Statistical Computing and Simulation(0528)

統碩一 106354003 林健宏

Hastings-Metropolis algorithm(HM-algorithm)

為一種 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)的方法，用於從目標分配函數(target distribution)中，生成樣本。而生成的樣本具有相依性，即下一次生成的樣本於過往的樣本有關，但下一次生成的樣本由現在的樣本決定。

流程：

從$\pi(x)$目標分配函數生成樣本

1. 提出一個q分配函數與x_t有關，即$y \sim q(y|x_t)$

2. $x_{t+1} = \begin{cases} y, & \text{w.p. } \alpha(x_t, y) \\ x_t, & \text{w.p. } 1 - \alpha(x_t, y) \end{cases}$，其中$\alpha(x,y) = \min\left\{\frac{\pi_y q(x|y)}{\pi_x q(y|x)}, 1\right\}$

<u>本次課題</u>：利用Hastings-Metropolis algorithm生成500筆 N(0，1)的樣本，並計算接受率，即$x_{t+1} = y$的機率。

$$\text{目標分配函數: } \pi(x) \equiv N(0,1)$$

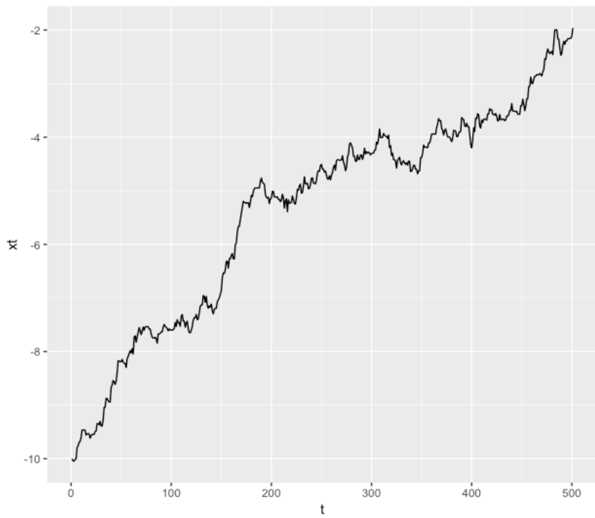
$$q\text{分配為}y \sim N(x_t, \sigma^2)$$

$$x_{t+1} = \begin{cases} y, & \text{w.p. } \alpha(x_t, y) \\ x_t, & \text{w.p. } 1 - \alpha(x_t, y) \end{cases}$$

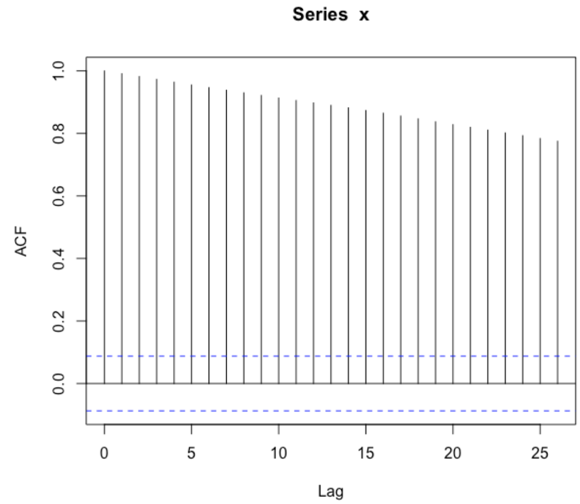
而推導出的$\alpha(x,y) = \min\left\{\exp\left\{-\frac{y^2 - x^2}{2}\right\}, 1\right\}$

下一頁開始分別有八組不同的初始值，以及所對應的圖與接受率：

1. 給定起始值$x_0 = -10, \sigma = 0.1$



(Figure 1)

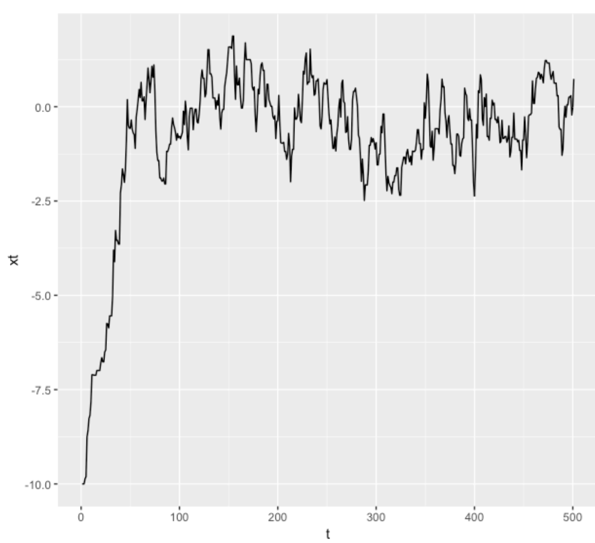


(Figure 2)

