Chương V

PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

5.1. ĐỊNH NGHĨA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

5.1.1. Định nghĩa

Giả sử V, V' là các K – không gian vectơ, ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là *ánh xạ tuyến tính* (hay *K – đồng cấu*) của không gian vectơ V vào không gian vectơ V' nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn đối với mọi vectơ x, y thuộc V và mọi số $\alpha \in K$:

$$\text{a) } f(x+y) = f(x) + f(y)\ ; \tag{5.1}$$

$$\text{b) } f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Từ điều kiện b) ta có :

$$f(\theta) = f(0\theta) = 0f(\theta) = \theta.$$

Vậy, các ánh xạ tuyến tính chuyển vectơ không thành vectơ không.

Kết hợp các điều kiện a) và b) ta có : Ánh xạ $f : V \to V'$ là tuyến tính khi và chỉ khi :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ với } \forall x, y \in V\ ;\ \forall \alpha, \beta \in K.$$

Một cách tổng quát bằng quy nạp ta có :

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) \tag{5.2}$$

với mọi $x_i \in V$, $\alpha_i \in K$, $i = 1, ..., m$.

Nếu ánh xạ tuyến tính f là một đơn ánh thì gọi là *đơn cấu*.

Nếu ánh xạ tuyến tính f là một toàn ánh thì gọi là *toàn cấu*.

Một ánh xạ tuyến tính vừa là đơn cấu vừa là toàn cấu thì gọi là *đẳng cấu*.

Khi có một đẳng cấu $f : V \to V'$ thì ta nói hai không gian vectơ V và V' đẳng cấu với nhau và ký hiệu là $V \cong V'$.

Hệ thức (5.2) chứng tỏ ánh xạ tuyến tính chuyển một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thành hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

Mệnh đề 5.1 : Tích các ánh xạ tuyến tính là một ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh : Giả sử V, E và F là các K – không gian vectơ ; $f : V \to E$, $g : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính. Theo định nghĩa ánh xạ tích thì $g_\circ f(x) = g(f(x))$, với mọi $x \in V$. Do đó, đối với mọi $x, y \in V$, mọi $\alpha \in K$ ta có :

$$\begin{aligned} g_\circ f(x + y) &= g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) = g_\circ f(x) + g_\circ f(y) ; \\ g_\circ f(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)). \\ &= \alpha g_\circ f(x). \end{aligned}$$

Vậy các điều kiện (5.1) được thỏa mãn, $g_\circ f$ là một ánh xạ tuyến tính.■

Vì tích các song ánh là một song ánh, do đó tích các đẳng cấu là một đẳng cấu. Vậy ta có : Nếu $V \cong V'$ và $V' \cong V''$ thì $V \cong V''$.

Định lý sau đây chỉ ra rằng, một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn xác định nếu biết giá trị của nó tại các vectơ thuộc một cơ sở.

Định lý 5.1 : Giả sử V, V' là các K – không gian vectơ, hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của không gian V và hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ là n vectơ bất kỳ của không gian V'. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$ sao cho $f(u_i) = v_i$, $i = 1, ..., n$.

Chứng minh : Xét ánh xạ $f : V \to V'$ xác định như sau : Vì mỗi vectơ $x \in V$ có biểu diễn tuyến tính duy nhất $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, đặt :

$$f(x) = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n. \tag{5.3}$$

Ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, giả sử $x, y \in V$, $\alpha \in K$. Khi đó các vectơ x, y có các biểu diễn duy nhất :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \; y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i.$$

Ta có :

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{n}(\alpha\alpha_i)u_i \ ;$$

$$x + y = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)u_i \ .$$

Theo (5.3) ta có :

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)v_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$$

$$= f(x) + f(y) \ ;$$

$$f(\alpha x) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha\alpha_i)v_i = \alpha\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

$$= \alpha f(x).$$

Các điều kiện (5.1) được thỏa mãn.

Vậy, ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian V vào không gian V'.

Giả sử g là một ánh xạ tuyến tính từ V vào V' thỏa mãn điều kiện : $g(u_i) = v_i$, i = 1, ..., n. Khi đó đối với mọi vectơ $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$ ta có :

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i g(u_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = f(x).$$

Vậy g = f. Định lý được chứng minh. ■

Bằng phương pháp chứng minh tương tự, ta thấy Định lý 5.1 vẫn đúng đối với trường hợp V là K – không gian vectơ vô hạn chiều.

Hệ quả 5.1 : Hai không gian vectơ hữu hạn chiều có cùng số chiều thì đẳng cấu. Vậy, mỗi không gian n chiều trên trường K đẳng cấu với không gian K^n.

Chứng minh : Giả sử dimV = dimV' = n. Chọn hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V, hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V'. Khi đó dễ dàng chứng minh được rằng, ánh xạ tuyến tính φ từ V vào V' xác định bởi : $\varphi(u_i) = v_i$, i = 1, ..., n là một đẳng cấu.■

5.1.2. Các ví dụ về ánh xạ tuyến tính

1. Giả sử V, V' là các K – không gian vectơ. Dễ dàng chứng tỏ được rằng :

– Ánh xạ O : $V \to V'$, xác định bởi :

$$O(x) = \theta', \text{ đối với mọi vectơ } x \in V$$

là một ánh xạ tuyến tính của không gian V vào không gian V'. Ánh xạ tuyến tính đó gọi là *ánh xạ không* hay *ánh xạ tầm thường*.

– Ánh xạ đồng nhất $i_V : V \to V$ xác định bởi : $i_V(x) = x$, đối với mọi $x \in V$, là một đẳng cấu.

– Giả sử F là một không gian con của không gian vectơ V. Khi đó ánh xạ nhúng $i_F : F \to V$ xác định bởi $i_F(x) = x$, đối với mọi vectơ $x \in F$, là một đơn cấu của không gian vectơ F vào không gian vectơ V.

2. Xét ánh xạ ∂ từ không gian $R_n[x]$ các đa thức hệ số thực có bậc < n vào không gian $R_{n-1}[x]$ các đa thức hệ số thực có bậc < n – 1 xác định như sau :

Với mọi $f(x) \in R_n[x]$:

$$\partial(f(x)) = f'(x).$$

Theo tính chất của đạo hàm ta có :

$$\partial(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$= \partial(f(x)) + \partial(g(x)) ;$$

và
$$\partial(\alpha f(x)) = (\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$$
$$= \alpha\partial(f(x))$$

đối với mọi đa thức $f(x), g(x) \in R_n[x]$ và với mọi $\alpha \in K$.

Vậy ánh xạ ∂ thỏa mãn các điều kiện (5.1). Do đó ∂ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian $R_n[x]$ vào không gian $R_{n-1}[x]$.

3. V là một K – không gian vectơ. Giả sử rằng : $V = L_1 \oplus L_2$. Khi đó mỗi vectơ $x \in V$ có biểu diễn duy nhất :

$$x = x_1 + x_2 ; x_i \in L_i, i = 1, 2.$$

Xét ánh xạ chiếu $p_i : V \to L_i$; $i = 1, 2$, $p_i(x) = x_i$. Dễ thấy rằng, p_i là một toàn cấu từ không gian vectơ V vào không gian vectơ L_i. Toàn cấu p_i gọi là *phép chiếu lên không gian L_i theo phương song song với L_j*.

4. Ta biết rằng, trường số phức $\mathbb{C}$ là một không gian vectơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi :

$$\varphi(z) = \overline{z}, \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

Theo tính chất của liên hợp số phức ta có :

$$\varphi(z + z') = \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}' = \varphi(z) + \varphi(z');$$

$$\varphi(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \alpha\overline{z} = \alpha\varphi(z), \text{ với mọi } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vậy, φ là một ánh xạ tuyến tính. Dễ thấy rằng φ là một song ánh, do đó φ là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbb{C}$ vào chính nó.

5.1.3. Ảnh, nhân của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính f là tập :

$$\text{Im}f = \{f(x) : x \in V\}. \tag{5.4}$$

Nhân của ánh xạ tuyến tính f là tập :

$$\text{Ker}f = \{x \in V : f(x) = \theta'\}. \tag{5.5}$$

Mệnh đề 5.2 : Ảnh, nhân của một ánh xạ tuyến tính là các không gian con.

Chứng minh : Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính.

a) Rõ ràng $\text{Im}f \neq \varnothing$. Giả sử $x', y' \in \text{Im}f$. Khi đó tồn tại các vectơ $x, y \in V$ sao cho $f(x) = x'$, $f(y) = y'$. Đối mọi $\alpha, \beta \in K$ ta có :

$$\alpha x' + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \in \text{Im}f.$$

Theo Mệnh đề 3.1, Imf là một không gian con của K – không gian vectơ V'.

b) Vì $f(\theta) = \theta'$ nên $\text{Ker}f \neq \varnothing$. Với mọi vectơ $x, y \in \text{Ker}f$, mọi $\alpha, \beta \in K$ ta có :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \theta' + \theta' = \theta'.$$

Theo (5.5) thì $\alpha x + \beta y \in$ Kerf.

Vậy, Kerf là một không gian con của không gian V.■

Mệnh đề 5.3 : Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính. Điều kiện cần và đủ để ánh xạ f là một đơn cấu và Kerf = $\{\theta\}$.

Chứng minh : Giả sử f là một đơn cấu. Ta có $f(\theta) = \theta'$, do đó vectơ θ là phần tử duy nhất có ảnh là θ'. Vậy Kerf = $\{\theta\}$.

Ngược lại, giả sử rằng Kerf = $\{\theta\}$. Với hai vectơ x, y $\in$ V nếu $f(x) = f(y)$ thì ta có :

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = \theta.$$

Vậy $x - y \in$ Kerf = $\{\theta\}$. Do đó $x - y = \theta$, hay $x = y$. Vậy f là một đơn ánh.■

Hệ quả 5.2 : Mỗi đơn cấu chuyển một hệ vectơ độc lập tuyến tính thành một hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Chứng minh : Giả sử $f : V \to V'$ là một đơn cấu và $\{u_1, ..., u_m\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của không gian V. Giả sử có tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(u_i) = \theta'$. Vì f là ánh xạ tuyến tính, nên ta có : $f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) = \theta'$. Vậy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \in$ Kerf.

Vì f là đơn cấu, theo Mệnh đề 5.3 ta có Kerf = $\{\theta\}$. Do đó $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \theta$. Vì hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$ độc lập tuyến tính nên $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$. Do đó, hệ vectơ $\{f(u_1), ..., f(u_m)\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Định lý 5.2 : Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính và dimV = n. Khi đó ta có :

$$n = \dim \mathrm{Imf} + \dim \mathrm{Kerf}. \tag{5.6}$$

Chứng minh : Giả sử dimKerf = k > 0 và $\{u_1, ..., u_k\}$ là một cơ sở của không gian Kerf. Đặt : $s = n - k$. Nếu $s > 0$, theo Định lý 3.3 có thể bổ sung thêm s vectơ $v_1, ..., v_s$ sao cho hệ vectơ :

$$\{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_s\} \qquad \text{(a)}$$

là một cơ sở của không gian vectơ V.

Ta sẽ chứng tỏ hệ vectơ :

$$\{f(v_1), ..., f(v_s)\} \qquad \text{(b)}$$

là một cơ sở của không gian con Imf.

Thật vậy, với mỗi vectơ $x' \in \text{Imf}$ sẽ có vectơ $x \in V$ sao cho $f(x) = x'$. Vì (a) là cơ sở của V nên vectơ x có biểu diễn tuyến tính :

$$x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} x' = f(x) &= \alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_k f(u_k) + \beta_1 f(v_1) + ... + \beta_s f(v_s) \\ &= \beta_1 f(v_1) + ... + \beta_s f(v_s). \end{aligned}$$

Vậy, hệ vectơ (b) là một hệ sinh của không gian con Imf.

Giả sử có tổ hợp tuyến tính tầm thường :

$$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_s f(v_s) = \theta'.$$

Ta có :

$$f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s) = \theta'.$$

Vậy, $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s \in \text{Kerf}$. Vectơ này có thể biểu diễn tuyến tính qua cơ sở $\{u_1, ..., u_k\}$ của không gian Kerf :

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s = \mu_1 u_1 + ... + \mu_k u_k.$$

Ta có :

$$-\mu_1 u_1 - ... - \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s = \theta.$$

Vì hệ (a) độc lập tuyến tính nên ta có :

$$\mu_1 = ... = \mu_k = \lambda_1 = ... = \lambda_s = 0.$$

Vậy, hệ (b) là một hệ độc lập tuyến tính và là một cơ sở của không gian Imf.

Ta có :

$$n = s + k = \dim\text{Imf} + \dim \text{Kerf}.$$

Nếu dimKerf = 0 thì dimImf = s = n. Đẳng thức (5.6) vẫn đúng.■

5.2. PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN

Mỗi ánh xạ tuyến tính từ K – không gian vectơ V vào chính nó gọi là *phép biến đổi tuyến tính* (hay *toán tử tuyến tính*, hay *K – tự đồng cấu*) của không gian V. Mỗi phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ V mà đẳng cấu thì gọi là *một tự đẳng cấu* của không gian V.

Hạng, số khuyết của phép biến đổi tuyến tính :

Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của K – không gian vectơ n chiều V. Khi đó dimImφ gọi là *hạng* của phép biến đổi φ, ký hiệu là r(φ) ; dimKerφ gọi là *số khuyết* của φ. Theo Định lý 5.2. Ta có :

$$n = r(\varphi) + \text{số khuyết } \varphi. \tag{5.7}$$

5.2.1. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính

Xét phép biến đổi tuyến tính φ của K – không gian vectơ n chiều V. Trong không gian V ta chọn cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

Khi đó đối với mỗi vectơ $\varphi(u_j)$ có duy nhất biểu diễn :

$$\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i \text{ , } j = 1, ..., n \tag{5.8}$$

Định nghĩa : Ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ được gọi là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở (I).

Theo Định lý 5.1 thì phép biến đổi tuyến tính φ hoàn toàn xác định nếu biết ma trận của nó đối với một cơ sở nào đó. Vậy, ánh xạ tương ứng mỗi phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ V với ma trận của nó đối với cơ sở (I) là một song ánh.

Sử dụng ký hiệu ma trận ta có :

$$(\varphi(u_1) \quad ... \quad \varphi(u_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}u_i \quad ... \quad \sum_{i=1}^{n} a_{in}u_i\right) = (u_1 \quad ... \quad u_n)A.$$

Do đó n đẳng thức (5.8) có thể viết dưới dạng một đẳng thức ma trận :

$$(\varphi(u_1) \quad ... \quad \varphi(u_n)) = (u_1 \quad ... \quad u_n)A. \tag{5.9}$$

Nếu biết ma trận A của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở (I), khi đó với mỗi vectơ $x \in V$ cho trước ta luôn tính được tọa độ của vectơ $\varphi(x)$ đối với cơ sở (I). Thật vậy, giả sử rằng :

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \ ; \tag{a}$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_i u_i \ . \tag{b}$$

Hệ thức (b) có thể viết dưới dạng ma trận :

$$\varphi(x) = (u_1 \ \ \dots \ \ u_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \tag{c}$$

Mặt khác, vì φ là một ánh xạ tuyến tính nên theo (a) ta có :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(u_j) = (\varphi(u_1) \ \ \dots \ \ \varphi(u_n))\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

Theo công thức (5.9) ta có :

$$\varphi(x) = (u_1 \ \ \dots \ \ u_n)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \tag{d}$$

Từ (c) và (d) ta có :

$$(u_1 \ \ \dots \ \ u_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = (u_1 \ \ \dots \ \ u_n)A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \tag{e}$$

Vì hệ vectơ $\{u_1, \dots, u_n\}$ độc lập tuyến tính, từ hệ thức (e) ta có :

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Từ đẳng thức ma trận (5.10) ta có :

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik} \ ; \ i = 1, ..., n.$$

Ví dụ : Phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi :

$$\varphi(e_1) = (1, 0, -2) \ ;$$

$$\varphi(e_2) = (2, 1, 0) \ ;$$

$$\varphi(e_3) = (0, -1, 1).$$

Với $x = (2, -1, 1)$, tìm vectơ $\varphi(x)$.

