

## Hastings-Metropolis algorithm(HM-algorithm)

為一種 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)的方法，用於從目標分配函數(target distribution)中，生成樣本。而生成的樣本具有相依性，即下一次生成的樣本於過往的樣本有關，但下一次生成的樣本由現在的樣本決定。

流程：

從 $\pi(x)$ 目標分配函數生成樣本

1. 提出一個 $q$ 分配函數與 $x_t$ 有關，即 $y \sim q(y|x_t)$
2.  $x_{t+1} = \begin{cases} y, & \text{w. p. } \alpha(x_t, y) \\ x_t, & \text{w. p. } 1 - \alpha(x_t, y) \end{cases}$ ，其中 $\alpha(x, y) = \min \left\{ \frac{\pi_y q(x|y)}{\pi_x q(y|x)}, 1 \right\}$

本次課題：利用Hastings-Metropolis algorithm生成500筆  $N(0, 1)$ 的樣本，並計算接受率，即 $x_{t+1} = y$ 的機率。

目標分配函數:  $\pi(x) \equiv N(0, 1)$

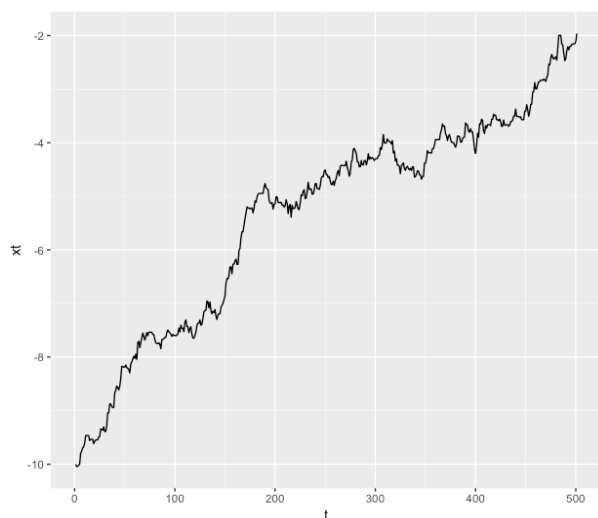
$q$ 分配為 $y \sim N(x_t, \sigma^2)$

$$x_{t+1} = \begin{cases} y, & \text{w. p. } \alpha(x_t, y) \\ x_t, & \text{w. p. } 1 - \alpha(x_t, y) \end{cases}$$

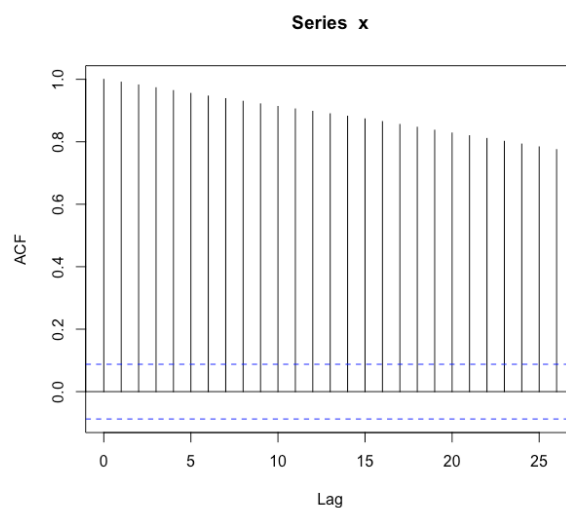
而推導出的 $\alpha(x, y) = \min \left\{ \exp \left\{ -\frac{y^2 - x^2}{2} \right\}, 1 \right\}$

下一頁開始分別有八組不同的初始值，以及所對應的時間序列圖、ACF 與接受率：

1. 給定起始值 $x_0 = -10, \sigma = 0.1$



(Figure 1)

