA} = 90° - \widehat{KAC}$

Mà $\widehat{\mathrm{BAD}} = \widehat{\mathrm{KAC}} = \widehat{\mathrm{BAC}}$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{KCA}$

$\Rightarrow \widehat{KBH} = \widehat{KCA}$ (4).

3) Chứng minh KE là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Xét tam giác AKC vuông tại K có trung tuyến KE (do giả thiết trung điểm).

$\Rightarrow KE = EC$ (trung tuyến ứng cạnh huyền).

$\Rightarrow$ Tam giác KEC cân tại E

$\Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{KCE}$ hoặc $\widehat{CKE} = \widehat{KCA}$ (5).

Ta có IK = IB (bán kính đường tròn (BKHN))

$\Rightarrow \Delta KIB$ cân tại I.

$\Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{BKI}$ hoặc $\widehat{KBH} = \widehat{BKI}$ (6)

Từ (4), (5) và (6) ta có $\widehat{BKI} = \widehat{CKE}$.

Mà $\begin{cases} \widehat{\mathrm{BKI}} + \widehat{\mathrm{CKI}} = \widehat{\mathrm{BKC}} = 90^{\mathrm{o}} \\ \widehat{\mathrm{CKE}} + \widehat{\mathrm{CKI}} = \widehat{\mathrm{EKI}} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{EKI}} = 90^{\mathrm{o}}$ hay $IK \perp KE$ tại K, $K \in (I)$.

$\Rightarrow KE$ là tiếp tuyến của (I)

4) Chứng minh BM vuông góc với ME.

Kẻ đường kính của BG (O).

Ta có $\widehat{GCB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow GC\perp BC$.

Mà $AN\perp BC$ tại N hoặc $AH\perp BC$.

$\Rightarrow$ $AH//CG$. (7)

Ta có $\widehat{GAB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow GA\perp AB$.

Mà $CK\perp AB$ tại K $\mathrm{CH}\perp\mathrm{AB}$.

$\Rightarrow$ $HC//AG$. (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow$ $AHCG$ là hình bình hành. (dấu hiệu nhận biết).

Mà E là trung điểm của AC nên E cũng là trung điểm của HG (tính chất hbh).

$\Rightarrow$ H, E, G thẳng hàng (9).

$\widehat{BMH}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)).

$\widehat{BMG}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow$ M, H, G thẳng hàng (10).

Từ (9) và (10) $\Rightarrow$ M, E, G thẳng hàng.

Vậy $ME\perp BM$.

Câu 5 (0,5 điểm). Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$.

Điều kiện xác định: $x\geq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x+3}}=\frac{\sqrt{3x+1}-1-\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-2}{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x+3}}=\frac{2x-2\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-2}{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x+3}}=\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-2\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-2}{\left(1+\sqrt{x}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{2\sqrt{x}-2}{\left(1+\sqrt{x}\right)}=0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}}=0\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\dfrac{2\sqrt{x}-2}{\left(1+\sqrt{x}\right)}=0 \Leftrightarrow x=1$

Trường hợp 2: $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}}=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

TRƯỜNG THCS PHAN ĐÌNH GIÓT

Đề số 31

ĐỀ KIỂM TRA THÁNG 4
NĂM HỌC 2018 - 2019
MÔN: Toán 9
Thời gian làm bài: 90 phút
Ngày 11/4/2019

Bài I *(2 điểm)* Cho $M = \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}$ và $N = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

1) Tính giá trị của N khi $x = 25$.

2) Rút gọn $S = M.N$.

3) Tìm x để $S < -1$.

Bài II *(2 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình.*

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 30 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 15 phút rồi khóa lại, sau đó mở vòi thứ hai trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Bài III (*2 điểm)*

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+y} = \frac{7}{15} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{x+y} = 2 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 4x + 1 - m$.

a) Cho $m = 4$ hãy tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm có tung độ là y_1 ; y_2 thỏa mãn $\sqrt{y_1}.\sqrt{y_1} = 5$.

Bài IV *(3,5 điểm)* Cho đường tròn (O ; R) và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (với A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD sao cho MC < MD. Đoạn thẳng MO cắt AB tại H.

a) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MC.MD$.

c) Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp và HA là tia phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Giả sử M cố định, chứng minh khi cát tuyến MCD thay đổi, trọng tâm G của tam giác BCD thuộc một đường tròn cố định.

Bài V *(0,5 điểm)* Cho $a > 0$; $b > 0$ và $a^2 + b^2 = a + b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^4 + b^4 + \dfrac{2020}{(a+b)^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I *(2 điểm)* Cho $M = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}$ và $N = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

1) Tính giá trị của N khi $x = 25$.

2) Rút gọn $S = M.N$.

3) Tìm x để $S < -1$.

1) Khi $x = 25$ (thỏa mãn ĐK) thay vào biểu thức N ta được: $N = \dfrac{\sqrt{25}+1}{\sqrt{25}} = \dfrac{5+1}{5} = \dfrac{6}{5}$

2) Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 1$.

$$S = M.N = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right) - \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$= \frac{2}{x-1}$$

Vậy $S = \dfrac{2}{x-1}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

3) Ta có $S = \dfrac{2}{x-1}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

$$S < -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0 \quad (*)$$

Vì $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0$, nên từ (*)

$$\Rightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $0 < x < 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài II *(2 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình.*

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 30 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 15 phút rồi khóa lại, sau đó mở vòi thứ hai trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Đổi: 1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ giờ, 15 phút $= \frac{1}{4}$ giờ, 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ

Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x (giờ), thời gian vòi II chảy một mình đầy bể là y (giờ). Điều kiện: $x > \frac{3}{2}; y > \frac{3}{2}$.

Trong 1 giờ, vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ (bể) và cả hai vòi chảy được $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ (bể). Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$

Vòi I chảy trong $\frac{1}{4}$ giờ được $\frac{1}{4x}$ (bể), vòi II chảy trong $\frac{1}{3}$ (giờ) được $\frac{1}{3y}$ (bể) nên cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ bể. Ta có phương trình: $\frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5}$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{4x} = \frac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{4x} = \frac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2} \\ x = \frac{15}{4} \end{cases}$$

Vậy vòi I chảy một mình đầy bể trong $\frac{15}{4}$ (giờ) (hoặc 3 giờ 45 phút); vòi II chảy một mình đầy bể $\frac{5}{2}$ (giờ) (hoặc 2 giờ 30 phút).

Bài III (*2 điểm)*

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{7}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5}{x+y}=2 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=4x+1-m$.

a) Cho $m=4$ hãy tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm có tung độ là y_1 ; y_2 thỏa mãn $\sqrt{y_1}.\sqrt{y_1}=5$.

1) Điều kiện: $x \ge 0$; $x \ne -y$.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{7}{15} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5}{x+y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{5}{x+y}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{5}{x+y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{7}{15} \\ \dfrac{13}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{13}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{5} \\ \sqrt{x}+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ \sqrt{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x\,;\,y)=(4\,;1)$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2=4x+1-m \Leftrightarrow x^2-4x-1+m=0 \qquad (1)$$

a) Khi $m=4$ phương trình (1) trở thành:

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=9 \end{array}\right.$$

Vậy khi $m=4$ thì tọa độ giao điểm của (d) và (P) là: $(1\,;1)$ và $(3\,;9)$.

b) Xét phương trình (1) có: $\Delta=16-4(m-1)=-4m+20$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 .

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 20 > 0 \Leftrightarrow m < 5$. (2)

Hệ thức Vi – ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = m - 1 \end{cases}$

Ta có: x_1 ; x_2 là các hoành độ giao điểm $\Rightarrow y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$

Bài cho: $\sqrt{y_1}.\sqrt{y_1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2}.\sqrt{x_2^2} = 5 \Leftrightarrow |x_1|.|x_2| = 5$.

Trường hợp 1: x_1 ; x_2 cùng dấu mà $x_1 + x_2 = 4 > 0$, nên chỉ có thể x_1 ; x_2 cùng dấu dương. Ta có:

$x_1.x_2 = 5 \Leftrightarrow m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$. (không thỏa mãn (2))

Trường hợp 2: x_1 ; x_2 trái dấu, ta có:

$x_1x_2 = -5 \Leftrightarrow m - 1 = -5 \Leftrightarrow m = -4$ (thỏa mãn (2))

Vậy với $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

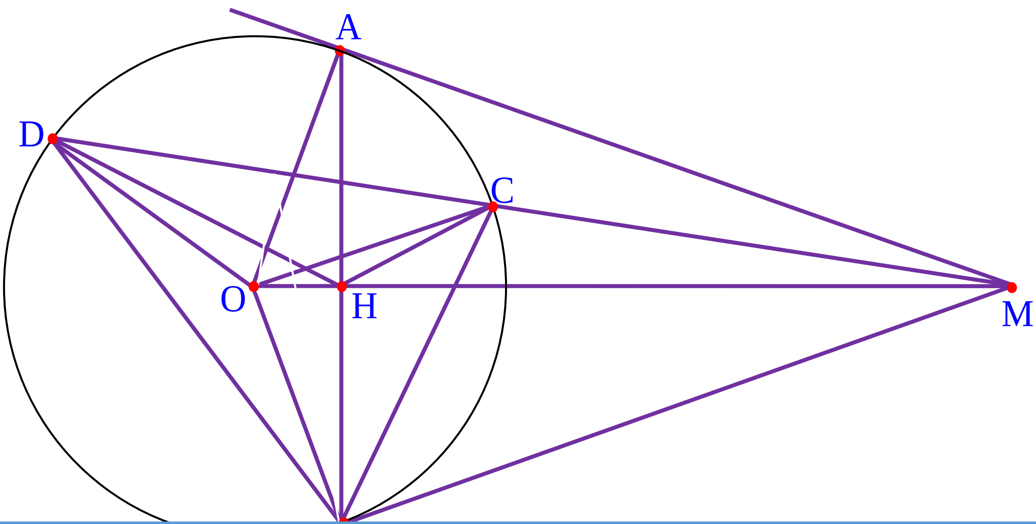
Bài IV *(3,5 điểm)* Cho đường tròn (O ; R) và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (với A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD sao cho MC < MD. Đoạn thẳng MO cắt AB tại H.

a) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MB^2 = MC.MD$.

c) Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp và HA là tia phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Giả sử M cố định, chứng minh khi cát tuyến MCD thay đổi, trọng tâm G của tam giác BCD thuộc một đường tròn cố định.



a) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

Ta có MA, MB lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (giả thiết)

$\Rightarrow MA \perp OA$ tại A ; $MB \perp OB$ tại B

$\Rightarrow \widehat{MAO} = 90^{\circ}$; $\widehat{MBO} = 90^{\circ}$

Xét tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO}$; $\widehat{MBO}$ là hai góc đối và $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^{\circ} + 90^{\circ} = 180^{\circ}$

$\Rightarrow$ tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn đường kính MO.

$\Rightarrow$ 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn đường kính MO.

b) Chứng minh $MB^2 = MC.MD$.

Xét ΔMBC và ΔMDB có:

$\widehat{BMD}$ chung

$\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và gốc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn (O))

$\Rightarrow \Delta MBC \backsim \Delta MDB$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ (tính chất)

$\Rightarrow MB^2 = MC.MD$ (đpcm)

c) Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp và HA là tia phân giác của $\widehat{CHD}$.

Ta có MA = MB (tính chất tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB (tính chất điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng).

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại H và H là trung điểm của AB.

Mà $MB \perp OB$ tại B (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \Delta MBO$ vuông tại B và có đường cao BH

$\Rightarrow MB^2 = MH.MO$

Mà $MB^2 = MC.MD$ (cmt)

$\Rightarrow$ $MC.MD = MH.MO$ (1)

Xét ΔMHC và ΔMDO có:

$\dfrac{MH}{MD}=\dfrac{MC}{MO}$ (suy ra từ (1)); $\widehat{DMO}$ chung

$\Rightarrow \Delta MHC \backsim \Delta MDO$ (c – g –c)

$\Rightarrow \widehat{MHC}=\widehat{MDO}$ (cặp góc tương ứng) hoặc $\widehat{MHC}=\widehat{CDO}$

Mà $\widehat{MHC}+\widehat{CHO}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{CHO}+\widehat{CDO}=180^\circ$

Mà $\widehat{CHO}$; $\widehat{CDO}$ là hai góc đối của tứ giác CHOD.

$\Rightarrow$ tứ giác CHOD nội tiếp. (đpcm).

$\Rightarrow \widehat{OHD}=\widehat{OCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OD}$)

Mà ΔCOD cân tại O (do OD = OC = R) $\Rightarrow \widehat{OCD}=\widehat{CDO}$

$\widehat{MHC}=\widehat{CDO}$ (cmt)

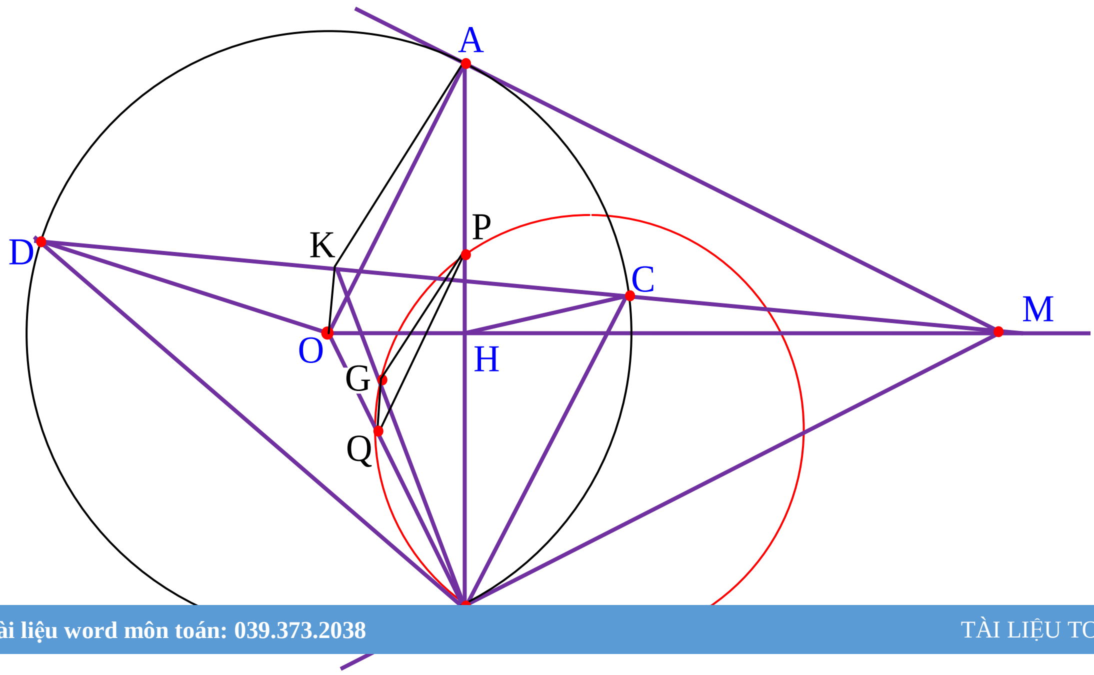
$\Rightarrow \widehat{OHD}=\widehat{CHM}$

Mà $\begin{cases}\widehat{OHD}+\widehat{AHD}=\widehat{AHO}=90^\circ\\ \widehat{CHM}+\widehat{AHC}=\widehat{AHM}=90^\circ\end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{AHD}=\widehat{AHC}$

$\Rightarrow$ HA là tia phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Giả sử M cố định, chứng minh khi cát tuyến MCD thay đổi, trọng tâm G của tam giác BCD thuộc một đường tròn cố định.



Gọi K là trung điểm của CD, ta có BK là trung tuyến của ΔBCD

Mà G là trọng tâm của ΔBCD nên G nằm trên đoạn BK và $BG = \frac{2}{3}BK$ (tính chất trọng tâm).

Xét điểm M cố định và có đường tròn (O; R) không đổi nên các điểm A, B là cố định trên đường tròn (O). Khi đó AB, OB cố định và không đổi.

Từ G kẻ KP // KA (P $\in AB$) $\Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{BG}{BK} = \frac{2}{3}$ (Định lý talet) $\Rightarrow$ Điểm P cố định.

Từ G kẻ KO // KO (Q $\in BO$) $\Rightarrow \frac{BQ}{BO} = \frac{BG}{BK} = \frac{2}{3}$ (Định lý talet) $\Rightarrow$ Điểm Q cố định.

Do đó PQ cố định và không đổi.

Theo tính chất song song, ta có: $\widehat{PGQ} = \widehat{AKO}$

Ta có $OK \perp CD$ tại K (quan hệ đường kính và dây)

$\Rightarrow \widehat{OKM} = 90^o \Rightarrow$ K thuộc đường tròn đường kính MO.

$\Rightarrow$ tứ giác AKOB nội tiếp đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow \widehat{AKO} + \widehat{ABO} = 180^o$ (định lý) hoặc $\widehat{AKO} + \widehat{PBQ} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{PGQ} + \widehat{PBQ} = 180^o$

Mà $\widehat{PGO}$; $\widehat{PBO}$ là hai góc đối của tứ giác PGQB với P, B, Q cố định

$\Rightarrow$ tứ giác PGQB nội tiếp đường tròn và đường tròn này là cố định.

$\Rightarrow$ Khi cát tuyến MCD thay đổi, trọng tâm G của tam giác BCD thuộc một đường tròn cố định.

Bài V *(0,5 điểm)* Cho $a > 0$; $b > 0$ và $a^2 + b^2 = a + b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^4 + b^4 + \frac{2020}{(a+b)^2}$.