Ma trận của φ đối cơ sở chính tắc là :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giả sử $\varphi(x) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, theo công thức (5.10) ta có :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có : $\varphi(x) = (0, -2, -3)$.

Từ Mệnh đề 5.1 suy ra rằng, tích hai phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ là một phép biến đổi tuyến tính. Định lý sau đây khẳng định rằng, ma trận của phép biến đổi tích đó bằng tích các ma trận của các ánh xạ nhân tử.

Định lý 5.3 : Giả φ, ψ là các phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V với cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \textbf{(I)}$$

Nếu $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của φ đối với cơ sở (I), $B = (b_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của ψ đối với cơ sở (I) thì A.B là ma trận của $\varphi \circ \psi$ đối với cơ sở (I).

Chứng minh :

Theo công thức (5.8) ta có :

$$\psi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i \ , \ j = 1, ..., n \ ;$$

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k, \quad i = 1, ..., n;$$

$$\varphi \circ \psi(u_j) = \varphi(\psi(u_j)) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij}\right) u_k. \qquad \text{(a)}$$

Giả sử $C = (c_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của phép biến đổi tích $\varphi \circ \psi$ đối với cơ sở (I). Theo công thức (5.8) ta có :

$$\varphi \circ \psi(u_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} u_k. \qquad \text{(b)}$$

Từ các hệ thức (a), (b) ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij}\right) u_k.$$

Vì hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij}, \text{ với } k, j = 1, ..., n.$$

Theo công thức tính các phần tử của ma trận tích (4.3) ta có $C = A.B$. Định lý được chứng minh.■

Định lý 5.4 : Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của K – không gian vectơ n chiều V. Khi đó hạng của phép biến đổi tuyến tính φ bằng hạng của ma trận của nó đối với một cơ sở nào đó.

Chứng minh : Trong không gian V ta chọn cơ sở bất kỳ :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở (I). Ta sẽ chứng tỏ $r(\varphi) = r(A)$. Với mỗi vectơ $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ ta có :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(u_i).$$

Vậy thì $\qquad \mathrm{Im}\varphi = \mathscr{L}(\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)).$

Theo Mệnh đề 3.8 thì dimImφ bằng hạng của hệ vectơ :

$$\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}.$$

Theo chứng minh của Hệ quả 5.1 ta có đẳng cấu $f : V \to K^n$ xác định bởi $f(u_i) = e_i$, $i = 1, ..., n$; trong đó $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở chính tắc của không gian vectơ K^n. Theo hệ thức (5.8) ta có :

$$\varphi(u_j) = a_{1j}u_1 + ... + a_{nj}u_n.$$

Vậy thì
$$\begin{aligned} f(\varphi(u_j)) &= a_{1j}f(u_1) + ... + a_{nj}f(u_n) \\ &= a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n \\ &= (a_{1j}, ..., a_{nj}). \end{aligned}$$

Vectơ $A^j = (a_{1j} \quad ... \quad a_{nj})$ là vectơ cột thứ j của ma trận A. Vì đẳng cấu $f : V \to K^n$ không làm thay đổi hạng của hệ vectơ nên ta có :

$$r(\varphi) = \text{hạng } \{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\} = \text{hạng } \{A^1, ..., A^n\} = r(A).$$

Định lý được chứng minh.■

Ví dụ : Tìm hạng và số khuyết của phép biến đổi tuyến tính $\partial : R_4[x] \to R_4[x]$ được cho bởi $\partial(f(x)) = f'(x)$.

Xét cơ sở $S = \{1, x, x^2, x^3\}$. Ta có $\partial(1) = 0$; $\partial(x) = 1$; $\partial(x^2) = 2x$; $\partial(x^3) = 3x^2$. Ma trận của ∂ đối với cơ sở S là :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có : $r(\partial) = r(A) = 3$; số khuyết của $\partial = 4 - 3 = 1$.

5.2.2. Các điều kiện tương đương

Định lý 5.5 : Giả sử rằng :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

là một cơ sở của K – không gian vectơ V, φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian V có ma trận đối với cơ sở (I) là A. Khi đó các điều khẳng định sau là tương đương :

1) $\mathrm{Ker}\varphi = \{\theta\}$;

2) φ là một đơn cấu ;

3) Hệ vectơ $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ độc lập tuyến tính ;

4) φ là một toàn cấu ;

5) Hạng của $\varphi = n$;

6) φ là một tự đẳng cấu ;

7) Ma trận A khả nghịch.

Phép biến đổi tuyến tính φ thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương trên được gọi là *phép biến đổi không suy biến.*

Chứng minh :

1) $\Rightarrow$ 2) : Theo Mệnh đề 5.3.

2) $\Rightarrow$ 3) : Theo Hệ quả 5.2.

3) $\Rightarrow$ 4) : Vì hệ n vectơ độc lập tuyến tính $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ là một cơ sở của không gian V, do đó :

$$\mathrm{Im}\varphi = \mathscr{L}(\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}) = V.$$

4) $\Rightarrow$ 5) : Vì hạng $\varphi = \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V = n$.

5) $\Rightarrow$ 6) : Vì $\dim\mathrm{Im}\varphi = n = \dim V$ nên $\mathrm{Im}\varphi = V$, φ là một toàn cấu. Theo công thức (5.6) ta có : $\dim\mathrm{Ker}\varphi = 0$. Vậy $\mathrm{Ker}\varphi = \{\theta\}$. Theo Mệnh đề 5.3, φ là một đơn cấu. Do đó φ là một tự đẳng cấu.

6) $\Rightarrow$ 7) : φ có ánh xạ ngược φ^{-1} cũng là một phép biến đổi tuyến tính. Ta có : $\varphi_\circ\varphi^{-1} = \varphi^{-1}{}_\circ\varphi = i_V$. Phép biến đổi đồng nhất i_V có ma trận đối với cơ sở (I) là ma trận đơn vị E. Giả sử B là ma trận của phép biến đổi φ^{-1} đối với cơ sở (I). Theo Định lý 5.3 ta có :

$$A.B = E = B.A.$$

Vậy, ma trận A khả nghịch và $B = A^{-1}$.

7) $\Rightarrow$ 1) : Giả sử rằng : $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \in \mathrm{Ker}\varphi$. Khi đó ta có :

$$\varphi(x) = \theta = 0u_1 + ... + 0u_n.$$

Theo công thức (5.10) ta có :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Nhân bên trái hai vế đẳng thức trên với ma trận A^{-1} ta có :

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1}A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Suy ra : $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Vậy $x = \theta$ và $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\theta\}$.■

5.3. PHÉP CHUYỂN CƠ SỞ

5.3.1. Ma trận chuyển

Giả sử rằng :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad (I)$$

$$\{v_1, ..., v_n\} \qquad (II)$$

là hai cơ sở của K – không gian vectơ V. Theo Định lý 5.5 thì phép biến đổi tuyến tính φ xác định bởi :

$$\varphi(u_j) = v_j, \quad j = 1, ..., n$$

là một tự đẳng cấu, có ma trận $T = (t_{ij})_{n\times n}$ đối với cơ sở (I) là một ma trận khả nghịch.

Theo hệ thức (5.9) ta có :

$$(v_1 \ \ ... \ \ v_n) = (u_1 \ \ ... \ \ u_n)T. \qquad (5.11)$$

Từ (5.11) ta có :

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} u_k .$$

Ma trận T được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II).*

Nhân bên phải hai vế của hệ thức (5.11) với T^{-1} ta có :

$$(u_1 \quad \dots \quad u_n) = (v_1 \quad \dots \quad v_n)T^{-1} \tag{5.12}$$

Từ hệ thức (5.12) suy ra rằng : *Nếu ma trận T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II) thì ma trận nghịch đảo T^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở (II) sang cơ sở (I).*

5.3.2. Công thức biến đổi tọa độ

Giả sử vectơ $x \in V$ có tọa độ đối với cơ sở (I) là $x_1, \dots, x_n$; và có tọa độ đối với cơ sở (II) là $x'_1, \dots, x'_n$. Khi đó ta có :

$$x = x_1u_1 + \dots + x_nu_n = (u_1 \quad \dots \quad u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{a}$$

Mặt khác, theo hệ thức (5.11) ta có :

$$x = x'_1v_1 + \dots + x'_nv_n = (v_1 \quad \dots \quad v_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$x = (u_1 \quad \dots \quad u_n)\,T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{b}$$

So sánh vế phải của (a) và (b), vì hệ vectơ $\{u_1, \dots, u_n\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Công thức (5.13) chỉ ra mối quan hệ giữa tọa độ của vectơ x đối với hai cơ sở khác nhau và được gọi là *công thức biến đổi tọa độ* ứng với phép chuyển cơ sở (I) sang cơ sở (II) cho bởi (5.11).

Ngược lại, tương ứng với phép biến đổi tọa độ (đổi biến) cho bởi (5.13) với ma trận T không suy biến thì ta có phép chuyển cơ sở (5.11).

5.3.3. Ma trận đồng dạng

Định nghĩa : Hai ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times n}$ trên trường số K gọi là *đồng dạng* nếu tồn tại một ma trận khả nghịch S sao cho :

$$A = S^{-1}.B.S. \tag{5.14}$$

Định lý 5.6 : Hai ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ hữu hạn chiều đối với hai cơ sở khác nhau thì đồng dạng.

Chứng minh : Giả sử rằng :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

$$\{v_1, ..., v_n\} \qquad \text{(II)}$$

là hai cơ sở của K – không gian vectơ V.

Phép biến đổi tuyến tính φ có ma trận đối với cơ sở (I) là $A = (a_{ij})_{n\times n}$; có ma trận đối với cơ sở (II) là $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Gọi $T = (t_{ij})_{n\times n}$ là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II). Theo (5.11) thì :

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}u_k \text{ , } j = 1, ..., n.$$

Suy ra :

$$\varphi(v_j) = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\varphi(u_k)\text{ , } \quad j = 1, ..., n.$$

Do đó, ta có đẳng thức ma trận :

$$(\varphi(v_1) \ \ ... \ \ \varphi(v_n)) = (\varphi(u_1) \ \ ... \ \ \varphi(u_n))T. \tag{a}$$

Theo công thức (5.9) ta có :

$$(\varphi(u_1) \ ... \ \varphi(u_n)) = (u_1 \ ... \ u_n)A \text{ ;} \tag{b}$$

$$(\varphi(v_1) \ ... \ \varphi(v_n)) = (v_1 \ ... \ v_n)B. \tag{c}$$

Từ (a), (b) và (5.12) ta có :

$$(\varphi(v_1) \ ... \ \varphi(v_n)) = (v_1 \ ... \ v_n)T^{-1}.A.T. \tag{d}$$

So sánh vế phải của (c) và (d), vì hệ vectơ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$B = T^{-1}.A.T. \tag{5.15}$$

Định lý được chứng minh.■

5.4. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG. MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

5.4.1. Giá trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa : Phần tử λ của trường K được gọi là *giá trị riêng* của phép biến đổi tuyến tính φ trong K – không gian vectơ V nếu trong không gian V có vectơ $u \neq \theta$ sao cho hệ thức sau được thỏa mãn :

$$\varphi(u) = \lambda u. \tag{5.16}$$

Khi đó, vectơ u được gọi là *vectơ riêng* của phép biến đổi tuyến tính φ ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ : Xét $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbf{C}^{\infty}(a, b)$ các hàm số xác định trên khoảng (a, b) và có đạo hàm vô hạn lần ; và phép biến đổi tuyến tính $\partial : \mathbf{C}^{\infty}(a, b) \to \mathbf{C}^{\infty}(a, b)$ xác định bởi : $\partial(f(x)) = f'(x)$. Khi đó hàm số $f(x) = e^{2x}$ là một vectơ riêng của ∂ ứng với giá trị riêng 2 vì : $\partial(f(x)) = 2e^{2x} = 2f(x)$.

Định lý 5.7 : Các vectơ riêng của cùng một phép biến đổi tuyến tính ứng với các giá trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính.

Chứng minh : Giả sử $u_1, ..., u_k$ là các vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ trong K – không gian vectơ V ứng với các giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Ta cần chứng tỏ hệ $\{u_1, ..., u_k\}$ độc lập tuyến tính. Định lý được chứng minh bằng quy nạp theo k.

– Đối với k = 1, vì $u_1 \neq \theta$ nên hệ $\{u_1\}$ độc lập tuyến tính.

– Đối với k > 1, giả sử định lý đúng đối với k – 1, ta chứng minh định lý đúng đối với k. Giả sử có tổ hợp tuyến tính tầm thường :

$$a_1u_1 + ... + a_ku_k = \theta. \tag{a}$$

Nhân hai vế đẳng thức (a) với λ_k ta có :

$$\lambda_k a_1 u_1 + \ldots + \lambda_k a_k u_k = \theta. \quad \text{(b)}$$

Tác động φ vào hai vế của (a) ta có :

$$\lambda_1 a_1 u_1 + \ldots + \lambda_k a_k u_k = \theta. \quad \text{(c)}$$

Trừ từng vế của (b) cho (c) ta có :

$$a_1(\lambda_k - \lambda_1)u_1 + \ldots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_{k-1} = \theta.$$

Theo giả thiết quy nạp hệ vectơ $\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$a_1(\lambda_k - \lambda_1) = \ldots = a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

Vì $\lambda_k \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, k-1$, do đó : $a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$.

Theo (a) ta có : $a_k u_k = \theta$, vì $u_k \neq \theta$ nên $a_k = 0$. Vậy, hệ vectơ riêng $\{u_1, \ldots, u_k\}$ độc lập tuyến tính.■

Ở ví dụ trên, trong $\mathbb{R}$ –không gian vectơ $\mathbf{C}^{\infty}(a, b)$ hệ hàm $\{e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính. Vì đó là các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau của phép biến đổi tuyến tính ∂ xác định bởi : $\partial(f(x)) = f'(x)$.

Hệ quả sau đây được suy trực tiếp từ Định lý 5.7.

Hệ quả 5.2 : Nếu phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ n chiều V có n giá trị riêng khác nhau thì trong không gian vectơ V có một cơ sở gồm các vectơ riêng của φ.

Phương pháp tìm giá trị riêng và vectơ riêng :

Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ n chiều V và $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của φ đối với cơ sở :

$$\{u_1, \ldots, u_n\}. \quad \text{(I)}$$

Giả thiết vectơ $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ là một vectơ riêng của phép biến đổi φ ứng với giá trị riêng λ. Theo định nghĩa ta có : $u \neq \theta$ và

$$\varphi(u) = \lambda u. \quad \text{(a)}$$

Theo hệ thức (5.10) thì từ (a) ta có đẳng thức ma trận :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda E\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Do đó ta có :

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.17)$$

Vì vectơ riêng $u \neq \theta$ nên tồn tại tọa độ $x_i \neq 0$, do đó vectơ $\alpha = (x_1, ..., x_n) \neq (0, ..., 0)$. Theo Định lý 4.9 thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.17) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của ma trận của hệ đó bằng 0. Do đó ta có :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.18)$$

Đa thức đặc trưng :

Xét đa thức biến λ xác định bởi :

$$P(\lambda) = |A - \lambda E|. \qquad (5.19)$$

Ta nhận thấy rằng, đa thức $P(\lambda)$ chỉ phụ thuộc vào phép biến đổi tuyến tính φ, không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở của không gian V.