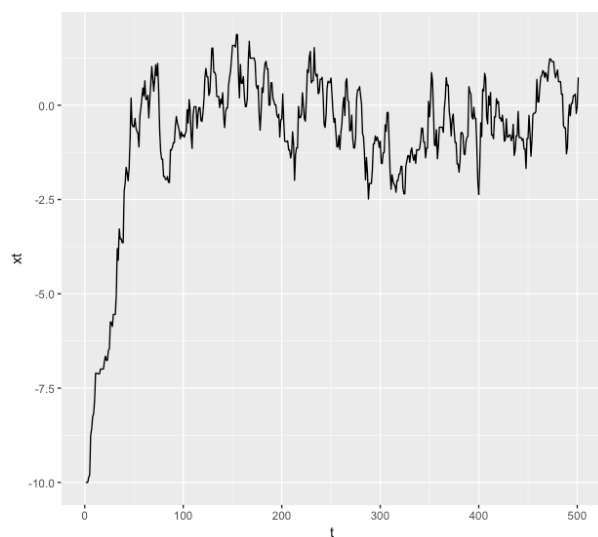


(Figure 2)

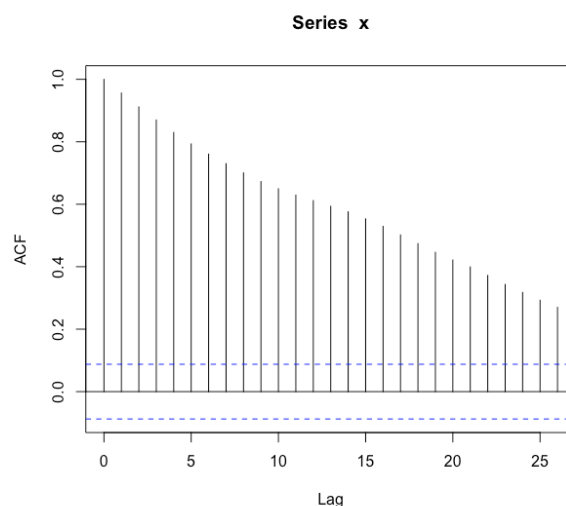
從Figure 1來看，有出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。從這500筆相關樣本，看出資料並無收斂至穩定狀態，須持續的生成樣本，直到樣本呈現收斂狀態。而ACF圖則遞減得很慢，意味著資料之間的自我相關很強烈，未呈現收斂狀態。

接受率：0.842

2. 給定起始值 $x_0 = -10, \sigma = 0.5$



(Figure 3)

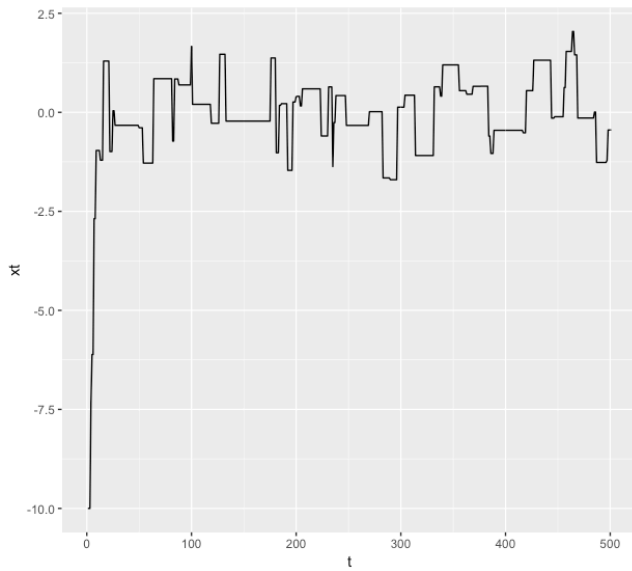


(Figure 4)