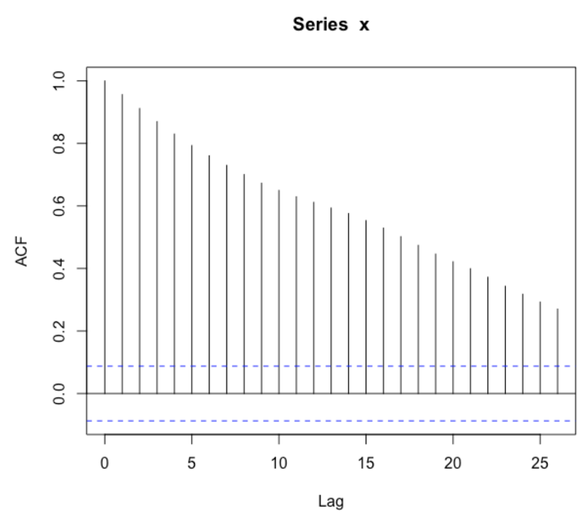
從Figure 1來看，有出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。從這500筆相關樣本，看出資料並收斂至穩定狀態，須持續的生成樣本，直到樣本呈現收斂狀態。

接受率：0.842

2. 給定起始值$x_0 = -10, \sigma = 0.5$



(Figure 3)

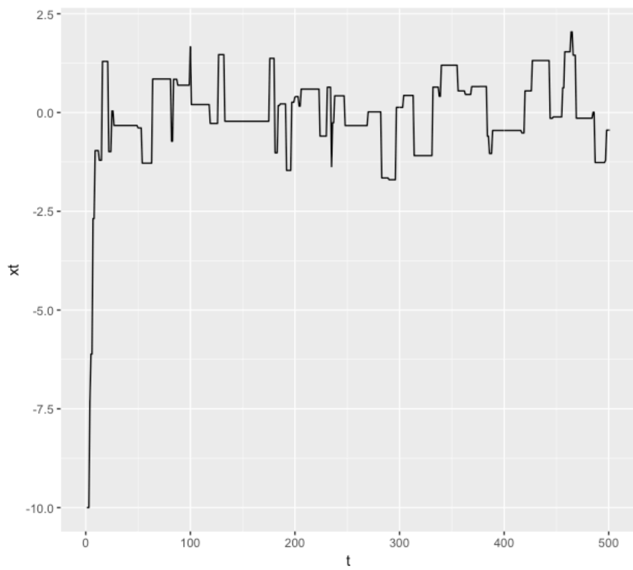


(Figure 4)

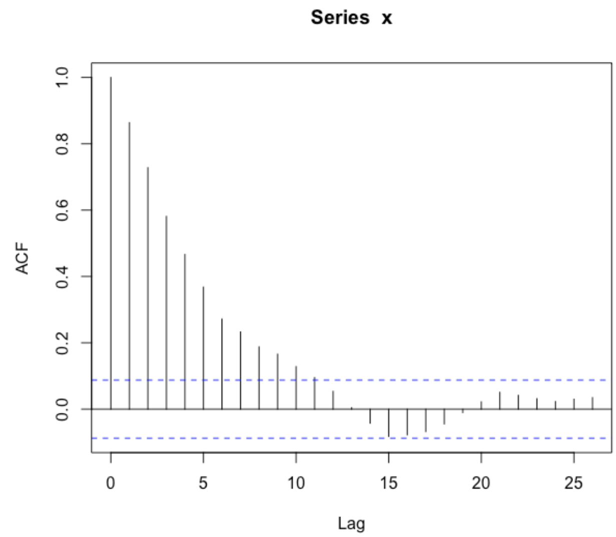
從Figure 3來看，有出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。當t大約在100之後，x_t呈現了穩定波動在(-2.5, 2.5)之間，即樣本呈現收斂狀態。

接受率：0.83

3. 給定起始值$x_0 = -10, \sigma = 10$



(Figure 5)



(Figure 6)

