

Wprowadzenie do statystyki Bayesowskiej

Wiktor Soral

Oczekiwania

- ▶ dobra znajomość statystyki (wielokrotna regresja, wieloczynnikowa ANOVA, HLM)

Oczekiwania

- ▶ dobra znajomość statystyki (wielokrotna regresja, wieloczynnikowa ANOVA, HLM)
- ▶ poczucie, że klasyczne metody statystyczne są niewystarczające w pracy badacza

Oczekiwania

- ▶ dobra znajomość statystyki (wielokrotna regresja, wieloczynnikowa ANOVA, HLM)
- ▶ poczucie, że klasyczne metody statystyczne są niewystarczające w pracy badacza
- ▶ przynajmniej podstawowa znajomość środowiska R

Oczekiwania

- ▶ dobra znajomość statystyki (wielokrotna regresja, wieloczynnikowa ANOVA, HLM)
- ▶ poczucie, że klasyczne metody statystyczne są niewystarczające w pracy badacza
- ▶ przynajmniej podstawowa znajomość środowiska R
- ▶ lub brak strachu przed poznaniem R w ekspresowym tempie

Oczekiwania

- ▶ dobra znajomość statystyki (wielokrotna regresja, wieloczynnikowa ANOVA, HLM)
- ▶ poczucie, że klasyczne metody statystyczne są niewystarczające w pracy badacza
- ▶ przynajmniej podstawowa znajomość środowiska R
- ▶ lub brak strachu przed poznaniem R w ekspresowym tempie
- ▶ świadomość, że podczas warsztatu nie dostaniecie “gotowców”
 - każda analiza wymaga myślenia, metody bayesowskie szczególnie

Opis warsztatu

D1/10:00	Wprowadzenie do statystyki Bayesowskiej
D1/11:45	Powtórka z R
D1/14:00	Wprowadzenie do MCMC
D1/15:45	brms: regresja prosta i porównywanie średnich
D2/10:00	brms: regresja wielokrotna + a. moderacji
D2/11:45	brms: Bayesowska ANOVA
D2/14:00	brms: Bayesowski HLM
D2/15:45	Testowanie hipotez i porównywanie modeli

Opis oprogramowania

- ▶ R + RStudio + RStudio Notebooks
- ▶ pakiety:
 - ▶ tidyverse
 - ▶ brms
 - ▶ emmeans
 - ▶ bayestestR
 - ▶ tidybayes

Strona warsztatu

- ▶ Wszystkie materiały, skrypty R, oraz dane można pobrać ze strony:
 - ▶ https://github.com/wsoral/bayes_warsztat2019

Inne programy oferujące metody Bayesowskie

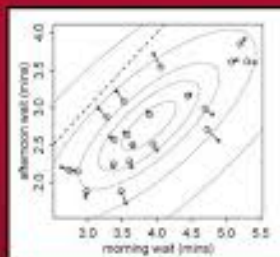
- ▶ Większość współczesnych pakietów statystycznych oferuje jakiś rodzaj metod Bayesowskich:
 - ▶ Stata
 - ▶ SAS
 - ▶ MPlus
 - ▶ SPSS/Amos
 - ▶ JASP
 - ▶ WinBUGS
 - ▶ JAGS
 - ▶ Python - Pymc3
 - ▶ Julia - Turing

Książki na temat analizy Bayesowskiej

Texts in Statistical Science

Statistical Rethinking

A Bayesian Course with
Examples in R and Stan



Richard McElreath

Książki na temat analizy Bayesowskiej

Amazon

Doing Bayesian Data Analysis

A Tutorial with R, JAGS, and Stan



John K. Kruschke

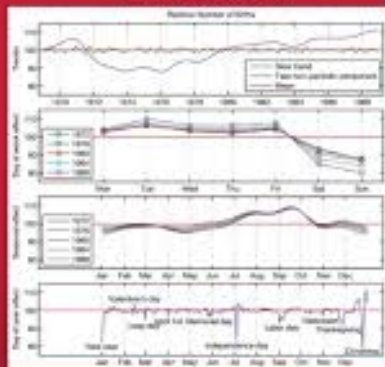


Książki na temat analizy Bayesowskiej

Texts in Statistical Science

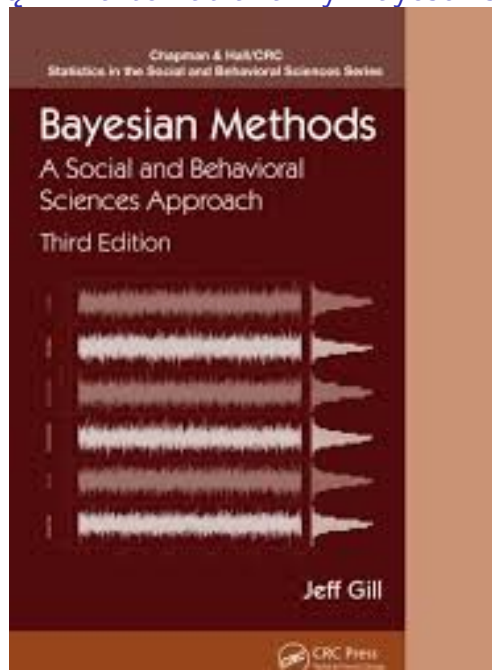
Bayesian Data Analysis

Third Edition

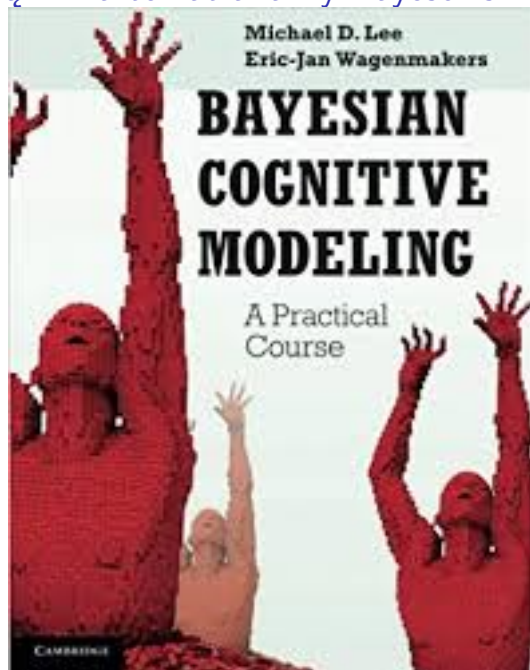


Andrew Gelman, John B. Carlin, Hal S. Stern,
David B. Dunson, Aki Vehtari, and Donald B. Rubin