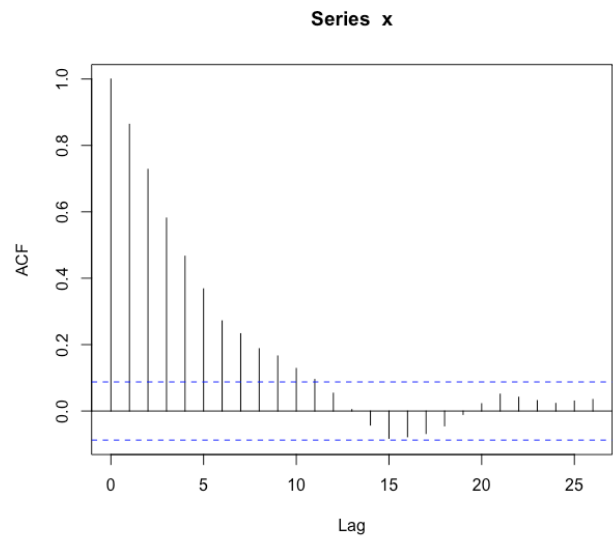
從Figure 3來看，有出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。當t大約在100之後， $x_t$ 呈現了穩定波動在 $(-2.5, 2.5)$ 之間，即樣本呈現收斂狀態。而ACF圖則顯示自我相關係數逐漸遞減，逐漸收斂、穩定。

接受率：0.83

3. 給定起始值 $x_0 = -10, \sigma = 10$



(Figure 5)



(Figure 6)

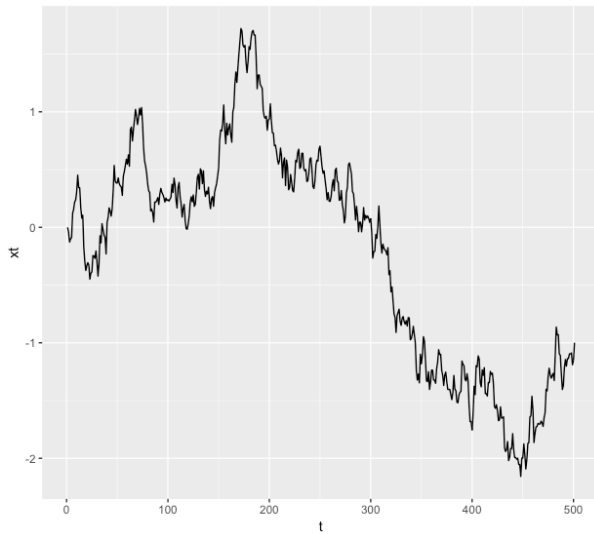
從Figure 5來看，有出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。當 $t$ 大約在30之後， $x_t$ 呈現了穩定波動在 $(-2.5, 2.5)$ 之間，即樣本呈現收斂狀態。而ACF圖顯示自我相關係數遞減很快，收斂至一定區間內，意味著資料呈現穩定狀態。

接受率：0.13

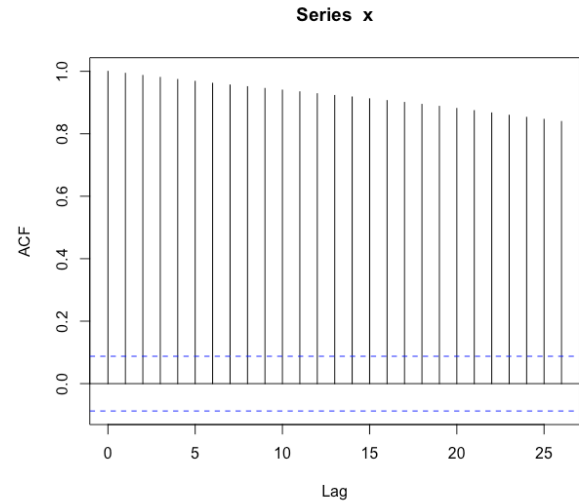
比較 1. 2. 3. 在給定不同 $\sigma$ 下的收斂狀態與接受率，當 $\sigma$ 越大時，樣本達到收斂狀態的速度越快但接受率則越小