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-ki: $x.a + y.b \le \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$

Chứng minh: $x.a + y.b \le \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$

$\Leftrightarrow (x.a + y.b)^2 \le x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2$

$\Leftrightarrow x^2b^2 + y^2a^2 - 2x.a.y.b \ge 0$

$\Leftrightarrow (xb - ya)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Áp dụng cho bài toán: $a + b \le \sqrt{(1^1 + 1^2).(a^2 + b^2)} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ (1)

Bất đẳng thức Cosi: $2\sqrt{ab} \le a + b$ (2)

Mà $a^2 + b^2 = a + b$, nên: $a + b \le \sqrt{2(a + b)} \Rightarrow a + b \le 2 \Rightarrow a.b \le 1$

$$P = a^4 + b^4 + \frac{2020}{(a+b)^2} = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + \frac{2020}{(a+b)^2} \quad \text{voi } a^2 + b^2 = a + b$$

$$= (a+b)^2 + \frac{2020}{(a+b)^2}.\frac{4}{505} + \frac{501}{505}.\frac{2020}{(a+b)^2} - 2a^2b^2$$

Ta có:

$$(a+b)^2 + \frac{2020}{(a+b)^2}.\frac{4}{505} \ge 2\sqrt{(a+b)^2.\frac{2020}{(a+b)^2}.\frac{4}{505}} = 8 \text{ (BĐT cosi)} \quad (3)$$

$$a + b \le 2 \Rightarrow \frac{501}{505}.\frac{2020}{(a+b)^2} \ge 501$$

$$a.b \le 1 \Rightarrow -2a^2b^2 \ge -2$$

$\Rightarrow P \ge 507$

$\Rightarrow P_{min} = 507 \Leftrightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (1), (2), (3) xảy ra và thỏa mãn giả thiết

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 + b^2 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$$

PHÒNG GD&ĐT CẦU GIẤY — **ĐỀ KHẢO SÁT THÁNG 11 NĂM HỌC 2018-2019**

TRƯỜNG THCS NGHĨA TÂN — **MÔN : TOÁN- LỚP 9**

(Thời gian : 90 phút)

Đề số 32 — ***Ngày kiểm tra : 26/11/2018***

Bài 1. ***(2,0 điểm)*** Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{9\sqrt{x}-10}{4-x}$, với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\dfrac{16}{9}$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Cho $P=B:A$. Tìm các giá trị của x là số thực để P nhận giá trị nguyên.

Bài 2. ***(2,0 điểm)*** *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình hoặc phương trình :*

Theo kế hoạch một công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kĩ thuật nên mỗi giờ người công nhân đó đã làm thêm 2 sản phẩm. Vì vậy, chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn làm dư 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoach, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Bài 3. *(2,0 điểm)* Cho hàm số $y=\left(m^2-2m+2\right)x+3\;(d)$

a) Vẽ đồ thị hàm số khi $m=2$.

b) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y=2x+m-1$ tại một điểm trên trục tung.

c) Tìm m để đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất.

Bài 4. ***(3,5 điểm)*** Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax của (O), C là điểm bất kì thuộc (O), $(C\ne A, C\ne B)$. Tia BC cắt Ax tại D.

a) Chứng minh rằng $AC\perp BD$ và $BC.BD=4R^2$.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đoạn AD tại M, OM cắt AC tại K. Chứng minh rằng $OM//BC$ và M là trung điểm của AD.

c) Gọi N là trung điểm của BC, I là hình chiếu của C trên AB. Chứng minh rằng IN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACI.

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn để chu vi của ΔCOI là lớn nhất.

Bài 5. ***(0,5 điểm)***Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x+y\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=2x^2+y^2+\dfrac{28}{x}+\dfrac{1}{y}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. ***(2,0 điểm)*** Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{3}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{9\sqrt{x}-10}{4-x}$, với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\dfrac{16}{9}$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Cho $P=B:A$. Tìm các giá trị của x là số thực để P nhận giá trị nguyên.

a) Ta thấy $x=\dfrac{16}{9}$ thỏa mãn đk $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$.

Thay $x=\dfrac{16}{9}$ vào biểu thức A ta có : $A=\dfrac{\sqrt{\dfrac{16}{9}}-2}{\sqrt{\dfrac{16}{9}}-3}=\dfrac{\dfrac{4}{3}-2}{\dfrac{4}{3}-3}=\dfrac{2}{5}$.

Vậy khi $x=\dfrac{16}{9}$ thì $A=\dfrac{2}{5}$.

b) Với $x\ge 0, x\ne 4, x\ne 9$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{\sqrt{x}+2}+\frac{9\sqrt{x}-10}{4-x}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-9\sqrt{x}+10}{x-4}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-6-9\sqrt{x}+10}{x-4}$$

$$= \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x - 4}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$$

c) Với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ ta có:

$$P = B : A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x} + 2}$$

Để $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 2} \in \mathbb{Z}.$

Xét $\frac{5}{\sqrt{x} + 2} > 0$ và có $\sqrt{x} + 2 \geq 2$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9 \Rightarrow 0 < \frac{5}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{5}{2}$

Mà $\frac{5}{\sqrt{x} + 2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 2} = 1$ hoặc $\frac{5}{\sqrt{x} + 2} = 2$

Với $\frac{5}{\sqrt{x} + 2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 9$ (TMĐK).

Với $\frac{5}{\sqrt{x} + 2} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (TMĐK).

Vậy khi $x = 9$; $x = \frac{1}{4}$ thì P có giá trị nguyên.

Bài 2. *(2,0 điểm)* *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình hoặc phương trình :*

Theo kế hoạch một công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kĩ thuật nên mỗi giờ người công nhân đó đã làm thêm 2 sản phẩm. Vì vậy, chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn làm dư 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoach, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Gọi số sản phẩm người đó phải làm theo kế hoạch trong 1 giờ là x $(x \in \mathbb{N}^*)$

Thời gian người đó phải hoành thành 60 sản phẩm theo kế hoạch là $\frac{60}{x}$ (giờ)

Số sản phẩm thực tế người đó đã làm trong 1 giờ là $x + 2$

Thời gian thực tế người đó đã làm là: $\frac{60+3}{x+2} = \frac{63}{x+2}(sp)$

Vì thực tế người đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút hay $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x} - \frac{63}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 120x + 240 - 126x = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 8x - 240 = 0$$

$$\Delta' = 4^2 + 240 = 256 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 16$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -4 + 16 = 12 \text{ (tm)}; \; x_2 = -4 - 16 = -20 \text{ (ktm)}.$$

Vậy mỗi giờ theo kế hoạch người đó làm được 12 sản phẩm.

Bài 3. *(2,0 điểm)* Cho hàm số $y = (m^2 - 2m + 2)x + 3 \; (d)$

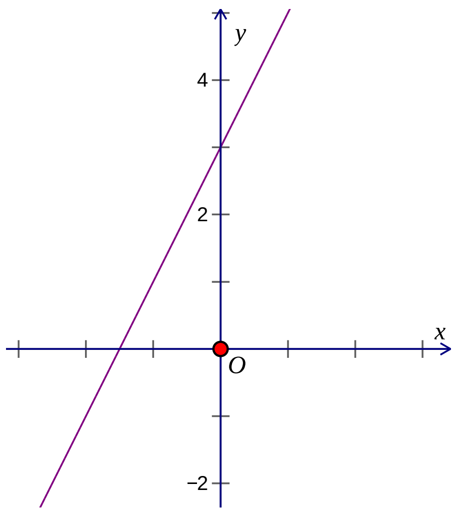
a) Vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.

b) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = 2x + m - 1$ tại một điểm trên trục tung.

c) Tìm m để đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất.

a) Khi $m = 2$ ta có hàm số $y = 2x + 3$

Đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $\left(\frac{-3}{2}; 0\right)$ và $(0; 3)$.



b) Đường thẳng (d): $y = (m^2 - 2m + 2)x + 3$ cắt đường thẳng $y = 2x + m - 1$ tại một điểm trên trục tung.

$\Leftrightarrow$ Hai đường thẳng có cùng tung độ gốc.

$\Leftrightarrow m-1=3 \Leftrightarrow m=4$

Vậy khi $m=3$ thì đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y=2x+m-1$ tại một điểm trên trục tung.

c) (d) cắt trục tung tại điểm $A(0;3)$ và cắt trục hoành tại điểm $B\left(\dfrac{-3}{m^2-2m+2};0\right)$.

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}.3.\left|\frac{-3}{m^2-2m+2}\right|=\frac{9}{2\left|m^2-2m+2\right|}.$$

Ta có $m^2-2m+2=(m-1)^2+1\geq 1$ nên $\dfrac{1}{\left|m^2-2m+2\right|}\leq 1.$

$\Rightarrow S_{\Delta AOB}\leq 4,5.$

Dấu "=" xảy ra khi $m=1$. Khi đó $S_{\Delta AOB}$ lớn nhất.

Vậy khi $m=1$ thì đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất.

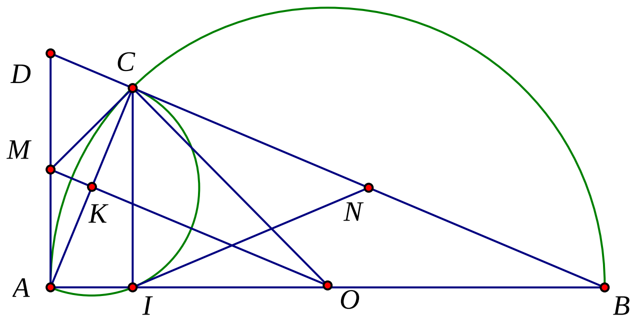
Bài 4. ***(3,5 điểm)*** Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax của (O), C là điểm bất kì thuộc (O), $(C\neq A, C\neq B)$. Tia BC cắt Ax tại D.

a) Chứng minh rằng $AC\perp BD$ và $BC.BD=4R^2$.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đoạn AD tại M, OM cắt AC tại K. Chứng minh rằng $OM//BC$ và M là trung điểm của AD.

c) Gọi N là trung điểm của BC, I là hình chiếu của C trên AB. Chứng minh rằng IN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACI.

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn để chu vi của ΔCOI là lớn nhất.



a) Chứng minh rằng $AC \perp BD$ *và* $BC.BD = 4R^2$.

$\widehat{ACB} = 90^o$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow AC \perp BD.$

AD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\Rightarrow AC \perp AB.$

Xét ΔABD vuông tại A có AC là đường cao nên ta có $BC.BD = BA^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) hay $BC.BD = 4R^2$.

b) Tiếp tuyến tại C ***của*** (O) ***cắt đoạn*** AD ***tại*** M, OM ***cắt*** AC ***tại*** K. ***Chứng minh rằng*** $OM // BC$ ***và*** M ***là trung điểm của*** AD.

Ta có MA, MC là hai tiếp tuyến của (O) nên $MC = MA$ (Tính chất tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AC. (1)

Mặt khác $OC = OA = R$

$\Rightarrow O$ thuộc trung trực của AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MO là đường trung trực của $AC \Rightarrow AC \perp MO.$

Mà $AC \perp BC$ (theo ý a))

$\Rightarrow OM \parallel BC.$

Trong tam giác ABD có O là trung điểm của AB, $OM \parallel BC$ nên theo tính chất đường trung bình thì M là trung điểm của AD.

c) Gọi N ***là trung điểm của*** BC, I ***là hình chiếu của*** C ***trên*** AB. ***Chứng minh rằng*** IN ***là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác*** ACI.

ΔBIC vuông tại I có IN là trung tuyến nên $IN = NC = \dfrac{BC}{2}.$

=> ΔINC cân tại N => $\widehat{NIC} = \widehat{NCI}.$

ΔAIC vuông tại I có IK là trung tuyến nên $IK = KC = \dfrac{AC}{2}.$

=> ΔIKC cân tại K => $\widehat{KIC}=\widehat{KCI}$.

Mà $\widehat{NCI}+\widehat{KCI}=90^o$.

=> $\widehat{NIC}+\widehat{KIC}=90^o \Rightarrow NI\perp KI$

Lại có $I\in(K)$ đường kính AC ngoại tiếp ΔAIC (Vì ΔAIC vuông tại I).

$\Rightarrow IN$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAIC.

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn để chu vi của ΔCOI là lớn nhất.

ΔOCI vuông tại I nên $OI^2+IC^2=OC^2$ (Định lí Py-Ta-Go)

Có $(OI+IC)^2\le 2.(OI^2+IC^2)=2OC^2=2R^2$ => $OI+IC\le R\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $OI=IC=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Chu vi tam giác CIO là $CI+IO+OI=CI+OI+R$

Để chu vi tam giác CIO lớn nhất thì $CI+OI$ lớn nhất do đó $OI=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Vậy điểm C nằm trên nửa đường tròn sao cho $CI=\dfrac{\sqrt{2}R}{2}$ thì chu vi tam giác CIO là lớn nhất.

Bài 5. ***(0,5 điểm)*** Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $x+y\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=2x^2+y^2+\dfrac{28}{x}+\dfrac{1}{y}$.

$$P=2x^2+y^2+\frac{28}{x}+\frac{1}{y}$$

$$=2\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-2y+1\right)+\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+(x+y)-9$$

$$=2(x-2)^2+(y-1)^2+\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+(x+y)-9$$

Ta có $2(x-2)^2\ge 0;\ (y-1)^2\ge 0;\ (x+y)\ge 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương ta có

$$\frac{28}{x}+7x\geq 2\sqrt{28.7}=28;\ \frac{1}{y}+y\geq 2$$

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$P\geq 28+2+3-9=24$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x-2=0 \\ \dfrac{28}{x}=7x \\ y-1=0 \\ \dfrac{1}{y}=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

TRƯỜNG THCS HOÀNG HOA THÁM
NĂM HỌC 2017 – 2018

ĐỀ THI THỬ LẦN 2 VÀO LỚP 10
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 16/5/2018

Đề số 33

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{5\sqrt{x}-2}{4-x}$ với $x\ge 0; x\ne 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 16.

2) Rút gọn biểu thức P = A.B.

3) Tìm x để $(6x+18).P\ge x+9$.

Bài II. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Một tổ dự định sản xuất 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế tổ lại được giao 80 sản phẩm. Mặc dù mỗi giờ tổ đó làm thêm 1 sản phẩm so với dự kiến nhưng thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn dự định 12 phút. Tính số sản phẩm thực tế tổ đó đã làm được trong một giờ. Biết lúc đầu, mỗi giờ tổ đó dự kiến làm không quá 20 sản phẩm.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2|x-1|-\dfrac{5}{\sqrt{y}}=1 \\ |x-1|+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$

2) Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx+\dfrac{1}{2}$.

a) Chứng minh (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với mọi m.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục Ox. Tìm m để độ dài CD = 2.

Bài IV. Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I; AF cắt tia DC tại K.

1) Chứng minh rằng tứ giác AHIF là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng: HA.HB = HI.HK.

3) Đường tròn ngoại tiếp ΔKIF cắt AI tại E. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định và I cách đều ba cạnh ΔHFE.

Bài V. Giải phương trình: $\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}}=1+2\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I: Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{5\sqrt{x}-2}{4-x}$ với $x\ge 0; x\ne 4.$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 16.

2) Rút gọn biểu thức P = A.B.

3) Tìm x để $(6x+18).P\ge x+9.$

1) Thay x = 16 (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A ta được $A=\dfrac{\sqrt{16}-2}{16+3}=\dfrac{2}{19}$

2) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+3}.\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{5\sqrt{x}-2}{4-x}\right)$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{x+3}.\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{x+3}.\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x+3)(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{x+3}$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ với $x\ge 0; x\ne 4.$

3) Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ với $x\ge 0; x\ne 4.$

$$(6x+18).P\ge x+9$$

$$\Leftrightarrow 6(x+3).\frac{\sqrt{x}}{x+3}\ge x+9\ \ (x\ge 0;\ x\ne 4)$$

$$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9\le 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0$$

$$\Rightarrow x=9\ (t/m)$$

Vậy với x = 9 thì $(6x+18).P\ge x+9.$

Bài II. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một tổ dự định sản xuất 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế tổ lại được giao 80 sản phẩm. Mặc dù mỗi giờ tổ đó làm thêm 1 sản phẩm so với dự kiến nhưng thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn dự định 12 phút. Tính số sản phẩm thực tế tổ đó đã làm được trong một giờ. Biết lúc đầu, mỗi giờ tổ đó dự kiến làm không quá 20 sản phẩm.

Gọi số sản phẩm đội dự định làm trong 1 giờ là x (sản phẩm) $(x \in \mathbb{N}^*;\ x \le 20)$

Theo dự định, thời gian hoàn thành 72 sản phẩm là $\dfrac{72}{x}$ (h).

Theo thực tế, 1h đội làm được $x+1$ (sản phẩm), số sản phẩm cần làm là 80 nên thời gian hoàn thành là $\dfrac{80}{x+1}$ (h)

Vì thời gian thực tế chậm hơn dự định 12 phút = $\dfrac{1}{5}$ (h) nên ta có phương trình:

$$\frac{80}{x+1}-\frac{72}{x}=\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow x^2-39x+360=0$$
$$\Leftrightarrow (x-24)(x-15)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=24 & \text{(loai)} \\ x=15 & \text{(thoa man)} \end{array}\right.$$

Vậy số sản phẩm thực tế đội phải làm là 15 + 1 = 16 sản phẩm.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2|x-1|-\dfrac{5}{\sqrt{y}}=1 \\ |x-1|+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$

2) Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx+\dfrac{1}{2}$.

a) Chứng minh (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với mọi m.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục Ox. Tìm m để độ dài CD = 2.

1) Điều kiện: $y > 0$.

Đặt $\begin{cases} a = |x-1| \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$ $(a \ge 0; b > 0)$, ta có hệ PT:

$$\begin{cases} 2a - 5b = 1 \\ a + 2b = \dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b = 1 \\ 2a + 4b = \dfrac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-19}{5} < 0 \text{ (Không thỏa mãn)}$$

Vậy HPT vô nghiệm.

2a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = mx + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - 1 = 0 \qquad (1)$$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 2 \ge 2 \ \forall m$

=> Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

=> (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B

2b) Vì C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên Ox nên C(x_A; 0) và D(x_B;0).

Ta có: CD = 2

$$\Leftrightarrow |x_B - x_A| = 2$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_B + x_A)^2 - 4x_Bx_A = 4 \quad (2)$$

Vì $x_B; x_A$ là hai nghiệm của PT(1) nên theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_B + x_A = m \\ x_B.x_A = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Thay vào (2) $\Rightarrow m^2 - 4.\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

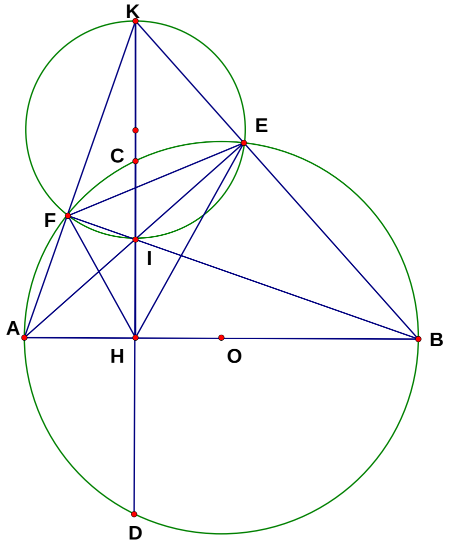
Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài IV. Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I; AF cắt tia DC tại K.

1) Chứng minh rằng tứ giác AHIF là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng: HA.HB = HI.HK.