Książki na temat analizy Bayesowskiej



Książki na temat analizy Bayesowskiej



Materiały dostępne online:

- ▶ Blogi na temat pakietu brms: [tutaj](#)
- ▶ Case studies z użyciem programu Stan: [tutaj](#)
- ▶ Przykłady z książki 'Statistical rethinking' w brms: [tutaj](#)
- ▶ Przykłady z książki 'Introduction to Mediation, Moderation, and Conditional Process Analysis' Andrew Hayesa w brms: [tutaj](#)
- ▶ Przykłady z książki 'DBDA2ed' Kruske'go w brms: [tutaj](#)

Twierdzenie Bayesa

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A) \times Pr(A)}{Pr(B)}$$

Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .

Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik, $p < .05$?

Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik, $p < .05$?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ($H_1 = \text{prawda}$) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.

Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik, $p < .05$?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ($H_1 = \text{prawda}$) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Wartość p oznacza, że jeżeli nasza hipoteza jest fałszywa ($H_0 = \text{prawda}$), na 1000 badań w 50 uzyskamy istotny wynik.

Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik, $p < .05$?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ($H_1 = \text{prawda}$) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Wartość p oznacza, że jeżeli nasza hipoteza jest fałszywa ($H_0 = \text{prawda}$), na 1000 badań w 50 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Nie wiemy jak dużo hipotez badawczych jest prawdziwe. Przypuśćmy, że jest to jednak tylko mały odsetek, 10 na 1000.

Twierdzenie Bayesa

- ▶ Jak bardzo możemy być pewni statystycznie istotnego wyniku. . .
- ▶ jeżeli przeprowadziliśmy badanie o mocy .80 i uzyskaliśmy istotny statystycznie wynik, $p < .05$?
- ▶ Moc .80 oznacza, że jeżeli nasza hipoteza ($H_1 = \text{prawda}$) jest prawdziwa, na 1000 badań w 800 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Wartość p oznacza, że jeżeli nasza hipoteza jest fałszywa ($H_0 = \text{prawda}$), na 1000 badań w 50 uzyskamy istotny wynik.
- ▶ Nie wiemy jak dużo hipotez badawczych jest prawdziwe. Przypuśćmy, że jest to jednak tylko mały odsetek, 10 na 1000.
- ▶ Jakie jest prawdopodobieństwo, że nasza hipoteza jest prawdziwa jeżeli uzyskaliśmy istotny wynik?

Twierdzenie Bayesa

	H0 = prawda	H1 = prawda
$p < .05$		
$p > .05$	990	10

Twierdzenie Bayesa

	H0 = prawda	H1 = prawda
$p < .05$		8
$p > .05$		2
	990	10

Twierdzenie Bayesa

	H0 = prawda	H1 = prawda
p < .05	49.50 (50)	8
p > .05	941.50 (941)	2
	990	10

Twierdzenie Bayesa

- ▶ Na 1000 badań, wśród wszystkich 58 istotnych testów statystycznych
 - ▶ 8 jest przejawem tego, że nasza hipoteza jest prawdziwa
 - ▶ 50 wynika z przypadku
- ▶ Prawdopodobieństwo, że nasza hipoteza jest prawdziwa wynosi:
 $8/58 = 0.137931$

Twierdzenie Bayesa

► $+ = p < .05$

► $- = p > .05$

$$Pr(H_1|p < +) = \frac{Pr(+|H_1) \times Pr(H_1)}{[Pr(+|H_1) \times Pr(H_1)] + [Pr(+|H_0) \times Pr(H_0)]}$$

Twierdzenie Bayesa

$$Pr(H_1|p < .05) = \frac{.80 \times .01}{[.80 \times .01] + [.05 \times .99]} \approx .14$$

Jak szybko policzyć Pr dla H_1 ?

When does a significant p-value indicate a true effect?

Zastosowanie twierdzenia Bayesa w modelowaniu statystycznym

$$Posterior = \frac{Likelihood \times Prior}{Average Likelihood}$$

Zastosowanie twierdzenia Bayesa w modelowaniu statystycznym

$$Pr(\textit{parametry}|\textit{dane}) = \frac{Pr(\textit{dane}|\textit{parametry}) \times Pr(\textit{parametry})}{Pr(\textit{dane})}$$

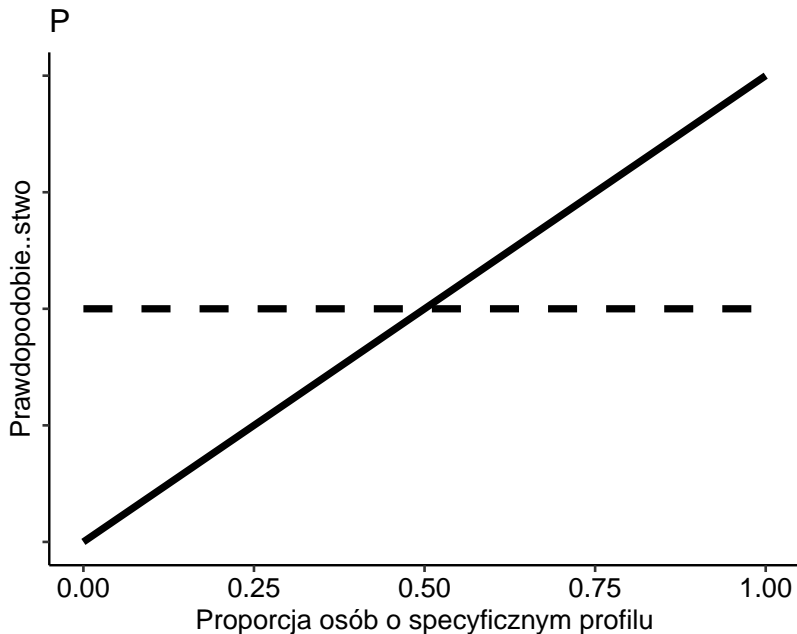
Zastosowanie twierdzenia Bayesa w modelowaniu statystycznym

