Économétrie des séries temporelles

Documents et calculatrice interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Durée 1h30.

Exercice 1 (5 points)

Un processus ARMA(p,q) vérifie une relation de la forme

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \tag{1}$$

où (ε_t) est un bruit blanc. On note $\gamma(h)$ la fonction d'autocovariance et $\rho(h)$ la fonction d'autocorrélation et $\psi(h)$ la fonction d'autocorrélation partielle.

1. (1 point) Si le processus est un AR(1), quelle affirmation est correcte
   1. $\gamma(1) = \phi$
   2. $\gamma(2) = 0$
   3. $Corr(y_t, \varepsilon_t) = 0$
   4. $Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \theta$
2. (1 point) Que vaut la variance d'un processus AR(1) avec $\mu = 0$?
3. (1 point) Soit un processus ARMA(1,1), quelle est la condition sur les paramètres pour que le processus soit stationnaire
4. (2 points) Citez deux processus non linéaires et explicitez ce qu'ils apportent de plus qu'un processus linéraire.

Exercice 2 (7 points)

Soit le processus $Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$

1. (1 point) Calculez l'espérance et la variance non-conditionnelle de Y_t.
2. (2 points) Calculez l'espérance et la variance conditionnelle de Y_t.
3. (2 points) Soit $\varepsilon_t = h_t^{1/2}\eta_t$ avec $h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1}$, répondez de nouveau aux questions précédentes.
4. (2 points) Proposez des conditions de stationnarité.

Exercice 3 (5 points)

Soit le processus $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$

1. (2 points) Calculez l'espérance et la variance non-conditionnelle de Y_t. Est-ce un processus stationnaire ?
2. (2 points) Quelle procédure de test permet de vérifier ceci empiriquement ? Présentez la brièvement.
3. (1 point) Appliquer une transformation à ce processus pour le stationnariser, que faut-il faire pour vérifier que le les résidus ont les bonnes propriétés ?

Exercice 4 (4 points)

Soit le processus $Y_t = t + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$

1. Expliquez statistiquement ce qu'il se passe si on applique une différence première à ce processus non stationnaire.