**Statistical Computing and Simulation** 統碩一 106354003 林健宏  
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＋

Question 01. Find by calculus techniques

< Sol >

Question 02. Simulation Study

(1)

Find mean and variance of importance sampling estimates using proposal and or (more proposals). Compare it with that Monte Carlo.

(Which proposal gives a smaller variance? Give arguments to support your finding with using numbers and graphs.)

< Sol >

Concept of important sampling:

So if, The smaller variance is better.

If ,

So, it is important to choose g(x).

This method called Important sampling which can reduce variance if we find a g(x) which is bigger than f(x).

This is result of computing that we used MC method, important sampling wit and important sampling wit .

We all take 5000 Samples of size 1000.

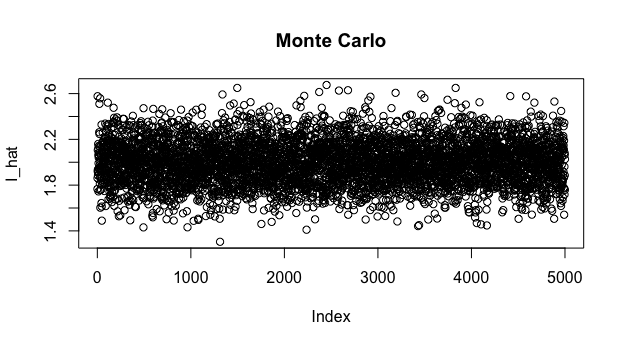
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Monte Carlo | Important sampling N(0,1) | Important sampling N(0,5) |
| Mean | 1.99851 | 1.98926 | 1.99872 |
| Variance | 0.03619 | 0.14084 | 0.00865 |

三種方法用於估計都很接近我們使用微積分機算的數值2，符合理論的推導，三種方法皆為不偏估計的方法。為了比較方法的好壞，我們比較三種方法的變異數。

由上表可以清楚看出三種方法變異數的差異，最大的為Important sampling 選擇N(0,1)當作important function時得到的變異數0.14084以及最小的為Important sampling 選擇N(0,5)當作important function時得到的變異數0.00865。可見Important sampling不一定可以降低變異數，反而會造成變異數變大。

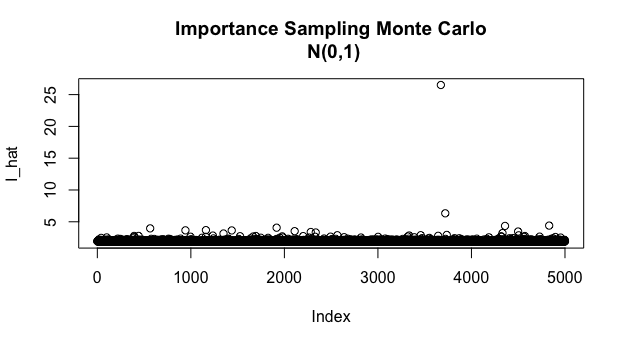
我們以圖表解釋為何差異這麼大，將5000個估計值，每一個估計值由1000個樣本構成，做成散佈圖，看三種方法的的估計值浮動範圍差異。

(a) Monte Carlo



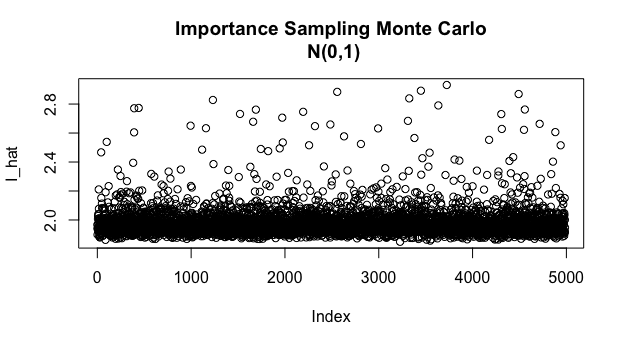
由上圖可見，使用Monte Carlo方法去估計時，估計值的範圍大約為 (1.4, 2.6)，其中大部分都集中在(1.8, 2.3)。

(b) Important sampling with N(0,1)



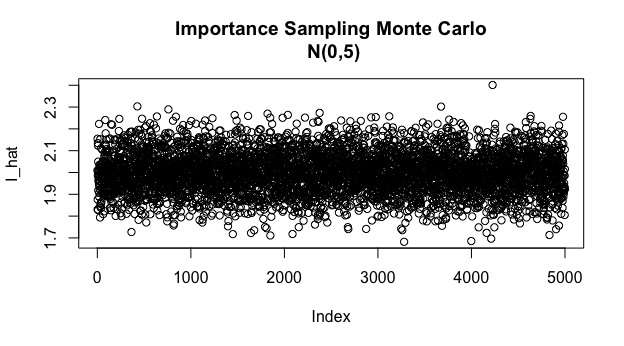
由上圖可見，使用Important sampling with N(0,1) 方法去估計時，估計值浮動範圍很大，但大部分都集中在5以下，偶而會出現極端值。

接著將極端值刪除（大於3的值），並重新繪製散佈圖



圖中顯示，雖然大部分的資料點都幾鐘在(1.8,2.2)之間，但仍有很多點出現在（2.2, 3.0）之間，甚至更大，浮動範圍比Monte Carlo的範圍(1.4, 2.6)來得大。也因此使用Important sampling非但沒有降低Monte Carlo方法的變異數，反正比Monte Carlo的變異數來得大。

(c) Important sampling with N(0,5)



這次Important sampling方法去估計時，我們改變Important function，由N(0,1)改成N(0,5)。從上圖中發現，這5000個估計值範圍為(1.7, 2.4)附近，大多都集中在(1.8,2.1)之間，比Monte Carlo的範圍(1.4, 2.6)來得小，因此變異數比Monte Carlo的變異數小，縮減量約為76.1%。

結論：

選擇適當的Important function可以使得原本使用的方法達到同樣的估計效果同時變異數也縮減，但選擇不好的Important function則會造成變異數變大，雖然估計值差不多。以本題的兩個Important function 與 ，可以讓整體變異量下降76.1%。

Question 02.

1. (a)  Obtain the mean and variance of N(0,1) using importance

sampling with g ∼ t3.

1. (b)  Obtain the mean and variance of t3 using importance sampling

with g ∼ N(0,1).

1. (c)  Comment on the results.