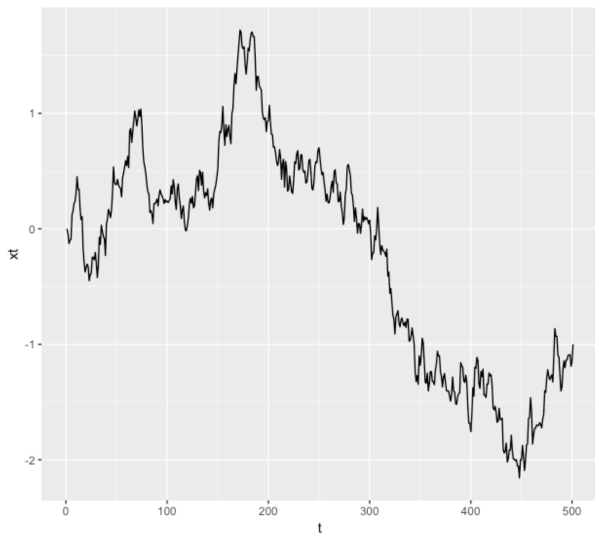
從Figure 5來看，有出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。當t大約在30之後，x_t呈現了穩定波動在(-2.5, 2.5)之間，即樣本呈現收斂狀態。

接受率：0.13

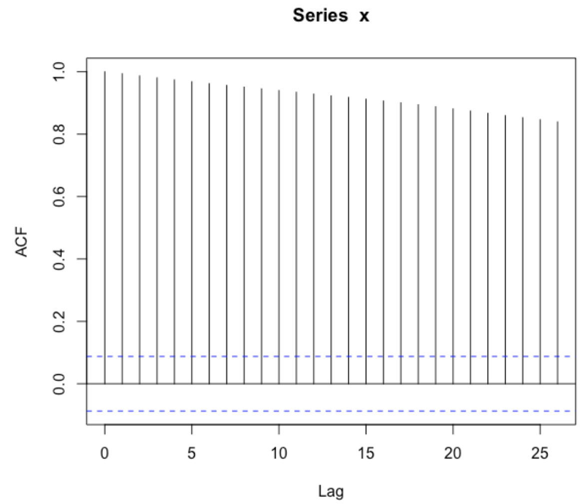
比較 1. 2. 3. 在給定不同σ下的收斂狀態與接受率，當σ越大時，樣本達到收斂狀態的速度越快但接受率則越小

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 10$
達到收斂所需的樣本數	t >500	t $\cong$ 100	t $\cong$ 30
接受率	0.842	0.83	0.13

4. 給定起始值$x_0 = 0, \sigma = 0.1$



(Figure 7)

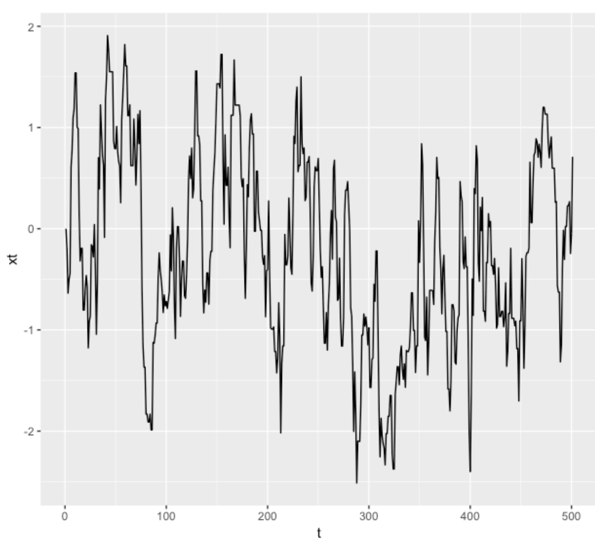


(Figure 8)

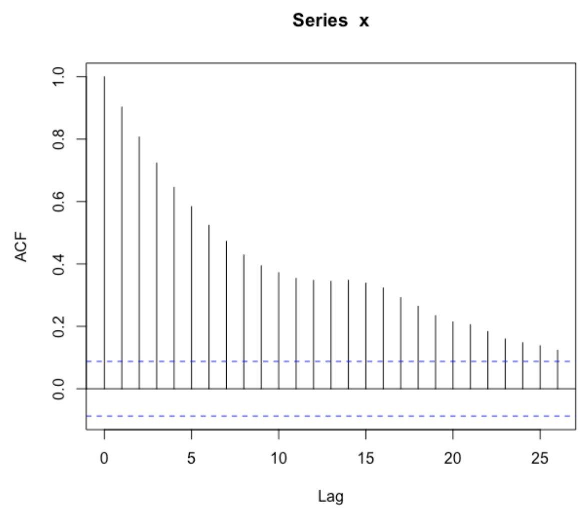
從Figure 7來看，出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。而圖中鮮少有出現水平線段，表示x_t持續在變動，並且x_t並未呈現收斂狀態。