$$Pr(\theta|\mathcal{D}) = \frac{Pr(\mathcal{D}|\theta) \times Pr(\theta)}{\int Pr(\mathcal{D}|\theta) \times Pr(\theta) d\theta}$$

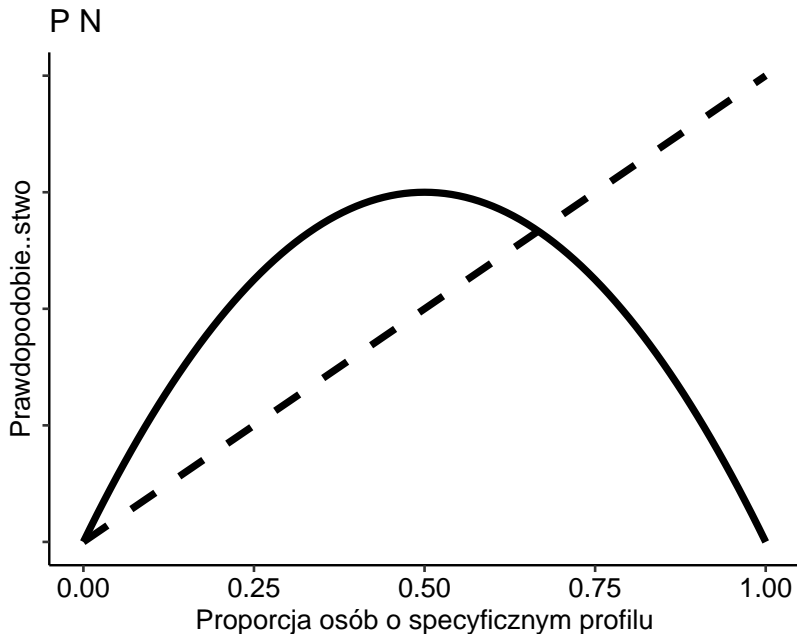
Wnioskowanie Bayesowskie

- ▶ Przypuśćmy, że chcemy oszacować ile osób w populacji ma specyficzny profil osobowości.
- ▶ Dysponujemy kwestionariuszem, który mierzy taki profil bezbłędnie.
- ▶ Zaczynamy badanie na losowej, reprezentatywnej próbie osób.
- ▶ Otrzymujemy po kolej wyniki (P = pozytywne lub N = negatywne)
- ▶ $P, N, N, P, P, N, N, N, N$