Thật vậy, giả sử B là ma trận của phép biến đổi φ đối với cơ sở :

$$\{v_1, ..., v_n\}. \qquad (II)$$

Gọi ma trận T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II), theo công thức (5.15) thì $B = T^{-1}.A.T$. Vậy ta có :

$$|B - \lambda E| = |T^{-1}.A.T - \lambda E| = |T^{-1}(A - \lambda E)T|$$

$$= |T^{-1}|\,|A - \lambda E|\,|T| = |A - \lambda E| = P(\lambda).$$

Đa thức $P(\lambda) = |A - \lambda E|$ gọi là *đa thức đặc trưng* của phép biến đổi tuyến tính φ.

Kết luận :

1) Phần tử $\lambda \in K$ là giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính φ khi và chỉ khi λ là một nghiệm của đa thức đặc trưng của φ xác định bởi (5.19).

2) Vectơ $u \in V$ là vectơ riêng của phép biến đổi φ ứng với giá trị riêng λ khi và chỉ khi các tọa độ của vectơ u đối với cơ sở (I) là một nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.17).

Đa thức $P(\lambda) = |A - \lambda E|$ cũng gọi là đa thức *đặc trưng của ma trận A*, các nghiệm của đa thức này cũng gọi là *giá trị riêng của ma trận A*.

Các nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.17) gọi là các *vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ*.

Theo chứng minh trên, hai ma trận đồng dạng có cùng một đa thức đặc trưng, do đó có cùng giá trị riêng, vectơ riêng.

Ví dụ : Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi :

$$\varphi(x, y) = (5x + 4y, 8x + 8y).$$

Chọn cơ sở chính tắc : $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.

Theo giả thiết ta có :

$$\varphi(e_1) = (5, 8), \varphi(e_2) = (4, 9).$$

Vậy đối với cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2\}$, phép biến đổi φ có ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của phép biến đổi φ là :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 13.$$

Đa thức $\lambda^2 - 14\lambda + 13$ có hai nghiệm $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 13$. Vậy phép biến đổi φ có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 13$.

Vectơ riêng $u = (x, y)$ của phép biến đổi φ ứng với giá trị riêng λ theo (5.17) là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hay
$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 4y = 0 \\ 8x + (9-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

–Với $\lambda = \lambda_1 = 1$ ta có hệ :

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $u = (s_1 - s), s \in \mathbb{R}$.

Vậy, các vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ là : $u = (s, -s)$; $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$.

Với $s = 1$ ta có vectơ riêng $u_1 = (1, -1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$.

– Tương tự với $\lambda = \lambda_2 = 13$ ta có hệ :

$$\begin{cases} -8x + 4y = 0 \\ \ \ 8x - 4y = 0 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $u = (s, 2s), s \in \mathbb{R}$.

Do đó các vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 13$ là :

$$u = (s, 2s), s \in \mathbb{R}, s \neq 0.$$

Với $s = 1$ ta có vectơ $u_2 = (1, 2)$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 13$.

Dễ dàng thử lại : $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi(u_2) = 13u_2$. Các vectơ riêng u_1, u_2 ứng với các giá trị riêng khác nhau nên hệ $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Đối với cơ sở đó, ma trận của φ có dạng đường chéo :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

5.4.2. Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa : Mỗi ma trận đồng dạng với ma trận đường chéo gọi là *ma trận chéo hóa được*.

Vậy, ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là chéo hóa được nếu tồn tại ma trận khả nghịch $T = (t_{ij})_{n\times n}$ sao cho :

$$T^{-1}.A.T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Mệnh đề 5.4 : Ma trận cấp n có n giá trị riêng khác nhau thì chéo hóa được.

Chứng minh : Xét ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ có n giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V và A là ma trận của φ đối với cơ sở :

$$\{u_1, \dots, u_n\} \qquad \text{(I)}$$

Các giá trị riêng của φ là $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Khi đó, theo Hệ quả 5.2 trong không gian V có một cơ sở gồm các vectơ là vectơ riêng của φ :

$$\{v_1, \dots, v_n\}. \qquad \text{(II)}$$

Vì $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n$; nên đối với cơ sở (II) ma trận B của phép biến đổi φ có dạng đường chéo :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II), theo công thức (5.15) ta có :

$$T^{-1}.A.T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vậy A là ma trận chéo hóa được.■

Nhận xét : Từ chứng minh Mệnh đề 5.4 suy ra rằng : *Ma trận cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.*

Ở mục 5.6 sẽ chứng tỏ các ma trận đối xứng thực là chéo hóa được.

5.5. PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO VÀ MA TRẬN TRỰC GIAO

5.5.1. Phép biến đổi trực giao

Định nghĩa : Giả sử E là không gian vectơ Euclid. Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian E được gọi là *phép biến đổi trực giao* nếu điều kiện sau được thỏa mãn đối với mọi vectơ $x, y \in V$:

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = (x.y) \tag{5.20}$$

Vậy, phép biến đổi trực giao là phép biến đổi tuyến tính bảo toàn tích vô hướng.

Mệnh đề 5.5 : Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ Euclid E là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi φ là phép biến đổi bảo toàn độ dài vectơ. Tức là φ thỏa mãn điều kiện sau đối với mọi vectơ $x \in E$:

$$\|\varphi(x)\| = \|x\|. \tag{5.21}$$

Chứng minh : Giả φ là một phép biến đổi trực giao. Khi đó theo hệ thức (5.20), với x = y ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(x)) = (x.x).$$

Do đó :

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{(\varphi(x).\varphi(x))} = \sqrt{(x.x)} = \|x\|.$$

Vậy điều kiện (5.21) được thỏa mãn.

Ngược lại, giả sử phép biến đổi tuyến tính φ thỏa mãn điều kiện (5.21), khi đó đối với mọi vectơ x, y thuộc E ta có :

$$(\varphi(x+y).\varphi(x+y)) = ((x+y).(x+y)). \tag{a}$$

Khai triển vế trái (a) ta có :

$$\begin{aligned}(\varphi(x+y).\varphi(x+y)) &= (\varphi(x).\varphi(x)) + 2(\varphi(x).\varphi(y)) + (\varphi(y).\varphi(y)) \\ &= (x.x) + 2(\varphi(x).\varphi(y)) + (y.y).\end{aligned} \tag{b}$$

Khai triển vế phải (a) ta có :

$$((x + y).(x + y)) = (x.x) + 2(x.y) + (y.y). \tag{c}$$

So sánh vế phải của (b) và (c) ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = (x.y).$$

Vậy điều kiện (5.20) được thỏa mãn, φ là phép biến đổi trực giao.■

Hệ quả 5.3 : Mỗi phép biến đổi trực giao trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều là tự đẳng cấu.

Chứng minh : Giả sử φ là phép biến đổi trực giao trong không gian vectơ Euclid E hữu hạn chiều. Khi đó theo điều kiện (5.21) ta có $\varphi(x) = \theta$ khi và chỉ khi $x = \theta$, do đó $\mathrm{Ker}\varphi = \{\theta\}$. Theo Định lý 5.5 thì φ là một tự đẳng cấu.■

Mệnh đề 5.6 : Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ Euclid n chiều là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi φ chuyển cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn.

Chứng minh : Giả sử hệ vectơ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở trực giao của không gian vectơ Euclid E. Từ điều kiện (5.20) ta có :

$$(\varphi(u_i).\varphi(u_j)) = (u_i.u_j) = \delta_{ij}.$$

Theo (3.15) hệ vectơ $\{\varphi(u_1, ..., \varphi(u_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Ngược lại, giả sử phép biến đổi tuyến tính φ chuyển cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$ thành cơ sở trực chuẩn $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$. Khi đó đối với mọi vectơ $x, y \in E$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$ ta có :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i),\ \varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(u_j).$$

Theo Mệnh đề 3.11 thì đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$ ta có :

$$(x.y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{a}$$

Đối với cơ sở trực chuẩn $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{b}$$

So sánh các đẳng thức (a) và (b) ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = (x.y).$$

Điều kiện (5.20) được thỏa mãn, φ là phép biến đổi trực giao.

Từ Mệnh đề 5.6, trực tiếp suy ra hệ quả sau đây :

Hệ quả 5.4 :

a) Tích các phép biến đổi trực giao là một phép biến đổi trực giao.

b) Phép biến đổi ngược của một phép biến đổi trực giao là một phép biến đổi trực giao.

5.5.2. Ma trận trực giao

Định nghĩa : Ma trận thực $A = (a_{ij})_{n\times n}$ gọi là *ma trận trực giao* nếu hệ vectơ cột $\{A^1, ..., A^n\}$ là một hệ trực chuẩn trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$.

Tức là điều kiện sau được thỏa mãn :

$$(A^i.A^j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}. \tag{5.22}$$

Ví dụ : Các ma trận sau đây là ma trận trực giao :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mệnh đề 5.7 : Ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận trực giao khi và chỉ khi $A^t.A = E$.

Chứng minh : Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$, ta có $A^t = (a'_{ij})_{n\times n}$, trong đó $a'_{ij} = a_{ji}$. Do đó :

$$A^t.A = E \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a'_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Theo điều kiện (5.22) thì A là ma trận trực giao khi và chỉ khi $A^t.A = E$.■

Hệ quả 5.5 : Nếu A là ma trận trực giao thì ma trận chuyển vị A^t cũng trực giao và $A^t = A^{-1}$.

Hệ quả 5.6 : Định thức của ma trận trực giao bằng ± 1.

Chứng minh : Giả sử A là ma trận trực giao. Theo Mệnh đề 5.7 ta có :

$$|A^t.A| = |E| = 1.$$

Vì $|A^t| = |A|$ nên :

$$|A^t.\ A| = |A^t|\,|A| = |A|^2 = 1.\ \text{Vậy } |A| = \pm 1.■$$

Quan hệ giữa các khái niệm ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao được thể hiện ở mệnh đề sau đây :

Mệnh đề 5.8 : Phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ Euclid n chiều là một phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi ma trận của nó đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận trực giao.

Chứng minh : Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$. Khi đó :

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k\ ,\ \ i = 1, ..., n.$$

Theo Mệnh đề 5.6 thì φ là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi hệ vectơ $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn, tức là :

$$(\varphi(u_i).\varphi(u_j)) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}\,.$$

Vậy, phép biến đổi φ là một phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi ma trận A là ma trận trực giao.

Hệ quả 5.7 : Ma trận Q là ma trận chuyển một cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn khi và chỉ khi Q là ma trận trực giao.

Chứng minh : Điều khẳng định được suy trực tiếp từ các Mệnh đề 5.6 và 5.8.■

5.6. PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỐI XỨNG VÀ MA TRẬN ĐỐI XỨNG

5.6.1. Định nghĩa

Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ Euclid E gọi là *phép biến đổi đối xứng* nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn :

$$(\varphi(x).y) = (x.\varphi(y)), \quad \forall x, y \in E. \tag{5.23}$$

Ví dụ : Phép biến đổi đồng dạng với hệ số đồng dạng k :

$$\theta_k(x) = kx, \quad \forall x \in E.$$

Ánh xạ θ_k là một phép biến đổi tuyến tính vì với mọi x, y $\in$ E, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có :

$$\theta_k(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y) = \alpha(kx) + \beta(ky)$$
$$= \alpha\theta_k(x) + \beta\theta_k(y).$$

Phép biến đổi tuyến tính θ_k là phép biến đổi đối xứng vì với mọi x, y $\in$ E ta có :

$$(\theta_k(x).y) = (kx.y) = (x.ky) = (x.\theta_k(y)).$$

– Với k = 0 ta có phép biến đổi không :

$$0(x) = \theta, \quad \forall x \in E.$$

– Với k = 1 ta có phép biến đổi đồng nhất :

$$i_E(x) = x, \quad \forall x \in E.$$

Mệnh đề sau đây chỉ ra mối quan hệ giữa các phép biến đổi đối xứng và ma trận đối xứng.

Mệnh đề 5.9 : Một phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều là phép biến đổi đối xứng khi và chỉ khi ma trận của nó đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của phép biến đổi đối xứng φ đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$. Ta chứng tỏ A là một ma trận đối xứng. Ta có :

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k.$$

Do đó :

$$(\varphi(u_i).u_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k.u_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(u_k.u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{kj} = a_{ji}.$$

Một cách tương tự, ta có :

$$(u_i, \varphi(u_j)) = a_{ij}.$$

Vì φ là phép biến đổi đối xứng nên $(\varphi(u_i).u_j) = (u_i.\varphi(u_j))$. Do đó ta có : $a_{ji} = a_{ij}$. Vậy A là ma trận đối xứng.

- *Điều kiện đủ :* Giả sử phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$ có ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ đối xứng. Khi đó đối với mọi vectơ x, y của không gian E ta có :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \ ;$$

$$(\varphi(x).y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(u_i).\sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right) = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j a_{ki}(u_k.u_j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j a_{ki}\delta_{kj} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ji}.$$

Tương tự ta có :

$$(x.\varphi(y)) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}.$$

Vì $a_{ij} = a_{ji}$ nên ta có :

$$(\varphi(x).y) = (x.\varphi(y)).$$

Vậy φ là một phép biến đổi đối xứng.■

5.6.2. Chéo hóa ma trận thực đối xứng

Dưới đây ta sẽ chứng tỏ rằng, đối với mỗi phép biến đổi đối xứng φ trong không gian vectơ Euclid E hữu hạn chiều thì trong không gian E có một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng của φ. Từ đó suy ra rằng, các ma trận thực đối xứng chéo hóa được.

Bổ đề 5.1 : Các nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận thực đối xứng là các số thực.

Chứng minh : Giả sử rằng λ là một nghiệm phức của đa thức đặc trưng của ma trận thực đối xứng $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Theo (5.19) ta có :

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{a}$$

Khi đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên trường số phức sau đây sẽ có nghiệm không tầm thường :

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{b}$$

Gọi liên hợp của ma trận phức $X = (x_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})_{m\times n}$.

Giả sử $\alpha = (b_1, ..., b_n) \neq \theta$ là một nghiệm của hệ phương trình (b).

Ký hiệu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, ta có $\overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{b}_1 \\ \vdots \\ \overline{b}_n \end{pmatrix}$.

Thay B vào phương trình (b) ta có $(A - \lambda E)B = 0$ hay $A.B = \lambda B$. Đặt $z = \overline{B}^t(A.B)$.

Ta có :

$$z = \overline{B}^t \lambda B = \lambda \overline{B}^t.B = \lambda \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k b_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

Vì $\alpha = (b_1, ..., b_n) \neq \theta$ nên $\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \neq 0$.

Do đó ta có :

$$\lambda = \frac{z}{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}. \tag{c}$$

Theo tính chất của liên hợp phức và phép lấy chuyển vị của ma trận ta có :

$$\overline{z} = \overline{\overline{B}^t.A.B} = \overline{\overline{B}}^t.\overline{A.B} = B^t.A.\overline{B}.$$

Mặt khác :

$$\overline{z} = \overline{z}^t = (B^t.A.\overline{B})^t = \overline{B}^t.A^t.(B^t)^t \ ;$$

$$\overline{z} = \overline{B}^t AB = z.$$

Do đó z là một số thực. Theo (c) thì λ cũng là một số thực.

