

# Wprowadzenie do statystyki Bayesowskiej

## Opis warsztatu

---

D1/10:00	Wprowadzenie do statystyki Bayesowskiej
D1/11:45	Powtórka z R i wprowadzenie do MCMC
D1/14:00	brms: regresja prosta i porównywanie średnich
D1/15:45	brms: regresja wielokrotna + a. moderacji
D2/10:00	brms: Bayesowska ANOVA
D2/11:45	brms: Bayesowski HLM
D2/14:00	brms: Bayesowskie uogólnione modele liniowe
D2/15:45	Testowanie hipotez i porównywanie modeli

---

# Opis oprogramowania

- ▶ R + RStudio + RStudio Notebooks
- ▶ pakiety:
  - ▶ tidyverse
  - ▶ brms
  - ▶ emmeans
  - ▶ bayestestR
  - ▶ tidybayes

# Strona warsztatu

- ▶ Wszystkie materiały, skrypty R, oraz dane można pobrać ze strony:
  - ▶ ....

## Inne programy oferujące metody Bayesowskie

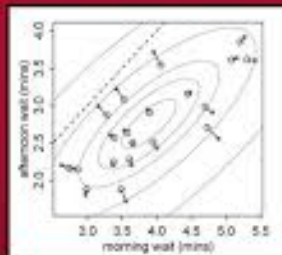
- ▶ Większość współczesnych pakietów statystycznych oferuje jakiś rodzaj metod Bayesowskich:
  - ▶ Stata
  - ▶ SAS
  - ▶ MPlus
  - ▶ SPSS/Amos
  - ▶ JASP
  - ▶ WinBUGS
  - ▶ JAGS
  - ▶ Python - Pymc3
  - ▶ Julia - Turing

## Książki na temat analizy Bayesowskiej

Texts in Statistical Science

# Statistical Rethinking

A Bayesian Course with  
Examples in R and Stan



Richard McElreath

## Książki na temat analizy Bayesowskiej

### Doing Bayesian Data Analysis

A Tutorial with R, JAGS, and Stan



John K. Kruschke

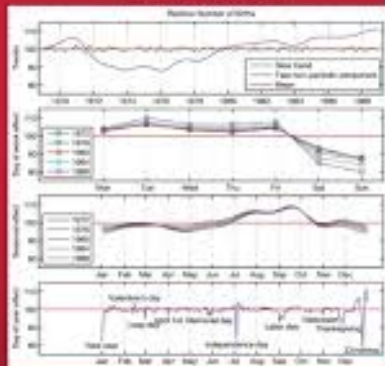


# Książki na temat analizy Bayesowskiej

Texts in Statistical Science

## Bayesian Data Analysis

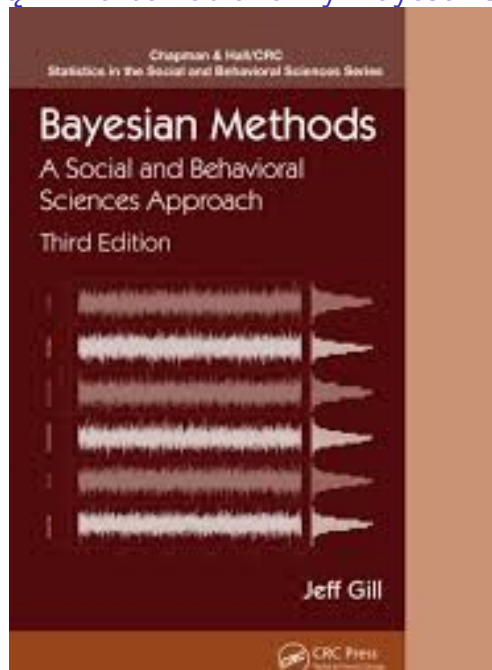
Third Edition



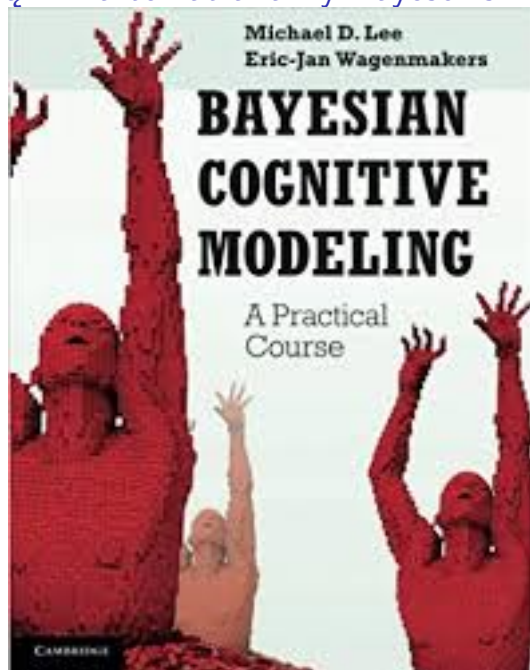
Andrew Gelman, John B. Carlin, Hal S. Stern,  
David B. Dunson, Aki Vehtari, and Donald B. Rubin



## Książki na temat analizy Bayesowskiej



## Książki na temat analizy Bayesowskiej



## Materiały dostępne online:

- ▶ Blogi na temat pakietu brms: [tutaj](#)
- ▶ Case studies z użyciem programu Stan: [tutaj](#)
- ▶ Przykłady z książki 'Statistical rethinking' w brms: [tutaj](#)
- ▶ Przykłady z książki 'Introduction to Mediation, Moderation, and Conditional Process Analysis' Andrew Hayes'a w brms: [tutaj](#)
- ▶ Przykłady z książki 'DBDA2ed' Kruske'go w brms: [tutaj](#)

## Twierdzenie Bayesa

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A) \times Pr(A)}{Pr(B)}$$

# Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .

# Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik,  $p < .05$ ?

# Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik,  $p < .05$ ?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ( $H_1 = \text{prawda}$ ) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.

# Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik,  $p < .05$ ?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ( $H1 = \text{prawda}$ ) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Wartość  $p$  oznacza, że jeżeli nasza hipoteza jest fałszywa ( $H0 = \text{prawda}$ ), na 1000 badań w 50 uzyskamy istotny wynik.



# Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik,  $p < .05$ ?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ( $H_1 = \text{prawda}$ ) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Wartość  $p$  oznacza, że jeżeli nasza hipoteza jest fałszywa ( $H_0 = \text{prawda}$ ), na 1000 badań w 50 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Nie wiemy jak dużo hipotez badawczych jest prawdziwe. Przypuśćmy, że jest to jednak tylko mały odsetek, 10 na 1000.

# Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik,  $p < .05$ ?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ( $H_1 = \text{prawda}$ ) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Wartość  $p$  oznacza, że jeżeli nasza hipoteza jest fałszywa ( $H_0 = \text{prawda}$ ), na 1000 badań w 50 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Nie wiemy jak dużo hipotez badawczych jest prawdziwe. Przypuśćmy, że jest to jednak tylko mały odsetek, 10 na 1000.
- ▶ Jakie jest prawdopodobieństwo, że nasza hipoteza jest prawdziwa jeżeli uzyskaliśmy istotny wynik?

# Twierdzenie Bayesa

	H0 = prawda	H1 = prawda
$p < .05$		
$p > .05$	<b>990</b>	<b>10</b>

# Twierdzenie Bayesa

	H0 = prawda	H1 = prawda
$p < .05$		8
$p > .05$		2
	<b>990</b>	<b>10</b>

# Twierdzenie Bayesa

	H0 = prawda	H1 = prawda
p < .05	49.50 (50)	8
p > .05	941.50 (941)	2
	<b>990</b>	<b>10</b>

# Twierdzenie Bayesa

- ▶ Na 1000 badań, wśród wszystkich 58 istotnych testów statystycznych
  - ▶ 8 jest przejawem tego, że nasza hipoteza jest prawdziwa
  - ▶ 50 wynika z przypadku
- ▶ Prawdopodobieństwo, że nasza hipoteza jest prawdziwa wynosi:  
 $8/58 = 0.137931$

# Twierdzenie Bayesa

►  $+ = p < .05$

►  $- = p > .05$

$$Pr(H_1|p < +) = \frac{Pr(+|H_1) \times Pr(H_1)}{[Pr(+|H_1) \times Pr(H_1)] + [Pr(+|H_0) \times Pr(H_0)]}$$

## Twierdzenie Bayesa

$$Pr(H_1|p < .05) = \frac{.80 \times .01}{[.80 \times .01] + [.05 \times .99]} \approx .14$$



Jak szybko policzyć  $Pr$  dla  $H_1$ ?

When does a significant p-value indicate a true effect?

## Zastosowanie twierdzenia Bayesa w modelowaniu statystycznym

$$Posterior = \frac{Likelihood \times Prior}{Average Likelihood}$$

## Zastosowanie twierdzenia Bayesa w modelowaniu statystycznym

$$Pr(\textit{parametry}|\textit{dane}) = \frac{Pr(\textit{dane}|\textit{parametry}) \times Pr(\textit{parametry})}{Pr(\textit{dane})}$$

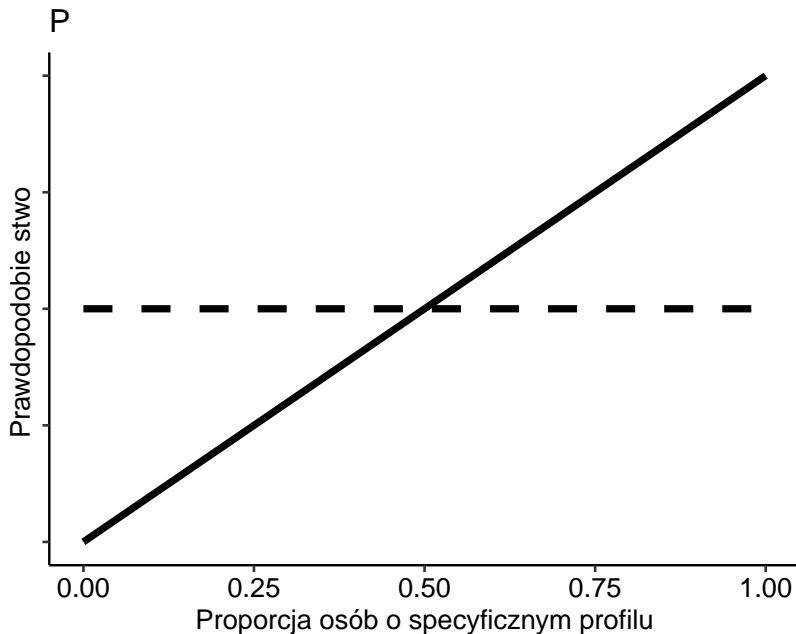
## Zastosowanie twierdzenia Bayesa w modelowaniu statystycznym

$$Pr(\theta|\mathcal{D}) = \frac{Pr(\mathcal{D}|\theta) \times Pr(\theta)}{\int Pr(\mathcal{D}|\theta) \times Pr(\theta) d\theta}$$