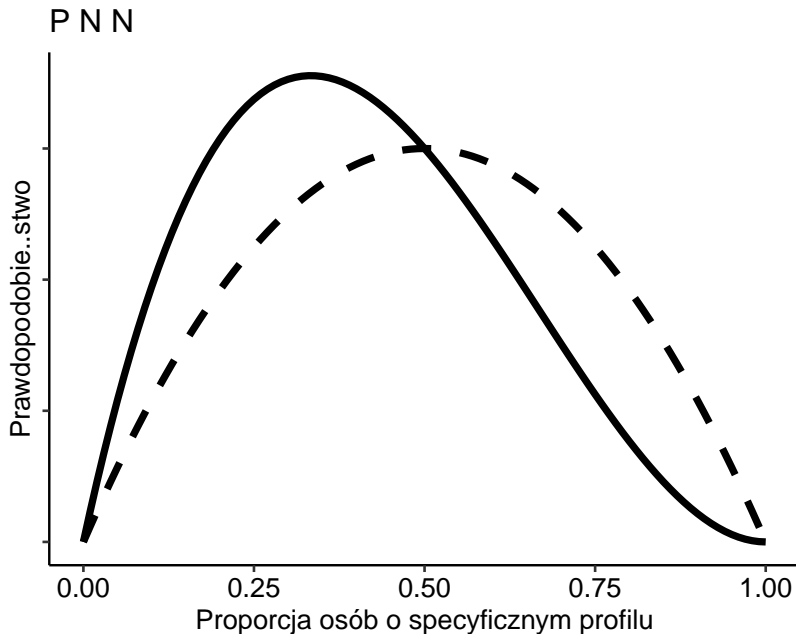
Wnioskowanie Bayesowskie



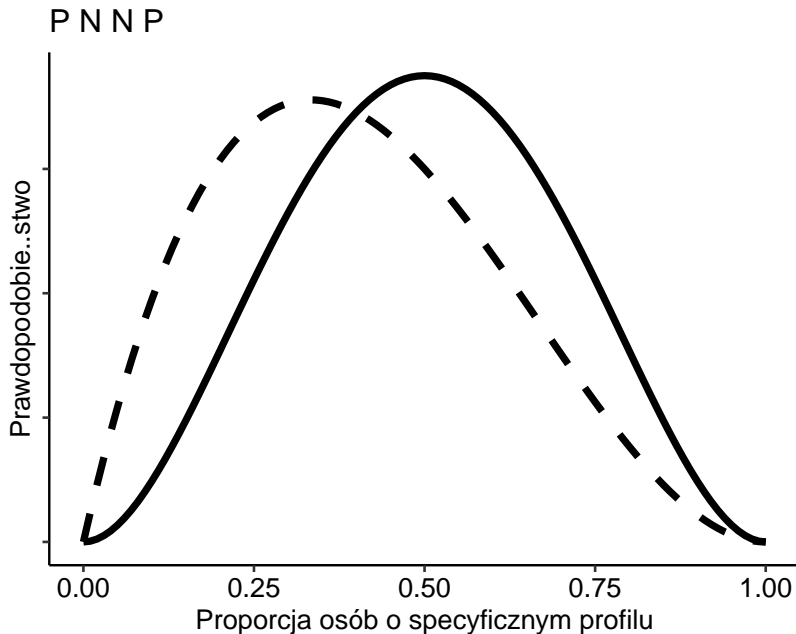
Wnioskowanie Bayesowskie



Wnioskowanie Bayesowskie

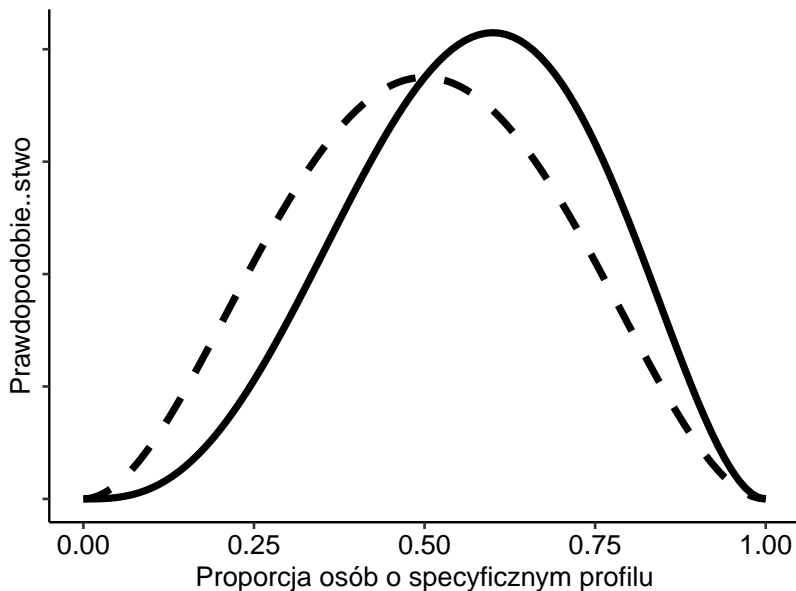


Wnioskowanie Bayesowskie



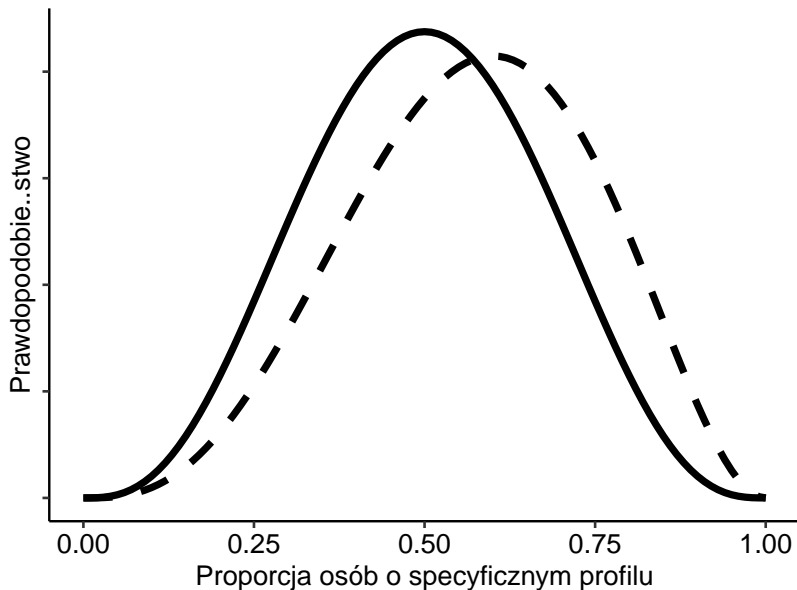
Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P



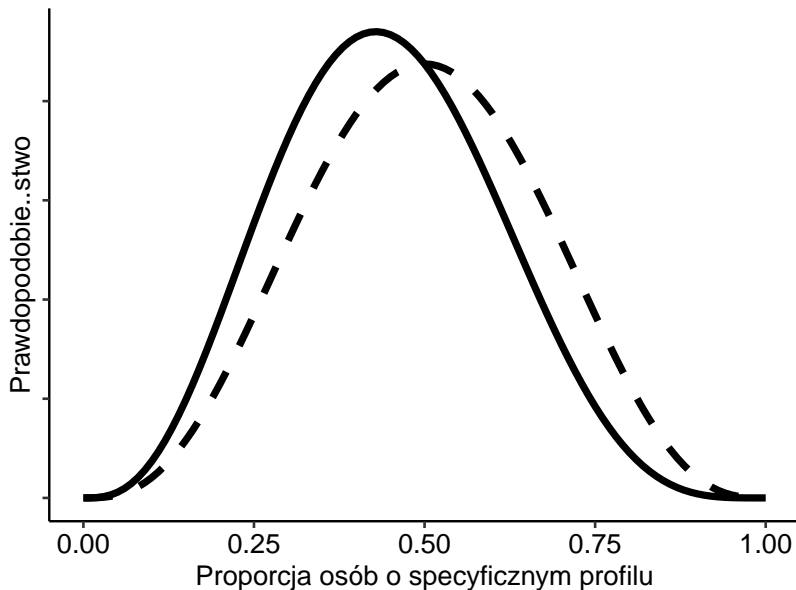
Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N