Không gian con bất biến :

Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V. Không gian con $L \subseteq V$ gọi là *không gian con bất biến* đối với phép biến đổi φ nếu với mọi $x \in L$ thì $\varphi(x) \in L$.

Bổ đề 5.2 : Nếu L là không gian con bất biến của phép biến đổi đối xứng φ trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều E thì không gian bù trực giao $L^{\perp}$ của L cũng là không gian bất biến của phép biến đổi φ.

Ta phải chứng tỏ, nếu $x \in L^{\perp}$ thì $\varphi(x) \in L^{\perp}$.

Thật vậy, vì $x \in L^{\perp}$ nên $x \perp L$. Suy ra với mọi $y \in L$ ta có :

$$(\varphi(x).y) = (x.\varphi(y)) = 0, \text{ vì } \varphi(y) \in L.$$

Do đó $\varphi(x) \perp L$, vậy $\varphi(x) \in L^{\perp}$.

Định lý 5.6 : Nếu φ là một phép biến đổi đối xứng trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều E, thì trong không gian E có một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng của φ.

Chứng minh : Theo Mệnh đề 5.9 và Bổ đề 5.1 thì phép biến đổi φ có giá trị riêng λ_1.

Chọn vectơ đơn vị u_1 là vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng λ_1 ; $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$. Đặt :

$$L_1 = \mathscr{L}(u_1) = \{x = \alpha u_1 \ ; \alpha \in \mathbb{R}\},$$

L_1 là không gian con bất biến 1 chiều của φ.

Thật vậy, nếu $x \in L_1$ thì :

$$x = \alpha u_1 \ ;$$

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha u_1) = \alpha\varphi(u_1) = (\alpha\lambda_1)u_1 \in L_1.$$

Theo Mệnh đề 3.12, ta có :

$$E = L_1 \oplus L_1^{\perp}. \tag{a}$$

Theo Bổ đề 5.2 thì $L_1^{\perp}$ là không gian con bất biến của phép biến đổi φ. Ta có thể xem φ là một phép biến đổi đối xứng trong không gian $L_1^{\perp}$. Khi đó, trong $L_1^{\perp}$ phép biến đổi φ có vectơ riêng u_2 ($\|u_2\| = 1$) ứng với giá trị riêng λ_2. Đặt $L_2 = \mathcal{L}(u_2)$, L_2 là không gian con bất biến 1 chiều của φ. Ta lại có :

$$L_1^{\perp} = L_2 \oplus L_2^{\perp}. \tag{b}$$

Từ (a) và (b) ta có :

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus L_2^{\perp} \tag{c}$$

Tiếp tục tiến hành như vậy sau n bước (n = dimE), ta có phân tích :

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n, \tag{d}$$

trong đó các vectơ $u_i \in L_i$, $\|u_i\| = 1$, là vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng λ_i, $i = 1, \dots, n$.

Từ phân tích (d) ta có hệ vectơ $\{u_1, \dots, u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn cần tìm.

Hệ quả 5.8 : Mỗi ma trận A đối xứng thực tồn tại ma trận trực giao Q sao cho : $B = Q^t A.Q$ là ma trận đường chéo. Do đó các ma trận đối xứng thực chéo hóa được.

Chứng minh : Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ xét phép biến đổi tuyến tính φ có ma trận đối với cơ sở chính tắc $\{e_1, \dots, e_n\}$ là A. Vì A là ma trận đối xứng, từ Mệnh đề 5.9 suy ra φ là một phép biến đổi đối xứng. Theo Định lý 5.6, trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở trực chuẩn $\{u_1, \dots, u_n\}$ là các vectơ riêng của φ ; $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$, $i = 1, \dots, n$. Ma trận B của φ đối với cơ sở này có dạng đường chéo :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gọi Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{e_1, ..., e_n\}$ sang cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$. Theo Hệ quả 5.7 Q là ma trận trực giao, $Q^{-1} = Q^t$. Áp dụng công thức (5.15) ta có : $B = Q^t.A.Q$. Điều khẳng định được chứng minh.

Nhận xét : Theo chứng minh trên thì λ_i, $i = 1, ..., n$ là các giá trị riêng của ma trận A, còn các cột của ma trận chuyển Q là các vectơ riêng của A.

BÀI TẬP

Đề bài

5.1. Ký hiệu $Hom_k(V, V')$ là tập các ánh xạ tuyến tính từ K – không gian vectơ V vào K – không gian vectơ V'. Trên tập $Hom_k(V, V')$ xét các phép toán sau :

– Phép cộng các ánh xạ tuyến tính :

Với $f, g \in Hom_k(V, V')$, ánh xạ $f + g : V \to V'$ xác định bởi :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

– Phép nhân các phần tử của trường K với ánh xạ tuyến tính :

Với $\alpha \in K$, $f \in Hom_k(V, V')$, ánh xạ $\alpha f : V \to V'$ xác định bởi :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

1) Hãy chứng tỏ $f + g$ và αf là các ánh xạ tuyến tính.

2) Chứng minh tập $Hom_k(V, V')$ với hai phép toán trên là một K – không gian vectơ. K – không gian vectơ $Hom_k(V, V')$ được gọi là *không gian các ánh xạ tuyến tính* từ V vào V'.

5.2. Giả sử $f \in Hom_k(V, V')$, chứng minh :

1) Nếu tập con $A \subseteq V$ là một tập vectơ phụ thuộc tuyến tính thì f(A) cũng là một tập phụ thuộc tuyến tính.

2) f là một đơn cấu khi và chỉ khi ảnh của một tập độc lập tuyến tính qua ánh xạ f là một tập độc lập tuyến tính.

3) Nếu f là một đẳng cấu thì ánh xạ ngược f^{-1} cũng là một đẳng cấu.

5.3. Với mỗi số thực $a > 0$, $a \neq 1$, xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^+)^n$ xác định bởi : Với $x = (x_1, ..., x_n)$ thì $f(x) = \left(a^{x_1}, ..., a^{x_n}\right)$.

Chứng minh rằng, f là một đẳng cấu từ không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $(\mathbb{R}^+)^n$ (Bài tập 3.2).

5.4. Xét ánh xạ $\theta : R[x] \to R[x]$ xác định bởi : $\theta(p(x)) = p'(x)$.

Chứng minh θ là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian các đa thức $\mathbb{R}[x]$. Hãy xác định $\mathrm{Ker}\theta$, $\mathrm{Im}\theta$.

5.5. Xét tập V các hàm số x(t) xác định trên $\mathbb{R}$ cho bởi công thức :

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

trong đó n là một số tự nhiên cho trước; a_k, b_k là các số thực tùy ý.

1) Hãy chứng tỏ V là một không gian con của không gian $C(-\infty, +\infty)$ các hàm số liên tục. Tìm dimV.

2) Xét ánh xạ $\varphi : V \to V$ xác định bởi : Với mỗi $x \in V$, $\varphi(x)$ là một hàm số xác định như sau :

$$\varphi(x)(t) = x\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Chứng minh φ là một phép biến đổi tuyến tính và $\varphi^8 = i_V$.

3) Xác định $\dim\mathrm{Im}\varphi$, $\dim\mathrm{Ker}\varphi$.

5.6. Giả sử $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là phép biến đổi tuyến tính đối với cơ sở chính tắc có ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tìm một cơ sở của không gian con Kerf và Imf.

5.7. Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi : Với $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$.

1) Chứng minh φ là một phép biến đổi tuyến tính.

2) Tính $\dim\mathrm{Im}\varphi$ và $\dim\mathrm{Ker}\varphi$.

5.8. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n[K]$. Xét ánh xạ $f : M_{1\times n}[K] \to M_{1\times n}[K]$ xác định bởi :

$$f((x_1 \ \ \dots \ \ x_n)) = (x_1 \ \ \dots \ \ x_n)A.$$

Chứng tỏ f là một phép biến đổi tuyến tính. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của không gian $M_{1\times n}[K]$.

5.9. Giả sử V là K – không gian vectơ và $V = L_1 \oplus L_2$; $\{u_1, \dots, u_k\}$ là một cơ sở của L_1 ; $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của L_2. Xét ánh xạ $p_i : V \to V$, $i = 1, 2$ xác định như sau : Với $x \in V$ nếu $x = x_1 + x_2$, $x_i \in L_i$, $i = 1, 2$ thì $p_i(x) = x_i$.

1) Chứng minh rằng p_i $(i = 1, 2)$ là các phép biến đổi tuyến tính và :

$$p_i^2 = p_i \ ;$$

$$p_1p_2 = p_2p_1 = 0, \ \ p_1 + p_2 = i_V.$$

2) Xác định ma trận của p_1, p_2 đối với cơ sở $\{u_1, \dots, u_n\}$.

5.10. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ sang cơ sở $\{1, x + 2, \dots, (x + 2)^{n-1}\}$ trong không gian $\mathbb{R}_n[x]$.

5.11. Giả sử E là một Q – không gian vectơ hai chiều. $B = \{e_1, e_2\}$ là một cơ sở của E.

1) Chứng minh $B' = \{e'_1, e'_2\}$, trong đó $e'_1 = e_1 + e_2$; $e'_2 = e_1 - e_2$, là một cơ sở của E.

Tìm ma trận chuyển P từ cơ sở B sang cơ sở B' và ma trận chuyển P' từ cơ sở B' sang cơ sở B.

3) Giả sử $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f đối với cơ sở B. Hãy tìm ma trận của f đối với cơ sở B'.

5.12. Chứng minh rằng, vết của các ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính đối với các cơ sở khác nhau của không gian vectơ là bằng nhau. Giá trị chung đó được gọi là *vết* của phép biến đổi tuyến tính.

5.13. Chứng minh rằng, tập $End_k(V)$ các phép biến đổi tuyến tính của K – không gian vectơ V với phép cộng (Bài tập 5.1) và tích phép biến đổi tuyến tính là một vành đẳng cấu với vành ma trận $M_n[K]$.

5.14. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của các ma trận :

1) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

5.15. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V.

1) Chứng minh rằng, nếu λ là giá trị riêng của φ thì λ^k là một giá trị riêng của φ^k.

2) Với mỗi đa thức $f(t) = a_m t^m + ... + a_1 t + a_o \in K[t]$, ta ký hiệu $f(\varphi) = a_m\varphi^m + ... + a_1\varphi + a_o i_V$.

Chứng minh rằng, nếu $u \in V$ là vectơ riêng của φ ứng với giá trị λ thì u cũng là vectơ riêng của $f(\varphi)$ ứng với giá trị riêng $f(\lambda)$. Giả sử A là ma trận của φ đối với cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$, hãy xác định ma trận của $f(\varphi)$ đối với cơ sở đó.

5.16. Giả sử phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian $\mathbb{R}^3$ đối với cơ sở chính tắc có ma trận là :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của φ.

2) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ mà đối với cơ sở đó ma trận B của φ có dạng tam giác. Viết ma trận B.

3) Chứng tỏ rằng, trong tất cả các cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn điều kiện 2) thì có ít nhất một cơ sở mà đối với nó ma trận B ngoài đường chéo chính chỉ có một phần tử khác 0 bằng 1. Viết ma trận B cho trường hợp đó.

5.17. Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ có ma trận đối với cơ sở $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng tỏ rằng các không gian con sinh bởi vectơ $u_1 + 2u_2$ và $u_2 + u_3 + 2u_4$ bất biến đối với φ.

5.18. Cho ma trận thực A, tìm ma trận khả nghịch T sao cho ma trận $B = T^{-1}.A.T$ là ma trận đường chéo. Cho biết ma trận B :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5.19. Cho trước ma trận đối xứng thực A, hãy tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^t.A.Q$ là ma trận đường chéo :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

5.20. Chứng minh rằng, các vectơ riêng của một phép biến đổi đối xứng ứng với các giá trị riêng khác nhau thì trực giao với nhau.

5.21. Ma trận phức A gọi là *tự liên hợp* nếu $\overline{A}^t = A$. Chứng minh rằng, các giá trị riêng của ma trận tự liên hợp là các số thực.

Đáp số và hướng dẫn

5.4. $\mathrm{Ker}\theta = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}\theta = \mathbb{R}[x]$.

5.5. 1) $\dim V = 2n + 1$.

2) Ta có : $\varphi^k(x)(t) = x\left(t + k\dfrac{\pi}{4}\right)$

Do đó :

$$\varphi^8(c)(t) = x(t + 2\pi) = x(t), \text{ ta có } \varphi^8 = i_V.$$

3) Theo kết quả ở 2) thì φ là một đơn cấu, do đó $\dim\mathrm{Ker}\varphi = 0$, $\dim\mathrm{Im}\varphi = 2n + 1$.

5.6. *Hướng dẫn* :

a) Kerf là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$A(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t = (0 \quad 0 \quad 0)^t.$$

Đáp số : Kerf có cơ sở $u_1 = \{(-1, 4, 7)\}$.

b) Có thể sử dụng phương pháp chứng minh Định lý 5.2 để xác định cơ sở của Imf. Chẳng hạn, trong $\mathbb{R}^3$ chọn cơ sở $\{e_1, e_2, u_1\}$. Khi đó : $\{f(e_1) = (1, 2, 1), f(e_2) = (2, -3, -5)\}$ là cơ sở của Imf.

5.7. 2) $\dim\mathrm{Im}\varphi = 3$; $\dim\mathrm{Ker}\varphi = 0$.

5.8. Ma trận A^t là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc.

5.9. $A_{p_1} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$

trong đó E_1 là ma trận đơn vị cấp k ; E_2 là ma trận đơn vị cấp n – k.

5.10.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1.2 & \dots & C_{n-1}^1.2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-1}^2.2^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5.11. 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3) $\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

5.14. 1) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng 1 là $t(1, 1, 1)$, $\forall t \neq 0$. Còn đối với giá trị riêng 0 có dạng $t(1, 2, 3)$, $\forall t \neq 0$.

2) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng 3 có dạng $t(1, 2, 2)$, còn đối với giá trị riêng -1 có dạng $t(1, 2, 1)$, $\forall t \neq 0$.

5.15. 2) $f(A) = a_m A^m + ... + a_1 A + a_o E$.

5.16. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$. Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng 4 là $t(1, -1, 1)$, còn ứng với giá trị riêng 2 là $t(1, 1, 1)$, $\forall t \neq 0$.

2) Chọn một cơ sở gồm hai vectơ riêng $\alpha_1 = (1, -1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$ và α_3 không biểu diễn tuyến tính qua α_1 và α_2, chẳng hạn $\alpha_3 = (0, 0, 1)$. Đối với cơ sở này ma trận của φ có dạng :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Lấy cơ sở $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3\}$, $\alpha'_3 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, trong đó $c \neq 0$. Để $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3\}$ độc lập tuyến tính có thể chọn $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$. Đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5.17. Có duy nhất giá trị riêng $\lambda = 1$. Các vectơ riêng có dạng :

$$t(u_1 + 2u_2) + s(u_2 + u_3 + 2u_4),$$

trong đó : t, s là các tham số không đồng thời bằng 0.

5.18. *Hướng dẫn :* Sử dụng phương pháp ở nhận xét của chứng minh Hệ quả 5.8.

1) $$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{14} & -\frac{3}{35} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{14} & \frac{1}{35} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & O \\ O & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$

5.19. 1) $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $\quad Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2) $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; $\quad Q = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

5.20. Xét các vectơ riêng u_1, u_2 của phép biến đổi đối xứng φ ứng với các giá trị riêng λ_1, λ_2 ; $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vì $(\varphi(u_1).u_2) = (u_1.\varphi(u_2))$, do đó :

$$\lambda_1(u_1.u_2) = \lambda_2(u_1.u_2) ;$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1.u_2) = 0 \Rightarrow (u_1.u_2) = 0.$$

5.21. *Hướng dẫn :* Chứng minh hoàn toàn tương tự như Bổ đề 5.1.