3) Đường tròn ngoại tiếp ΔKIF cắt AI tại E. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định và I cách đều ba cạnh ΔHFE.



a) Chứng minh tứ giác AHIF nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AFI} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

$CD \perp AH$ tại H (giả thiết) và $I \in CD \Rightarrow \widehat{AHI} = 90^o$.

Xét tứ giác AHFI có hai góc đối là $\widehat{AFI}$; $\widehat{AHI}$ và $\widehat{AFI} + \widehat{AHI} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AHIF nội tiếp (Định lý).

b) Chứng minh rằng: HA.HB = HI.HK.

Cách 1: *Trình bày như sau:*

Tứ giác AHIF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{FAH} + \widehat{FIH} = 180^o$ (Định lý)

Mà $\widehat{BIH} + \widehat{FIH} = 180^o$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{BIH}$ hay $\widehat{KAH} = \widehat{BIH}$.

Xét ΔHAK và ΔHIB có

$\widehat{AHK} = \widehat{IHB}$ (cùng bằng 90^o)

$\widehat{KAH} = \widehat{BIH}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta HIB (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{HA}{HI} = \dfrac{HK}{HB} \Rightarrow HA.HB = HI.HK$ (đpcm)

Cách 2: *Trình bày như sau:*

Xét ΔHAK và ΔHIB có

$\widehat{AHK} = \widehat{IHB}$ (cùng bằng 90^o)

$\widehat{HKA} = \widehat{HBI}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta HIB(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{HA}{HI} = \dfrac{HK}{HB} \Rightarrow HA.HB = HI.HK$ (đpcm)

c) Chứng minh E thuộc một đường tròn cố định và I cách đều ba cạnh ΔHFE.

*** Chứng minh E luôn thuộc đường tròn cố định:**

Ta có: $\widehat{AFB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow AF \perp BF \Rightarrow AK \perp BF$ tại F

$KH \perp AB$ tại H (vì $CD \perp AH$ tại H)

KH cắt BF tại I.

$\Rightarrow$ I là trực tâm của ΔAKB $\Rightarrow AI \perp KB$ (1)

ΔKIF vuông tại F, nên đường tròn ngoại tiếp ΔKIF có đường kính là KI.

$\Rightarrow$ $\widehat{AEK} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính KI).

$\Rightarrow AI \perp KE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ K, E, B thẳng hàng, khi đó $AI \perp KB$ tại E

$\Rightarrow \widehat{IEB} = 90^o$ hoặc $\widehat{AEB} = 90^o$

$\Rightarrow$ E luôn thuộc đường tròn $\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$ (đpcm)

*** Chứng minh EI là phân giác của $\widehat{FEH}$.**

Xét tứ giác IEBH có hai góc đối $\widehat{IEB}$; $\widehat{IHB}$ và $\widehat{IEB} + \widehat{IHB} = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác IEBH nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IBH}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IH}$)

Xét đường tròn đường kính KI có: $\widehat{IEF} = \widehat{IKF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IF}$).

Mà $\widehat{IBH} = \widehat{IKF}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IEF}$

$\Rightarrow$ EI là phân giác của $\widehat{FEH}$. (3)

*** Chứng minh IF là phân giác của $\widehat{HFE}$**

Xét đường tròn $\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$ có $\widehat{IFE} = \widehat{IAH}$.(hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

Ta có tứ giác AFIH nội tiếp (cmt) $\widehat{IAH} = \widehat{IFH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IH}$).

Từ đó thu được $\widehat{IFE} = \widehat{IFH}$, hay IF là phân giác của $\widehat{HFE}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ I là gia điểm của các đường phân giác của ΔHFE.

$\Rightarrow$ I cách đều các cạnh của ΔHFE. (đpcm).

Bài V. Giải phương trình: $\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} = 1+2\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -3 \\ 3x+3-\sqrt{x+3} \geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} = 1+2\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} + \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}} = 1+2\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}} = 1+2\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+2\sqrt{x+3}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} = 1 + \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow 3x+4+\sqrt{x+3} = 1+3x+3-\sqrt{x+3}+2\sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1$. (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là x =1.

PHÒNG GD-ĐT QUẬN THANH XUÂN
TRƯỜNG THCS NHÂN CHÍNH

Đề số 34

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG THÁNG 1
MÔN TOÁN 9
Thời gian : 90 phút
Ngày kiểm tra: 26-01-2019

Bài 1 (2đ): Cho các biểu thức sau: $A=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{x+3}{3+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=\dfrac{4}{9}$

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=B:A$

Bài 2 (2đ): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người làm chung một công việc trong vòng 4 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một nửa công việc rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp nửa công việc còn lại thì sẽ xong toàn bộ công việc trong 9 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu xong công việc biết người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc lâu hơn người thứ hai làm một mình xong công việc.

Bài 3 (2đ):

1) Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 7\sqrt{x-1}-\dfrac{4}{y+6}=\dfrac{5}{3} \\ 5\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{y+6}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

2) Cho hai đường thẳng (d) $y=(m^2+2m-1)x+3m+1$ và (d_1) $y=-x+1$

a) Với $m=1$, hãy xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1)

b) Tìm m để đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm bên trái trục tung.

Bài 4 (3,5đ): Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O; R). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A và B là tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn (O; R) tại C. Nối M và C cắt đường tròn (O; R) tại D, tia AD cắt MB tại E.

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn, và chỉ rõ đường kính của đường tròn đó

b) Chứng minh: $MA^2=MD.MC$ và tính độ dài đoạn DC biết $MB=6cm$, $MD=4cm$

c) Chứng minh $ME=EB$

d) Xác định vị trí của điểm M để BD vuông góc với MA.

Bài 5 (0,5đ): Cho x, y là hai số không âm. Tìm x, y sao cho:

$(x^2+2y+3)(y^2+2x+3)=(3x+y+2)(3y+x+2)$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

Bài 1 (2đ): Cho các biểu thức sau: $A=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{x+3}{3+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=\dfrac{4}{9}$

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=B:A$

a) Điều kiện: $x\ge 0$

Với $x=\dfrac{4}{9}$(thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức B ta có:

$$B=\frac{\frac{4}{9}+3}{3+\sqrt{\frac{4}{9}}}=\frac{\left(\frac{31}{9}\right)}{3+\frac{2}{3}}=\frac{\left(\frac{31}{9}\right)}{\frac{11}{9}}=\frac{31}{11}$$

Vậy $B=\dfrac{31}{11}$ khi $x=\dfrac{4}{9}$

b) ĐK : $x\ge 0, x\ne 9$

$$A=\left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9}-\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}-\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\left(\frac{x+3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}.\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0, x\ne 9$.

c) ĐK: $x\ge 0, x\ne 9$.

$$M=B:A=\frac{x+3}{3+\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}=\frac{(x+3)(\sqrt{x}+3)}{(3+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}=\frac{x+3}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x})^2-1+4}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\sqrt{x}-1+\frac{4}{\sqrt{x}+1}=(\sqrt{x}+1)+\frac{4}{\sqrt{x}+1}-2 \quad (1)$$

Do $x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+1>0;\ \dfrac{4}{\sqrt{x}+1}>0$ nên theo bất đẳng thức côsi ta có:

$$(\sqrt{x}+1)+\frac{4}{\sqrt{x}+1}\ge 2\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{4}{\sqrt{x}+1}}=4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (2) xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\dfrac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2=4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=2 (do\ \sqrt{x}+1>0\ \forall x\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (tmđk)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M=B:A$ bằng 2 đạt được khi $x=1$

Bài 2 (2đ): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người làm chung một công việc trong vòng 4 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một nửa công việc rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp nửa công việc còn lại thì sẽ xong toàn bộ công việc trong 9 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu xong công việc biết người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc lâu hơn người thứ hai làm một mình xong công việc.

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình để xong công việc là : x (giờ)

Thời gian người thứ hai làm một mình để xong công việc là : y (giờ)

Điều kiện : $x>4, y>4; x>y$.

Mỗi giờ người thứ nhất làm được số lượng công việc là : $\dfrac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi giờ người thứ hai làm được số lượng công việc là : $\dfrac{1}{y}$ (công việc)

Hai người làm chung một công việc trong vòng 4 giờ thì xong nên ta có :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \qquad (1)$$

Thời gian để người thứ nhất làm xong một nửa công việc là : $\dfrac{x}{2}$ (giờ)

Thời gian để người thứ hai làm xong một nửa công việc là : $\dfrac{y}{2}$ (giờ)

Người thứ nhất làm một nửa công việc rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp nửa công việc còn lại thì sẽ xong toàn bộ công việc trong 9 giờ nên ta có :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\Leftrightarrow x+y=18 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}\\ x+y=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{4}\\ x+y=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=72\\ x+y=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(18-y)y=72\\ x=18-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-18y+72=0\\ x=18-y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y-6)(y-12)=0\\ x=18-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=6\\ y=12\end{array}\right.\\ x=18-y\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=6\\ x=12\end{cases}(tmdk)\\ \begin{cases}y=12\\ x=6\end{cases}(loai)\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ y=6\end{cases}(tmdk)$$

Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình để xong công việc là 12 giờ, thời gian người thứ hai làm một mình để xong công việc là 6 giờ

Bài 3 (2đ)

1) Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 7\sqrt{x-1}-\dfrac{4}{y+6}=\dfrac{5}{3} \\ 5\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{y+6}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

2) Cho hai đường thẳng (d) $y=(m^2+2m-1)x+3m+1$ và (d_1) $y=-x+1$

a) Với $m=1$, hãy xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1)

b) Tìm m để đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm bên trái trục tung.

1) ĐK: $x\ge 1; y\ne -6$

Đặt $\sqrt{x-1}=a(a\ge 0), \dfrac{1}{y+6}=b$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 7a-4b=\dfrac{5}{3} \\ 5a+3b=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21a-12b=5 \\ 30a+18b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63a-36b=15 \\ 60a+36b=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63a-36b=15 \\ 123a=41 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{63a-15}{36} \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{6} \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases}(tmdk) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y+6}=\dfrac{1}{6} \\ \sqrt{x-1}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{10}{9} \end{cases}(tmdk)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{10}{9};0\right)$

2a) Thay $m=1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có : $y=2x+4$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=3 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1) là $A(-1;2)$

2b) Hai đường thẳng (d) $y=(m^2+2m-1)x+3m+1$ và (d_1) $y=-x+1$ cắt nhau.

$\Leftrightarrow m^2+2m-1\ne -1$

$\Leftrightarrow m^2+2m\ne 0$

$\Leftrightarrow m\left(m+2\right)\ne 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ m\ne -2 \end{cases}$

Với $m\ne 0$; $m\ne -2$, thì (d) và (d_1) cắt nhau tại điểm $M(x_o,y_o)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} y_o = (m^2 + 2m - 1)x_o + 3m + 1 \\ y_o = -x_o + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m^2 + 2m - 1)x_o + 3m + 1 = -x_o + 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 2m)x_o = -3m$$

$$\Leftrightarrow m(m+2)x_o = -3m$$

$$\Rightarrow x_o = \frac{-3}{m+2}$$

Điểm M nằm bên trái trục tung $\Leftrightarrow x_o < 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{m+2} < 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$ (Thỏa mãn).

Vậy với $m > -2$ và m $\neq 0$ thì (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm bên trái trục tung.

Bài 4(3,5đ)

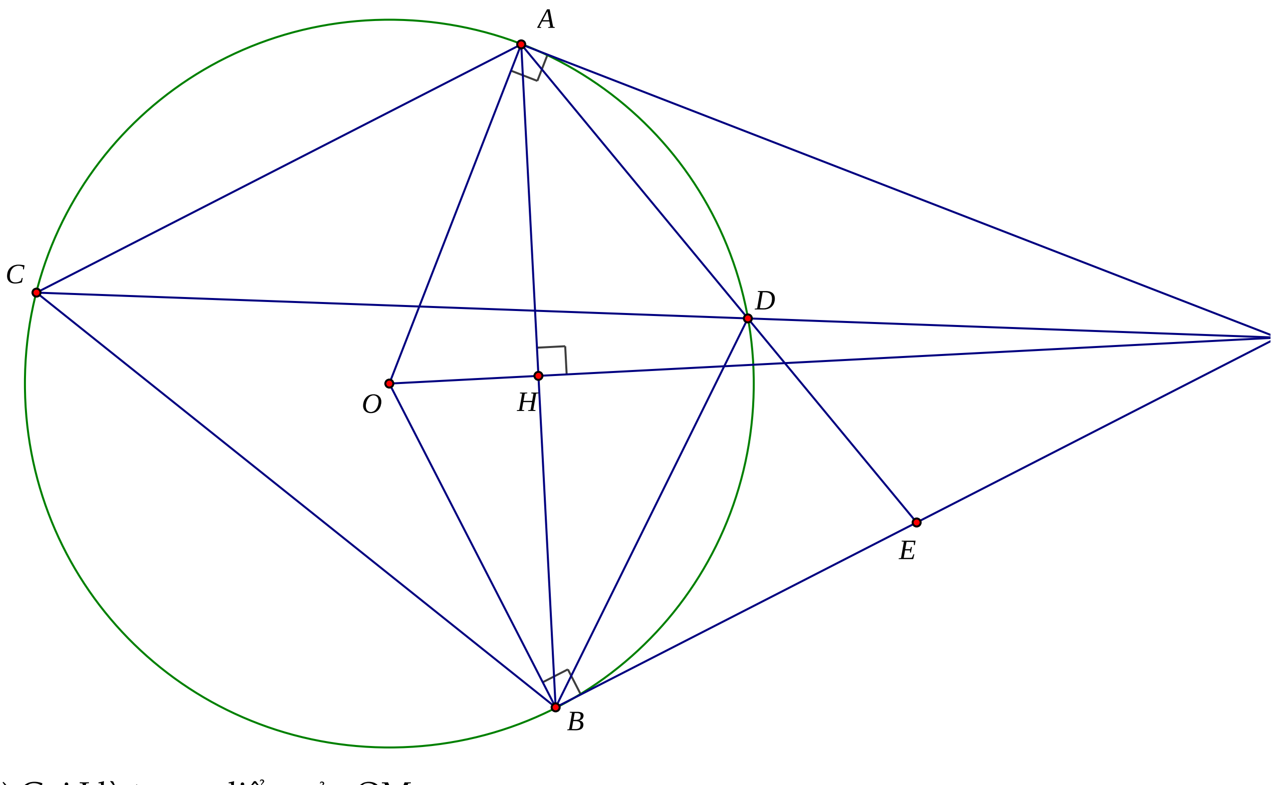
Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O; R). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A và B là tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn (O; R) tại C. Nối M và C cắt đường tròn (O; R) tại D, tia AD cắt MB tại E.

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn, và chỉ rõ đường kính của đường tròn đó

b) Chứng minh: $MA^2 = MD.MC$ và tính độ dài đoạn DC biết $MB = 6cm, MD = 4cm$

c) Chứng minh $ME = EB$

d) Xác định vị trí của điểm M để BD vuông góc với MA.



a) Gọi I là trung điểm của OM.

MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) (giả thiết).

$\Rightarrow OA \perp AM, OB \perp BM$ (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow \widehat{OAM} = 90^0, \widehat{OBM} = 90^0$ (1)

Xét ΔOAM vuông tại A có: I là trung điểm của OM nên ta có : $IO = IM = IA = \frac{1}{2}OM$ (tính chất).

Xét ΔOBM vuông tại B có: I là trung điểm của OM nên ta có : $IO = IM = IB = \frac{1}{2}OM$ (tính chất).

$\Rightarrow IO = IM = IA = IB = \frac{1}{2}OM$.

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn tâm I đường kính OM (đpcm).

b) $\widehat{ACD} = \widehat{DAM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O)) hay $\widehat{ACM} = \widehat{DAM}$

Xét ΔACM và ΔDAM có :

$\widehat{ACM} = \widehat{DAM}$ (cmt)

$\widehat{AMC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ACM \backsim \Delta DAM$ $(g-g)$

$\Rightarrow \frac{MA}{DM} = \frac{MC}{MA} (t/c) \Leftrightarrow MA^2 = DM.MC$ (đpcm) (2)

Ta có $MA = MB$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) (3)

$MB = 6cm, MD = 4cm$ (giả thiết) (4)

Từ (2),(3),(4) $\Rightarrow 6^2 = 4.MC \Leftrightarrow MC = 9cm \Rightarrow DC = MC - MD = 9 - 4$

Vậy $DC = 5cm$

c) Xét ΔBDE và ΔABE có :

$\widehat{BAE} = \widehat{DBE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$ của đường tròn (O))

$\widehat{AEB}$ chung

$\Rightarrow \Delta BDE \backsim \Delta ABE$ $(g-g)$.

$\Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{DE}{BE} (t/c) \Leftrightarrow BE^2 = AE.DE$ (5)

Ta có : $AC // MB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{EMD}$ (so le trong)

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{DAM}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{DAM}$ hay $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{EAM}$

Xét ΔDME và ΔMAE có :

$\widehat{EMD} = \widehat{EAM}$ (cmt)

$\widehat{AEM}$ chung

$\Rightarrow \Delta DME \backsim \Delta MAE$ $(g-g)$.