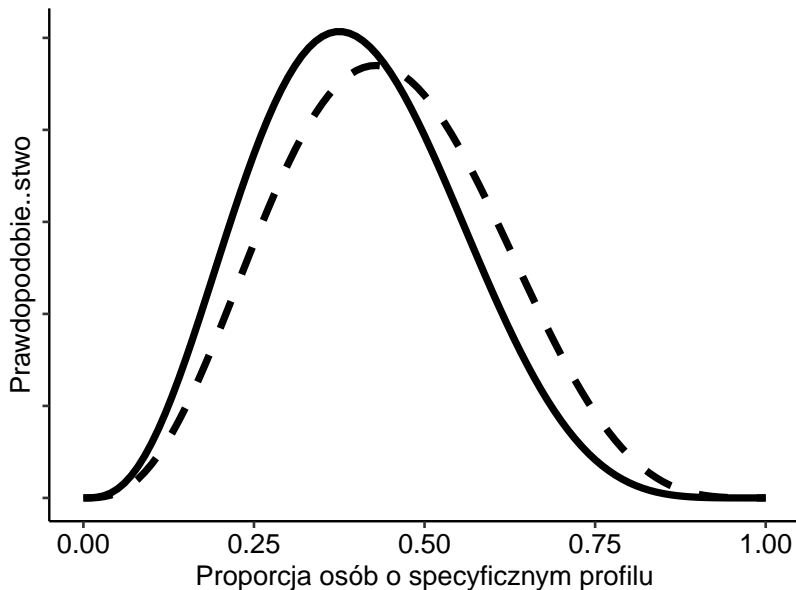
Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N



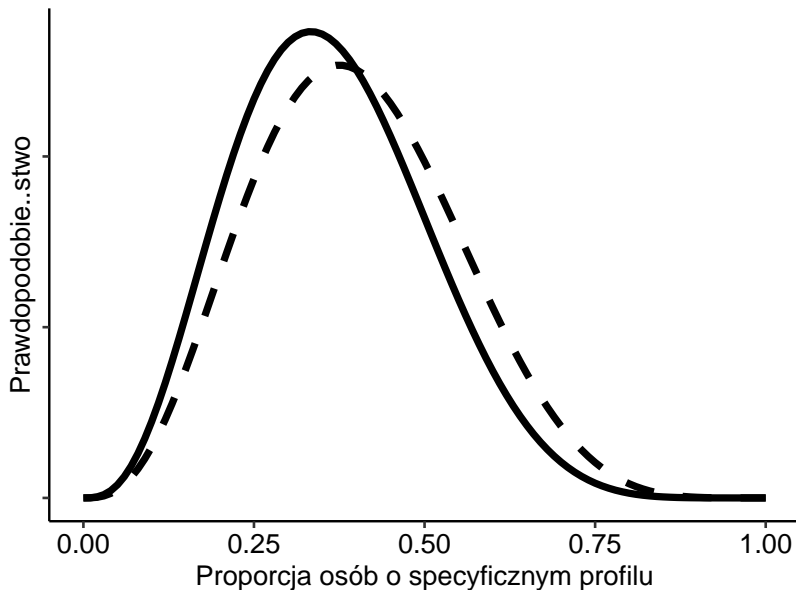
Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N N



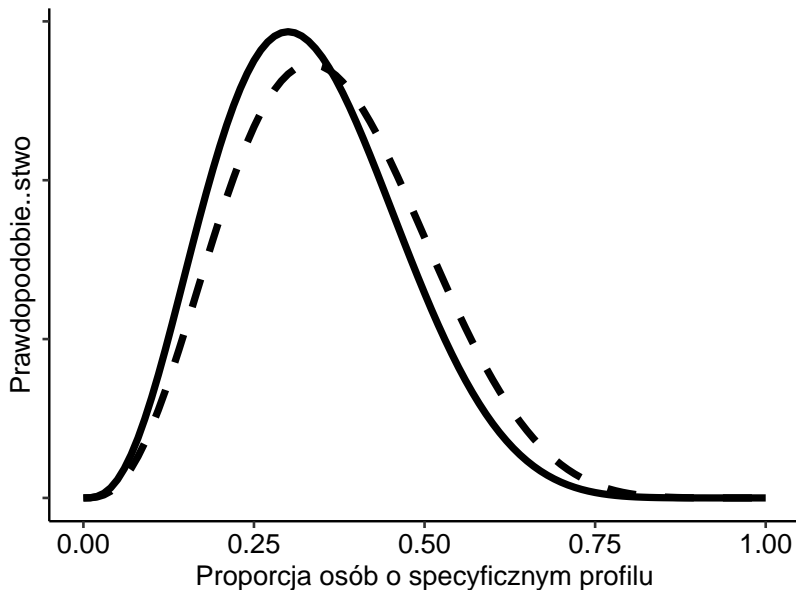
Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N N N



Wnioskowanie Bayesowskie

P N N P P N N N N N

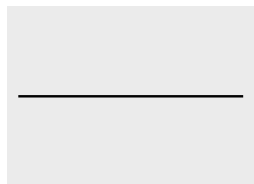


Modele Bayesowskie są proste

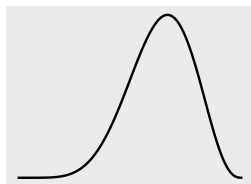
Pr. posterior \propto dane przy założeniu hipotez \times Pr. prior

Modele Bayesowskie są proste

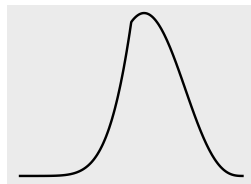
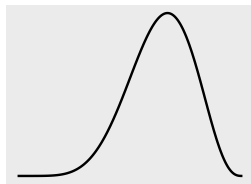
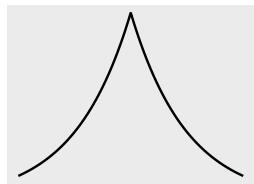
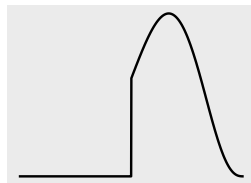
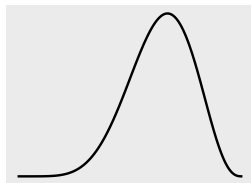
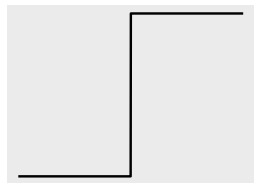
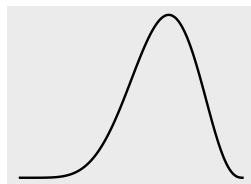
prior