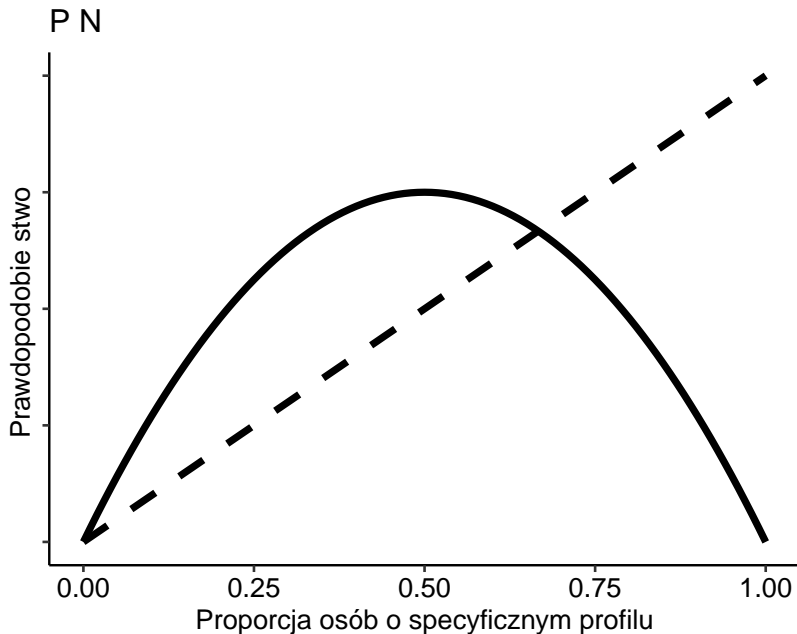
# Wnioskowanie Bayesowskie

- ▶ Przypuśćmy, że chcemy oszacować ile osób w populacji ma specyficzny profil osobowości.
- ▶ Dysponujemy kwestionariuszem, który mierzy taki profil bezbłędnie.
- ▶ Zaczynamy badanie na losowej, reprezentatywnej próbie osób.
- ▶ Otrzymujemy po kolej wyniki ( $P$  = pozytywne lub  $N$  = negatywne)
- ▶  $P, N, N, P, P, N, N, N, N$

