# Algorithmes MCMC

# Définition d'une chaîne de Markov

**Chaîne de Markov** : processus stochastique à temps discret

**Définition** : une chaîne de Markov est une suite de variable aléatoire $X_0$, $X_1$, $X_2$, $X_3$, ... (toutes définies sur le même espace) possédant la **propriété de Markov** (« sans mémoire ») :

$$p(X_i = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}) = p(X_i = x | X_{i-1} = x_{i-1})$$

L'ensemble $E$ des valeurs possible pour $X_i$ est appelé **espace d'état**

Déterminée par 2 paramètres :

1. sa distribution initiale $p(X_0)$
2. son noyau de transition $T(x, A) = p(X_i \in A | X_{i-1} = x)$

**NB :** on ne va considérer ici que des chaines de Markov **homogènes** :

$$p(X_{i+1} = x | X_i = y) = p(X_i = x | X_{i-1} = y)$$

# Propriétés des chaînes de Markov

***Propriété*** : Une chaîne de Markov est dite **irréductible** : si tous les ensembles de probabilité non nulle peuvent être atteints à partir de tout point de départ (i.e. tout état est accessible à partir de n'importe quel autre).

# Propriétés des chaînes de Markov

***Propriété*** : Une chaîne de Markov est dite **irréductible** : si tous les ensembles de probabilité non nulle peuvent être atteints à partir de tout point de départ (i.e. tout état est accessible à partir de n'importe quel autre).

***Propriété*** : Une chaîne de Markov est dite **récurrente** si les trajectoires $(X_i)$ passent une infinité de fois dans tout ensemble de probabilité non nulle de l'espace d'état.

# Propriétés des chaînes de Markov

***Propriété*** : Une chaîne de Markov est dite **irréductible** : si tous les ensembles de probabilité non nulle peuvent être atteints à partir de tout point de départ (i.e. tout état est accessible à partir de n'importe quel autre).

***Propriété*** : Une chaîne de Markov est dite **récurrente** si les trajectoires $(X_i)$ passent une infinité de fois dans tout ensemble de probabilité non nulle de l'espace d'état.

***Propriété*** : Une chaîne de Markov est dite **apériodique** si rien n'induit un comportement périodique des trajectoires.

# Loi stationnaire & théorème ergodique

***Définition*** : Une distribution de probabibilité $\tilde{p}$ est appelée **loi invariante** (ou **loi stationnaire**) pour une chaine de Markov si elle vérifie la propriété suivante :

$$\text{si } X_i \sim \tilde{p}, \text{ alors } X_{i+j} \sim \tilde{p} \; \forall j \geq 1$$

*Remarque* : Une chaine de Markov peut admettre plusieurs lois stationnaires.

# Loi stationnaire & théorème ergodique

***Définition*** : Une distribution de probabibilité $\tilde{p}$ est appelée **loi invariante** (ou **loi stationnaire**) pour une chaine de Markov si elle vérifie la propriété suivante :

$$\text{si } X_i \sim \tilde{p}, \text{ alors } X_{i+j} \sim \tilde{p} \ \forall j \geq 1$$

*Remarque* : Une chaine de Markov peut admettre plusieurs lois stationnaires.

***Théorème ergodique*** (espace infini) : Une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive (i.e. le temps de retour moyen est fini) admet une unique loi de probabilité invariante $\tilde{p}$. Si cette chaîne de Markov est de plus apériodique, alors elle converge en loi vers $\tilde{p}$.

# Exemple de chaîne de Markov à espace d'état discret – I

Bébé suit à chaque minute une chaîne de Markov discrète à 3 états :

D dormir

M manger

E changer la couche

⇒ son état dans une minute ne dépend que de son état actuel (et pas des minutes précédentes)

La matrice des probabilité de transition soit alors la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} X_i/X_{i+1} & D & M & C \\ D & 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ M & 0.7 & 0 & 0.3 \\ C & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

# Exemple de chaîne de Markov à espace d'état discret – I

Bébé suit à chaque minute une chaîne de Markov discrète à 3 états :

- D dormir
- M manger
- E changer la couche

⇒ son état dans une minute ne dépend que de son état actuel (et pas des minutes précédentes)

La matrice des probabilité de transition soit alors la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} X_i/X_{i+1} & D & M & C \\ D & 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ M & 0.7 & 0 & 0.3 \\ C & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

1) Selon vous, la chaîne est-elle irréductible ? Récurrente ? Apériodique ?

2) Supposons que Bébé dorme. Que fait-il 2 min après ? et 10 min après ?

3) Supposons maintenant qu'il fasse de l'exercice. Que fait-il 10 min après ?

# Exemple de chaîne de Markov à espace d'état discret – II

1) Selon vous, la chaîne est-elle irréductible ? Récurrente ? Apériodique ?

...

2) Supposons que Doudou dorme. Que fait-il 2 min après ? et 10 min après ?

...

3) Supposons maintenant qu'il fasse de l'exercice. Que fait-il 10 min après ?