likelihood



posterior



0.0

0.5

1.0

0.0

0.5

1.0

0.0

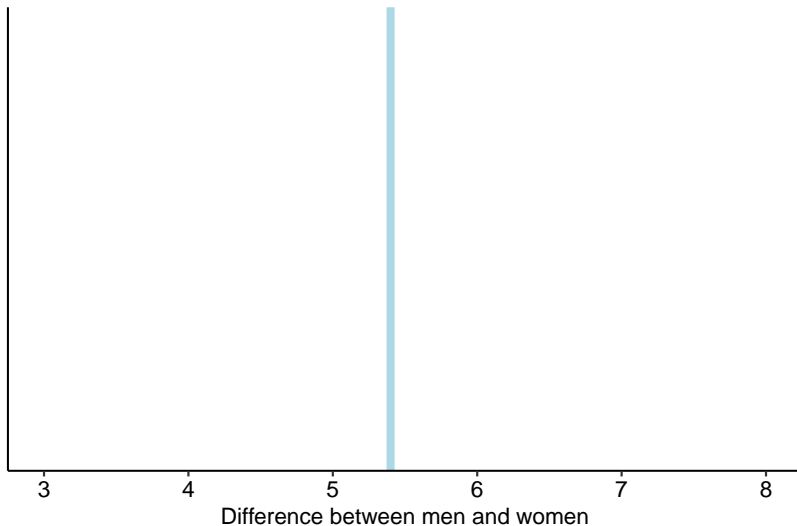
0.5

1.0

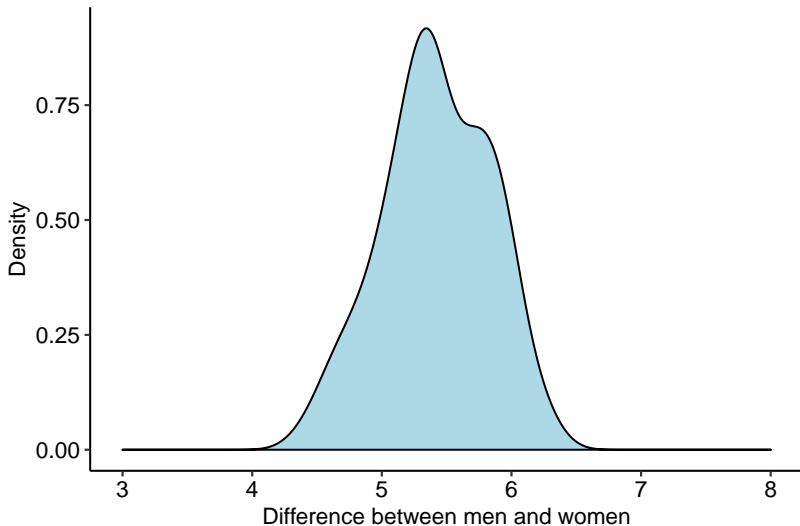
Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

- ▶ Co jest stałe a co zmienne?
- ▶ **Klasyczne:** Dane są losowe i napływające z ciągłego strumienia, ale parametry są stałe.
- ▶ **Bayesowskie:** Dane są obserwowane i dlatego stałe, parametry są nieznane i opisywane przy pomocy rozkładów.

Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



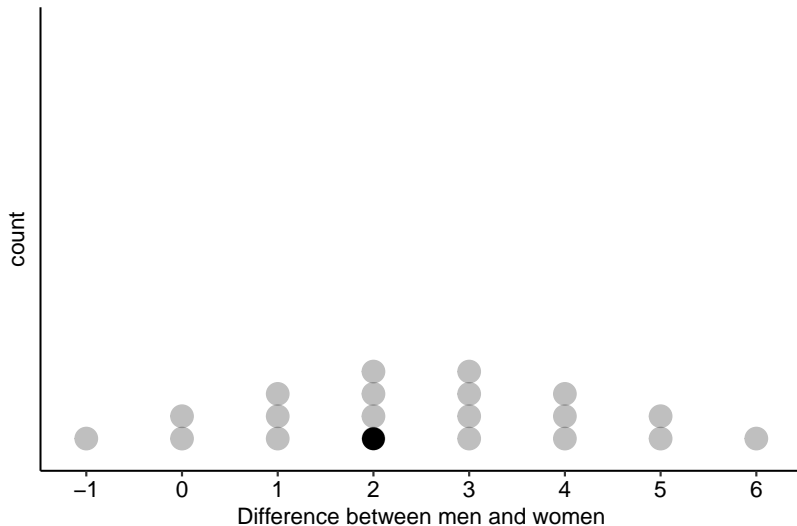
Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



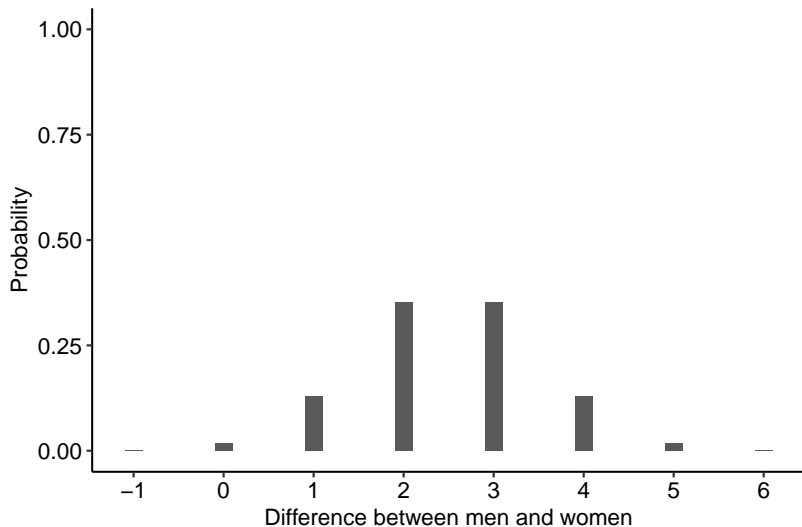
Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

- ▶ Jak interpretowane jest prawdopodobieństwo?
- ▶ **Klasyczne:** Prawdopodobieństwo jest obserwowanym wynikiem serii nieskończonych prób (np. rzutów kostką) przeprowadzonych w jednakowych warunkach.
- ▶ **Bayesowskie:** Prawdopodobieństwo jest miarą przekonań badacza przed i po zebraniu danych.

Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



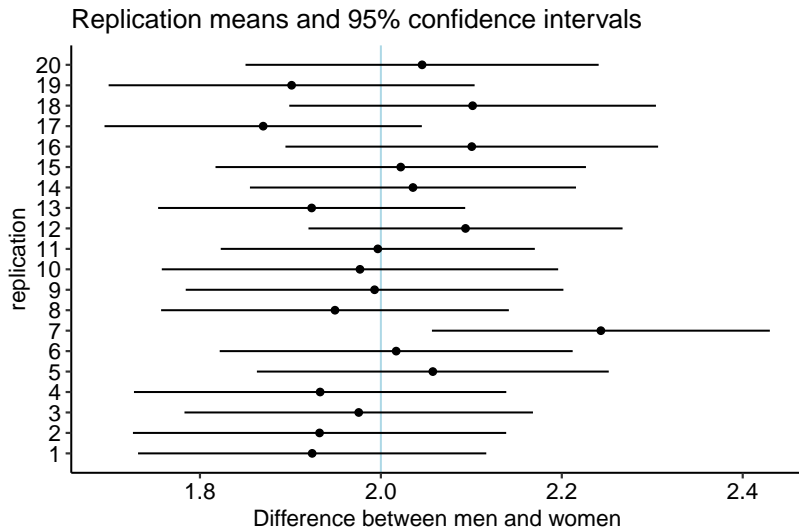
Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

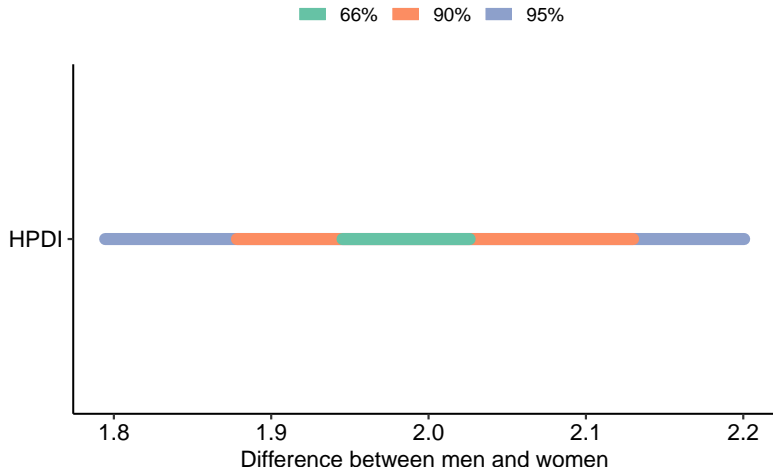
- ▶ W jaki sposób podsumowuje się modele?
- ▶ **Klasyczne:** Estymacja punktowa i błędy standardowe. Przedziały ufności: 95% CI wskazuje, że 19 na 20 przedział pokrywa prawdziwą wartość parametru.
- ▶ **Bayesowskie:** Różne sposoby opisywanie rozkładu parametrów (średnia, mediana, kwartyle). Przedziały wiarygodności (*credible intervals*), oraz HPDI (*highest posterior density intervals*).

Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

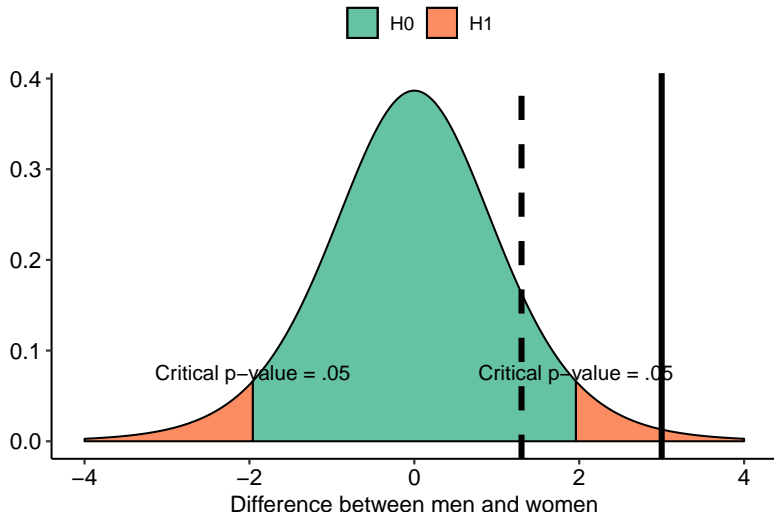
Bayesian Intervals



Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

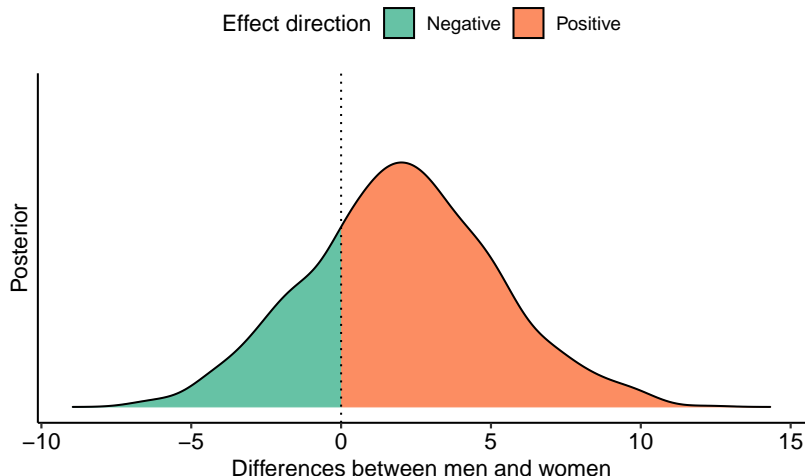
- ▶ W jaki sposób odbywa się ogólny proces wnioskowania?
- ▶ **Klasyczne:** Poprzez dedukcję z danych przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa i wcześniejszym ustaleniu wartości α .
Odrzucenie H_0 jeżeli $Pr(dane|H_0) < \alpha$, pozostawienie H_0 jeżeli $Pr(dane|H_0) \geq \alpha$.
- ▶ **Bayesowskie:** Poprzez indukcję z rozkładu posterior zakładając wcześniejszą wiedzę.

Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym



Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

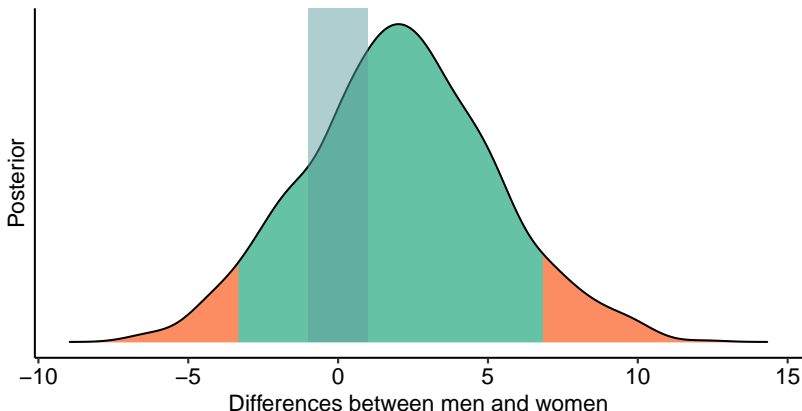
Probability of Direction



Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

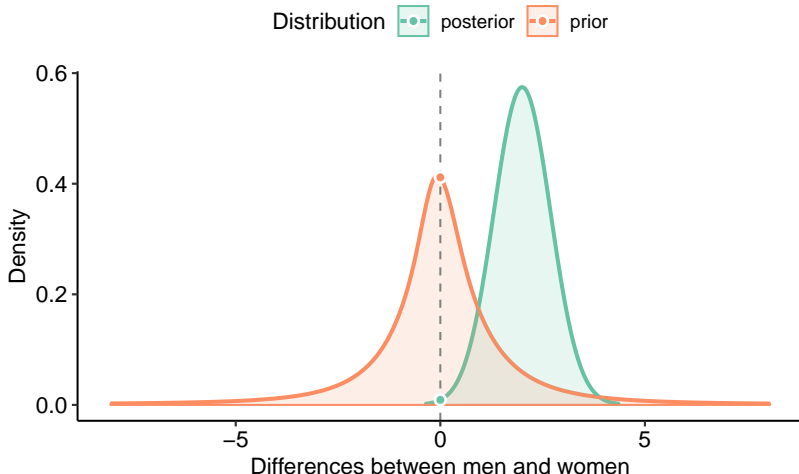
Region of Practical Equivalence (ROPE)

CI 89 100



Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

Bayes Factor, $BF = 45.28$



Główne różnice pomiędzy podejściem bayesowskim a klasycznym

- ▶ W jaki sposób testowana jest jakość modelu?
- ▶ **Klasyczne:** Błędy I i II rodzaju. Wielkość efektu i moc testu. Skupienie na wartości p .
- ▶ **Bayesowskie:** Testy predykcyjne (*posterior predictive checks*). Sprawdzenie czułości modelu na różne formy rozkładu prior. Czynniki Bayesa, kryteria informacyjne (DIC, WAIC, LOOIC).

Dlaczego NIE stosować wnioskowania Bayesowskiego?

- ▶ Zależy nam przede wszystkim na stwierdzeniu “istotności” efektu, a nie oszacowaniu jego wagi.
- ▶ Nie dysponujemy komputerem lub nasz komputer jest bardzo powolny.
- ▶ Zależy nam na zautomatyzowanych procedurach, jak z książki kucharskiej.

Dlaczego stosować wnioskowanie Bayesowskie?

- ▶ Chcemy być ostrożni przy formułowaniu założeń i jesteśmy gotowi do ich obrony.
- ▶ Postrzegamy świat w kategoriach probabilistycznych, a nie jako zbiór stałych fenomenów (znanych lub nieznanymi).
- ▶ Jesteśmy gotowi przyznać, że każdy model statystyczny w historii nauki był subiektywny (opierał się na założeniach przyjętych przez badacza).
- ▶ Jeszcze przed przeprowadzeniem badania mamy informacje, które mogą posłużyć na do opisanie rozkładu prior; oraz chcemy ich użyć.

Kiedy wnioskowanie Bayesowskie może być szczególnie przydatne?

- ▶ Mamy niewielkie próby, dane zawierają sporo szumu.
- ▶ Badane przez nas populacje mają złożoną, hierarchiczną strukturę (np. uczniowie w klasach, klasy w szkołach, szkoły w województwach, itd.).
- ▶ Chcemy kontrolować różne źródła niepewności (braki danych, błędy pomiarowe, naruszone założenia, np. heteroskedastyczność, inne niż Normalny rozkłady odpowiedzi, autokorelacja reszt regresji).
- ▶ Replikujemy poprzednio zrealizowane badania.
- ▶ Chcemy sprawdzić, czy nasze badania potwierdzają hipotezę o braku różnic (lub braku korelacji).
- ▶ Chcemy używać naszych modeli nie tylko do inferencji, ale również do predykcji.

Pytania