$\Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{DE}{ME}(t/c) \Leftrightarrow ME^2 = AE.DE$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow BE^2 = ME^2 \Leftrightarrow BE = ME$ (đpcm)

d) Gọi H là giao điểm của AB và OM

Hai điểm A và B thuộc (O) (giả thiết) $\Rightarrow OA = OB$ (7)

Từ (3) và (7) $\Rightarrow$OM là trung trực của AB$\Rightarrow MH \perp AB$ (8)

Vì $OA \perp MA$ (cmt) nên $BD \perp MA \Leftrightarrow BD//OA \Leftrightarrow \widehat{OAB} = \widehat{DBA}$ (9)

Từ (7) $\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (t/c) (10)

Do $OM \perp AB$ tại H $\Rightarrow \widehat{OBA} = 90^0 - \widehat{BOH} = 90^0 - \widehat{BOM}$

Ta lại có $\widehat{OBM} = 90^0$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{OMB} = 90^0 - \widehat{BOM}$

$\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OBA}$ (11)

Từ (9),(10),(11)$\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow \widehat{DBA} = \widehat{BMO}$ (12)

$AC//MB$ (giả thiết)$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BMC}$ (so le trong) (13)

$\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O)) hay $\widehat{ACM} = \widehat{ABD}$ (14)

Từ (13) và (14) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BMC}$ (15)

Từ (12) và (15) $\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMO}$ (16)

Mà MO và MC là hai tia thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng MB nên (16) $\Leftrightarrow$ tia MO trùng với tia MC hay D là giao của đường tròn (O) với MO

Từ (8) $\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow$D là trực tâm của $\Delta ABM \Leftrightarrow AD \perp MB$

$\Leftrightarrow AD//OB$ (do $OB \perp BM$ (cmt) (17)

Từ (9) và (17)$\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow$tứ giác OADB là hình bình hành

Mà $OM \perp AB$ (cmt) hay $OD \perp AB \Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow$tứ giác OADB là hình thoi (dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow$H là trung điểm của OD$\Leftrightarrow OH = \dfrac{OD}{2} = \dfrac{R}{2}$

Xét ΔOAM vuông tại A và có đường cao AH ta có :

$OA^2 = OH.OM \Rightarrow OM = \dfrac{OA^2}{OH} = \dfrac{R^2}{\left(\dfrac{R}{2}\right)} = 2R$

Vậy $BD \perp MA$ khi và chỉ khi M cách tâm O một đoạn bằng 2R

Bài 5(0,5đ) Cho x, y là hai số không âm. Tìm x, y sao cho:

$$(x^2 + 2y + 3)(y^2 + 2x + 3) = (3x + y + 2)(3y + x + 2) \quad (1)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có : $\begin{cases}(x-1)^2 \ge 0\,(2) \\ (y-1)^2 \ge 0\,(3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 + 1 \ge 2x \\ y^2 + 1 \ge 2y\end{cases}$

$\Rightarrow VT_{(1)} \ge (2x + 2y + 2)(2x + 2y + 2)$ (do $x \ge 0; y \ge 0$)

$\Leftrightarrow VT_{(1)} \ge 4(x + y + 1)^2$ (4)

Đặt $3x + y + 2 = a;\ 3y + x + 2 = b \Rightarrow a + b = 4(x + y + 1)$

Ta có : $(a-b)^2 \geq 0\ \forall a,b \in \mathbb{R}$ (5)

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(x+y+1)^2}{4} \geq (3x+y+2)(3y+x+2)$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y+1)^2 \geq (3x+y+2)(3y+x+2) = VP_{(1)} \quad (6)$$

Từ (4) và (6) $\Rightarrow VT_{(1)} \geq VP_{(1)}$

Vậy $VT_{(1)} = VP_{(1)} \Leftrightarrow$ Dấu "=" đồng thời xảy ra ở cả (2),(3) và (5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ 3x+y+2=3y+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy $x=y=1$ thì bài toán thỏa mãn.

TRƯỜNG THCS LÊ QUÍ ĐÔN **ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LẦN 2**

Năm học: 2017 – 2018 **MÔN THI: TOÁN**

Đề số 35

Bài I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}$, $x\ge 0; x\ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=\sqrt{\left(5+\sqrt{13}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{13}-4\right)^2}$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = A:B khi x > 1.

Bài II. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 3 giờ 36 phút làm xong. Nếu làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc sớm hơn người thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu xong công việc.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\dfrac{y}{y+3}=1 \\ 4\sqrt{x-2}-\dfrac{3y}{y+3}=7 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-(4m-1)x+3m^2-2m=0$ (x là ẩn)

a) Giải phương trình khi m = 1.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1{}^2+x_2{}^2=7$.

Bài IV. Cho tam giác MAB vuông tại M, MB < MA. Kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Đường tròn (O) đường kính MH cắt MA và MB lần lượt tại E và F (E, F khác M).

1) Chứng minh tứ giác MEHF là hình chữ nhật.

2) Chứng minh tứ giác AEFB nội tiếp.

3) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O′) ngoại tiếp tam giác MAB tại P và Q (P thuộc cung MB). Chứng minh tam giác MPQ cân.

4) Gọi I là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường tròn (O′). Đường thẳng EF cắt đường thẳng AB tại K. Chứng minh ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Bài V. Giải phương trình: $2\sqrt{x+5}+9=2\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x^2+11x+5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}$ và $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}$, $x\ge 0; x\ne 1$

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=\sqrt{\left(5+\sqrt{13}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{13}-4\right)^2}$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = A:B khi x > 1.

1) Ta có $x=\sqrt{(5+\sqrt{13})^2}+\sqrt{(\sqrt{13}-4)^2}=5+\sqrt{13}+\sqrt{13}-4=9$

Thay $x=9$ (TMĐK) vào biểu thức A ta được: $A=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}=\dfrac{9+3+1}{9+1}=\dfrac{13}{10}$

Vậy giá trị biểu thức $A=\dfrac{13}{10}$ tại $x=9$

2) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 1$ ta có:

$$B=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

3) Ta có:

$$P=A:B=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}:\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}.\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)+\sqrt{x}-1+3}{(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\sqrt{x}+1+1+\frac{3}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}-1+\frac{3}{\sqrt{x}-1}+3$$

Với $x>1$, ta có: $\sqrt{x}-1>0$ và $\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}>0$. Áp dụng B Đ T cosi, ta có:

$$\sqrt{x}-1+\frac{3}{\sqrt{x}-1}\ge 2\sqrt{(\sqrt{x}-1).\frac{3}{\sqrt{x}-1}}=2\sqrt{3}\Rightarrow P=\sqrt{x}-1+\frac{3}{\sqrt{x}-1}+3\ge 2\sqrt{3}+3$$

Dấu “ = “ xảy ra ⇔ Dấu “=” ở B Đ T cosi xảy ra

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=\dfrac{3}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3}$ (thoả mãn điều kiện $x>1$)

Vậy $P_{min}=2\sqrt{3}+3 \Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3}$

Bài II. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.*

Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 3 giờ 36 phút làm xong. Nếu làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc sớm hơn người thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu xong công việc.

Đổi 3 giờ 36 phút = $\dfrac{18}{5}$ giờ.

Gọi thời gian người thứ nhất làm xong công việc là x (giờ, đk: $x>0$).

Từ giả thiết suy ra người thứ hai làm xong công việc là: $x+3$ (giờ)

Mỗi giờ người thứ nhất làm được: $\dfrac{1}{x}$ (công việc), người thứ hai làm được $\dfrac{1}{x+3}$ (công việc)

Vì cả hai làm chung công việc xong sau 3 giờ 36 nên mỗi giờ cả hai người làm được

$1:\dfrac{18}{5}=\dfrac{5}{18}$ (công việc)

Do đó ta có phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{5}{18}$

$\Leftrightarrow 5x^2-21x-54=0 \Leftrightarrow x=6$ (thỏa mãn ĐK) hoặc $x=\dfrac{-9}{5}$ (loại).

Vậy người thứ nhất làm xong công việc lúc 6 giờ, người thứ hai làm xong công việc lúc 9 giờ

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\dfrac{y}{y+3}=1 \\ 4\sqrt{x-2}-\dfrac{3y}{y+3}=7 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2-(4m-1)x+3m^2-2m=0$ (x là ẩn)

a) Giải phương trình khi $m=1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=7$.

1) Điều kiện $x\ge 2; y\ne -3$

Đặt $\sqrt{x-2}=a\ge 0; b=\dfrac{y}{y+3}$ hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases}2a+b=1\\4a-3b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2b=2\\4a-3b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=1\\(4a+2b)-(4a-3b)=2-7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=1\\5b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Với $a=1;b=-1$ ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}=1\\\dfrac{y}{y+3}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=1\\y=-y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\text{(TMĐK)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(3,-\dfrac{3}{2}\right)$

2a) Với $m=1$ phương trình trở thành: $x^2-3x+1=0$

$\Delta=(-3)^2-4.1=5>0$

=> Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

2b) Xét phương trình: $x^2-(4m-1)x+3m^2-2m=0$ (*).

$\Delta=(4m-1)^2-4(3m^2-2m)=4m^2+1>0\quad\forall m$

Vậy với $\forall m$ phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2

Hệ thức Viet: $\begin{cases}x_1+x_2=4m-1\\x_1x_2=3m^2-2m\end{cases}$

Để hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $x_1^2+x_2^2=7\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7$

$\Leftrightarrow(4m-1)^2-2(3m^2-2m)=7$

$\Leftrightarrow 16m^2-8m+1-6m^2+4m-7=0$

$\Leftrightarrow 10m^2-4m-6=0$

$\Leftrightarrow 5m^2-2m-3=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-2m+3m^2-3=0$

$\Leftrightarrow 2m(m-1)+3(m-1)(m+1)=0$

$\Leftrightarrow (m-1)(5m+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

Vậy với $m \in \left\{1; -\dfrac{3}{5}\right\}$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 7$

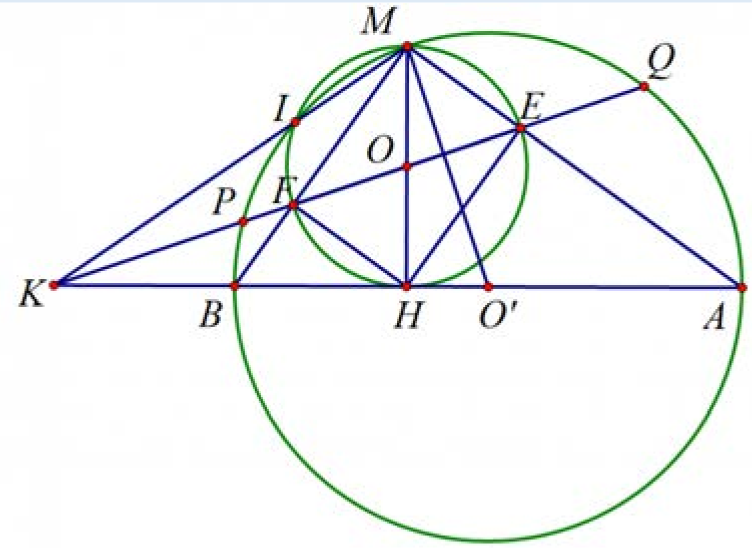
Bài IV. Cho tam giác MAB vuông tại M, MB < MA. Kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Đường tròn (O) đường kính MH cắt MA và MB lần lượt tại E và F (E, F khác M).

1) Chứng minh tứ giác MEHF là hình chữ nhật.

2) Chứng minh tứ giác AEFB nội tiếp.

3) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O′) ngoại tiếp tam giác MAB tại P và Q (P thuộc cung MB). Chứng minh tam giác MPQ cân.

4) Gọi I là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường tròn (O′). Đường thẳng EF cắt đường thẳng AB tại K. Chứng minh ba điểm M, I, K thẳng hàng.



1) Chứng minh tứ giác MEHF là hình chữ nhật.

Xét đường tròn (O) đường kính MH cắt MA, MB lần lượt tại E và F (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{MFH} = \widehat{MEH} = 90^0$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). (1)

Xét ΔMAB vuông tại M (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MEHF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết).

2) Chứng minh tứ giác AEFB nội tiếp.

ΔAHM vuông tại H (do $MH \perp AB$ tại H) có $HE \perp AM$ tại E (do $\widehat{MEH} = 90^0$, $E \in AM$)

$\Rightarrow \widehat{HAE} + \widehat{HME} = 90° = \widehat{HME} + \widehat{MHE}$ (cặp góc phụ nhau)

$\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{MHE}$

Mà $\widehat{MHE} = \widehat{MFE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung ME của (O'))

$\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{MFE}$ hoặc $\widehat{BAE} = \widehat{MFE}$

Mà $\widehat{MFE} + \widehat{BFE} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{BFE} = 180°$.

Mà $\widehat{BAE}$; $\widehat{BFE}$ là hai góc đối của tứ giác $AEFB$

$\Rightarrow$ tứ giác $AEFB$ nội tiếp

3) Chứng minh tam giác MPQ cân.

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{MFE}$ (cmt) hoặc $\widehat{BAM} = \widehat{MFE}$

Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ nên trong ΔAMB có $\widehat{BAM} + \widehat{ABM} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{MFE} + \widehat{ABM} = 90°$

Ta có $O'B = O'M$ (bán kính đường tròn (O')) nên $\Delta BO'M$ cân tại O'

$\Rightarrow \widehat{O'BM} = \widehat{O'MB}$ hoặc $\widehat{ABM} = \widehat{O'MB}$

Do đó $\widehat{MFE} + \widehat{O'MB} = 90°$

$\Rightarrow O'M \perp EF$ hoặc $O'M \perp PQ$

Mà PQ và $O'M$ lần lượt là dây cung và bán kính của đường tròn (O').

$\Rightarrow O'M \perp PQ$ tại trung điểm của PQ (quan hệ đường kính và dây)

Hay $O'M$ là đường trung trực của PQ

$\Rightarrow MP = MQ$ (tính chất điểm thuộc đường trung trực)

$\Rightarrow \Delta MPQ$ câ tại M.

4) Chứng minh ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Ta có $O'M \perp PQ$ (cmt) và K, O thuộc đường thẳng PQ $\Rightarrow O'M \perp KO$

Cũng có $MH \perp KO'$ (do $MH \perp AB$) và MH cắt OK tại O.

$\Rightarrow O$ là trực tâm của tam giác $MO'K$

$\Rightarrow O'O \perp MK$ (*)

Mà I, M là hai giao điểm của đường tròn (O) và đường tròn (O') nên $O'O \perp MI$ (**)

Từ (*), (**) $\Rightarrow$ $MK \equiv MI$ hay M, I, K thẳng hàng.

Bài V. Giải phương trình: $2\sqrt{x+5}+9 = 2\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x^2+11x+5}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 2x^2+11x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-1}{2}$

Phương trình trở thành: $2(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5})+\sqrt{2x^2+11x+5}-9=0$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{2x+1-x-5}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}+\frac{2x^2+11x+5-81}{\sqrt{2x^2+11x+5}+9}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}+\frac{(x-4)(2x+19)}{\sqrt{2x^2+11x+5}+9}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left[\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}+\frac{2x+19}{\sqrt{2x^2+11x+5}+9}\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=4$ (tmđk)

Vì $\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}+\dfrac{2x+19}{\sqrt{2x^2+11x+5}+9}>0$ với $x \geq \dfrac{-1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=4$.

SỞ GD & ĐT HÀ NỘI

TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN

Đề số 36

ĐỀ THI THỬ VÀO 10

Môn: TOÁN

Năm học: 2019 – 2020

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I *(2,0 điểm)*. Hai biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$; $B=\left(\dfrac{4\sqrt{x}+4x}{8x\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}-1}\right)$ với $x\ge 0; x\ne \dfrac{1}{4}$.

1) Tính giá trị của A khi $x=1$

2) Chứng minh biểu thức $T=\dfrac{B}{A}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}+1}$.

3) Với $x\ge 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của $L=\dfrac{1}{T}+4T$.

3') Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=T.\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên dương.

Bài II (*2,0 điểm). Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một người khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B, khi đến tỉnh B, người đó 2 giờ nghỉ ngơi rồi quay về tỉnh A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 12km/giờ. Tổng thời gian từ lúc bắt đầu đi từ tỉnh A đến tỉnh B rồi trở về đến tỉnh A là 5 giờ. Hãy tình vận tốc lúc đi và về, biết quãng đường từ tỉnh A đến tỉnh B dài 80 km.

Bài III (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+3\sqrt{4x-8}=14\\ \dfrac{5-x-y}{x+y}-2\sqrt{x-2}=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$

2) Cho (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d) $y=3x+m^2-1$

a) Chứng minh rằng với mọi m thì (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi $x_1; x_2$ là các hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm m để $|x_1|+2|x_2|=3$.

Bài IV*(3,5 điểm).* Cho đường tròn (O; R), vẽ dây AB cố định không đi qua tâm O. Lấy điểm S bất kỳ thuộc tia đối của tia AB. Kẻ hai tiếp tuyến SM, SN với (O) (M, N là các tiếp điểm, NN thuộc cung nhỏ AB). Gọi H là trung điểm AB.

1) Chứng minh tứ giác MNHO nội tiếp.

2) Phân giác của góc AMB cắt AB tại K. Chứng minh ΔSMK cân và $\dfrac{NA}{NB}=\dfrac{MA}{MB}$.

3) Chứng minh: $\widehat{NMK}=\dfrac{1}{2}\widehat{NOH}$.

4) Gọi I là trung điểm của NB. Kẻ $IF\perp AN$ $(F\in AN)$. Giả sử $\widehat{AOB}=120^{o}$. Chứng minh rằng khi điểm S di động trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định và tính bán kính của đường tròn này theo R.

Bài V*(0,5 điểm).*

Một cơ sở sản xuất kem chuẩn bị làm 1000 chiếc kem giống nhau theo đơn hàng. Cốc đựng kem có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang ABCD vuông tại A và D xung quanh trục AD.

Chiếc cốc có bề dày không đáng kể, chiều cao 7,2cm; đường kính miệng cốc bằng 6,4cm; đường kính đáy cốc bằng 1,6cm. Kem được bỏ đầy cốc và dư ra phía ngoài một lượng có dạng nửa hình cầu, có bán kính bằng bán kính miệng cốc. Tính lượng kem cơ sở đó cần dùng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I *(2,0 điểm)*. Biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$; $B=\left(\dfrac{4\sqrt{x}+4x}{8x\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}-1}\right)$ với $x\ge 0; x\ne \dfrac{1}{4}$

.

1) Tính giá trị của A khi $x=1$

2) Chứng minh biểu thức $T=\dfrac{B}{A}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}+1}$.

3) Với $x\ge 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của $L=\dfrac{1}{T}+4T$.

3′) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P=T.\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên dương.