Chương VI

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

6.1.1. Dạng tuyến tính

Giả sử K là một trường số. Mỗi ánh xạ tuyến tính từ K – không gian vectơ V vào K được gọi là *một dạng tuyến tính* trên V. Vậy, mỗi dạng tuyến tính trên V là một ánh xạ $f : V \to K$ thỏa mãn các điều kiện :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) ;$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \tag{6.1}$$

đối với mọi $x, y \in V$ và $\alpha \in K$.

Ký hiệu V^* là tập tất cả các dạng tuyến tính trên V. Trên tập V^* xét hai phép toán sau đây :

– Phép cộng các dạng tuyến tính :

Với f, g thuộc V^*, ánh xạ $f + g : V \to K$ xác định bởi :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in V. \tag{6.2}$$

– Phép nhân các phần tử của trường K với dạng tuyến tính :

Với $\alpha \in K$, $f \in V^*$, ánh xạ $\alpha f : V \to K$ xác định bởi :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in V. \tag{6.3}$$

Dễ dàng chứng tỏ rằng, các ánh xạ $f + g$, αf là các dạng tuyến tính trên V, và tập V^* với hai phép toán trên là một K – không gian vectơ, với vectơ không là ánh xạ tầm thường $O : V \to K$. Xác định bởi $O(x) = 0$, $\forall x \in V$. Vectơ đối của vectơ f là $(-1)f = -f$.

K – không gian vectơ V* được gọi là *không gian đối ngẫu* của K – không gian vectơ V.

Đối với mỗi cặp $f \in V^*$, $x \in V$ ta ký hiệu :

$$f(x) = \langle x \mid f \rangle. \tag{6.4}$$

Định lý 6.1 : Nếu hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của K – không gian vectơ V thì hệ các dạng tuyến tính $\{u^1, ..., u^n\}$ trên V xác định bởi :

$$u^j(u_i) = \langle u_i \mid u^j \rangle = \delta_{ij} \tag{6.5}$$

là một cơ sở của không gian đối ngẫu V*.

Cơ sở $\{u^1, ..., u^n\}$ gọi là *cơ sở đối ngẫu* của cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$.

Chứng minh : Vì mỗi ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó tại các vectơ thuộc một cơ sở, do đó các hệ thức (6.5) xác định n dạng tuyến tính trên V.

– Hệ $\{u^1, ..., u^n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử có tổ hợp tuyến tính :

$$\lambda_1 u^1 + ... + \lambda_n u^n = \theta.$$

Theo (6.2) và (6.3), với i = 1, ..., n ta có :

$$(\lambda_1 u^1 + ... + \lambda_n u^n)(u_i) = 0(u_i) ;$$

$$\lambda_1 u^1(u_i) + ... + \lambda_n u^n(u_i) = 0 ;$$

$$\lambda_1 \delta_{i1} + ... + \lambda_i \delta_{ii} + ... + \lambda_n \delta_{in} = 0 ;$$

$$\lambda_i = 0.$$

– Hệ vectơ $\{u^1, ..., u^n\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ V*. Thật vậy, đối với mỗi $x = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$ thuộc V ta có :

$$u^i(x) = u^i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k u^i(u_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{ki} = x_i$$

Do đó đối với mọi f thuộc V* ta có :

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(u_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(u_k) u^k(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} f(u_k) u^k\right)(x), \forall x \in V.$$

Do đó ta có :

$$f = \sum_{k=1}^{n} f(u_k)u^k$$

Vậy, mỗi vectơ của không gian V* biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{u^1, ..., u^n\}$.■

6.1.2. Dạng song tuyến tính

Định nghĩa : Giả sử V là một K – không gian vectơ. Ánh xạ $\varphi : V \times V \to K$ được gọi là *dạng song tuyến tính* trên không gian vectơ V nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn đối mọi vectơ x, x', y, y' thuộc V và mọi phần tử α thuộc K.

$$\begin{cases} \varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(\alpha x, y) \quad = \alpha\varphi(x, y) \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\begin{cases} \varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\ \varphi(x, \alpha y) \quad = \alpha\varphi(x, y) \end{cases} \tag{6.7}$$

Điều kiện (6.6) chứng tỏ với mỗi y cố định thì φ(x, y) là một dạng tuyến tính trên V đối với biến x. Điều kiện (6.7) chứng tỏ với mỗi x cố định thì φ(x, y) là một dạng tuyến tính trên V đối với biến y.

Dạng song tuyến tính φ gọi là *đối xứng* nếu thỏa mãn điều kiện :

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x), \forall x, y \in V. \tag{6.8}$$

Ví dụ : Mỗi tích vô hướng của không gian vectơ Euclid là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ.

1. Ma trận của dạng song tuyến tính

Trong K – không gian vectơ V xét cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\}. \qquad \text{(I)}$$

Giả sử φ là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ V. Khi đó đối với các vectơ $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$. Áp dụng tính chất tuyến tính theo từng biến của φ ta có :

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi\left(u_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(u_i, u_j). \tag{6.9}$$

Đặt $a_{ij} = \varphi(u_i, u_j)$; $i, j = 1, ..., n$.

Ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ được gọi là *ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở (I).*

Từ biểu thức (6.9) suy ra dạng song tuyến tính φ hoàn toàn xác định nếu biết ma trận của nó đối với cơ sở nào đó.

Biểu thức (6.9) có thể viết lại dưới dạng :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{6.10}$$

Biểu thức (6.10) được gọi là *biểu thức tọa độ* của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở (I).

Từ biểu thức (6.10) ta có :

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x, y) = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Do đó biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính φ có thể viết dưới dạng ma trận :

$$\varphi(x, y) = (x_1 \quad \dots \quad x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (6.11)$$

Mệnh đề 6.1 : Dạng song tuyến tính φ trên K – không gian vectơ hữu hạn chiều V là đối xứng khi và chỉ khi ma trận của nó đối với cơ sở nào đó là ma trận đối xứng.

Chứng minh : Giả sử φ là dạng song tuyến tính đối xứng và $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của φ đối với cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$. Theo (6.9) ta có :

$$a_{ij} = \varphi(u_i, u_j) = \varphi(u_j, u_i) = a_{ji}, \ \ i, j = 1, ..., n.$$

Vậy A là ma trận đối xứng.

Ngược lại, giả sử rằng A là ma trận đối xứng, theo hệ thức (6.10) ta có :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_j x_i = \varphi(y, x).$$

Vậy, φ là một dạng song tuyến tính đối xứng. Mệnh đề được chứng minh. ■

2. Tích Tenxơ

Ký hiệu $(V^*)^* = V^{**}$ là không gian đối ngẫu của K – không gian vectơ V^*. Người ta chứng tỏ được rằng, nếu V là K – không gian vectơ hữu hạn chiều thì có thể đồng nhất không gian V với không gian V^{**}. Tức là, $(V^*)^* = V$. Mỗi phần tử $x \in V$ là một dạng tuyến tính trên V^*.

– Với mỗi $f \in V^*$: $\langle x \mid f\rangle = f(x), \forall x \in V$.

– Với mỗi $x \in V$: $\langle x \mid f\rangle = x(f), \forall f \in V^*$.

Xét K – không gian vectơ hữu hạn chiều V.

Định nghĩa : Tích Tenxơ của vectơ x với vectơ y, ký hiệu $x \otimes y$, là một dạng song tuyến tính trên K – không gian vectơ V^* được xác định bởi :

$$x \otimes y((f, g)) = \langle x \mid f\rangle\langle y \mid g\rangle, \ \ \forall f, g \in V^*. \qquad (6.12)$$

Tích Tenxơ của dạng tuyến tính f với dạng tuyến tính g, ký hiệu $f \otimes g$, là một dạng song tuyến tính trên K – không gian vectơ V được xác định bởi :

$$f \otimes g((x, y)) = \langle x \mid f \rangle \langle y \mid g \rangle, \ \forall x, y \in V. \tag{6.13}$$

6.2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.2.1. Định nghĩa

Giả sử φ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên K – không gian vectơ V, khi đó ánh xạ $\omega : V \to K$ xác định bởi :

$$\omega(x) = \varphi(x, x), \forall x \in V \tag{6.14}$$

được gọi là *dạng toàn phương trên không gian vectơ V sinh bởi dạng song tuyến tính đối xứng φ.*

Trong không gian vectơ V, xét cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\} \quad \text{(I)}$$

Giả sử $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng φ. Theo Mệnh đề 6.1, A là ma trận đối xứng. Theo các công thức (6.10) và (6.11), với $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ ta có :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{6.15}$$

$$\omega(x) = (x_1 \quad ... \quad x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

Các hệ thức (6.15), (6.16) được gọi là ***biểu thức tọa độ*** của dạng toàn phương ω đối với cơ sở (I).

Xét một cơ sở khác của không gian V :

$$\{v_1, ..., v_n\} \quad \text{(II)}$$

Giả sử B là ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở (II). Khi đó theo công thức (6.16) ta có :

Với $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i v_i$ thì $\omega(x) = (x'_1 \quad ... \quad x'_n)B\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ (a)

Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II). Theo công thức biến đổi tọa độ (5.13) ta có :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{(b)}$$

Thực hiện phép chuyển vị ma trận ở hai vế của đẳng thức (b) ta có :

$$(x_1 \ \ ... \ \ x_n) = (x'_1 \ \ ... \ \ x'_n)T^t. \quad \text{(c)}$$

Từ các công thức (6.16), (b) và (c) ta có :

$$\omega(x) = (x'_1 \ \ ... \ \ x'_n)T^t.A.T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{(d)}$$

So sánh vế phải (a) và (d) ta có :

$$B = T^t.A.T. \quad (6.17)$$

Hệ thức (6.17) thể hiện quan hệ giữa hai ma trận của cùng một dạng toàn phương đối với một cơ sở khác nhau.

Vì T là ma trận không suy biến, nên ta có r(B) = r(A). Vậy, hạng của ma trận dạng toàn phương ω không phụ thuộc vào cơ sở và được gọi là *hạng của dạng* ω. Nếu r(A) = n thì ω gọi là *dạng không suy biến.*

6.2.2. Dạng chính tắc của dạng toàn phương

1. Cơ sở chính tắc

Cơ sở $\{v_1, ..., v_n\}$ của K – không gian vectơ V được gọi là *cơ sở chính tắc* của dạng toàn phương ω nếu ma trận B của dạng ω đối với cơ sở đó có dạng đường chéo.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_n \end{pmatrix}$$

Khi đó biểu thức tọa độ của ω có dạng :

$$\omega(x) + b_1t_1^2 + \dots + b_nt_n^2 \tag{6.18}$$

trong đó : $x = t_1v_1 + \dots + t_nv_n$.

Biểu thức (6.18) gọi là *dạng chính tắc* của dạng toàn phương ω.

Rõ ràng rằng, số hệ số khác 0 trong dạng chính tắc bằng hạng của dạng toàn phương.

2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

a) Phương pháp Lagrăng :

Xét dạng toàn phương khác không (có hạng khác không) :

$$\omega(x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,.$$

Nếu mọi hệ số $a_{ii} = 0$; $i = 1, \dots, n$, khi đó phải có hệ số $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$. Chẳng hạn a_{12}, thực hiện phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ \dots \\ x_k = y_k\,, \qquad k = 3, \dots, n \end{cases} \tag{6.19}$$

ta được biểu thức tọa độ mới của ω(x) có hệ số của y_1^2 là $2a_{12} \neq 0$.

Do đó không mất tính tổng quát, có thể giả thiết có hệ số $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$. Ta có :

$$\omega(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$\Rightarrow \omega(x) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n\right)^2 - \frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ sau đây :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_k = x_k\,, \quad k = 2, \dots, n \end{cases} \tag{6.20}$$

Dạng toàn phương ω có dạng tọa độ mới là :

$$\omega(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} y_i y_j .$$

Giữ nguyên biến y_1, tiếp tục thực hiện các phép biến đổi trên đối với các biến $y_2, ..., y_n$. Sau một số bước ta sẽ khử hết các số hạng của tích hai tọa độ và nhận được dạng chính tắc của dạng toàn phương ω.

Ví dụ : Xét dạng toàn phương ω trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho bởi :

$$\omega(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2 + 2x_2x_3$$

với $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Ta có $a_{11} = 1 \neq 0$, sử dụng phép biến đổi (6.20) :

$$\omega(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - (-x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + 4x_3 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 6x_2x_3.$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Dạng tọa độ mới của ω là :

$$\omega(x) = y_1^2 + 6y_2y_3 .$$

Giữ nguyên y_1, biến đổi y_2, y_3.

Ta có $a_{ii} = 0$, $i = 2, 3$. Sử dụng phép biến đổi (6.19) :

$$\begin{cases} y_1 = t_1 \\ y_2 = t_2 + t_3 \\ y_3 = t_2 - t_3 \end{cases}$$

Biểu thức tọa độ mới của ω là :

$$\omega(x) = t_1^2 + 6t_2^2 - 6t_3^2 .$$

Đó là dạng chính tắc cần tìm.

b) Phương pháp giá trị riêng :

Mệnh đề sau đây là một áp dụng của Định lý 5.6 vào việc khảo sát các dạng toàn phương trên không gian vectơ Euclid.

Mệnh đề 6.2 : Mỗi dạng toàn phương ω trên không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều E đều có một cơ sở chính tắc là cơ sở trực chuẩn của không gian E.

Các vectơ của cơ sở chính tắc đó gọi là các *phương chính* của dạng toàn phương ω.

Chứng minh : Trong không gian vectơ Euclid E xét một cơ sở trực chuẩn :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad (I)$$

Gọi A là ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở trực chuẩn (I). Vì A là ma trận đối xứng thực, theo Hệ quả 5.8 tồn tại ma trận trực giao Q sao cho :

$$B = Q^t.A.Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ma trận trực giao Q chuyển cơ sở trực chuẩn (I) về cơ sở trực chuẩn $\{f_1, ..., f_n\}$ (II) xác định bởi :

$$(f_1 \quad ... \quad f_n) = (u_1 \quad ... \quad u_n)Q.$$

Theo công thức (6.17), ma trận đường chéo B là ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở trực chuẩn (II). Vậy, cơ sở trực chuẩn (II) là một cơ sở chính tắc của dạng toàn phương ω.

Chú ý :

1) Trong cơ sở các phương chính (II), biểu thức tọa độ của dạng toàn phương ω là :

$$\omega(x) = \lambda_1 t_1^2 + ... + \lambda_n t_n^2 \qquad (6.21)$$

với $x = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i$, trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A.

2) Các cột của ma trận chuyển Q là các vectơ riêng của ma trận A.

Ví dụ : Dạng toàn phương ω trên không gian $\mathbb{R}^3$ được cho bởi :

$$\omega(x) = 11x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3$$

với $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, e_3\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là :

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = -\lambda^2 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458$$
$$= (\lambda - 9)(\lambda + 9)(\lambda - 18).$$

Vậy ma trận A có giá trị riêng là : $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = -9$. Theo hệ thức (6.21) dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc :

$$\begin{cases} \omega(x) = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2 \\ x \quad = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3 \end{cases}$$

Các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_i là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình :

$$(A - \lambda_i E)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 9$, hệ có nghiệm $u = t(2, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_1 = (2, 2, 1)$.

$\lambda_2 = 18$, hệ có nghiệm $u = t(2, -1, -2)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_2 = (2, -1, -2)$.

$\lambda_3 = -9$, hệ có nghiệm $u = t(-1, 2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_3 = (-1, 2, 2)$.