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 10$
達到收斂所需的樣本數	$t > 500$	$t \cong 100$	$t \cong 30$
接受率	0.842	0.83	0.13

#### 4. 給定起始值 $x_0 = 0, \sigma = 0.1$



(Figure 7)

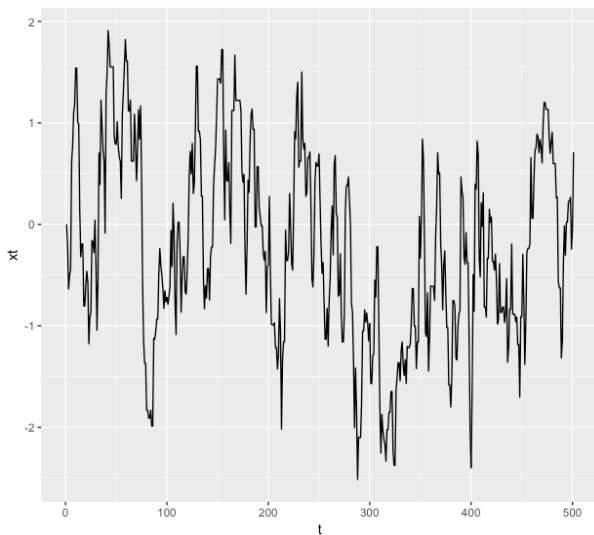


(Figure 8)

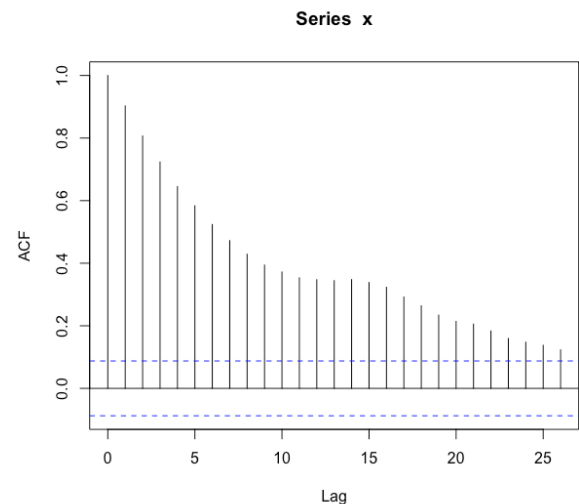
從Figure 7來看，出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。而圖中鮮少有出現水平線段，表示 $x_t$ 持續在變動，並且 $x_t$ 並未呈現收斂狀態。而ACF圖則遞減得很慢，意味著資料之間的自我相關很強烈，未呈現收斂狀態。

接受率：0.974

#### 5. 給定起始值 $x_0 = 0, \sigma = 0.5$



(Figure 9)

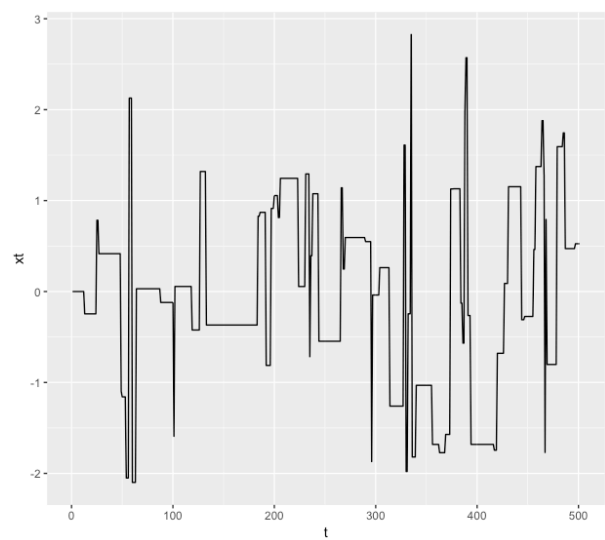


(Figure 10)