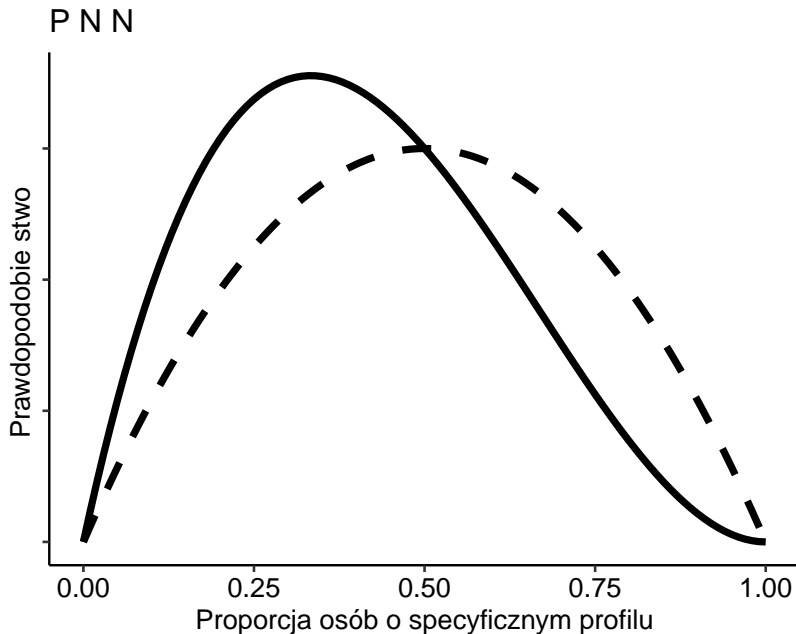
## Wnioskowanie Bayesowskie



## Wnioskowanie Bayesowskie



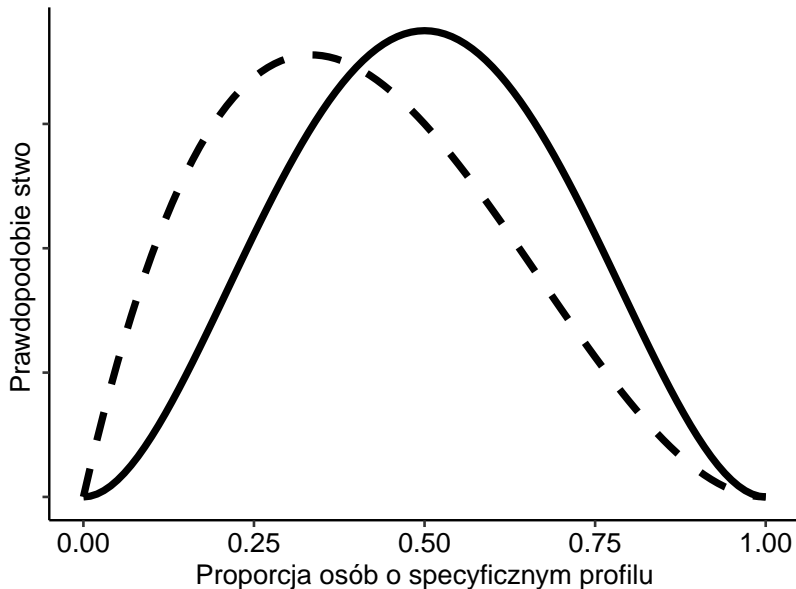
# Wnioskowanie Bayesowskie





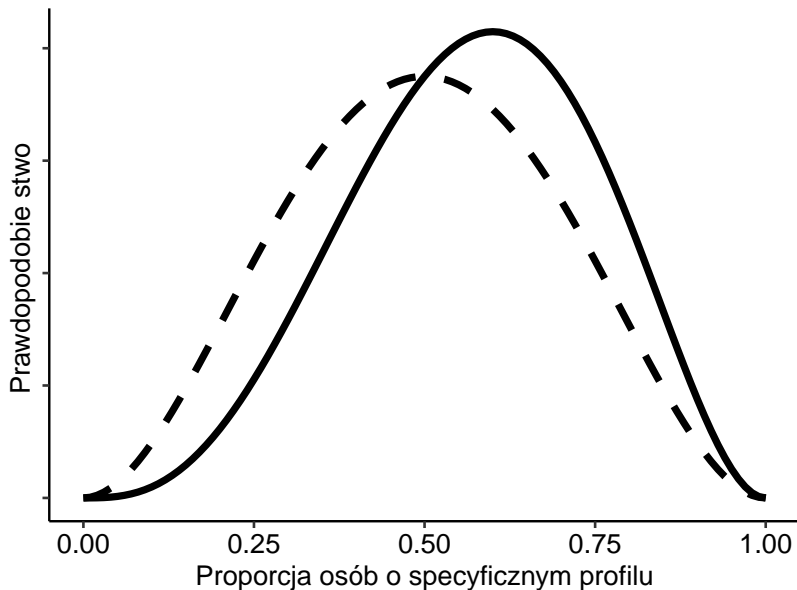
# Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P



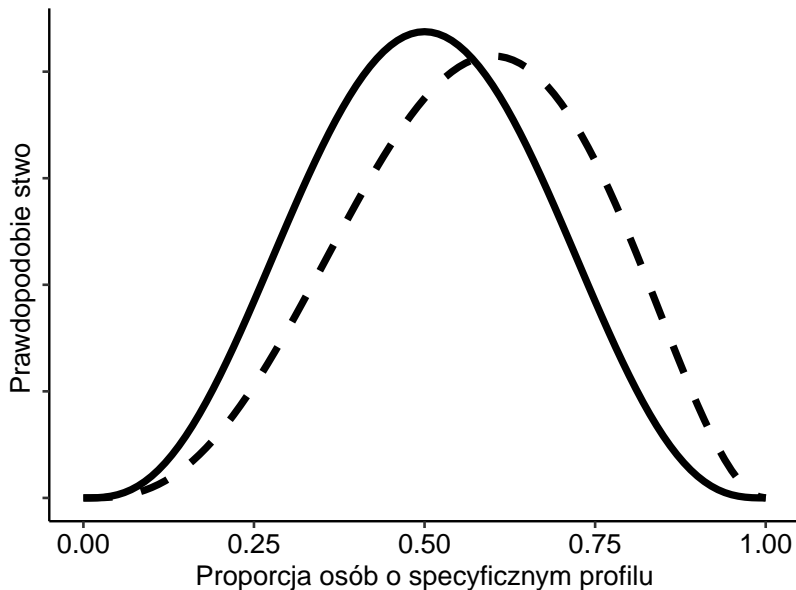
# Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P



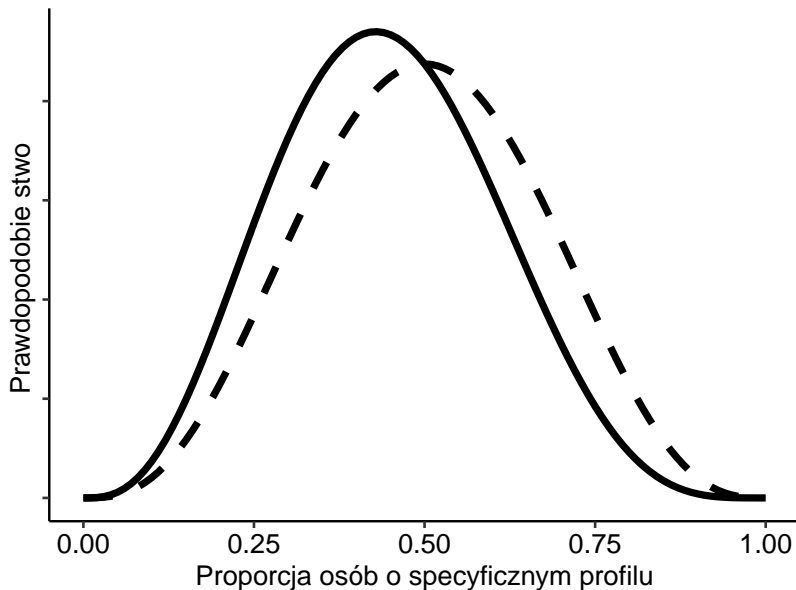
# Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N



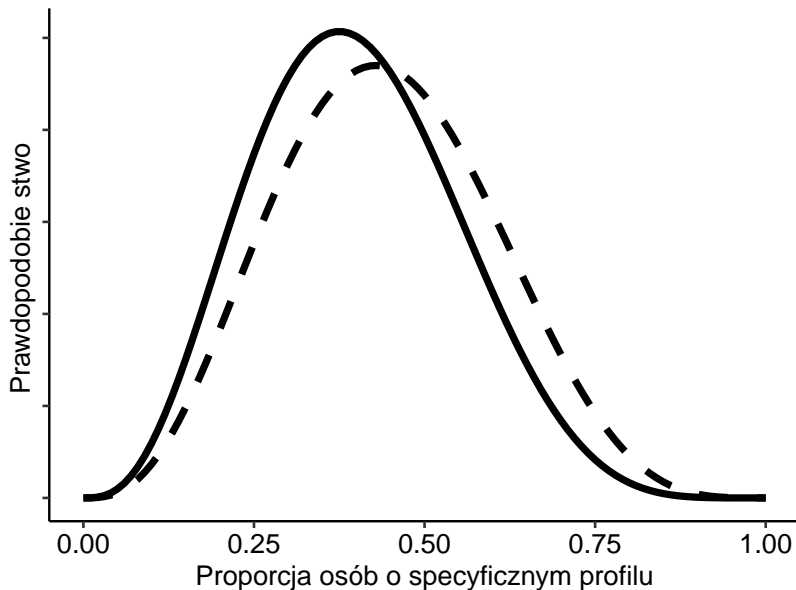
# Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N