Vì u_1, u_2, u_3 là các vectơ riêng của ma trận đối xứng thực ứng với các giá trị riêng khác nhau nên trực giao với nhau (Bài tập 5.20).

2) Các cột của ma trận chuyển Q là các vectơ riêng của ma trận A.

Ví dụ : Dạng toàn phương ω trên không gian $\mathbb{R}^3$ được cho bởi :

$$\omega(x) = 11x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3$$

với $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, e_3\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là :

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = -\lambda^2 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458$$
$$= (\lambda - 9)(\lambda + 9)(\lambda - 18).$$

Vậy ma trận A có giá trị riêng là : $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = -9$. Theo hệ thức (6.21) dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc :

$$\begin{cases} \omega(x) = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2 \\ x \quad\;\; = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3 \end{cases}$$

Các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_i là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình :

$$(A - \lambda_i E)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 9$, hệ có nghiệm $u = t(2, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_1 = (2, 2, 1)$.

$\lambda_2 = 18$, hệ có nghiệm $u = t(2, -1, -2)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_2 = (2, -1, -2)$.

$\lambda_3 = -9$, hệ có nghiệm $u = t(-1, 2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_3 = (-1, 2, 2)$.

Vì u_1, u_2, u_3 là các vectơ riêng của ma trận đối xứng thực ứng với các giá trị riêng khác nhau nên trực giao với nhau (Bài tập 5.20).

Chuẩn hóa :

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$v_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Do đó ta có :

$$(f_1 \quad f_2 \quad f_3) = (e_1 \quad e_2 \quad e_3)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cơ sở các phương chính của ω là :

$$\begin{cases} f_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ f_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ f_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

6.3. DẠNG TOÀN PHƯƠNG THỰC

6.3.1. Dạng toàn phương xác định dương

Định nghĩa : Dạng toàn phương ω trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ V gọi là *xác định dương* nếu $\omega(x) > 0$, đối với mọi vectơ $x \neq \theta$. Và nếu $\omega(x) < 0$ đối với mọi $x \neq \theta$ thì dạng ω gọi là *xác định âm*.

Mệnh đề 6.3 : Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ n chiều V xác định dương khi và chỉ khi tất cả các hệ số trong dạng chính tắc của nó đều dương. Tức là, nếu ω có dạng chính tắc :

$$\omega(x) = b_1t_1^2 + ... + b_nt_n^2$$

thì $b_i > 0$, $i = 1, ..., n$.

Chứng minh : Giả sử các hệ số $b_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Khi đó nếu vectơ $x \in V$, $x \neq \theta$ thì có ít nhất một tọa độ $t_{i_0} \neq 0$. Do đó ta có :

$$\omega(x) \geq b_{i_0}t_{i_0}^2 > 0.$$

Vậy dạng toàn phương $\omega(x)$ xác định dương.

Ngược lại, giả sử ω là một dạng toàn phương xác định dương. Nếu có $b_i \leq 0$, ta chọn vectơ $x \in V$ có tọa độ đối với cơ sở chính tắc đang xét là $t_1 = 0, ..., t_{i-1} = 0, t_i = 1, t_{i+1} = 0, ..., t_n = 0$. Khi đó vectơ $x \neq \theta$, nhưng $\omega(x) = b_i \leq 0$. Vô lý. Vậy các hệ số chính tắc $b_i > 0$, $i = 1, ..., n$.

Người ta chứng minh được rằng :

Dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính :

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, ...,\ \Delta_n = |A|$$

đều dương.

6.3.2. Luật quán tính

Một dạng toàn phương có thể có nhiều cơ sở chính tắc khác nhau, định lý sau đây thường gọi là *luật quán tính* cho ta thấy một tính chất bất biến về dấu của các hệ số trong các dạng chính tắc.

Định lý 6.2 (Luật quán tính) : Số hệ số dương và số hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương ω không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở chính tắc.

Số hệ số dương được gọi *chỉ số dương quán tính*. Số hệ số âm gọi là *chỉ số âm quán tính*.

Chứng minh : Giả sử ω là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ có hạng $r > 0$, có các cơ sở chính tắc :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{và} \quad \{v_1, ..., v_n\}. \qquad \text{(II)}$$

Ta có thể giả thiết rằng, đối với các cơ sở chính tắc (I) và (II) dạng toàn phương ω lần lượt có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = b_1x_1^2 + ... + b_px_p^2 - b_{p+1}x_{p+1}^2 - ..... - b_rx_r^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\text{và} \quad \omega(x) = c_1y_1^2 + ... + c_qy_q^2 - c_{q+1}x_{q+1}^2 - ..... - c_rx_r^2 \qquad \text{(b)}$$

trong đó : $b_i > 0, c_i > 0, i = 1, ..., r$.

Ta cần chứng tỏ $p = q$. Xét các không gian con :

$$L = \mathscr{L}(\{u_1, ..., u_p\}) \text{ và } M = \mathscr{L}(\{v_{q+1}, ..., v_n\}).$$

Giả sử $x \in M \cap L$, $x \neq \theta$. Vì $x \in L$ nên theo (a) ta có $\omega(x) > 0$. Vì $x \in M$ nên theo (b) ta có : $\omega(x) < 0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $M \cap L = \{\theta\}$. Theo Mệnh đề 3.7 ta có :

$$\dim(L \oplus M) = \dim L + \dim M \leq \dim V.$$

Do đó ta có:

$$p + (n - q) \leq n.$$

Vậy $p - q \leq 0$, hay $p \leq q$.

Tương tự bằng cách xét các không gian con :

$L' = \mathscr{L}(\{u_{p+1}, ..., u_n\})$, $M' = \mathscr{L}(\{v_1, ..., v_q\})$ ta có : $q \leq p$.

Vậy $p = q$.

BÀI TẬP

Đề bài

6.1. Trong K – không gian vectơ V xét cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$. Giả sử f là một dạng tuyến tính trên V. Hãy chứng tỏ rằng, đối với mọi vectơ $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i$, f(x) có thể viết dưới dạng :

$$f(x) = (a_1 \ \ \dots \ \ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ma trận hàng $(a_1 \ \ \dots \ \ a_n)$ gọi là ma trận của dạng f đối với cơ sở đang xét.

6.2. Xét các dạng tuyến tính f_1, f_2 trên K – không gian vectơ n chiều V.

1) Chứng minh rằng, ánh xạ $\varphi : V \times V \to K$ xác định bởi $\varphi(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ là một dạng song tuyến tính trên V.

2) Giả sử $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$, $B = (b_1 \ \dots \ b_n)$ là ma trận của các dạng f_1 và f_2 đối với cơ sở nào đó của không gian vectơ V. Hãy xác định ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở đó. Tìm điều kiện cần và đủ để φ là dạng song tuyến tính đối xứng.

6.3. Tìm ma trận của dạng song tuyến tính φ trên không gian $R_{n+1}[x]$ các đa thức có bậc nhỏ hơn n + 1 xác định bởi :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g'(t)dt$$

đối với cơ sở $\{1, t, \dots, t^n\}$ và cơ sở $\{1, t-1, \dots, (t-a)^n\}$.

6.4. 1) Trong không gian vectơ K^n xét các vectơ $x = (a_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Xác định các tích tenxơ $x \otimes y$, $y \otimes x$. Tìm điều kiện để $x \otimes y = y \otimes x$.

2) Giả sử f, g là các dạng tuyến tính trên không gian vectơ K^n cho bởi :

$$f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \ ; \ \ g(x) = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$$

với $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Hãy xác định tích tenxơ $f \otimes g$.

6.5. Với những giá trị nào của λ thì dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau xác định dương :

$$\omega(x) = \lambda x_1^2 + 6x_2^2 + (\lambda - 2)x_3^2 + 4x_1x_2$$

với $x = (a_1, x_2, x_3)$.

6.6. Hãy dùng phương pháp Lagrăng đưa các dạng toàn phương trên không gian vectơ K^n sau đây về dạng chính tắc :

1) $\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

2) $\omega(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, với $x = (x_1, x_2, x_3)$;

3) $\omega(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, với $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

với $x = (x_1, x_2, x_3)$

6.7. Dùng phương pháp giá trị riêng đưa các dạng toàn phương trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ sau đây về dạng chính tắc :

1) $\omega(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3$;

2) $\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3) $\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,

trong đó : $x = (x_1, x_2, x_3)$.

6.8. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ dạng toàn phương ω đối với cơ sở chính tắc có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ là cơ sở chính tắc của ω. Viết dạng chính tắc của ω ứng với cơ sở chính tắc đó.

Đáp số và hướng dẫn

6.1. *Hướng dẫn :* Đặt $a_i = f(u_i)$, $i = 1, ..., n$, ta có :

$$f(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n = (a_1 \ \ ... \ \ a_n)(x_1 \ \ ... \ \ x_n)^t.$$

6.2. 2) $A^t.B = (a_ib_j)_{n\times n}$. Dạng song tuyến tính φ đối xứng khi và chỉ khi $a_ib_j = a_jb_i$, $\forall i, j$.

6.3. $$\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{n+1\times n+1} ; \left(\frac{(1-a)^{i+j-1} + (-1)^{i+j}a^{i+j-1}}{i+j-1}\right)_{n+1\times n+1}$$

6.4. *Hướng dẫn :*

1) Theo định nghĩa $x \otimes y$ là một dạng song tuyến tính trên $(K^n)^*$ xác định bởi :

$$x \otimes y(f, g) = \langle x \mid f\rangle\langle y \mid g\rangle.$$

Do đó $x \otimes y$ được xác định nếu biết ma trận C của nó đối với một cơ sở nào đó của không gian $(K^n)^*$. Chẳng hạn, cơ sở đối ngẫu $\{e^1, ..., e^n\}$ của cơ sở chính tắc $\{e_1, ..., e_n\}$ của K^n. Áp dụng kết quả Bài 6.2 ta có : $C = (x_i y_j)_{n\times n}$.

Tương tự ma trận D của dạng song tuyến tính $y \otimes x$ là $D = (y_i x_j)_{n\times n}$. $x \otimes y = y \otimes x$ khi và chỉ khi $x_i y_j = x_j y_i$, $\forall i, j$. Do đó tích tenxơ nói chung không giao hoán.

2) Vì $f \otimes g$ là một dạng song tuyến tính trên không gian K^n. Theo định nghĩa ta có :

$$f \otimes g((x, y)) = \langle x \mid f\rangle\langle y \mid g\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right)$$

$$= (x_1 \dots x_n)\,(a_1 \dots a_n)^t\,(b_1 \dots b_n)\,(y_1 \dots y_n)^t.$$

Vậy ma trận của $f \otimes g$ đối với cơ sở chính tắc của K^n là $M = (a_i b_j)_{n\times n}$.

6.5. Sử dụng kết quả dạng toàn phương thực xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính đều dương.

Đáp số : $\lambda > 2$.

6.6. 1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, với phép biến đổi tọa độ :

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3\ ;\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3\ ;\ x_3 = \frac{1}{3}y_3.$$

2) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, với phép biến đổi tọa độ :

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3\ ;\quad x_2 = y_1 + y_2 - y_3\ ;\quad x_3 = y_3.$$

3) $y_1^2 - y_2^2$, với phép biến đổi tọa độ :

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3\ ;\quad x_2 = y_1 + y_2 - y_4\ ;\quad x_3 = y_3\ ;\ x_4 = y_4.$$

6.7. 1) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}y_1^2 + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}y_2^2$;

2) $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$;

3) $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

6.8. Các giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng ω :

$$\lambda_1 = 3 \ , \qquad u_1 = \left(\frac{2}{3}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{1}{3}\right)$$

$$\lambda_2 = 6 \ , \qquad u_2 = \left(\frac{1}{3}, \ -\frac{2}{3}, \ -\frac{2}{3}\right)$$

$$\lambda_3 = 9 \ , \qquad u_3 = \left(\frac{2}{3}, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}\right)$$

Hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở trực chuẩn cần tìm. Đối với cơ sở đó ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

Chương VII
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

7.1. KHÔNG GIAN CÁC VECTƠ TỰ DO

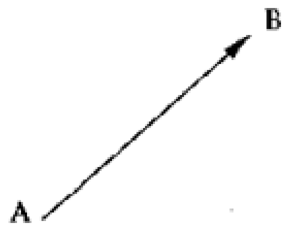
7.1.1. Vectơ tự do

Ta sẽ gọi các đường thẳng, các mặt phẳng và không gian hình học là các không gian điểm một chiều, không gian điểm hai chiều và không gian điểm ba chiều, ký hiệu tương ứng là $Đ^1$, $Đ^2$ và $Đ^3$. Thuật ngữ số chiều của $Đ^n$, $n = 1, 2, 3$ chỉ là sự hình dung trực giác đường thẳng có một chiều dài ; mặt phẳng có chiều dài, chiều rộng và không gian có chiều dài, chiều rộng và chiều cao.

1. Vectơ buộc

Ứng với mỗi cặp điểm (A, B) của không gian điểm $Đ^n$ ta xác định một vectơ buộc (hay đoạn thẳng có định hướng), ký hiệu là $\overrightarrow{AB}$. Điểm A được gọi là *điểm gốc*, điểm B được gọi là *điểm ngọn* của vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$.

– *Hướng* của vectơ $\overrightarrow{AB}$ đi từ điểm gốc A đến điểm ngọn B (hình 7.1). Nếu $A \equiv B$ thì $\overrightarrow{AA}$ gọi là vectơ buộc "không", là vectơ buộc hướng không xác định.



Hình 7.1

– *Độ dài* của vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$, ký hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, là khoảng cách giữa hai điểm A và B.

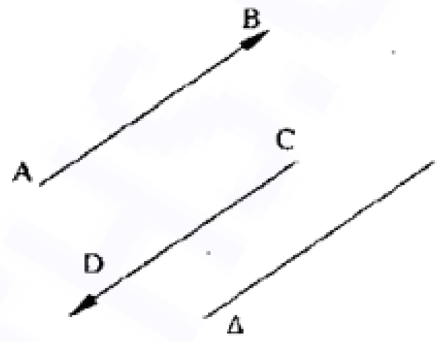
Vectơ buộc có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ buộc đơn vị*.

Vectơ cộng tuyến :

Vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ gọi là *song song* với đường thẳng Δ nếu đường thẳng AB trùng hoặc song song với đường thẳng Δ, ta viết $\overrightarrow{AB}$ // Δ.

Hai vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng song song với một đường thẳng được gọi là hai vectơ *cộng tuyến* (hay cùng phương), ta viết $\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{CD}$ (hình 7.2).

Hai vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là *cùng hướng* (hoặc *ngược hướng*) nếu $\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{CD}$ và hai điểm B, D ở cùng phía (hoặc khác phía) đối với đường thẳng AC.

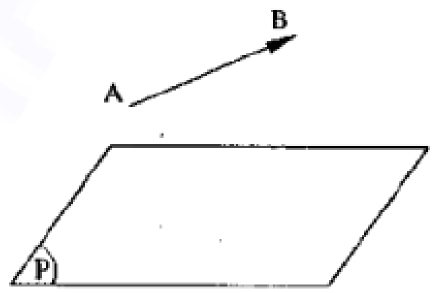


Hình 7.2

Vectơ đồng phẳng :

Vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ gọi là song song với mặt phẳng P nếu đường thẳng AB song song với mặt phẳng P hoặc $AB \subset P$, ta viết $\overrightarrow{AB}$ // P (hình 7.3).

Trong không gian $Đ^3$ các vectơ buộc cùng song song với một mặt phẳng gọi là *đồng phẳng*.