接受率：0.974

5. 給定起始值$x_0 = 0, \sigma = 0.5$



(Figure 9)

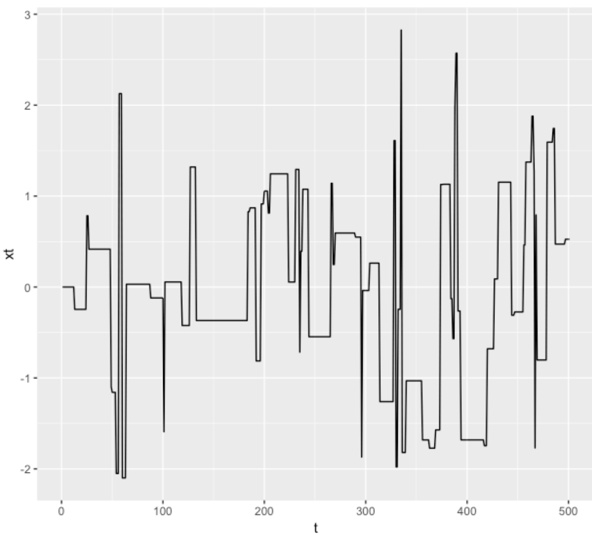


(Figure 10)

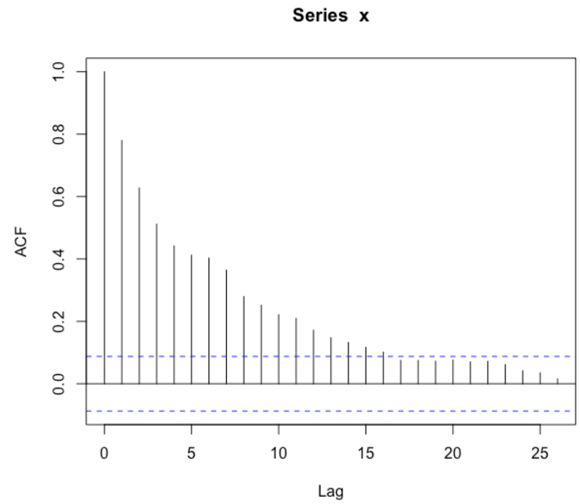
從Figure 9來看，出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。而圖中鮮少有出現水平線段，表示x_t持續在變動，而 x_t浮動範圍介於$(-2.5, 2.5)$之間，呈現收斂狀態。

接受率：0.84

6. 給定起始值$x_0 = 0, \sigma = 10$



(Figure 11)



(Figure 12)

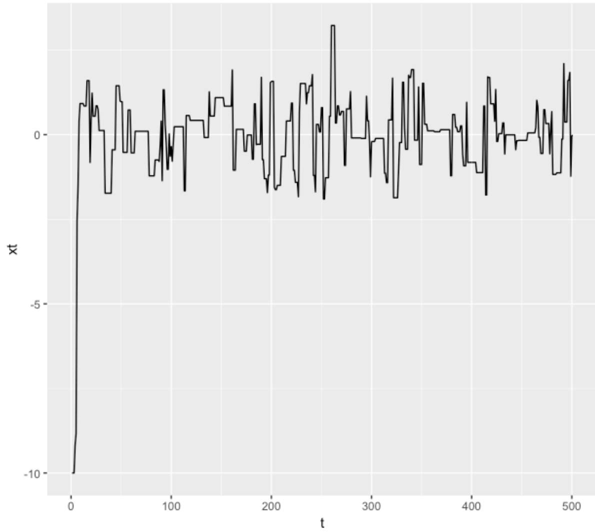
從Figure 11來看，出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。而圖中出現大量水平線段，表示x_t變動部分變少許多，而 x_t浮動範圍介於$(-2.5, 2.5)$之間，呈現收斂狀態。