1) Khi x = 1 (thỏa mãn Đ K), thay vào biểu thức A, ta được:

$$A=\frac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}=\frac{2+1}{4+2+1}=\frac{3}{7}$$

Vậy $A=\frac{3}{7}$ khi $x=1$

$$T=\frac{B}{A}=\left(\frac{4\sqrt{x}+4x}{8x\sqrt{x}-1}-\frac{1}{2\sqrt{x}-1}\right):\frac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$$

$$=\left(\frac{4\sqrt{x}+4x}{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}-\frac{1}{2\sqrt{x}-1}\right):\frac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$$

$$=\left(\frac{4\sqrt{x}+4x}{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}-\frac{4x+2\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}\right):\frac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{4\sqrt{x}+4x-4x-2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}:\frac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}:\frac{2\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}.\frac{4x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\ (\text{đpcm})$$

3) Ta có: $L=\frac{1}{T}+4T=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}+1}}+4.\frac{1}{2\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x}+1+\frac{4}{2\sqrt{x}+1}$

Sai lầm mắc phải:

Khi tìm ra được biểu thức $L=2\sqrt{x}+1+\frac{4}{2\sqrt{x}+1}$*, nhiều bạn đã vội vàng áp dụng luôn áp dụng B Đ T cosi cho* $2\sqrt{x}+1$ *và* $\frac{4}{2\sqrt{x}+1}$*, và khi đó:*

$$L=2\sqrt{x}+1+\frac{4}{2\sqrt{x}+1}\geq 2\sqrt{\left(2\sqrt{x}+1\right).\frac{4}{2\sqrt{x}+1}}=4$$

Từ đó kết luận, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1=\frac{4}{2\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Rồi từ đó vội vàng kết luận $L_{min}=4\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ *(Thỏa mãn điều kiện).*

Lời giải trên sai lầm ở chỗ $x = \frac{1}{4}$ *chỉ thỏa mãn điều kiện rút gọn, nhưng lại không thỏa mãn điều kiện yêu cầu là* $x \ge 1$ *, do đó việc áp dụng ngay BĐT cosi là không đúng.*

Lời giải đúng:

Với $x \ge 1$ nhận thấy $2\sqrt{x}+1 \ge 3$, do đó nếu áp dụng B Đ T cosi thì có thể dấu "=" sẽ xảy ra khi $2\sqrt{x}+1=3$, do đó ta sẽ phân tích tiếp biểu thức L để áp dụng BĐT cosi theo điều kiện dấu "=" xảy ra khi $2\sqrt{x}+1=3$.

Đặt $2\sqrt{x}+1=t \Rightarrow t \ge 3$ (vì $x \ge 1$), ta có:

$$L = t + \frac{4}{t} = \left(\frac{4t}{9}+\frac{4}{t}\right)+\frac{5t}{9} \ge 2\sqrt{\frac{16}{9}}+\frac{5}{3} = \frac{13}{3} (\text{do } t \ge 3)$$

Áp dụng B Đ T cosi, ta có: $\frac{4t}{9}+\frac{4}{t} \ge 2\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8}{3}$ (1)

Theo $t \ge 3 \Rightarrow \frac{5t}{9} \ge \frac{5}{3}$ (2)

Do đó: $L = t+\frac{4}{t} = \left(\frac{4t}{9}+\frac{4}{t}\right)+\frac{5t}{9} \ge \frac{8}{3}+\frac{5}{3} = \frac{13}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (1) và (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4t}{9} = \frac{4}{t} \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$

Khi đó $L_{Min} = \frac{13}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn)

Vậy $\text{Min}\, L = \frac{13}{3} \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow x=1$.

Bài II (2,0 điểm). *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một người khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B, khi đến tỉnh B, người đó 2 giờ nghỉ ngơi rồi quay về tỉnh A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 12km/giờ. Tổng thời gian từ lúc bắt đầu đi từ tỉnh A đến tỉnh B rồi trở về đến tỉnh A là 5 giờ. Hãy tình vận tốc lúc đi và về, biết quãng đường từ tỉnh A đến tỉnh B dài 80 km.

Gọi vận tốc lúc đi của người đó là x (km/h) (Điều kiện: $x > 0$)

Thời gian người đó đi hết quãng đường AB là: $\frac{80}{x}$ (h)

Vận tốc của người đó lúc về là: $x+12$ (km/h)

Thời gian người đó quay trở về A là: $\dfrac{80}{x+12}$(h)

Tổng thời gian từ lúc bắt đầu đi từ tỉnh A đến tỉnh B rồi trở về đến tỉnh A là 5 giờ, nên ta có phương trình :

$$\frac{80}{x+12}+\frac{80}{x}+2=5$$
$$\Leftrightarrow 80x+80\left(x+12\right)=3x\left(x+12\right)$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-124x-960=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-48\right)\left(3x+20\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=48 & \text{(thoa man)} \\ x=-\dfrac{20}{3} & \text{(loai)} \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc lúc đi của người đó là 48 km/h, vận tốc lúc về của người đó là 60 km/h.

Bài III (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+3\sqrt{4x-8}=14 \\ \dfrac{5-x-y}{x+y}-2\sqrt{x-2}=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$

2) Cho (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d) $y=3x+m^2-1$

a) Chứng minh rằng với mọi m thì (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi $x_1; x_2$ là các hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm m để $|x_1|+2|x_2|=3$.

1) Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+3\sqrt{4x-8}=14 \\ \dfrac{5-x-y}{x+y}-2\sqrt{x-2}=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+3.2\sqrt{x-2}=14 \\ \dfrac{5}{x+y}-1-2\sqrt{x-2}=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+6\sqrt{x-2}=14 \\ \dfrac{5}{x+y}-2\sqrt{x-2}=\dfrac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+6\sqrt{x-2}=14 \\ \dfrac{15}{x+y}-6\sqrt{x-2}=\dfrac{-9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+3\sqrt{x-2}=7 \\ \dfrac{19}{x+y}=\dfrac{19}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x-2}=6 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-4 \end{cases}$$

Kết luận nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left(-6.4\right)$.

2.a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2=3x+m^2-1\Leftrightarrow x^2-3x-m^2+1=0 \qquad (1)$$

$\Delta=9+4m^2-4=4m^2+5>0$.

Do đó phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Với mọi m thì (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt (đpcm).

2b) Theo câu a) phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3 & (2) \\ x_1.x_2=-m^2+1 & (3) \end{cases}$

Trường hợp 1: Xét $x_1\ge 0;x_2\ge 0$ thì

$$\left|x_1\right|+2\left|x_2\right|=3\Leftrightarrow x_1+2x_2=3 \qquad (4)$$

Từ (2) và (4) $\Rightarrow x_2=0,x_1=3$ (thỏa mãn $x_1\ge 0;x_2\ge 0$)

Thay vào $x_1x_2=-m^2+1\Rightarrow 0=-m^2+1\Rightarrow m=\pm 1$

Trường hợp 2: Xét $x_1\le 0;x_2\le 0$ thì

$$\left|x_1\right|+2\left|x_2\right|=3\Leftrightarrow -x_1-2x_2=3\Leftrightarrow x_1+2x_2=-3 \qquad (5)$$

Từ (2) và (5) $\Rightarrow x_2=-6,x_1=9$ (không thỏa mãn $x_1\le 0;x_2\le 0$)

Trường hợp 3: Xét $x_1>0;x_2<0$ thì

$$\left|x_1\right|+2\left|x_2\right|=3\Leftrightarrow x_1-2x_2=3 \qquad (6)$$

Từ (2) và (6) $\Rightarrow x_2=0,x_1=3$ (không thỏa mãn $x_1>0;x_2<0$)

Trường hợp 4: Xét $x_1<0;x_2>0$ thì

$$\left|x_1\right|+2\left|x_2\right|=3\Leftrightarrow -x_1+2x_2=3 \qquad (7)$$

Từ (2) và (7) $\Rightarrow x_2=2,x_1=1$ (không thỏa mãn $x_1<0;x_2>0$).

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

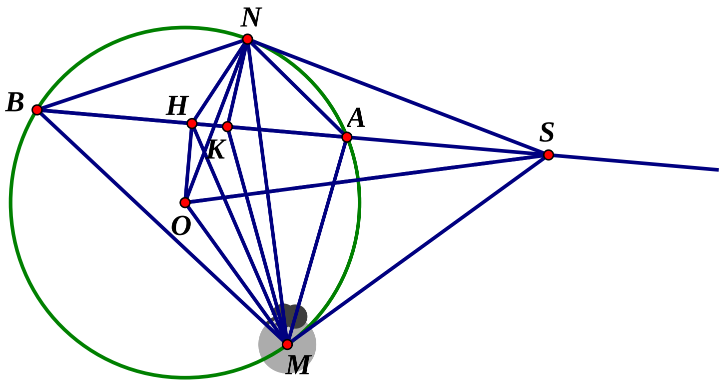
Bài IV*(3,5 điểm)*. Cho đường tròn (O; R), vẽ dây AB cố định không đi qua tâm O. Lấy điểm S bất kỳ thuộc tia đối của tia AB. Kẻ hai tiếp tuyến SM, SN với (O) (M, N là các tiếp điểm, NN thuộc cung nhỏ AB). Gọi H là trung điểm AB.

1) Chứng minh tứ giác MNHO nội tiếp.

2) Phân giác của góc AMB cắt AB tại K. Chứng minh ΔSMK cân và $\dfrac{NA}{NB}=\dfrac{MA}{MB}$.

3) Chứng minh: $\widehat{NMK}=\dfrac{1}{2}\widehat{NOH}$.

4) Gọi I là trung điểm của NB. Kẻ $IF\perp AN\ (F\in AN)$. Giả sử $\widehat{AOB}=120^{\circ}$. Chứng minh rằng khi điểm S di động trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định và tính bán kính của đường tròn này theo R.



1) Chứng minh tứ giác MNHO nội tiếp.

Ta có SN, SM lần lượt là các tiếp tuyến tại N và M của (O) (gt)

$\Rightarrow SN\perp ON$ tại N ; $SM\perp OM$ tại M.

$\Rightarrow \widehat{SNO}=90^{\circ}$; $\widehat{SMO}=90^{\circ}$

Ta có H là trung điểm của dây AB của (O) (gt)

$\Rightarrow OH\perp AB$ tại H (liên hệ đường kính và dây).

$\Rightarrow \widehat{SHO}=90^{\circ}$

Xét tứ giác OHNS có: $\widehat{ONS}=\widehat{OHS}=90^{0}$. Mà 2 đỉnh N, H là hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh OS

=> Tứ giác OHNS nội tiếp. (1)

Xét tứ giác OHSM có: $\widehat{OMS}+\widehat{OHS}=90^{0}+90^{0}=180^{0}$. Mà 2 góc ở vị trí đối nhau

=>Tứ giác OHSM nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) => 5 điểm O, H, N, S, M cùng thuộc đường tròn =>Tứ giác OHNM nội tiếp.

2) Chứng minh ΔSMK cân và $\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB}$.

Ta có: $\widehat{SKM} = \widehat{ABM} + \widehat{KMB}$ (góc ngoài tại đỉnh K của ΔBKM)

$\widehat{SMK} = \widehat{SMA} + \widehat{AMK}$

Mà $\widehat{ABM} = \widehat{SMA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn cung AM của (O));

$\widehat{KMB} = \widehat{KMA}$ (vì MK là tia phân giác của $\widehat{AMB}$)

$\Rightarrow \widehat{SKM} = \widehat{SMK} \Rightarrow \Delta SMK$ cân tại S (đpcm).

Xét ΔSAN và ΔSNB có:

$\widehat{SNA} = \widehat{SBN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MA}$ của (O))

$\widehat{NSA}$ chung.

$\Rightarrow \Delta SAN \backsim \Delta SNB$ (g.g) => $\frac{AN}{BN} = \frac{SA}{SN}$ (tính chất).

Xét ΔSAM và ΔSMB có:

$\widehat{SMA} = \widehat{SBM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NA}$ của (O))

$\widehat{MSA}$ chung.

$\Rightarrow \Delta SAM \backsim \Delta SMB$ (g.g) => $\frac{AM}{BM} = \frac{SA}{SM}$ (tính chất).

Mà SN = SM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

=> $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$ (đpcm).

3) Chứng minh: $\widehat{NMK} = \frac{1}{2}\widehat{NOH}$.

Ta có: $\widehat{SHM} = \widehat{HBM} + \widehat{HMB}$ (góc ngoài tại đỉnh H của ΔBHM)

$\widehat{SNM} = \widehat{SNA} + \widehat{ANM}$

Mà $\widehat{SHM} = \widehat{SNM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{SM}$ của đường tròn (SNHOM))

$\widehat{HBM} = \widehat{ANM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$ của (O))

=> $\widehat{HMB} = \widehat{SNA}$

Mà $\widehat{SNA} = \widehat{AMN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$ của (O))

=> $\widehat{HMB} = \widehat{AMN}$

Mà $\widehat{KMB} = \widehat{KMA}$ (vì MK là tia phân giác của $\widehat{AMB}$).

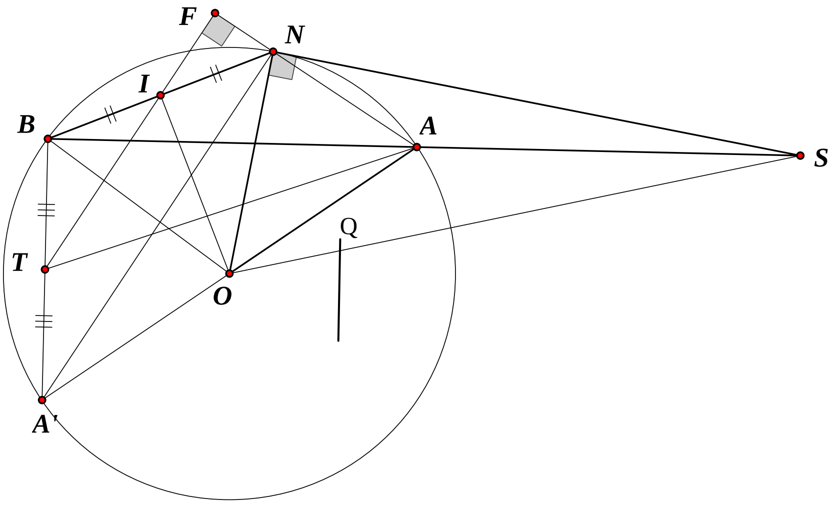
$=> \widehat{KMB} - \widehat{HMB} = \widehat{KMA} - \widehat{AMN}$

$=> \widehat{HMK} = \widehat{NMK}$ $=> \widehat{NMK} = \frac{1}{2}\widehat{NMH}$

Mà $\widehat{NMH} = \widehat{NOH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NH}$ của đường tròn (SNHOM))

$=> \widehat{NMK} = \frac{1}{2}\widehat{NOH}$

4) Chứng minh rằng khi điểm S di động trên tia đối của tia AB thì F luôn thuộc một đường tròn cố định và tính bán kính của đường tròn này theo R.



Vẽ đường kính AA' của đường tròn (O) ta có điểm A' cố định (vì A và O cố định).

$\widehat{A'NA} = 90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) đường kính AA')

$\Rightarrow NA' \perp NA \Rightarrow NA' // IF$ (vì $IF \perp AN$) (3)

Gọi T là trung điểm BA', do B và A' cố định nên T cố đinh

$\Rightarrow IT$ là đường trung bình của $\Delta A'BN$

$\Rightarrow IT // NA'$ (tính chất đường trung) (4)

Từ (3) và (4) có $I; F; T$ thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{TFA} = 90^{\circ} \Rightarrow F \in$ đường tròn đường kính TA cố định.

Kẻ phân giác OQ của tam giác cân AOB, với $\widehat{AOB} = 120^{\circ} \Rightarrow AB = 2AQ = R\sqrt{3}$

$\Delta ABA'$ vuông tại B có: $AA'^2 = AB^2 + A'B^2$ (Định lý Pytago).

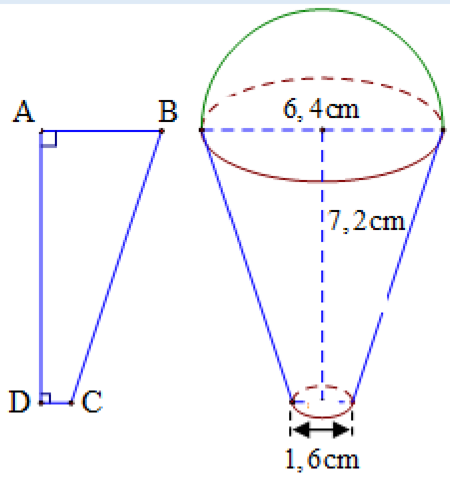
$$\Rightarrow A'B = \sqrt{A'A^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - 3R^2} = R \Rightarrow BT = \frac{R}{2}$$

ΔABT vuông tại B có: $AT = \sqrt{AB^2 + BT^2} = \sqrt{3R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}R$

Bán kính của đường tròn đường kính TA là : $\frac{\sqrt{13}}{4}R$

B

Bài V(*0,5 điểm*). Một cơ sở sản xuất kem chuẩn bị làm 1000 chiếc kem giống nhau theo đơn hàng. Cốc đựng kem có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang ABCD vuông tại A và D xung quanh trục AD. Chiếc cốc có bề dày không đáng kể, chiều cao 7,2cm; đường kính miệng cốc bằng 6,4cm; đường kính đáy cốc bằng 1,6cm. Kem được bỏ đầy cốc và dư ra phía ngoài một lượng có dạng nửa hình cầu, có bán kính bằng bán kính miệng cốc. Tính lượng kem cơ sở đó cần dùng.



Thể tích cốc kem là:

$$V_1 = \frac{h}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \frac{7,2}{3}\pi\left(3,2^2 + 0,8^2 + 3,2.0,8\right) \approx 101\left(cm^3\right)$$

Thể tích phần kem dư phía trên:

$$V_2 = \frac{1}{2}.\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{4}{3}\pi.3,2^3\right) \approx 69\left(cm^3\right)$$

Thể tích một chiếc kem là:

$$V = V_1 + V_2 \approx 101 + 69 = 170\left(cm^3\right)$$

Lượng kem cơ sở cần phải dùng là:

$$170.1000 = 170000\left(cm^3\right) = 170\left(dm^3\right)$$

TRƯỜNG THCS HOÀNG HOA THÁM
NĂM HỌC 2017 – 2018

Đề số 37

ĐỀ THI THỬ LẦN 2 VÀO LỚP 10
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 16/5/2018
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I: Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{5\sqrt{x}-2}{4-x}$ với $x\ge 0; x\ne 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 16.

2) Rút gọn biểu thức P = A.B.

3) Tìm x để $(6x+18).P\ge x+9$.

Bài II. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Một tổ dự định sản xuất 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế tổ lại được giao 80 sản phẩm. Mặc dù mỗi giờ tổ đó làm thêm 1 sản phẩm so với dự kiến nhưng thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn dự định 12 phút. Tính số sản phẩm thực tế tổ đó đã làm được trong một giờ. Biết lúc đầu, mỗi giờ tổ đó dự kiến làm không quá 20 sản phẩm.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2|x-1|-\dfrac{5}{\sqrt{y}}=1 \\ |x-1|+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$

2) Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx+\dfrac{1}{2}$.

a) Chứng minh (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với mọi m.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục Ox. Tìm m để độ dài CD = 2.

Bài IV. Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I; AF cắt tia DC tại K.

1) Chứng minh rằng tứ giác AHIF là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng: HA.HB = HI.HK.

3) Đường tròn ngoại tiếp ΔKIF cắt AI tại E. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định và I cách đều ba cạnh ΔHFE.