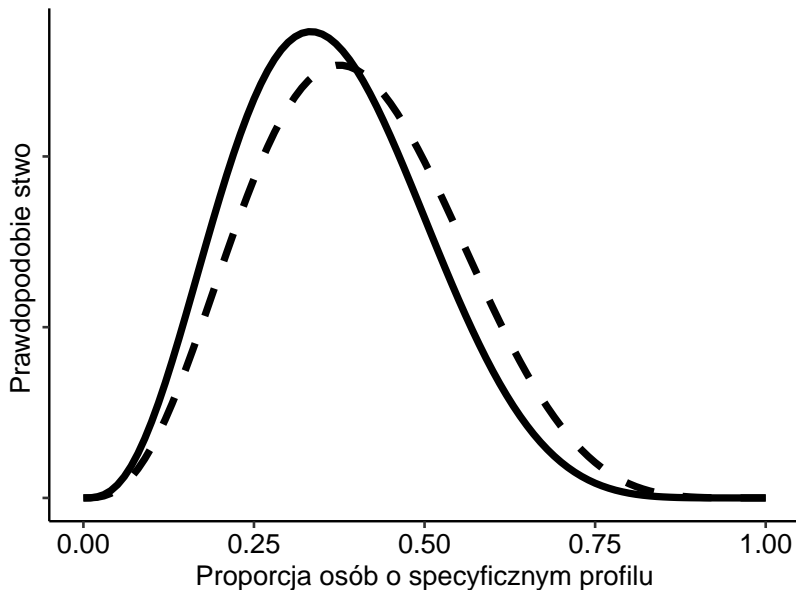
# Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N N



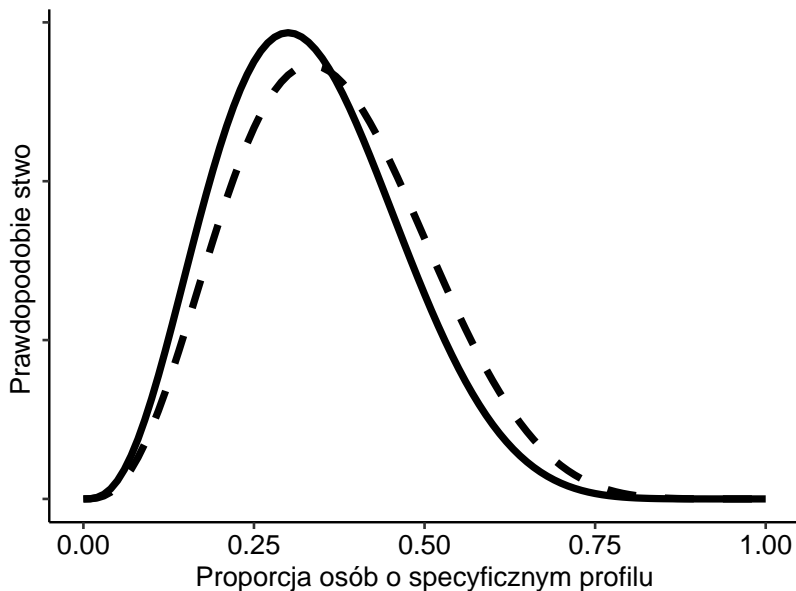
# Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N N N



# Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N N N N



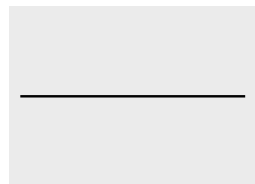
# Modele Bayesowskie są proste

Pr. posterior  $\propto$  dane przy założeniu hipotez  $\times$  Pr. prior

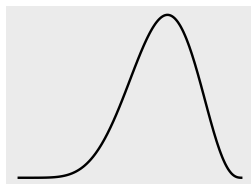


# Modele Bayesowskie są proste

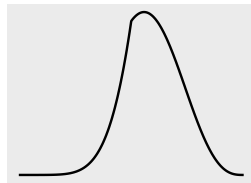
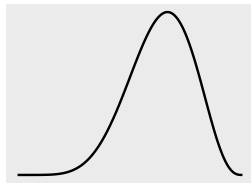
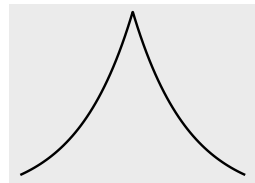
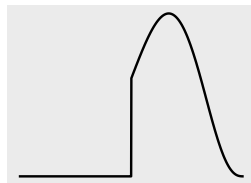
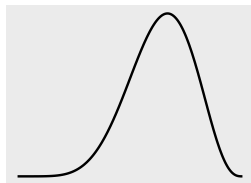
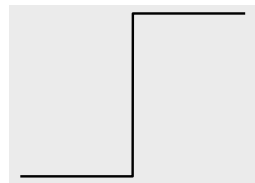
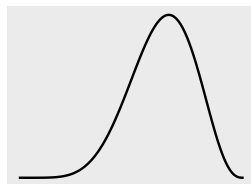
prior



