STA305 : Partie I Approche bayésienne

Boris Hejblum

ISPED M2 Biostatistique, Université de Bordeaux Inserm BPH U1219 / Inria BSO, équipe SISTM

> boris.hejblum@u-bordeaux.fr https://borishejblum.science

> > 1er décembre 2020





- paradigme
- a priori
- · a posteriori
- élicitation

Objectifs du cours

Se familiariser avec l'approche bayésienne :

- 1) être capable de proposer une modélisation bayésienne adéquate face à un problème concret
- savoir calculer la distribution a posteriori dans le cas de relations de conjugaison
- 3 comprendre l'impact de la loi a priori et la notion d'a priori faiblement-informatif
- comprendre la notion de MAP et de moyenne a posteriori, d'intervalle de crédibilité ainsi que la différence avec un intervalle de confiance
- comprendre les notions de risques et de coûts, et leurs implications dans la théorie de la décision

Objectifs du cours

Se familiariser avec l'approche bayésienne :

- être capable de proposer une modélisation bayésienne adéquate face à un problème concret
- 2 savoir calculer la distribution a posteriori dans le cas de relations de conjugaison
- 3 comprendre l'impact de la loi a priori et la notion d'a priori faiblement-informatif
- 4 comprendre la notion de MAP et de moyenne a posteriori, d'intervalle de crédibilité ainsi que la différence avec un intervalle de confiance
- 5 comprendre les notions de risques et de coûts, et leurs implications dans la théorie de la décision

NB : ces notes ne se veulent en aucun cas exhaustives, et l'on renverra le lecteur curieux aux ouvrages bien plus complets que sont *Le choix bayésien* de C. Robert et *Le raisonnement bayésien* de E. Parent & J. Bernier..

Introduction

Statistique fréquentiste

La statistique :

- Une science mathématique
- décrire ce qui s'est produit
- faire des projections quant à ce qu'il peut advenir dans le futur
- s'appuie sur l'observation de phénomènes naturels pour en proposer une interprétation, souvent à travers des modèles probabilistes

La statistique :

- Une science mathématique
- décrire ce qui s'est produit
- faire des projections quant à ce qu'il peut advenir dans le futur
- s'appuie sur l'observation de phénomènes naturels pour en proposer une interprétation, souvent à travers des modèles probabilistes

La statistique « fréquentiste » :

- Neyman & Pearson
- paramètres vu comme déterministes
- Estimation par le Maximum de Vraisemblance
- théorie des tests statistiques & intervalle de confiance



Théorème de Bayes

Article posthume du révérend Thomas Bayes en 1763

$$\Pr(A|E) = \frac{\Pr(E|A)\Pr(A)}{\Pr(E|A)\Pr(A) + \Pr(E|\overline{A})\Pr(\overline{A})} = \frac{\Pr(E|A)\Pr(A)}{\Pr(E)}$$

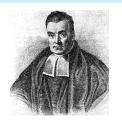


000000

Théorème de Bayes

Article posthume du révérend Thomas Bayes en 1763

$$\Pr(A|E) = \frac{\Pr(E|A)\Pr(A)}{\Pr(E|A)\Pr(A) + \Pr\left(E|\overline{A}\right)\Pr\left(\overline{A}\right)} = \frac{\Pr(E|A)\Pr(A)}{\Pr(E)}$$



Exemple pratique:

La dernière fois que vous êtes allez chez le docteur, on vous a fait un test pour une maladie rare. Malheureusement, le résultat était positif...

Sachant le résultat du test, quelle le probabilité que je sois réellement malade?

(les tests médicaux n'étant, après tout, pas parfaits.)

0000000

Introduction à la l'approche bayésienne

Théorème de Bayes : exercice

1% de la population est affecté par une maladie rare. Un test médical pour cette maladie possède les propriétés suivantes :

- si quelqu'un a cette maladie, son test sera positif dans 99% des cas
- si quelqu'un n'a pas cette maladie, son test sera négatif dans 95% des cas

Sachant que quelqu'un a eu un resultat positif au test, quelle est la probabilité qu'il ait la maladie?

0000000

Introduction à la l'approche bayésienne

Théorème de Bayes : exercice

1% de la population est affecté par une maladie rare. Un test médical pour cette maladie possède les propriétés suivantes :

- si quelqu'un a cette maladie, son test sera positif dans 99% des cas
- si quelqu'un n'a pas cette maladie, son test sera négatif dans 95% des cas

Sachant que quelqu'un a eu un resultat positif au test, quelle est la probabilité qu'il ait la maladie?

$$Pr(M = +) = 0.01$$

$$Pr(M = +) = 0.01$$
 $Pr(T = +|M = +) = 0.99$ $Pr(T = -|M = -) = 0.95$

$$Pr(T = -|M = -) = 0.95$$

$$\Pr(M = +|T = +) = ?$$