Bài V. Giải phương trình: $\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}}=1+2\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I: Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{5\sqrt{x}-2}{4-x}$ với $x\ge 0; x\ne 4.$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 16.

2) Rút gọn biểu thức P = A.B.

3) Tìm x để $(6x+18).P\ge x+9.$

1) Thay x = 16 (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A ta được $A=\dfrac{\sqrt{16}-2}{16+3}=\dfrac{2}{19}$

2) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+3}.\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{5\sqrt{x}-2}{4-x}\right)$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{x+3}.\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right).\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{x+3}.\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right).\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(x+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right).\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{x+3}$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ với $x\ge 0; x\ne 4.$

3) Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ với $x\ge 0; x\ne 4.$

$$\left(6x+18\right).P\ge x+9$$

$$\Leftrightarrow 6(x+3).\frac{\sqrt{x}}{x+3}\ge x+9\ \ (x\ge 0;\ x\ne 4)$$

$$\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0$$

$$\Rightarrow x=9\ (t/m)$$

Vậy với x = 9 thì $(6x+18).P\ge x+9.$

Bài II. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Một tổ dự định sản xuất 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế tổ lại được giao 80 sản phẩm. Mặc dù mỗi giờ tổ đó làm thêm 1 sản phẩm so với dự kiến nhưng thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn dự định 12 phút. Tính số sản phẩm thực tế tổ đó đã làm được trong một giờ. Biết lúc đầu, mỗi giờ tổ đó dự kiến làm không quá 20 sản phẩm.

Gọi số sản phẩm đội dự định làm trong 1 giờ là x (sản phẩm) $(x \in N^*;\ x \le 20)$

Theo dự định, thời gian hoàn thành 72 sản phẩm là $\frac{72}{x}$ (h).

Theo thực tế, 1h đội làm được x +1 (sản phẩm), số sản phẩm cần làm là 80 nên thời gian hoàn thành là $\frac{80}{x+1}$ (h)

Vì thời gian thực tế chậm hơn dự định 12 phút = $\frac{1}{5}$ (h) nên ta có phương trình:

$$\frac{80}{x+1} - \frac{72}{x} = \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 39x + 360 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-24)(x-15) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 24 & (\text{loai}) \\ x = 15 & (\text{thoa man}) \end{array}\right.$$

Vậy số sản phẩm thực tế đội phải làm là 15 + 1 = 16 sản phẩm.

Bài III.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2|x-1| - \dfrac{5}{\sqrt{y}} = 1 \\ |x-1| + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

2) Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + \frac{1}{2}$.

a) Chứng minh (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B với mọi m.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục Ox. Tìm m để độ dài CD = 2.

1) Điều kiện: $y > 0$.

Đặt $\begin{cases} a = |x-1| \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$ $(a \geq 0; b > 0)$, ta có hệ PT:

$$\begin{cases} 2a - 5b = 1 \\ a + 2b = \dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b = 1 \\ 2a + 4b = \dfrac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-19}{5} < 0 \text{ (Không thỏa mãn)}$$

Vậy HPT vô nghiệm.

2a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = mx + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - 1 = 0 \qquad (1)$$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 2 \geq 2 \ \forall m$

=> Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

=> (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B

2b) Vì C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên Ox nên C(x_A; 0) và D(x_B;0).

Ta có: CD = 2

$$\Leftrightarrow |x_B - x_A| = 2$$
$$\Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow (x_B + x_A)^2 - 4x_Bx_A = 4 \ (2)$$

Vì $x_B; x_A$ là hai nghiệm của PT(1) nên theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_B + x_A = m \\ x_B.x_A = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Thay vào (2) $\Rightarrow m^2 - 4.\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

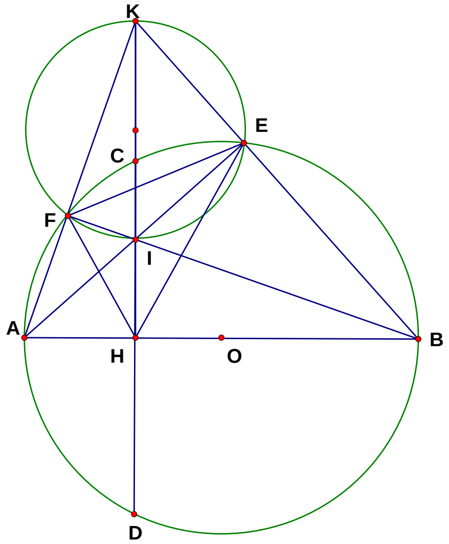
Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài IV. Cho (O;R) đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O. Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I; AF cắt tia DC tại K.

1) Chứng minh rằng tứ giác AHIF là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng: HA.HB = HI.HK.

3) Đường tròn ngoại tiếp ΔKIF cắt AI tại E. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định và I cách đều ba cạnh ΔHFE.



a) Chứng minh tứ giác AHIF nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AFI} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

$CD \perp AH$ tại H (giả thiết) và $I \in CD$ $\Rightarrow \widehat{AHI} = 90^o$.

Xét tứ giác AHFI có hai góc đối là $\widehat{AFI}$; $\widehat{AHI}$ và $\widehat{AFI} + \widehat{AHI} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AHIF nội tiếp (Định lý).

b) Chứng minh rằng: HA.HB = HI.HK.

Cách 1: *Trình bày như sau:*

Tứ giác AHIF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{FAH} + \widehat{FIH} = 180^o$ (Định lý)

Mà $\widehat{BIH} + \widehat{FIH} = 180^o$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{BIH}$ hay $\widehat{KAH} = \widehat{BIH}$.

Xét ΔHAK và ΔHIB có

$\widehat{AHK} = \widehat{IHB}$ (cùng bằng 90°)

$\widehat{KAH} = \widehat{BIH}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta HIB (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{HA}{HI} = \dfrac{HK}{HB} \Rightarrow HA.HB = HI.HK$ (đpcm)

Cách 2: *Trình bày như sau:*

Xét ΔHAK và ΔHIB có

$\widehat{AHK} = \widehat{IHB}$ (cùng bằng 90°)

$\widehat{HKA} = \widehat{HBI}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta HIB(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{HA}{HI} = \dfrac{HK}{HB} \Rightarrow HA.HB = HI.HK$ (đpcm)

c) Chứng minh E thuộc một đường tròn cố định và I cách đều ba cạnh ΔHFE.

*** Chứng minh E luôn thuộc đường tròn cố định:**

Ta có: $\widehat{AFB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow AF \perp BF \Rightarrow AK \perp BF$ tại F

$KH \perp AB$ tại H (vì $CD \perp AH$ tại H)

KH cắt BF tại I.

$\Rightarrow$ I là trực tâm của ΔAKB $\Rightarrow AI \perp KB$ (1)

ΔKIF vuông tại F, nên đường tròn ngoại tiếp ΔKIF có đường kính là KI.

$\Rightarrow$ $\widehat{AEK} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính KI).

$\Rightarrow AI \perp KE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ K, E, B thẳng hàng, khi đó $AI \perp KB$ tại E

$\Rightarrow \widehat{IEB} = 90^o$ hoặc $\widehat{AEB} = 90^o$

$\Rightarrow$ E luôn thuộc đường tròn $\left(O; \dfrac{AB}{2}\right)$ (đpcm)

*** Chứng minh EI là phân giác của $\widehat{FEH}$.**

Xét tứ giác IEBH có hai góc đối $\widehat{IEB}$; $\widehat{IHB}$ và $\widehat{IEB} + \widehat{IHB} = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác IEBH nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IBH}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{IH}$)

Xét đường tròn đường kính KI có: $\widehat{IEF} = \widehat{IKF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{IF}$).

Mà $\widehat{IBH} = \widehat{IKF}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IEF}$

$\Rightarrow$ EI là phân giác của $\widehat{FEH}$. (3)

*** Chứng minh IF là phân giác của $\widehat{HFE}$**

Xét đường tròn $\left(O; \dfrac{AB}{2}\right)$ có $\widehat{IFE} = \widehat{IAH}$.(hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{BE}$)

Ta có tứ giác AFIH nội tiếp (cmt) $\widehat{IAH} = \widehat{IFH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{IH}$).

Từ đó thu được $\widehat{IFE} = \widehat{IFH}$, hay IF là phân giác của $\widehat{HFE}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ I là gia điểm của các đường phân giác của ΔHFE.

$\Rightarrow$ I cách đều các cạnh của ΔHFE. (đpcm).

Bài V. Giải phương trình: $\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} = 1+2\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -3 \\ 3x+3-\sqrt{x+3} \ge 0 \end{cases}$

$$\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} = 1+2\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} + \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}} = 1+2\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}} = 1+2\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+2\sqrt{x+3}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} - \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4+\sqrt{x+3}} = 1 + \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow 3x+4+\sqrt{x+3} = 1+3x+3-\sqrt{x+3}+2\sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \sqrt{3x+3-\sqrt{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1$. (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là x =1.

PHÒNG GD-ĐT QUẬN THANH XUÂN
TRƯỜNG THCS NHÂN CHÍNH

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG THÁNG 1
MÔN TOÁN 9
Thời gian : 90 phút
Ngày kiểm tra: 26-01-2019

Đề số 38

Bài 1 (2đ): Cho các biểu thức sau: $A=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{x+3}{3+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=\dfrac{4}{9}$

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=B:A$

Bài 2 (2đ): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người làm chung một công việc trong vòng 4 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một nửa công việc rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp nửa công việc còn lại thì sẽ xong toàn bộ công việc trong 9 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu xong công việc biết người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc lâu hơn người thứ hai làm một mình xong công việc.

Bài 3 (2đ):

1) Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 7\sqrt{x-1}-\dfrac{4}{y+6}=\dfrac{5}{3} \\ 5\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{y+6}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

2) Cho hai đường thẳng (d) $y=(m^2+2m-1)x+3m+1$ và (d_1) $y=-x+1$

a) Với $m=1$, hãy xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1)

b) Tìm m để đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm bên trái trục tung.

Bài 4 (3,5đ): Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O; R). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A và B là tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn (O; R) tại C. Nối M và C cắt đường tròn (O; R) tại D, tia AD cắt MB tại E.

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn, và chỉ rõ đường kính của đường tròn đó

b) Chứng minh: $MA^2=MD.MC$ và tính độ dài đoạn DC biết $MB=6cm$, $MD=4cm$

c) Chứng minh $ME=EB$

d) Xác định vị trí của điểm M để BD vuông góc với MA.

Bài 5 (0,5đ): Cho x, y là hai số không âm. Tìm x, y sao cho:

$(x^2+2y+3)(y^2+2x+3)=(3x+y+2)(3y+x+2)$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

Bài 1 (2đ): Cho các biểu thức sau: $A=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B=\dfrac{x+3}{3+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=\dfrac{4}{9}$

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=B:A$

a) Điều kiện: $x\ge 0$

Với $x=\dfrac{4}{9}$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức B ta có:

$$B=\frac{\frac{4}{9}+3}{3+\sqrt{\frac{4}{9}}}=\frac{\left(\frac{31}{9}\right)}{3+\frac{2}{3}}=\frac{\left(\frac{31}{9}\right)}{\frac{11}{9}}=\frac{31}{11}$$

Vậy $B=\dfrac{31}{11}$ khi $x=\dfrac{4}{9}$

b) ĐK : $x\ge 0, x\ne 9$

$$A=\left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9}-\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}-\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\left(\frac{x+3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}.\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$ với $x\ge 0, x\ne 9$.

c) ĐK: $x\ge 0, x\ne 9$.

$$M=B:A=\frac{x+3}{3+\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}=\frac{(x+3)(\sqrt{x}+3)}{(3+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}=\frac{x+3}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x})^2-1+4}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\sqrt{x}-1+\frac{4}{\sqrt{x}+1}=(\sqrt{x}+1)+\frac{4}{\sqrt{x}+1}-2 \quad (1)$$

Do $x\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+1>0;\ \dfrac{4}{\sqrt{x}+1}>0$ nên theo bất đẳng thức côsi ta có:

$$(\sqrt{x}+1)+\frac{4}{\sqrt{x}+1}\ge 2\sqrt{(\sqrt{x}+1).\frac{4}{\sqrt{x}+1}}=4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (2) xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\dfrac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=2 (do\ \sqrt{x}+1>0 \forall x\geq 0)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (tmđk)

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M=B:A$ bằng 2 đạt được khi $x=1$

Bài 2 (2đ): *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Hai người làm chung một công việc trong vòng 4 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một nửa công việc rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp nửa công việc còn lại thì sẽ xong toàn bộ công việc trong 9 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu xong công việc biết người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc lâu hơn người thứ hai làm một mình xong công việc.

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình để xong công việc là : x (giờ)

Thời gian người thứ hai làm một mình để xong công việc là : y (giờ)

Điều kiện : $x>4, y>4; x>y$.

Mỗi giờ người thứ nhất làm được số lượng công việc là : $\dfrac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi giờ người thứ hai làm được số lượng công việc là : $\dfrac{1}{y}$ (công việc)

Hai người làm chung một công việc trong vòng 4 giờ thì xong nên ta có :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \qquad (1)$$

Thời gian để người thứ nhất làm xong một nửa công việc là : $\dfrac{x}{2}$ (giờ)

Thời gian để người thứ hai làm xong một nửa công việc là : $\dfrac{y}{2}$ (giờ)

Người thứ nhất làm một nửa công việc rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp nửa công việc còn lại thì sẽ xong toàn bộ công việc trong 9 giờ nên ta có :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\Leftrightarrow x+y=18 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}\\ x+y=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{4}\\ x+y=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=72\\ x+y=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(18-y)y=72\\ x=18-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-18y+72=0\\ x=18-y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y-6)(y-12)=0\\ x=18-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=6\\ y=12\end{array}\right.\\ x=18-y\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=6\\ x=12\end{cases}(tmdk)\\ \begin{cases}y=12\\ x=6\end{cases}(loai)\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ y=6\end{cases}(tmdk)$$

Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình để xong công việc là 12 giờ, thời gian người thứ hai làm một mình để xong công việc là 6 giờ

Bài 3 (2đ)

1) Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} 7\sqrt{x-1}-\dfrac{4}{y+6}=\dfrac{5}{3} \\ 5\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{y+6}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

2) Cho hai đường thẳng (d) $y=(m^2+2m-1)x+3m+1$ và (d_1) $y=-x+1$

a) Với $m=1$, hãy xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1)

b) Tìm m để đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm bên trái trục tung.

1) ĐK: $x\ge 1; y\ne -6$

Đặt $\sqrt{x-1}=a(a\ge 0), \dfrac{1}{y+6}=b$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 7a-4b=\dfrac{5}{3} \\ 5a+3b=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21a-12b=5 \\ 30a+18b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63a-36b=15 \\ 60a+36b=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63a-36b=15 \\ 123a=41 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{63a-15}{36} \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{6} \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases} (tmdk) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y+6}=\dfrac{1}{6} \\ \sqrt{x-1}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{10}{9} \end{cases} (tmdk)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{10}{9};0\right)$

2a) Thay $m=1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có : $y=2x+4$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1=2x+4 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=3 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1) là $A(-1;2)$

2b) Hai đường thẳng (d) $y=(m^2+2m-1)x+3m+1$ và (d_1) $y=-x+1$ cắt nhau.

$$\Leftrightarrow m^2+2m-1\ne -1$$

$$\Leftrightarrow m^2+2m\ne 0$$

$$\Leftrightarrow m\left(m+2\right)\ne 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ m\ne -2 \end{cases}$$

Với $m\ne 0$; $m\ne -2$, thì (d) và (d_1) cắt nhau tại điểm $M(x_o, y_o)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} y_o = (m^2 + 2m - 1)x_o + 3m + 1 \\ y_o = -x_o + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m^2 + 2m - 1)x_o + 3m + 1 = -x_o + 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 2m)x_o = -3m$$

$$\Leftrightarrow m(m+2)x_o = -3m$$

$$\Rightarrow x_o = \frac{-3}{m+2}$$

Điểm M nằm bên trái trục tung $\Leftrightarrow x_o < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{m+2} < 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$ (Thỏa mãn).

Vậy với $m > -2$ và m $\neq 0$ thì (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm bên trái trục tung.

Bài 4(3,5đ)

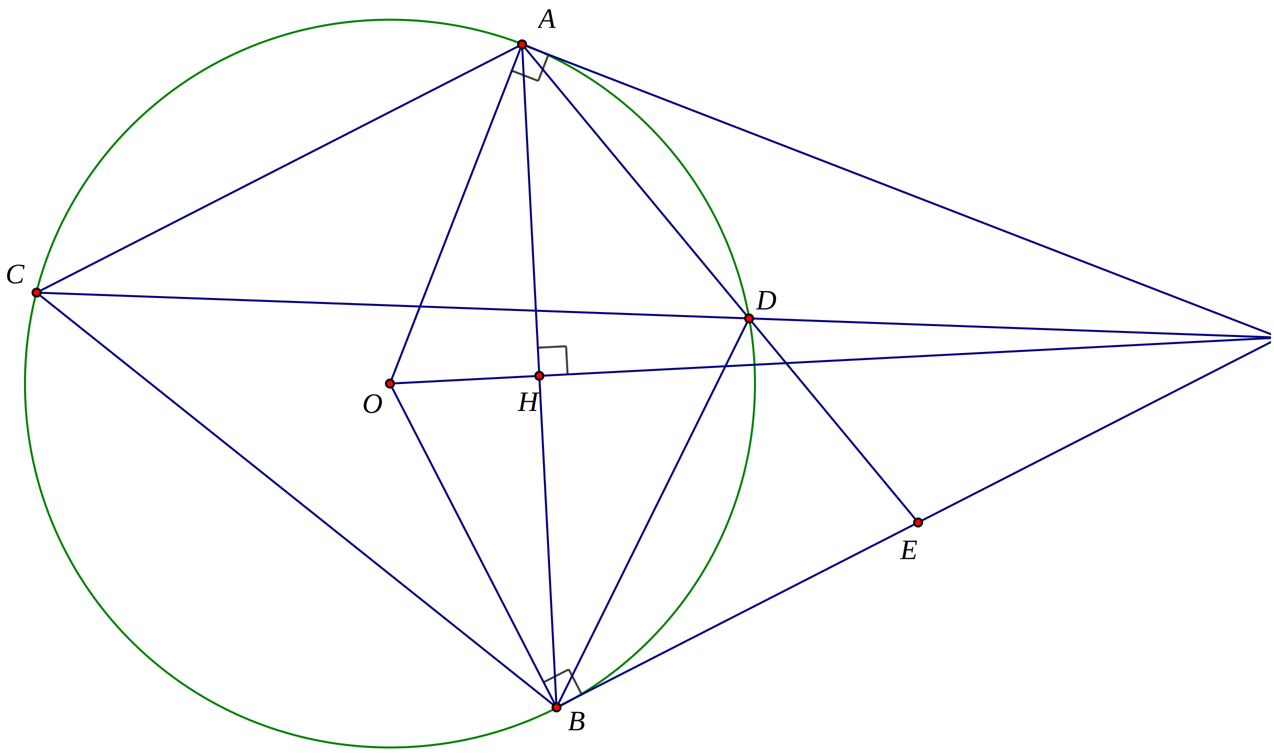
Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O; R). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A và B là tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn (O; R) tại C. Nối M và C cắt đường tròn (O; R) tại D, tia AD cắt MB tại E.