接受率：0.14

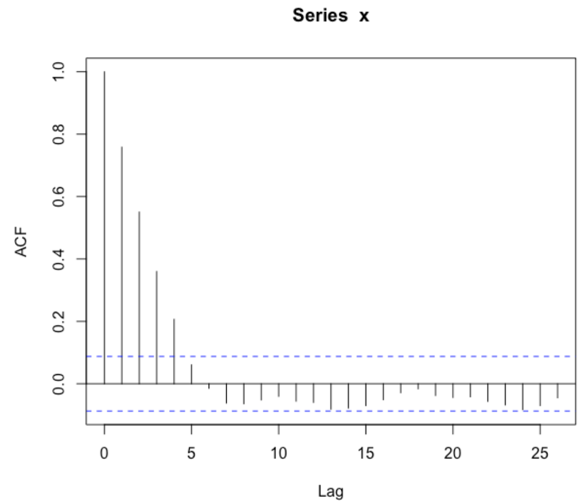
比較 4. 5. 6. 在給定不同σ下的收斂狀態與接受率，由於三組資料浮動範圍都介在(-2.5, 2.5)之間，因此在這不討論達到收斂時所需要的樣本數。而比較三組不同σ的接受率，當σ越大時，接受率越低。

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 10$
接受率	0.974	0.84	0.14

7. 給定起始值$x_0 = -10, \sigma = 3$



(Figure 13)

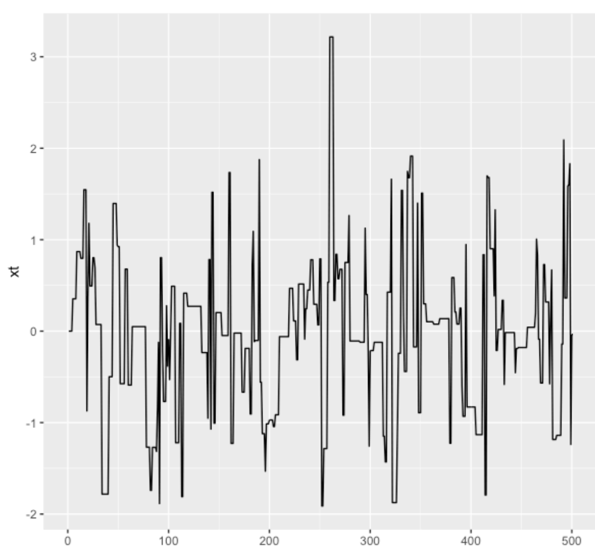


(Figure 14)

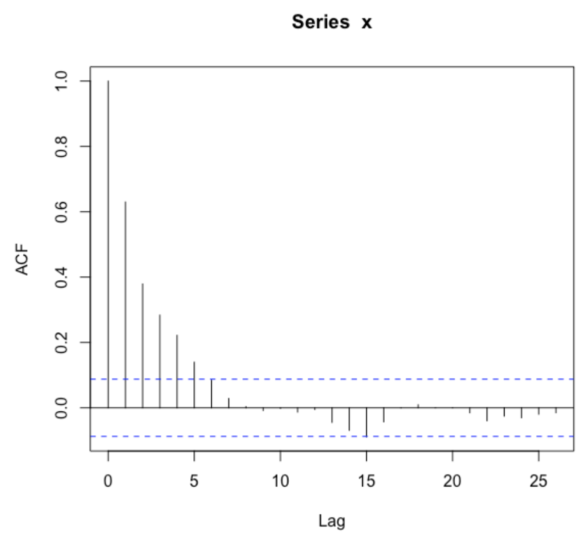
從Figure 13來看，有出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。當t大約在20之後，x_t呈現了穩定波動在(-2.5, 2.5)之間，即樣本呈現收斂狀態。

接受率：0.342

8. 給定起始值$x_0 = 0, \sigma = 3$



(Figure 15)



(Figure 16)

從Figure 15來看，有出現水平線段表示$x_{t+1} = x_t$，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。x_t呈現了穩定波動在(-2, 2)之間，即樣本呈現收斂狀態。

接受率：0.332

結論：

從第一組資料到第六組資料，得出當σ越大時，接受率越低，而初始值x_0則影響接受率不大。一般建議選擇合適的 σ 使得接受率來到30%~40%。

因此試做了第七組與第八組資料，在給定初始值$x_0 = -10$以及$x_0 = 0$下，所對應的σ分別為3 與 3，接受率為0.342與0.332，符合一般建議的條件。

Appendix:

Code: **https://github.com/kevinpiger/Statistical-Computing-and-Simulation-Nine**