likelihood



posterior



0.0

0.5

1.0

0.0

0.5

1.0

0.0

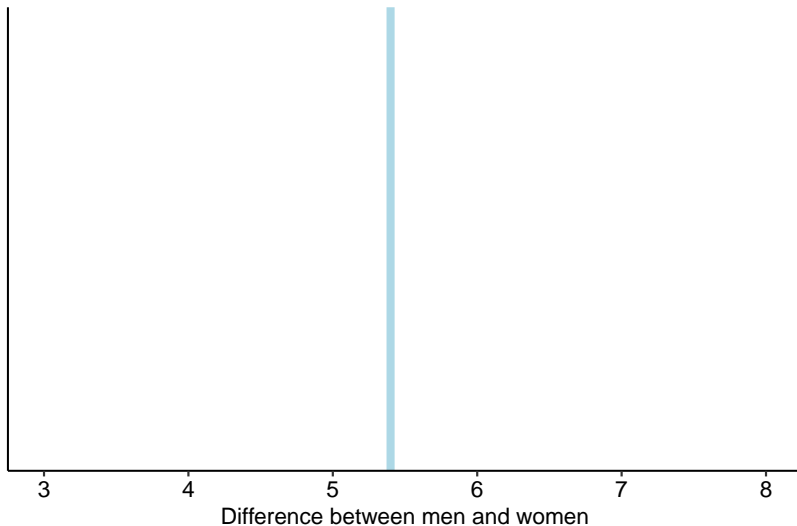
0.5

1.0

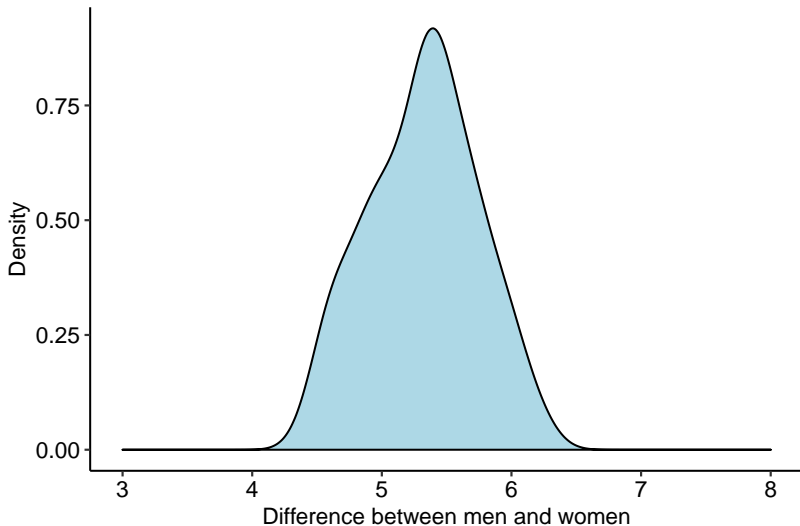
# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

- ▶ Co jest stałe a co zmienne?
- ▶ **Klasyczne:** Dane są losowe i napływające z ciągłego strumienia, ale parametry są stałe.
- ▶ **Bayesowskie:** Dane są obserwowane i dlatego stałe, parametry są nieznane i opisywane przy pomocy rozkładów.

## Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



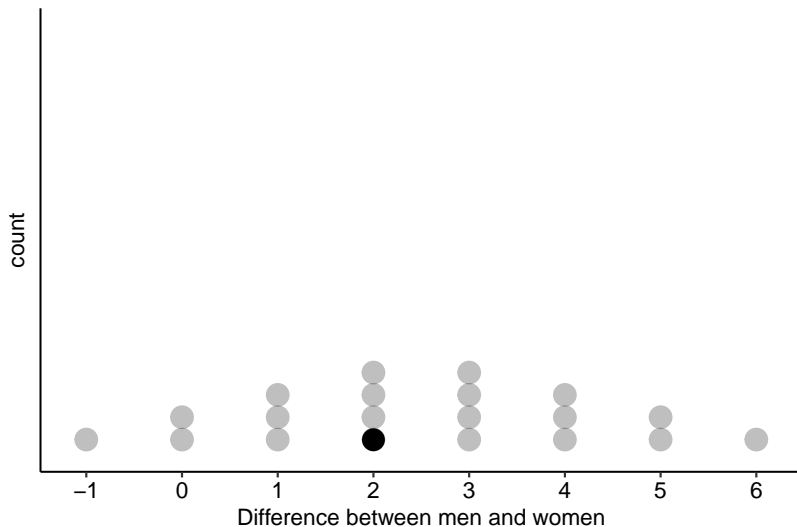
## Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



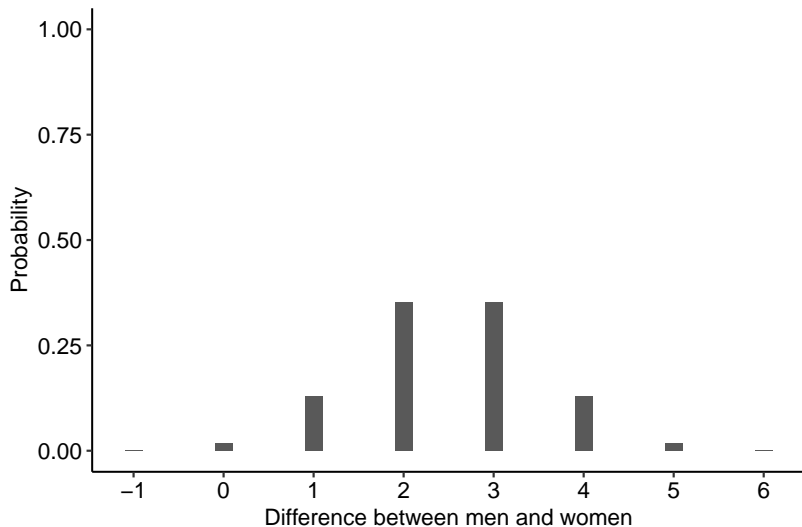
# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

- ▶ Jak interpretowane jest prawdopodobieństwo?
- ▶ **Klasyczne:** Prawdopodobieństwo jest obserwowanym wynikiem serii nieskończonych prób (np. rzutów kostką) przeprowadzonych w jednakowych warunkach.
- ▶ **Bayesowskie:** Prawdopodobieństwo jest miarą przekonań badacza przed i po zebraniu danych.

# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



## Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

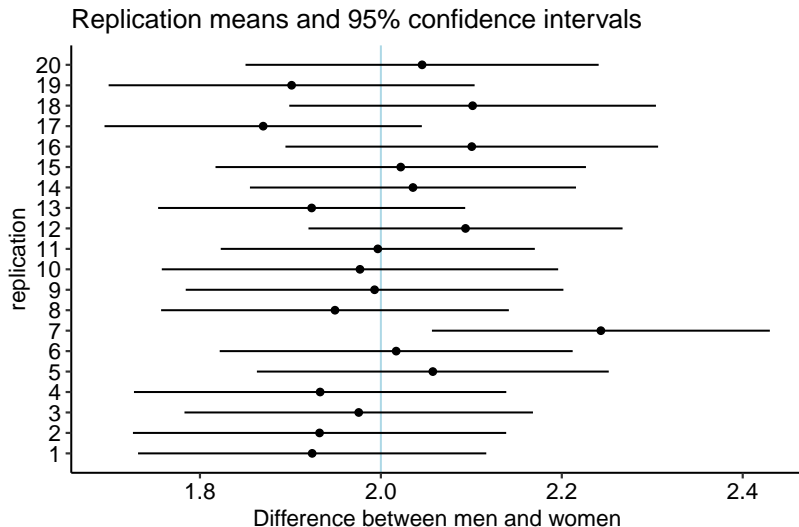


# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

- ▶ W jaki sposób podsumowuje się modele?
- ▶ **Klasyczne:** Estymacja punktowa i błędy standardowe. Przedziały ufności: 95% CI wskazuje, że 19 na 20 przedział pokrywa prawdziwą wartość parametru.
- ▶ **Bayesowskie:** Różne sposoby opisywanie rozkładu parametrów (średnia, mediana, kwartyle). Przedziały wiarygodności (*credible intervals*), oraz HPDI (*highest posterior density intervals*).

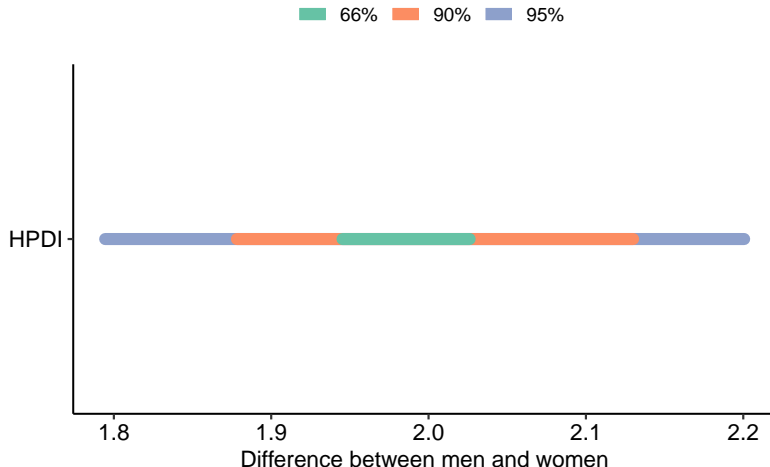


# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

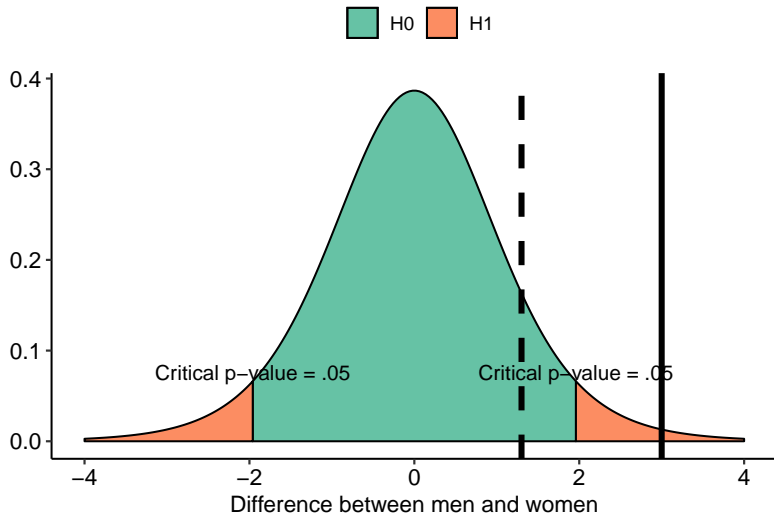
## Bayesian Intervals



# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

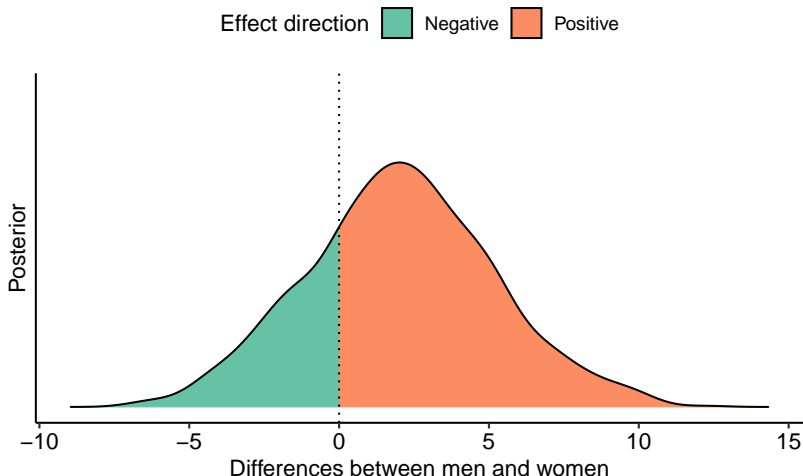
- ▶ W jaki sposób odbywa się ogólny proces wnioskowania?
- ▶ **Klasyczne:** Poprzez dedukcję z danych przy założeniu, że  $H_0$  jest prawdziwa i wcześniejszym ustaleniu wartości  $\alpha$ .  
Odrzucenie  $H_0$  jeżeli  $Pr(dane|H_0) < \alpha$ , pozostawienie  $H_0$  jeżeli  $Pr(dane|H_0) \geq \alpha$ .
- ▶ **Bayesowskie:** Poprzez indukcję z rozkładu posterior zakładając wcześniejszą wiedzę.

# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

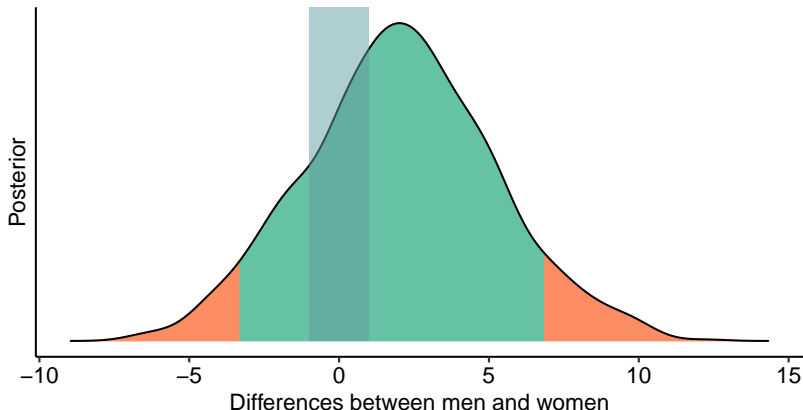
Probability of Direction



# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

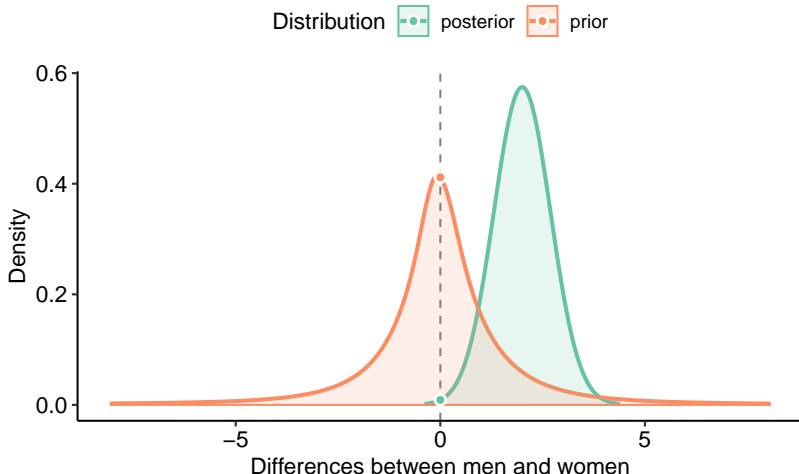
Region of Practical Equivalence (ROPE)

CI  89  100



# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

Bayes Factor,  $BF = 45.28$



# Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

- ▶ W jaki sposób testowana jest jakość modelu?
- ▶ **Klasyczne:** Błędy I i II rodzaju. Wielkość efektu i moc testu. Skupienie na wartości  $p$ .
- ▶ **Bayesowskie:** Testy predykcyjne (*posterior predictive checks*). Sprawdzenie czułości modelu na różne formy rozkładu prior. Czynniki Bayesa, kryteria informacyjne (DIC, WAIC, LOOIC).



# Dlaczego NIE stosować wnioskowania Bayesowskiego?

- ▶ Zależy nam przede wszystkim na stwierdzeniu “istotności” efektu, a nie oszacowaniu jego wagi.
- ▶ Nie dysponujemy komputerem lub nasz komputer jest bardzo powolny.
- ▶ Zależy nam na zautomatyzowanych procedurach, jak z książki kucharskiej.

## Dlaczego stosować wnioskowanie Bayesowskie?

- ▶ Chcemy być ostrożni przy formułowaniu założeń i jesteśmy gotowi do ich obrony.
- ▶ Postrzegamy świat w kategoriach probabilistycznych, a nie jako zbiór stałych fenomenów (znanych lub nieznanymi).
- ▶ Jesteśmy gotowi przyznać, że każdy model statystyczny w historii nauki był subiektywny (opierał się na założeniach przyjętych przez badacza).
- ▶ Jeszcze przed przeprowadzeniem badania mamy informacje, które mogą posłużyć na do opisanie rozkładu prior; oraz chcemy ich użyć.

## Kiedy wnioskowanie Bayesowskie może być szczególnie przydatne?

- ▶ Mamy niewielkie próby, dane zawierają sporo szumu.
- ▶ Badane przez nas populacje mają złożoną, hierarchiczną strukturę (np. uczniowie w klasach, klasy w szkołach, szkoły w województwach, itd.).
- ▶ Chcemy kontrolować różne źródła niepewności (braki danych, błędy pomiarowe, naruszone założenia, np. heteroskedastyczność, inne niż Normalny rozkłady odpowiedzi, autokorelacja reszt regresji).
- ▶ Replikujemy poprzednio zrealizowane badania.
- ▶ Chcemy sprawdzić, czy nasze badania potwierdzają hipotezę o braku różnic (lub braku korelacji).
- ▶ Chcemy używać naszych modeli nie tylko do inferencji, ale również do predykcji.