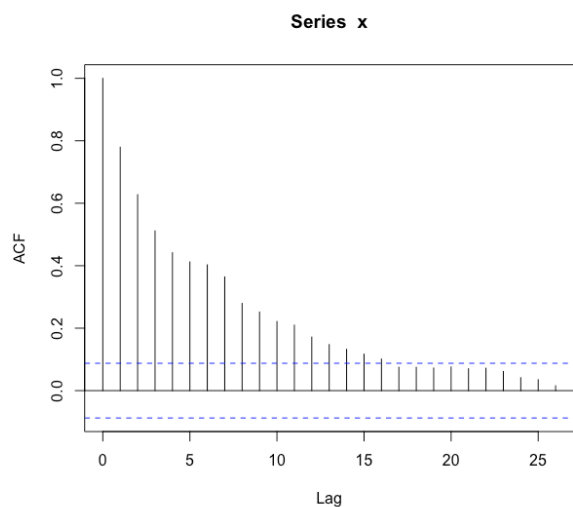
從Figure 9來看，出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。而圖中鮮少有出現水平線段，表示 $x_t$ 持續在變動，而 $x_t$ 浮動範圍介於 $(-2.5, 2.5)$ 之間，呈現收斂狀態。而ACF圖則顯示自我相關係數逐漸遞減，逐漸收斂、穩定。

接受率：0.84

6. 給定起始值 $x_0 = 0, \sigma = 10$



(Figure 11)



(Figure 12)

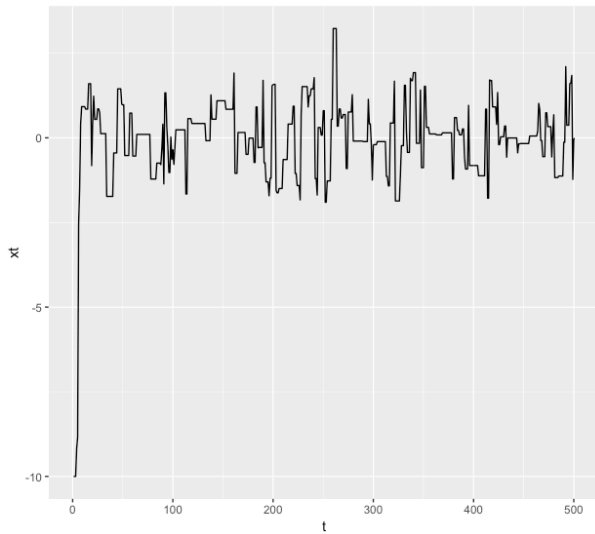
從Figure 11來看，出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。而圖中出現大量水平線段，表示 $x_t$ 變動部分變少許多，而  $x_t$ 浮動範圍介於 $(-2.5, 2.5)$ 之間，呈現收斂狀態。而ACF圖顯示自我相關係數遞減很快，收斂至一定區間內，意味著資料呈現穩定狀態。

接受率：0.14

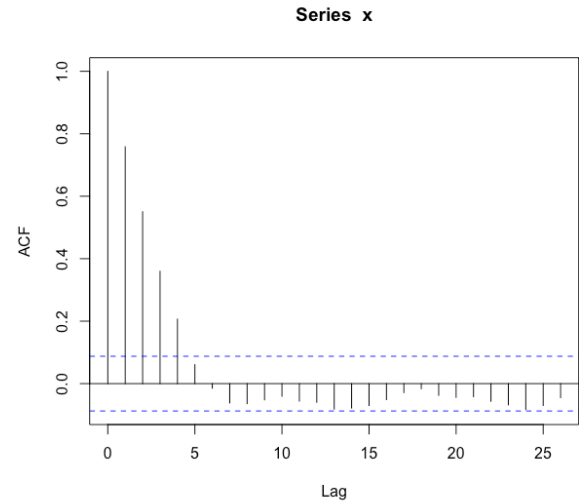
比較 4.5.6. 在給定不同 $\sigma$ 下的收斂狀態與接受率，由於三組資料浮動範圍都介在 $(-2.5, 2.5)$ 之間，因此在這不討論達到收斂時所需要的樣本數。而比較三組不同 $\sigma$ 的接受率，當 $\sigma$ 越大時，接受率越低。