Hình 7.3

Vectơ buộc bằng nhau :

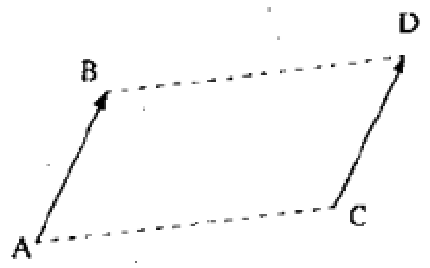
Định nghĩa :

– Các vectơ buộc "không" thì bằng nhau, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{CC}$.

– Đối với các vectơ buộc khác vectơ buộc "không" thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

b) $\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{CD}$ và cùng hướng (hình 7.4).



Hình 7.4

2. Vectơ tự do

Ta nhận thấy rằng, quan hệ "bằng nhau" của các vectơ buộc là một quan hệ tương đương trên tập các vectơ buộc của không gian điểm $Đ^n$.

Định nghĩa : Mỗi lớp vectơ buộc bằng nhau được gọi là *vectơ tự do*. Ta ký hiệu E^n là tập các vectơ tự do trong $Đ^n$, n = 1, 2, 3.

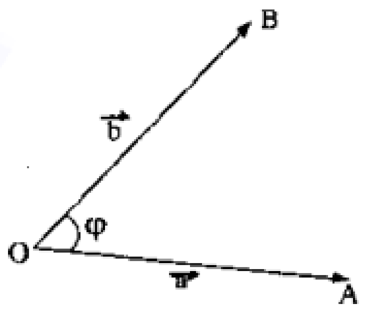
Các vectơ tự do được ký hiệu bởi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

Nếu $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ thì ta viết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, và nói rằng buộc vectơ tự do $\vec{a}$ ở điểm A. Độ dài, phương, hướng của vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ là độ dài, phương, hướng của vectơ tự do $\vec{a}$.

Lớp vectơ buộc không gọi là vectơ tự do "không", ký hiệu là $\vec{O}$.

Góc của hai vectơ tự do :

Giả sử $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ tự do khác vectơ $\vec{O}$. Ta buộc hai vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}$ ở điểm O : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Các vectơ buộc $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ tạo nên hai góc φ và $(2\pi - \varphi)$ (hình 7.5). Góc φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ được gọi là *góc* của hai vectơ tự do $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



Hình 7.5

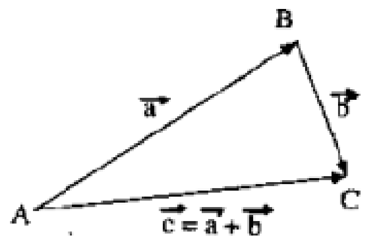
Nếu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thì ta nói các vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$ *vuông góc* với nhau, ký hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Các vectơ tự do gọi là *cộng tuyến* hoặc *đồng phẳng* nếu các vectơ buộc tương ứng với mỗi vectơ tự do đó là cộng tuyến hoặc đồng phẳng.

7.1.2. Các phép toán trên tập các vectơ tự do

1. Phép cộng hai vectơ tự do

Tổng của hai vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$ thuộc E^n là vectơ tự do $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ được xác định như sau : Ta buộc vectơ tự do $\vec{a}$ ở điểm A : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; rồi buộc vectơ tự do $\vec{b}$ ở điểm B : $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (hình 7.6).



Hình 7.6

2. Phép nhân số thực với vectơ tự do

Tích của số thực α với vectơ tự do $\vec{a}$ là một vectơ tự do, ký hiệu là $\alpha\vec{a}$, được xác định như sau :

– Độ dài : $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$.

– Phương : $\alpha\vec{a} // \vec{a}$, $\alpha\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $\alpha > 0$ và $\alpha\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\alpha < 0$.

Vectơ tự do $(-1)\vec{a}$ gọi là *vectơ đối* của vectơ tự do $\vec{a}$, ký hiệu là $-\vec{a}$.

Ở chương trình Trung học đã chứng minh rằng, các hệ thức sau đây luôn luôn thỏa mãn đối với các vectơ tự do thuộc E^n và các số thực $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Phép cộng vectơ tự do có các tính chất sau đây :

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán).

b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp).

c) $\vec{a} + \vec{O} = \vec{a}$ ($\vec{O}$ là phần tử trung hòa).

d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$.

Vậy $(E^n, +)$ là một nhóm Aben.

2) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

3) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

4) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

5) $1.\vec{a} = \vec{a}$.

Ta nhận thấy rằng, các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ đều được thỏa mãn.

Vậy, *tập các vectơ tự do E^n với phép cộng vectơ tự do và phép nhân số thực với vectơ tự do là một không gian vectơ trên trường số thực* $\mathbb{R}$.

Dễ dàng chứng minh được các điều khẳng định sau đây :

– Hệ hai vectơ tự do $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\vec{u_1} \,//\, \vec{u_2}$, tức là $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ là hai vectơ tự do cộng tuyến. Vậy ta có $\dim E^1 = 1$.

– Hệ ba vectơ tự do $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi các vectơ tự do $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ và $\vec{u_3}$ đồng phẳng. Vậy ta có $\dim E^2 = 2$.

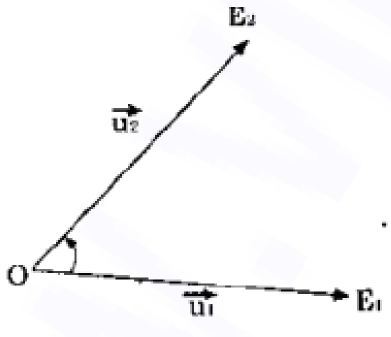
– Trong $\mathbb{R}$ – không gian vectơ E^3 hệ bốn vectơ tự do luôn luôn phụ thuộc tuyến tính. Vậy ta có $\dim E^3 = 3$.

7.1.3. Cơ sở định hướng

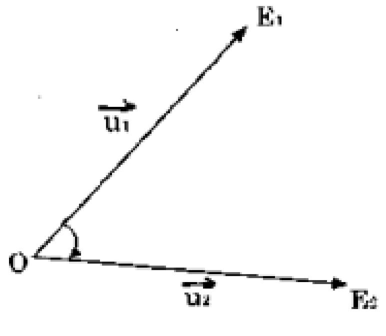
1) Giả sử hệ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$ – không gian vectơ E^2. Ta buộc các vectơ tự do $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ ở điểm O bất kỳ của không gian điểm $Đ^2$:

$$\overrightarrow{OE_1} = \vec{u_1},\ \overrightarrow{OE_2} = \vec{u_2}.$$

Cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ được gọi là *định hướng dương* nếu phép quay ngắn nhất từ $\overrightarrow{OE_1}$ đến trùng với hướng của $\overrightarrow{OE_2}$ ngược chiều kim đồng hồ (hình 7.7).



Hình 7.7



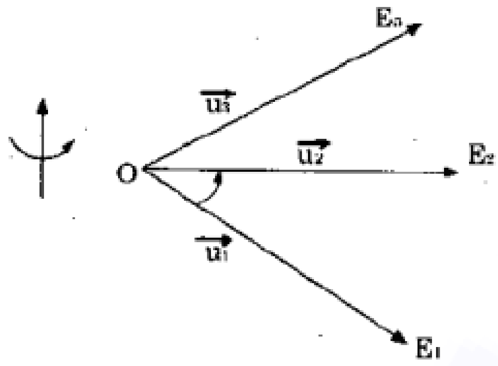
Hình 7.8

Trong trường hợp ngược lại, cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ gọi là *cơ sở định hướng âm* (hình 7.8).

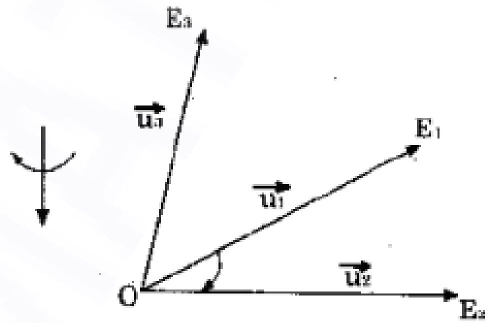
2) Giả sử hệ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ là một cơ sở của R – không gian vectơ E^3. Ta buộc các vectơ tự do của cơ sở đó ở điểm O bất kỳ của không gian $Đ^3$:

$$\overrightarrow{OE_1} = \vec{u}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \vec{u}_2,\ \overrightarrow{OE_3} = \vec{u}_3.$$

Cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ được gọi là *định hướng dương* nếu khi quay cái vặn nút chai theo chiều quay ngắn nhất từ $\overrightarrow{OE_1}$ đến $\overrightarrow{OE_2}$ thì cái vặn nút chai tiến theo hướng $\overrightarrow{OE_3}$ (hình 7.9).



Hình 7.9



Hình 7.10

Trong trường hợp ngược lại, cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ được gọi là *định hướng âm* (hình 7.10).

7.1.4. Tích vô hướng

Định nghĩa : Tích vô hướng của hai vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$ thuộc E^n là một số thực, ký hiệu là $(\vec{a}\ .\ \vec{b})$, được xác định như sau :

*) $(\vec{a}\ .\ \vec{O}) = (\vec{O}\ .\ \vec{a}) = 0$;

*) Nếu $\vec{a} \neq \vec{O}$, $\vec{b} \neq \vec{O}$ thì $(\vec{a}\ .\ \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, (7.1).

trong đó φ là góc giữa hai vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Ở chương trình Toán trung học đã chứng minh được rằng, tích vô hướng của hai vectơ xác định bởi (7.1) có các tính chất sau đây :

1) $(\vec{a}\ .\ \vec{b}) = (\vec{b}\ .\ \vec{a})$;

2) $((\vec{a} + \vec{b}) . \vec{c}) = (\vec{a} . \vec{c}) + (\vec{b} . \vec{c})$;

3) $(\alpha\vec{a} . \vec{b}) = \alpha(\vec{a} . \vec{b})$;

4) $(\vec{a} . \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geq 0$;

5) $(\vec{a} . \vec{b}) = 0$ khi và chỉ khi hoặc $\vec{a} = \vec{O}$, hoặc $\vec{b} = \vec{O}$ hoặc $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ta nhận thấy rằng, tích vô hướng của các vectơ tự do thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ Euclid ở mục 3.6.1. Vậy $\mathbb{R}$ – không gian vectơ E^n là một không gian vectơ Euclid đối với tích vô hướng xác định bởi (7.1). Ta sẽ gọi là không gian Euclid E^n.

Giả sử hệ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid E^3. Với các vectơ tự do :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} ;$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} .$$

Theo Mệnh đề 3.11, ta có :

$$(\vec{a} . \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (7.2)$$

Từ (7.1) và (7.2) ta có các công thức sau đây :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} ; \quad (7.3)$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \quad (7.4)$$

7.1.5. Tích vectơ

Định nghĩa : *Tích vectơ* (hay *tích có hướng*) của vectơ tự do $\vec{a}$ với vectơ tự do $\vec{b}$ là một vectơ tự do, ký hiệu là $\vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, được xác định như sau :

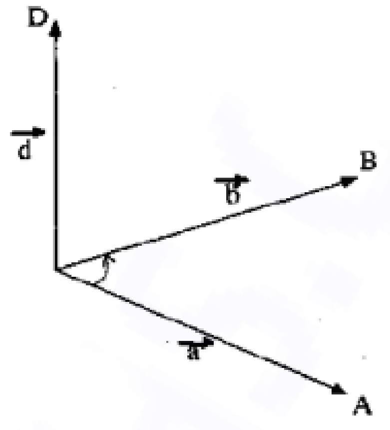
*) $\vec{a} \wedge \vec{O} = \vec{O} \wedge \vec{a} = \vec{O}$.

*) Nếu $\vec{a} \neq \vec{O}$, $\vec{b} \neq \vec{O}$ thì $\vec{d}$ có :

– Độ dài : $\quad |\vec{d}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$.

– Phương : $\vec{d} \perp \vec{a}$ và $\vec{d} \perp \vec{b}$.

– Hướng : Nếu $\vec{d} \neq \vec{O}$ thì $\vec{d}$ có hướng sao cho hệ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ là một cơ sở định hướng dương (hình 7.11).



Hình 7.11

Tính chất : Đối với mọi vectơ tự do của không gian vectơ E^3 và mọi số thực α các hệ thức sau đây luôn luôn thỏa mãn :

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$;

2) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}$ khi và chỉ khi hoặc $\vec{a} = \vec{O}$ hoặc $\vec{b} = \vec{O}$ hoặc $\vec{a} \,//\, \vec{b}$;

3) $\alpha\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \alpha\vec{b} = \alpha\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$;

4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$.

Từ các tính chất trên đây suy ra rằng, nếu hệ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ là một cơ sở trực chuẩn định hướng dương của không gian Euclid E^3 thì ta có :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}\ ;$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{O}.$$

Đối với các vectơ tự do :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

ta có :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\,\vec{i} - (x_2z_1 - z_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (7.5)$$

Hệ thức (7.5) có thể viết dưới dạng sau đây :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

Với quy ước định thức cấp 3 ở vế phải (7.6) khai triển theo hàng thứ nhất.

7.1.6. Tích hỗn tạp

Định nghĩa : *Tích hỗn tạp* (hay *thể tích có hướng*) của ba vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, ký hiệu là $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$, là tích vô hướng vectơ tự do $\vec{a} \wedge \vec{b}$ với vectơ tự do $\vec{c}$.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}.\vec{c}\right) \tag{7.7}$$

Giả sử rằng :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\ ;$$

$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

trong đó $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn định hướng dương của không gian Euclid E^3. Khi đó theo các công thức (7.2), (7.3) và (7.7) ta có :

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{7.8}$$

Tính chất : Theo hệ thức (7.8) và tính chất của định thức ta có :

1) $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$ nếu có ít nhất một vectơ bằng $\vec{0}$, hoặc có hai vectơ cộng tuyến, hoặc ba vectơ đồng phẳng.

2) Tích hỗn tạp không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, tức là :

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right].$$

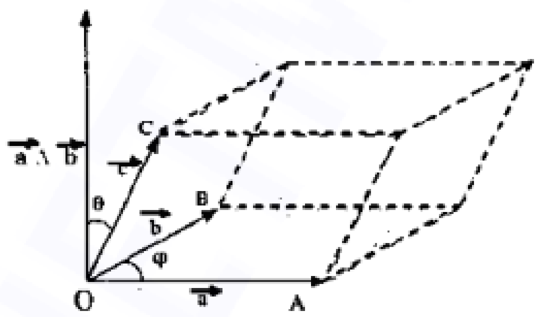
3) Điều kiện cần và đủ để 3 vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác vectơ $\overline{O}$ đồng phẳng là :

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0.$$

4) Thể tích của hình hộp có các cạnh $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$, $\overline{OC} = \vec{c}$ bằng $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$.

Chứng minh : Các điều khẳng định 1), 2) và 3) trực tiếp suy từ hệ thức (7.8) và tính chất của định thức. Ta chứng minh tính chất 4.

Gọi φ là góc giữa hai vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}$ và θ là góc giữa hai vectơ tự do $\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c}$ (hình 7.12).



Hình 7.12

Khi đó hình hộp đang xét có diện tích đáy $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ và đường cao $h = |\vec{c}|\cos\theta$.

Theo định nghĩa, tích vô hướng, tích vectơ và tích hỗn tạp ta có :

$$\left|\left(\vec{a} \wedge \vec{b}.\vec{c}\right)\right| = |\vec{a} \wedge \vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi|\vec{c}|\cos\theta$$

$$= S.h = V.$$

Điều khẳng định được chứng minh.