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn, và chỉ rõ đường kính của đường tròn đó

b) Chứng minh: $MA^2 = MD.MC$ và tính độ dài đoạn DC biết $MB = 6cm, MD = 4cm$

c) Chứng minh $ME = EB$

d) Xác định vị trí của điểm M để BD vuông góc với MA.



a) Gọi I là trung điểm của OM.

MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) (giả thiết).

$\Rightarrow OA \perp AM, OB \perp BM$ (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow \widehat{OAM} = 90^0, \widehat{OBM} = 90^0$ (1)

Xét ΔOAM vuông tại A có: I là trung điểm của OM nên ta có : $IO = IM = IA = \frac{1}{2}OM$ (tính chất).

Xét ΔOBM vuông tại B có: I là trung điểm của OM nên ta có : $IO = IM = IB = \frac{1}{2}OM$ (tính chất).

$\Rightarrow IO = IM = IA = IB = \frac{1}{2}OM$.

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn tâm I đường kính OM (đpcm).

b) $\widehat{ACD} = \widehat{DAM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O)) hay $\widehat{ACM} = \widehat{DAM}$

Xét ΔACM và ΔDAM có :

$\widehat{ACM} = \widehat{DAM}$ (cmt)

$\widehat{AMC}$ chung

$\Rightarrow \Delta ACM \backsim \Delta DAM \ (g-g)$

$\Rightarrow \frac{MA}{DM} = \frac{MC}{MA} (t/c) \Leftrightarrow MA^2 = DM.MC$ (đpcm) (2)

Ta có $MA = MB$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) (3)

$MB = 6cm, MD = 4cm$ (giả thiết) (4)

Từ (2),(3),(4) $\Rightarrow 6^2 = 4.MC \Leftrightarrow MC = 9cm \Rightarrow DC = MC - MD = 9 - 4$

Vậy $DC = 5cm$

c) Xét ΔBDE và ΔABE có :

$\widehat{BAE} = \widehat{DBE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$ của đường tròn (O))

$\widehat{AEB}$ chung

$\Rightarrow \Delta BDE \backsim \Delta ABE \ (g-g)$.

$\Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{DE}{BE} (t/c) \Leftrightarrow BE^2 = AE.DE$ (5)

Ta có : $AC // MB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{EMD}$ (so le trong)

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{DAM}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{DAM}$ hay $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{EAM}$

Xét ΔDME và ΔMAE có :

$\widehat{EMD} = \widehat{EAM}$ (cmt)

$\widehat{AEM}$ chung

$\Rightarrow \Delta DME \backsim \Delta MAE \ (g-g)$.

$\Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{DE}{ME}(t/c) \Leftrightarrow ME^2 = AE.DE$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow BE^2 = ME^2 \Leftrightarrow BE = ME$ (đpcm)

d) Gọi H là giao điểm của AB và OM

Hai điểm A và B thuộc (O) (giả thiết) $\Rightarrow OA = OB$ (7)

Từ (3) và (7) $\Rightarrow$OM là trung trực của AB$\Rightarrow MH \perp AB$ (8)

Vì $OA \perp MA$ (cmt) nên $BD \perp MA \Leftrightarrow BD//OA \Leftrightarrow \widehat{OAB} = \widehat{DBA}$ (9)

Từ (7) $\Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (t/c) (10)

Do $OM \perp AB$ tại H $\Rightarrow \widehat{OBA} = 90^0 - \widehat{BOH} = 90^0 - \widehat{BOM}$

Ta lại có $\widehat{OBM} = 90^0$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{OMB} = 90^0 - \widehat{BOM}$

$\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OBA}$ (11)

Từ (9),(10),(11)$\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow \widehat{DBA} = \widehat{BMO}$ (12)

$AC//MB$ (giả thiết)$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BMC}$ (so le trong) (13)

$\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O)) hay $\widehat{ACM} = \widehat{ABD}$ (14)

Từ (13) và (14) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BMC}$ (15)

Từ (12) và (15) $\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMO}$ (16)

Mà MO và MC là hai tia thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng MB nên (16) $\Leftrightarrow$ tia MO trùng với tia MC hay D là giao của đường tròn (O) với MO

Từ (8) $\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow$D là trực tâm của $\Delta ABM \Leftrightarrow AD \perp MB$

$\Leftrightarrow AD//OB$ (do $OB \perp BM$ (cmt) (17)

Từ (9) và (17)$\Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow$tứ giác OADB là hình bình hành

Mà $OM \perp AB$ (cmt) hay $OD \perp AB \Rightarrow BD \perp MA \Leftrightarrow$tứ giác OADB là hình thoi (dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow$H là trung điểm của OD$\Leftrightarrow OH = \dfrac{OD}{2} = \dfrac{R}{2}$

Xét ΔOAM vuông tại A và có đường cao AH ta có :

$$OA^2 = OH.OM \Rightarrow OM = \frac{OA^2}{OH} = \frac{R^2}{\left(\frac{R}{2}\right)} = 2R$$

Vậy $BD \perp MA$ khi và chỉ khi M cách tâm O một đoạn bằng 2R

Bài 5(0,5đ) Cho x, y là hai số không âm. Tìm x, y sao cho:

$$(x^2+2y+3)(y^2+2x+3) = (3x+y+2)(3y+x+2) \quad (1)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có : $\begin{cases} (x-1)^2 \ge 0\,(2) \\ (y-1)^2 \ge 0\,(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \ge 2x \\ y^2+1 \ge 2y \end{cases}$

$\Rightarrow VT_{(1)} \ge (2x+2y+2)(2x+2y+2)$ (do $x \ge 0; y \ge 0$)

$\Leftrightarrow VT_{(1)} \ge 4(x+y+1)^2$ (4)

Đặt $3x+y+2=a;\ 3y+x+2=b \Rightarrow a+b = 4(x+y+1)$

Ta có : $(a-b)^2 \geq 0 \; \forall a,b \in \mathbb{R}$ (5)

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(x+y+1)^2}{4} \geq (3x+y+2)(3y+x+2)$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y+1)^2 \geq (3x+y+2)(3y+x+2) = VP_{(1)} \quad (6)$$

Từ (4) và (6) $\Rightarrow VT_{(1)} \geq VP_{(1)}$

Vậy $VT_{(1)} = VP_{(1)} \Leftrightarrow$ Dấu "=" đồng thời xảy ra ở cả (2),(3) và (5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ 3x+y+2=3y+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy $x=y=1$ thì bài toán thỏa mãn.

SỞ GD & ĐT HÀ NỘI
TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN

Đề số 39

ĐỀ THI THỬ VÀO 10
Môn: TOÁN
Năm học: 2019 – 2020
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (2 điểm) Biểu thức $P=\dfrac{x}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$

1) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=64$.

2) Chứng minh $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Với $x\in Z$, tìm GTLN của biểu thức $K=Q.\left(P-1\right)$.

Bài 2. (2 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Lớp 9A và lớp 9B cùng lao động tổng vệ sinh trường thì sau 6 giờ sẽ hoàn thành xong công việc. Nếu mỗi lớp làm riêng thì lớp 9A mất nhiều thời gian hơn lớp 9B là 5 giờ để hoàn thành xong công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi lớp cần mấy giờ để hoàn thành xong công việc?

Bài 3. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\dfrac{1}{y-1}=1 \\ 3\sqrt{x}+\dfrac{2}{y-1}=12 \end{cases}$.

2) Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=5x-m+1$.

a) Tìm m để (d) tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn $2x_1=\sqrt{x_2}$.

Bài 4. (3,5 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) ta dựng các tiếp tuyến MB, MC đến (O). (B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến MDA sao cho tia MA nằm giữa hai tia MB, MO và MD < MA. Gọi H là giao điểm của MO và BC, AM cắt BC tại K.

1) Chứng minh: 4 điểm M, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn và $MB^2=MA.MD$.

2) Chứng minh: $\Delta MDH \backsim \Delta MOA$ từ đó suy ra $\widehat{DHB}=\widehat{DCA}$.

3) Chứng minh: $\dfrac{CH}{HA}=\dfrac{CD}{CA}$.

4) Đường tròn đường kính BC cắt AC, AB lần lượt tại E và F, EF cắt AH tại I. Chứng minh IK // MO.

Bài 5.(0,5 điểm) Với các số thức không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{a}{a+1}}+\sqrt{\frac{b}{b+1}}+\sqrt{\frac{c}{c+1}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (2 điểm) Cho hai biểu thức $P=\frac{x}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$

1) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=64$.

2) Chứng minh $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Với $x\in Z$, tìm GTLN của biểu thức $K=Q.(P-1)$.

1) Thay $x=64$ (Thỏa mãn ĐK) vào biểu thức *Q* ta được: $Q=\frac{\sqrt{64}-2}{\sqrt{64}-3}=\frac{8-2}{8-3}=\frac{6}{5}$

2) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$

$$P=\frac{x}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

3) Ta có: $K=Q.(P-1)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-1\right)$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.\frac{2}{\sqrt{x}-2}=\frac{2}{\sqrt{x}-3}$$

Với $0\le x<9$ và $x\ne 4$ thì $\sqrt{x}-3<0\Rightarrow K<0$.

Với $x>9$ thì $\sqrt{x}-3>0$

$\Rightarrow K_{max}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)_{min}$ ứng với $x_{min}>9$ và $x_{min}\in Z\Leftrightarrow x_{min}=10$

Khi đó: $K_{max}=\dfrac{2}{\sqrt{10}-3}=\dfrac{2\left(\sqrt{10}+3\right)}{10-9}=6+2\sqrt{10}$

Vậy với $x\in\mathbb{Z}$ thì GTLN của biểu thức $K=Q.\left(P-1\right)$ là $6+2\sqrt{10}$ khi $x=10$.

Bài 2. (2 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Lớp 9A và lớp 9B cùng lao động tổng vệ sinh trường thì sau 6 giờ sẽ hoàn thành xong công việc. Nếu mỗi lớp làm riêng thì lớp 9A mất nhiều thời gian hơn lớp 9B là 5 giờ để hoàn thành xong công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi lớp cần mấy giờ để hoàn thành xong công việc?

Gọi thời gian lớp 9A làm một mình để hoàn thành xong công việc là x (giờ) (ĐK: $x>6$)

Nếu mỗi lớp làm riêng thì lớp 9A mất nhiều thời gian hơn lớp 9B là 5 giờ để hoàn thành xong công việc, nên thời gian lớp 9B làm một mình xong công việc là: x – 5 (giờ).

Trong 1h, thì lớp 9A làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc), lớp 9B làm được $\dfrac{1}{x-5}$ (công việc), và cả hai lớp làm được $\dfrac{1}{6}$ (công việc). Ta có phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{x-5+x}{x\left(x-5\right)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow 6\left(2x-5\right)=x\left(x-5\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-17x+30=0\Leftrightarrow (x-15)(x+2)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=15\ \text{(tm)}\\x=-2\ \text{(ktm)}\end{array}\right.$$

Vậy thời gian lớp 9A làm một mình để hoàn thành xong công việc là 15 giờ

Thời gian lớp 9B làm một mình để hoàn thành xong công việc là 10 giờ

Bài 3. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x}-\dfrac{1}{y-1}=1\\3\sqrt{x}+\dfrac{2}{y-1}=12\end{cases}$.

2) Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=5x-m+1$.

a) Tìm m để (d) tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn $2x_1=\sqrt{x_2}$.

1) Điều kiện: $x\ge 0;y\ne 1$

Đặt $\sqrt{x} = a\ (a \geq 0); \dfrac{1}{y-1} = b$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 3a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\ (tm) \\ b = 3\ (tm) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \dfrac{1}{y-1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\ (tm) \\ y = \dfrac{4}{3}\ (tm) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(4; \dfrac{4}{3}\right)$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 = 5x - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = 29 - 4m$$

2a) Để (d) tiếp xúc với (P) thì phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 29 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{29}{4}$$

Vậy $m = \dfrac{29}{4}$ thì (d) tiếp xúc với (P).

Khi đó, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{2}$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$\Rightarrow$ Tiếp điểm của (d) và (P) có tọa độ $\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{25}{4}\right)$

2b) Để (d) cắt (P) tại 2 điểm thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 29 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{29}{4} \qquad (1)$$

Theo định lý Vi – ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 & (2) \\ x_1.x_2 = m - 1 & (3) \end{cases}$

Xét $2x_1 = \sqrt{x_2}$

+ Điều kiện: $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 1 \geq 0 \\ 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow m \geq 1 \quad (4)$

+ Từ (1) và (4) ta có: $1 \leq m \leq \dfrac{29}{4}$, khi đó:

$$2x_1 = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow 4x_1^2 = x_2 \qquad (5)$$

Từ (2) và (5) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_1^2 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1^2 = x_2 \\ 4x_1^2 + x_1 - 5 = 0 \ (6) \end{cases}$$

Giải (6) : $4x_1^2 + x_1 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x_1^2 - 4x_1 + 5x_1 - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x_1(x_1 - 1) + 5(x_1 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(4x_1 + 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \ (tm) \\ x_1 = \dfrac{-5}{4}(ktm) \end{array}\right.$$

Thay $x_1 = 1$ vào (5) $\Rightarrow x_2 = 4\ (tm)$, theo (3) có:

$$m - 1 = 4 \Rightarrow m = 5$$

Vậy m = 5 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

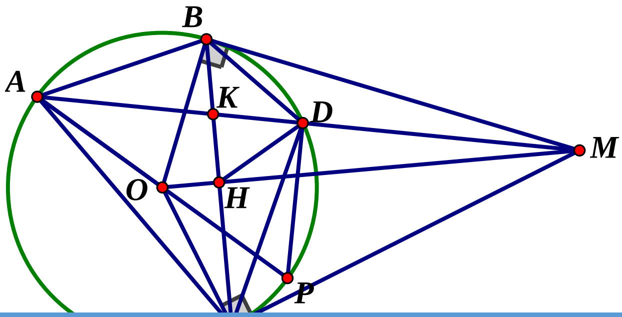
Bài 4. (3,5 điểm) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) ta dựng các tiếp tuyến MB, MC đến (O). (B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến MDA sao cho tia MA nằm giữa hai tia MB, MO và MD < MA. Gọi H là giao điểm của MO và BC, AM cắt BC tại K.

1) Chứng minh: 4 điểm M, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn và $MB^2 = MA.MD$.

2) Chứng minh: $\Delta MDH \backsim \Delta MOA$ từ đó suy ra $\widehat{DHB} = \widehat{DCA}$.

3) Chứng minh: $\dfrac{CH}{HA} = \dfrac{CD}{CA}$.

4) Đường tròn đường kính BC cắt AC, AB lần lượt tại E và F, EF cắt AH tại I. Chứng minh IK // MO.



1) 4 điểm M, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có MB, MC lần lượt là tiếp tuyến tại B và C của (O) (giả thiết).

$\Rightarrow MB \perp OB$ tại B, $MC \perp OC$ tại C

$\Rightarrow \widehat{MBO} = 90^\circ$; $\widehat{MCO} = 90^\circ$

Xét tứ giác *MBOC* có $\widehat{MBO}$; $\widehat{MCO}$ là hai góc đối và $\widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác MBOC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow M, B, O, C$ cùng nằm trên một đường tròn.

Xét ΔMBD và ΔMAB có:

$\widehat{BMD}$ chung;

$\widehat{MBD} = \widehat{MAB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$ của (O))

$\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta MAB (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MB^2 = MA.MD$.

2) Chứng minh: $\Delta MDH \backsim \Delta MOA$ **từ đó suy ra** $\widehat{DHB} = \widehat{DCA}$**.**

*** Chứng minh** $\Delta MDH \backsim \Delta MOA$

Ta có: MB = MC (tính chất tiếp tuyến cắt nhau), OB = OC = R

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của BC (tính chất điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng).

$\Rightarrow OM \perp BC$ tại H là trung điểm của BC.

ΔMOB vuông tại *B* có *AH* là đường cao

$\Rightarrow MH.MO = MB^2$ (hệ thức lượng).

Mà $MB^2 = MA.MD\ (cmt) \Rightarrow MA.MD = MH.MO \Rightarrow \dfrac{MA}{MH} = \dfrac{MO}{MD}$

Xét ΔMAO và ΔMHD có $\begin{cases} \widehat{AMO} \text{ chung} \\ \dfrac{MA}{MH} = \dfrac{MO}{MD} \end{cases} \Rightarrow \Delta MAO \backsim \Delta MHD\ (c-g-c)$

*** Chứng minh** $\widehat{DHB} = \widehat{DCA}$

Kẻ đường kính AP $\Rightarrow \widehat{ADP}=90^{o} \Rightarrow$ Trong ΔADP có $\widehat{DAP}+\widehat{DPA}=90^{o}$

Ta có: $\Delta MDH \backsim \Delta MHA\left(cmt\right) \Rightarrow \widehat{DHM}=\widehat{MAO}$ (cặp góc tương ứng).

$\Rightarrow \widehat{DHM}+\widehat{DPA}=90^{o}$

Mà $\widehat{DPA}=\widehat{DCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn của $\overset{\frown}{AD}$ (O))

$\Rightarrow \widehat{DHM}+\widehat{DCA}=90^{o}$

Lại có: $\widehat{DHM}+\widehat{DHB}=\widehat{MHB}=90^{o}$

$\Rightarrow \widehat{DCA}=\widehat{DHB}$ (đpcm).