	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 10$
接受率	0.974	0.84	0.14

7. 給定起始值 $x_0 = -10, \sigma = 3$



(Figure 13)

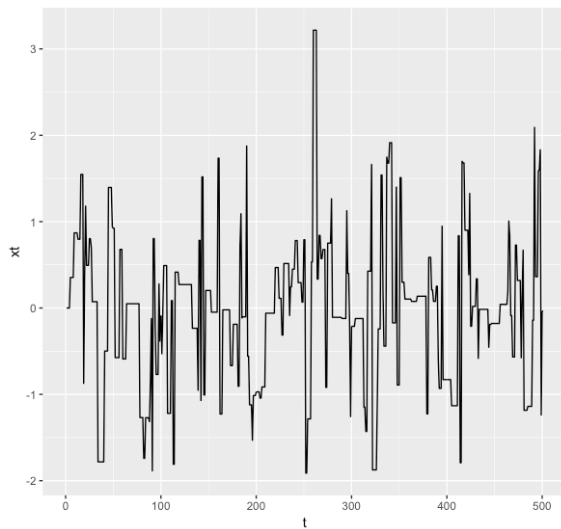


(Figure 14)

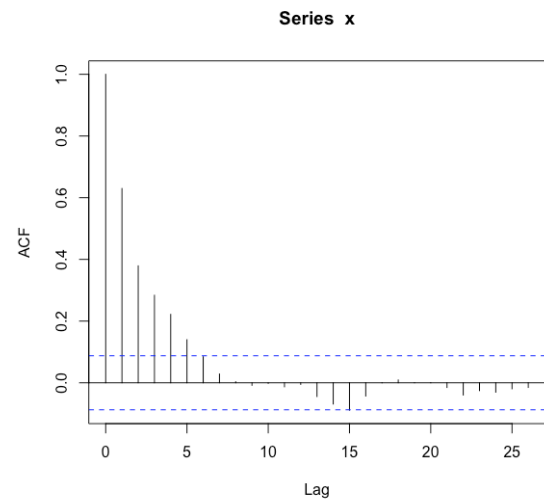
從Figure 13來看，有出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。當 $t$ 大約在20之後， $x_t$ 呈現了穩定波動在 $(-2.5, 2.5)$ 之間，即樣本呈現收斂狀態。而ACF圖顯示自我相關係數遞減比第1~3組的還快，更快地收斂至一定區間內，意味著資料更快呈現穩定狀態。

接受率：0.342

8. 給定起始值 $x_0 = 0, \sigma = 3$



(Figure 15)



(Figure 16)

從Figure 15來看，有出現水平線段表示 $x_{t+1} = x_t$ ，下一刻的樣本與現在的樣本一樣，並無變動。 $x_t$ 呈現了穩定波動在 $(-2, 2)$ 之間，即樣本呈現收斂狀態。而ACF圖顯示自我相關係數遞減比第4~6組的還快，更快地收斂至一定區間內，意味著資料更快呈現穩定狀態。

接受率：0.332

## 結論：

從第一組資料到第六組資料，得出當 $\sigma$ 越大時，接受率越低，ACF圖遞減速度越快，而初始值 $x_0$ 則影響接受率不大。一般建議選擇合適的  $\sigma$  使得接受率來到30%~40%，同時也能讓ACF遞減速度更快，意味者資料可以更容易呈現穩定。

因此試做了第七組與第八組資料，在給定初始值 $x_0 = -10$ 以及 $x_0 = 0$ 下，所對應的  $\sigma$  分別為3 與 3，接受率為0.342與0.332，符合一般建議的條件。

## Appendix:

Code: <https://github.com/kevinpiger/Statistical-Computing-and-Simulation-Nine>