3) Chứng minh: $\dfrac{CH}{HA}=\dfrac{CD}{CA}$

Kẻ đường kính DQ $\Rightarrow \widehat{DAQ}=90^{o} \Rightarrow$ Trong ΔDAQ có $\widehat{ADQ}+\widehat{AQD}=90^{o}$

Ta có: $\widehat{DHM}=\widehat{MAO}\left(cmt\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADO}=\widehat{AHO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AO}$)

$\Rightarrow \widehat{AHO}+\widehat{AQD}=90^{o}$

Mà $\widehat{AHO}+\widehat{AHK}=\widehat{OHB}=90^{o}$

$\Rightarrow \widehat{AQD}=\widehat{AHB}$

Mà $\widehat{AQD}=\widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn của $\overset{\frown}{AD}$ (O))

$\Rightarrow \widehat{AHB}=\widehat{ACD}$

Mà $\widehat{ACD}=\widehat{BHD}\left(cmt\right)$

$\Rightarrow \widehat{AHB}=\widehat{BHD}$.

Mà $\widehat{AHB}+\widehat{AHC}=180^{o}$; $\widehat{BHD}+\widehat{DHC}=180^{o}$ (hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{AHC}=\widehat{DHC}$ (1)

Kẻ $HT\,//\,CD \Rightarrow \widehat{THD}=\widehat{HDC}$ (so le trong); $\widehat{BHT}=\widehat{BCD}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{BHD}=\widehat{ACD}\left(cmt\right)$

$\Rightarrow \widehat{THD}=\widehat{ACH}$

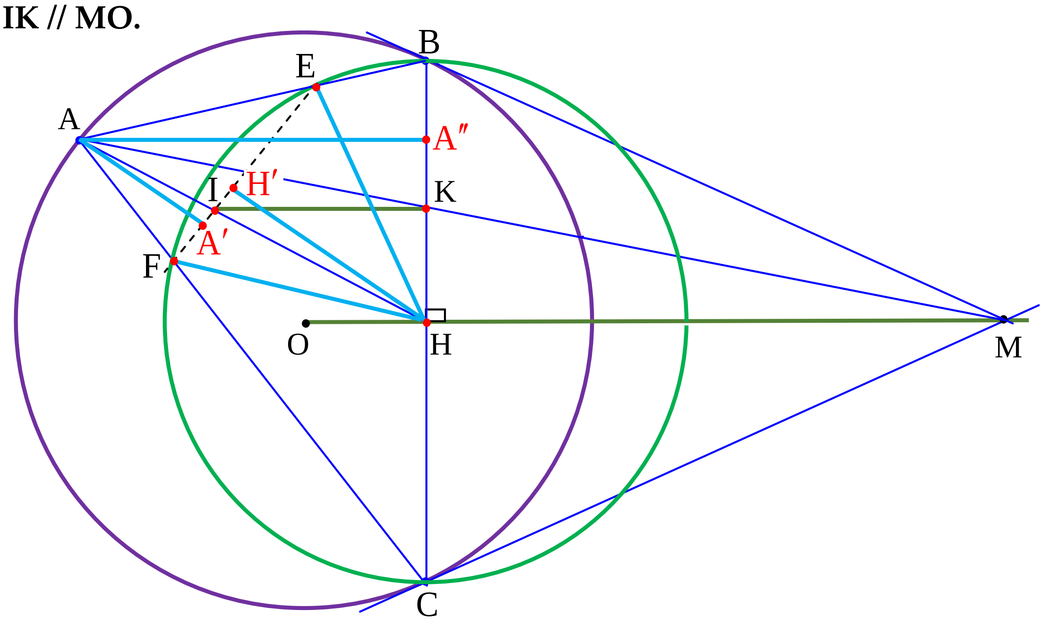
Mà $\widehat{THD}=\widehat{HDC}\left(cmt\right)$

$\Rightarrow \widehat{ACH}=\widehat{HDC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta CHD \backsim \Delta AHC(gg)$

$\Rightarrow \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{CD}{AC}$ (đpcm).

4) Chứng minh IK // MO.



Lần lượt kẻ các đường cao AA' ; HH' ; AA'' của các tam giác AEF ; HEF và ACB.

Ta có: $AA' // HH'$ (vì cùng vuông góc với EF) $\Rightarrow \dfrac{IA}{IH} = \dfrac{AA'}{HH'}$ (3)

Ta có: $AA'' // MH$ (vì cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \dfrac{KA}{KM} = \dfrac{AA''}{MH}$ (4)

Ta có tứ giác $CBEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC (suy ra từ giả thiết).

$\Rightarrow \widehat{FEB} + \widehat{FCB} = 180^\circ$ (định lý tứ giác nội tiếp).

Mà $\widehat{FEB} + \widehat{AEF} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{FCB}$ hoặc $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$

Mà ΔAEF và ΔACB còn có $\widehat{EAF}$ chung

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ACB$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ACB}} = \left(\dfrac{EF}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{AA'}{AA''}\right)^2$ (tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng hoặc bình phương tỉ số đường cao)

Xét đường tròn tâm H đường kinha BC, ta có: ΔHEF cân tại H (vì HE = HF).

Mà ΔMBC cũng cân tại M (vì MB = MC)

$\Rightarrow \Delta HEF \backsim \Delta MBC$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta HEF}}{S_{\Delta MBC}} = \left(\dfrac{EF}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{HH'}{MH}\right)^2$ (tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng hoặc bình phương tỉ số đường cao)

Do đó: $\dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ACB}} : \dfrac{S_{\Delta HEF}}{S_{\Delta MBC}} = \left(\dfrac{EF}{BC}\right)^2 : \left(\dfrac{EF}{BC}\right)^2 = 1 = \left(\dfrac{AA'}{AA''}\right)^2 : \left(\dfrac{HH'}{MH}\right)^2$

$\Rightarrow \dfrac{AA'}{AA''} = \dfrac{HH'}{MH} \Rightarrow \dfrac{AA'}{HH'} = \dfrac{AA''}{MH}$ (5)

Từ (3), (4) và (5), ta có: $\dfrac{IA}{IH} = \dfrac{KA}{KM} \Rightarrow IK//MH$ (Định lý Talet đảo).

Vậy $IK//MO$ (đpcm).

Bài 5.(0,5 điểm) Với các số thức không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\dfrac{a}{a+1}} + \sqrt{\dfrac{b}{b+1}} + \sqrt{\dfrac{c}{c+1}}$.

Nhận xét: Điểm rơi có thể là $a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Áp dụng BĐT cosi, ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{a+1}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}.\frac{a}{a+1}} \le \frac{1}{4} + \frac{a}{a+1} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{b}{b+1}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}.\frac{b}{b+1}} \le \frac{1}{4} + \frac{b}{b+1} \qquad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c}{c+1}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}.\frac{c}{c+1}} \le \frac{1}{4} + \frac{c}{c+1} \qquad (3)$$

Do đó $P = \sqrt{\dfrac{a}{a+1}} + \sqrt{\dfrac{b}{b+1}} + \sqrt{\dfrac{c}{c+1}} \le \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1}\right)$

Với $a+b+c=1$, ta có: $\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1} = \dfrac{a}{a+b+a+c} + \dfrac{b}{b+a+b+c} + \dfrac{c}{c+a+b+c}$

$$\frac{1}{a+b+c+a} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a}\right) \ (4) \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+a} \le \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{c+a}\right)$$

$$\frac{1}{a+b+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right) \ (5) \Rightarrow \frac{b}{a+b+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$\frac{1}{c+a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right) \ (6) \Rightarrow \frac{c}{c+a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}\right)$$

$$\Rightarrow P \le \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1), (2), (3), (4), (5), (6) đồng thời xảy ra và thỏa mãn giả thiết.

$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy *P* đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$, khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

PHÒNG GIÁO DỤC QUẬN BA ĐÌNH
THCS BA ĐÌNH

ĐỀ THI THỬ VÀO 10 NĂM 2017-2018
Môn : Toán
Tháng 2/2018
Thời gian làm bài: 120 phút

Đề số 40

Câu 1 (2 điểm): Cho hai biểu thức

$$A=\frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \text{ và } P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)\left(x\ge 0;x\ne 1\right)$$

1) Tính giá trị của biểu thức A với $x=16$

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{A}{P}$.

Câu 2 (2 điểm):*Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai xí nghiệp cùng may một loại áo. Nếu xí nghiệp thứ nhất may trong 5 ngày và xí nghiệp thứ hai may trong 3 ngày thì cả hai xí nghiệp may được 2620 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày xí nghiệp thứ hai may nhiều hơn xí nghiệp thứ nhất 20 chiếc áo. Hỏi mỗi xí nghiệp trong một ngày may được bao nhiêu chiếc áo?

Câu 3 (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}(x-1)(y+1)=xy+4\\(x+2)(y-1)=xy-10\end{cases}$

2) Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là Parabol (P) và hàm số $y=x+2$ có đồ thị là đường thẳng (d)

a) Hãy xác định tọa độ các giao điểm A, B của hai đồ thị hàm số trên.

b) Tính diện tích của tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Câu 4 (3,5 điểm): Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ với cạnh AB cố định khác đường kính. Các đường cao AE, BF của ΔABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại I, K, CH cắt AB tại D.

1) Chứng minh rằng tứ giác $CEHF$ nội tiếp được một đường tròn

2) Chứng minh : $\widehat{CDF}=\widehat{CBF}$

3) Chứng minh rằng $EF//IK$

4) Chứng minh rằng khi C chuyển động trên cung lớn AB thì đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn đi qua 1 điểm cố định

Câu 5 (0,5 *điểm*): Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (2 điểm): Cho hai biểu thức ad

$$A=\frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \text{ và } P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)\left(x\ge 0; x\ne 1\right)$$

1) Tính giá trị của biểu thức A với $x=16$

2) Rút gọn biểu thức P.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{A}{P}$.

1) Thay $x=16$ (thỏa mãn ĐK) vào biểu thức A, ta được: $A=\frac{2\sqrt{16}+1}{16+\sqrt{16}+1}=\frac{3}{7}$

2) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 1$

$$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $P=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

3) Ta có: $M=\frac{A}{P}=\frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}}{\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}}=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

$$M=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-1}$$

Áp dụng B Đ T cosi cho hai số dương: $\sqrt{x}+1;\ \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, ta có:

$$\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right).\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-1\geq 1$$

$$\Rightarrow P\leq 1$$

Vậy max $P=1$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\frac{1}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow x=0$

Câu 2 (2 điểm):*Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai xí nghiệp cùng may một loại áo. Nếu xí nghiệp thứ nhất may trong 5 ngày và xí nghiệp thứ hai may trong 3 ngày thì cả hai xí nghiệp may được 2620 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày xí nghiệp thứ hai may nhiều hơn xí nghiệp thứ nhất 20 chiếc áo. Hỏi mỗi xí nghiệp trong một ngày may được bao nhiêu chiếc áo?

Gọi x (chiếc áo) là số chiếc áo xí nghiệp thứ nhất may được trong một ngày, y (chiếc áo) là số chiếc áo xí nghiệp thứ hai may được trong một ngày.

Điều kiện: $x>0$; $y>20$.

Nếu xí nghiệp thứ nhất may trong 5 ngày và xí nghiệp thứ hai may trong 3 ngày thì cả hai xí nghiệp may được 2620 chiếc áo nên ta có phương trình:

$$5x+3y=2620$$

Trong một ngày xí nghiệp thứ hai may nhiều hơn xí nghiệp thứ nhất 20 chiếc áo nên ta có phương trình:

$$y-x=20$$

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}5x+3y=2620\\ y-x=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=320\\ y=340\end{cases}\text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy trong một ngày xí nghiệp thứ nhất may được 320 chiếc áo, xí nghiệp thứ hai may được 340 chiếc áo

Câu 3 (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}(x-1)(y+1)=xy+4\\(x+2)(y-1)=xy-10\end{cases}$

2) Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là Parabol (P) và hàm số $y=x+2$ có đồ thị là đường thẳng (d)

a) Hãy xác định tọa độ các giao điểm A, B của hai đồ thị hàm số trên.

b) Tính diện tích của tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

1) $\begin{cases}(x-1)(y+1)=xy+4\\(x+2)(y-1)=xy-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy+x-y-1=xy+4\\xy-x+2y-2=xy-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=5\\-x+2y=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;-3)$.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2=x+2$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$$

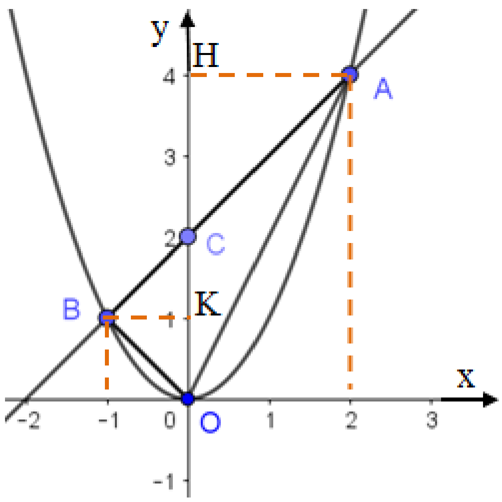
Nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Với $x=2$, thay vào hàm số $y=x^2$ ta được $y=4$.

Với $x=-1$, thay vào hàm số $y=x^2$ ta được $y=1$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là $A(2;4), B(-1;1)$.

2b) Tính diện tích tam giác OAB



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B lên trục tung

$\Rightarrow BK = |x_B| = 1$; $AH = |x_A| = 2$

Ta có $C(0;2)$ là giao của đồ thị (d) với trục tung.

Ta có: $OC = |y_C| = 2$

Ta có: $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.1.2 + \frac{1}{2}.2.2 = 3(\text{đvdt})$

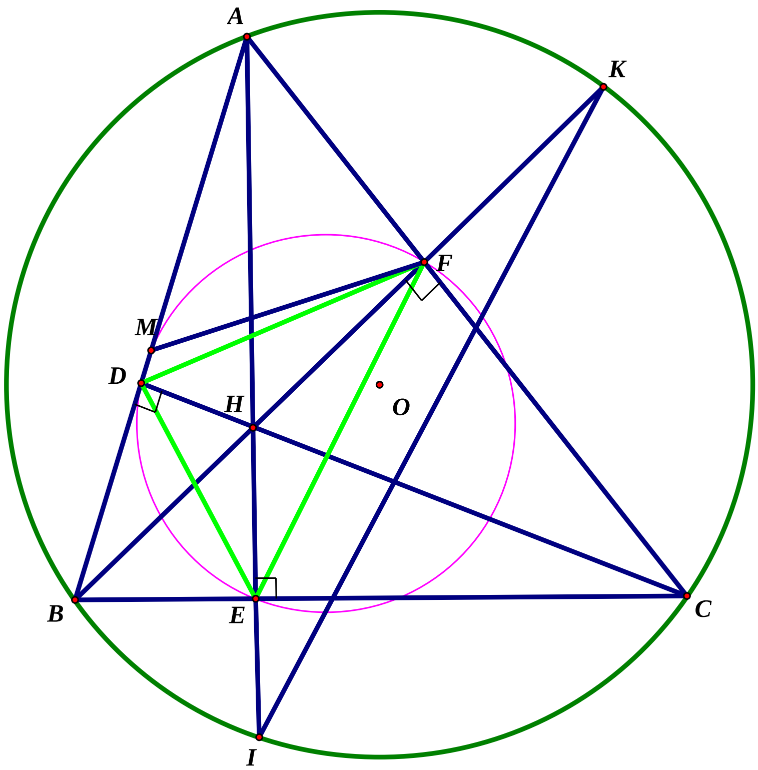
Câu 4 (3,5 điểm):Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ với cạnh AB cố định khác đường kinh. Các đường cao AE, BF của ΔABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn lần lượt tại I, K, CH cắt AB tại D.

1) Chứng minh rằng tứ giác $CEHF$ nội tiếp được một đường tròn

2) Chứng minh : $\widehat{CDF} = \widehat{CBF}$

3) Chứng minh rằng $EF//IK$

4) Chứng minh rằng khi C chuyển động trên cung lớn AB thì đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn đi qua 1 điểm cố định



1) Chứng minh rằng tứ giác $CEHF$ nội tiếp được một đường tròn

Các đường cao AE, BF của ΔABC cắt nhau tại H (giả thiết)

$\Rightarrow AE \perp BC$ tại E (hoặc $HE \perp BC$ tại E); $BF \perp AC$ tại F (hoặc $HF \perp AC$ tại F)

$\Rightarrow \widehat{HEC} = 90^\circ$; $\widehat{HFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác CEHF có $\widehat{HEC}$; $\widehat{HFC}$ là hai góc đối và $\widehat{HEC} + \widehat{HFC} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác CEHF nội tiếp.

2) Chứng minh : $\widehat{CDF} = \widehat{CBF}$

Các đường cao AE, BF của ΔABC cắt nhau tại H (giả thiết)

$\Rightarrow$ H là trực tâm của ΔABC

$\Rightarrow CH \perp AB$ tại D

$\Rightarrow \widehat{CDB} = 90^\circ$

Ta có $BF \perp AC$ tại F (cmt)

$\Rightarrow \widehat{CFB} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác CBDF có hai đỉnh kề D và F cùng nhìn cạnh CB dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác CBDF nội tieeos đường tròn đường kính CB.

$\Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{CBF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CF}$)

3) Chứng minh rằng $EF//IK$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{FKI} = \widehat{BAI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BI)

Vì $CEHF$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HCE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

Lại có $\widehat{BAI} = \widehat{HCE}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \widehat{FKI} = \widehat{HFE}$, mà 2 góc ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow EF//IK$

4) Chứng minh rằng khi C chuyển động trên cung lớn AB thì đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn đi qua 1 điểm cố định.

Gọi M là trung điểm của AB và AB cố định nên M là điểm cố định.

Ta có: ΔBFA vuông tại F

$\Rightarrow MB = MA = MF = \dfrac{AB}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \Delta AMF$ cân tại M.

Mà $\widehat{DMF}$ là góc ngoài tại đỉnh M của tam giác AMF

$\Rightarrow \widehat{DMF} = 2\widehat{MAF}$ (1)

Tứ giác CEHF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{HCF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HF)

Chứng minh được tứ giác BEHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{HBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

Lại có $\begin{cases} \widehat{HCF} + \widehat{MAF} = 90^0 \\ \widehat{HBD} + \widehat{MAF} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{HCF} + \widehat{HBD} + 2\widehat{MAF} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{HEF} + \widehat{HED} + 2\widehat{MAF} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{DEF} + 2\widehat{MAF} = 180^0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DMF} + \widehat{DEF} = 180^0$

$\Rightarrow$ DMFE nội tiếp

$\Rightarrow$ Khi C chuyển động trên cung lớn AB thì đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn đi qua điểm M cố định.

Câu 5(0,5 *điểm*): Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x+3)}$

Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}\right) - \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-1} - 1\right) = 0$

Do $\sqrt{x-2} < \sqrt{x+3}$ nên phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$