7.1.7. Tâm tỷ cự

Mệnh đề 7.1 : Giả sử $M_1, ..., M_p$ là một họ điểm cho trước trong không gian $Đ^n$. Khi đó đối với mỗi họ hệ số $\lambda_1, ..., \lambda_p$, thỏa mãn $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ tồn tại duy nhất điểm $G \in Đ^n$ sao cho :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

Chứng minh : Ta chọn điểm $G \in Đ^n$ sao cho

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OM_i}$$

trong đó $k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Ta có :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OM_i} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OG}$$

$$= k\overrightarrow{OG} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}\left(k - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) = \vec{0}.$$

Vậy : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.

Giả sử điểm $G' \in Đ^n$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{G'M_i} = \vec{0}$. Ta có :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{G'M_i} = \vec{0}\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\overrightarrow{GM_i} - \overrightarrow{G'M_i}\right) = \vec{0}\ ;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) \overrightarrow{GG'} = \vec{0}.$$

Vì $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \neq 0$ nên $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$, hay G' = G.

Định nghĩa : Điểm $G \in Đ^n$ thỏa mãn điều kiện Mệnh đề 7.1 được gọi là *tâm tỷ cự* của hệ điểm $M_1, ..., M_p$ đối với họ hệ số $\lambda_1, ..., \lambda_p$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \neq 0$.

Đặc biệt, nếu $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 1$ thì G gọi là *trọng tâm* của hệ điểm $M_1, ..., M_p$.

7.2. HỆ TỌA ĐỘ AFIN

7.2.1. Định nghĩa hệ tọa độ afin

Ta chọn điểm $O \in Đ^n$ và một cơ sở $\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ của không gian vectơ E^n. Khi đó hệ thống $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ được gọi là *hệ tọa độ afin* của không gian điểm $Đ^n$. Điểm O được gọi là *điểm gốc* (hay *mốc*) tọa độ.

Nếu cơ sở $\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid E^n thì hệ thống $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ được gọi là *hệ tọa độ vuông góc* của không gian điểm $Đ^n$.

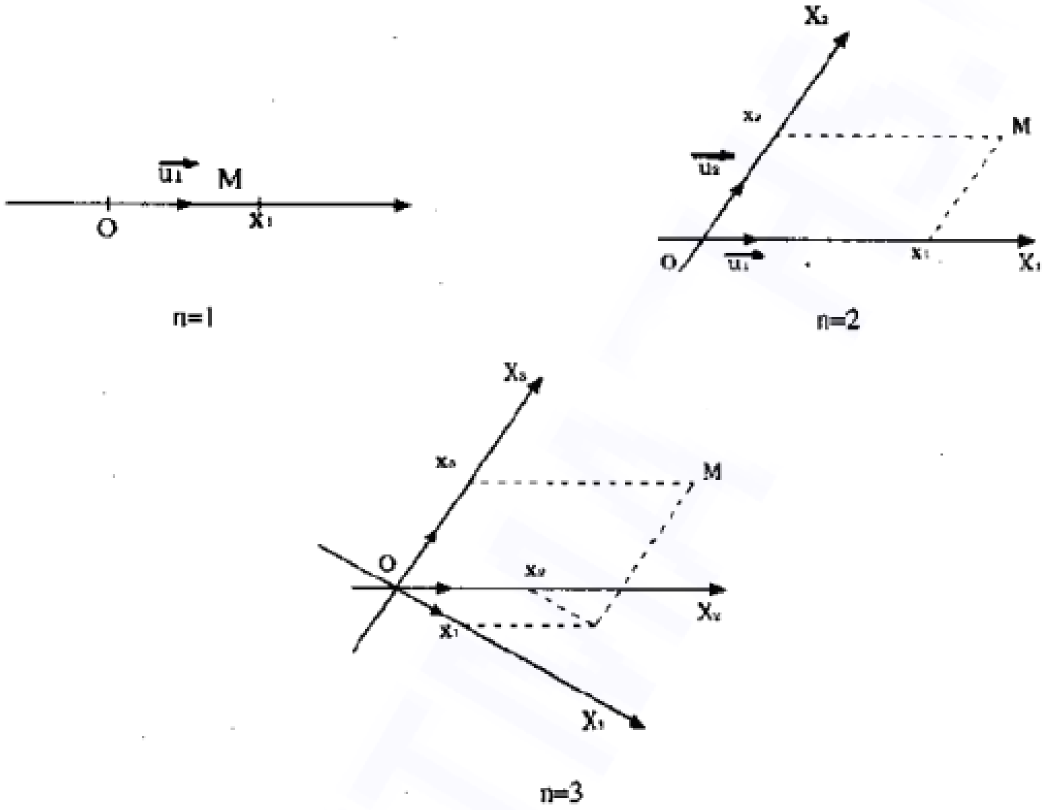
Xét hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ với $\|\overrightarrow{u_i}\| = 1, i = 1, ..., n$.

Ta buộc các vectơ tự do $\overrightarrow{u_i}$, $i = 1, ..., n$ ở điểm gốc O và xét các trục số OX_i có gốc là điểm O, vectơ đơn vị là $\overrightarrow{u_i}$ (hình 7.13).

Khi đó các trục số OX_i được gọi là *hệ trục tọa độ* (hay *hệ quy chiếu*) *afin* tương ứng với hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ thường được ký hiệu là $O.X_1 ... X_n$.

Với mỗi điểm $M \in Đ^n$, đặt tương ứng với vectơ tự do $\overrightarrow{OM} = \vec{u} \in E^n$. Nếu $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i}$ thì bộ số thực $(x_1, ..., x_n)$ được gọi là *tọa độ* của điểm M (tọa độ của vectơ tự do $\vec{u}$) đối với hệ tọa độ afin $\left(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right)$ (hay đối với hệ trục toạ độ $O.X_1...X_n$) và ta viết :

$$M(x_1, ..., x_n)\ (\vec{u}(x_1, ..., x_n)).$$



Hình 7.13

Nếu cơ sở $\left\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ là một cơ sở định hướng dương thì hệ tọa độ afin $\left(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right)$ và hệ trục toạ độ $O.X_1 ... X_n$ gọi là *hệ thuận*. Trong trường hợp ngược lại được gọi là *hệ nghịch*.

7.2.2. Phép biến đổi tọa độ afin

Giả sử $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ và $(O', \overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n})$ là các hệ tọa độ afin của không gian điểm $Đ^n$.

Giả sử $T = (t_{ij})_{n\times n}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\left\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ sang cơ sở $\left\{\overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n}\right\}$.

Ta có :

$$\overrightarrow{u'_i} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\overrightarrow{u_k}. \qquad (a)$$

Đối với mỗi điểm $M \in Đ^n$ ta có :

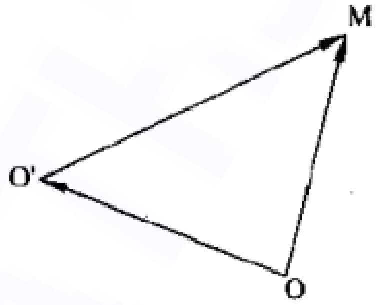
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \qquad (b)$$

Giả sử rằng :

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} b_i\overrightarrow{u_i};$$

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i};$$

$$\overrightarrow{O'M} = \sum_{i=1}^{n} x'_i\overrightarrow{u'_i}.$$



Hình 7.14

Theo (a) và (b) ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i\overrightarrow{u_i} + \sum_{j=1}^{n} x'_j\left(\sum_{k=1}^{n} t_{kj}\overrightarrow{u_k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j\right)\vec{u}_i. \qquad (c)$$

So sánh hệ số của $\vec{u}_i$ ở hai vế của (c), vì hệ $\left\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$x_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j, \ i = 1, ..., n \qquad (7.9)$$

trong đó : $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$; $(x'_1, ..., x'_n)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ afin $(O', \overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n})$.

Công thức (7.9) được gọi là *công thức biến đổi tọa độ* từ hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ sang hệ tọa độ afin $(O', \overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n})$.

Có thể chứng minh được rằng, nếu định thức |T| > 0 thì các cơ sở $\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ và $\{\overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n}\}$ cùng hướng (nghĩa là hai cơ sở cùng định hướng dương hoặc cùng định hướng âm) ; nếu |T| < 0 thì hai cơ sở ngược hướng.

7.3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG

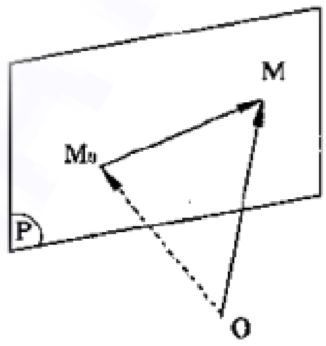
7.3.1. Phương trình mặt phẳng

1. Phương trình tham số của mặt phẳng

Giả sử P là một mặt phẳng cho trước trong không gian $Đ^3$ (hình 7.15).

Đặt : $E_p = \{\vec{u} \in E^3 : \vec{u} // P\}$

dễ thấy tập E_p là một không gian con 2 chiều của không gian E^3. Không gian con E_p được gọi là *không gian chỉ phương của mặt phẳng P*.



Hình 7.15

Giả sử $(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ là một hệ tọa độ afin của không gian $Đ^3$. Chọn điểm $M_0(b_1, b_2, b_3) \in P$, khi đó đối với mỗi điểm $M(x_1, x_2, x_3) \in P$ ta có $\overrightarrow{M_0M} \in E_p$ và :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \sum_{i=1}^{3}(x_i - b_i)\overrightarrow{u_i}. \quad (a)$$

Giả sử hệ $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ là một cơ sở của không gian E_p và :

$$\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\overrightarrow{u_i}, \ j = 1, 2 ;$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \sum_{j=1}^{2} t_j\overrightarrow{v_j}.$$

Ta có :

$$\overrightarrow{M_oM} = \sum_{j=1}^{2} t_j\left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\overrightarrow{u_i}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}t_j\right)\overrightarrow{u_i}. \qquad \text{(b)}$$

So sánh vế phải các hệ thức (a) và (b), vì hệ $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$x_i = b_i + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}t_j \ ; i = 1, 2, 3 \qquad (7.10)$$

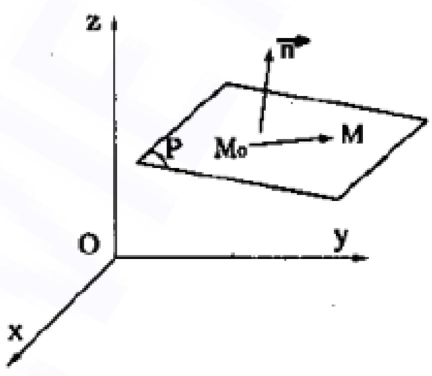
trong đó t_1, t_2 là tham số thực.

Hệ (7.10) được gọi là *phương trình tham số* của mặt phẳng P trong hệ tọa độ afin $\left(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$.

2. Phương trình tọa độ của mặt phẳng

Pháp tuyến của mặt phẳng : Mỗi vectơ tự do $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng P gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng đó.

Giả sử O.xyz là một hệ trục tọa độ vuông góc của không gian $Đ^3$.



Hình 7.16

Giả sử P là một mặt phẳng cho trước với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A, B, C)$ (hình 7.16). Chọn điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in P$, khi đó đối với mọi điểm $M(x, y, z) \in P$ ta có $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_oM}$. Do đó ta có hệ thức :

$$\left(\vec{n}.\overrightarrow{M_oM}\right) = 0.$$

Theo công thức (7.2) ta có :

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0 ;$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_o + By_o + Cz_o) = 0.$$

Đặt $D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$ ta có phương trình :

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (7.11)$$

Phương trình (7.11) gọi là *phương trình tọa độ* của mặt phẳng P trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz.

3. Góc của hai mặt phẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz của không gian điểm $Đ^3$, các mặt phẳng P, Q có phương trình :

$$Ax + By + Cz + D = 0 ;$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng đó là $\vec{n}(A, B, C)$ và $\vec{n}'(A', B', C')$. Ta ký hiệu φ là góc của các vectơ tự do $\vec{n}$ và $\vec{n}'$; θ là góc của hai mặt phẳng P và Q. Ta biết rằng, θ là góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Do đó :

$$\cos\theta = |\cos\varphi|.$$

Theo công thức (7.4), ta có :

$$\cos\theta = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \qquad (7.12)$$

Theo công thức (7.12) ta có : Hai mặt phẳng P, Q vuông góc với nhau khi và chỉ khi :

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

7.3.2. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Phương trình tham số của đường thẳng

Giả sử l là một đường thẳng trong không gian $Đ^3$.

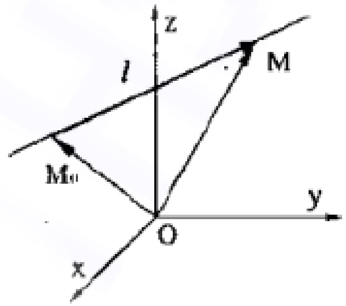
Ta đặt : $\qquad E_l = \left\{\vec{u} \in E^3 : \vec{u} \,//\, l\right\}.$

Dễ thấy rằng, E_1 là một không gian con 1 chiều của không gian vectơ E^3.

Giả sử $\left(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ là một hệ tọa độ afin của không gian điểm $Đ^3$. Chọn một điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ (hình 7.17). Đối với mỗi điểm $M(x, y, z) \in l$ ta có $\overrightarrow{M_0M} \in E_1$.

Giả sử $\{\overrightarrow{\alpha}\}$ là cơ sở của không gian vectơ E_1 và $\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{\alpha}$.

Tham số t phụ thuộc vào vị trí của điểm $M \in l$.



Hình 7.17

Giả sử $\overrightarrow{\alpha} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{u_3}$. Ta có :

$$\overrightarrow{M_0M} = ta\overrightarrow{u_1} + tb\overrightarrow{u_2} + tc\overrightarrow{u_3} \quad \text{(a)}$$

Mặt khác ta có :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}.$$

Do đó :

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\overrightarrow{u_1} + (y - y_0)\overrightarrow{u_2} + (z - z_0)\overrightarrow{u_3}. \quad \text{(b)}$$

So sánh các đẳng thức (a) và (b) ta có :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (7.13)$$

trong đó t là một tham số thực.

Hệ phương trình (7.13) gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng l trong hệ trục tọa độ afin O.xyz. Vectơ $\overrightarrow{\alpha}(a, b, c)$ gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng l.

2. Phương trình tọa độ của đường thẳng

Đường thẳng l trong không gian $Đ^3$ có thể xem là giao tuyến của hai mặt phẳng P_1 và P_2 cắt nhau. Giả sử rằng, trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz các mặt phẳng đó có phương trình :

$$\begin{cases} P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

Vậy, mỗi điểm thuộc đường thẳng *l* có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (7.14).

Hệ phương trình (7.14) gọi là *phương trình tọa độ* của đường thẳng *l* trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz.

Nhận thấy rằng, đường thẳng *l* vuông góc với các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ và $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ của các mặt phẳng P_1 và P_2.

Do đó vectơ chỉ phương của đường thẳng *l* có thể chọn là : $\vec{\alpha} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$.

3. Góc của hai đường thẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz các đường thẳng *l*, *l'* có vectơ chỉ phương tương ứng là $\vec{\alpha}(a, b, c)$ và $\vec{\alpha}'(a', b', c')$. Ta ký hiệu φ là góc của các vectơ tự do $\vec{\alpha}$ và $\vec{\alpha}'$. Gọi θ là góc của hai đường thẳng *l* và *l'*. Vậy θ có thể xác định như sau :

Vì $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ nên ta có :

$$\cos\theta = |\cos\varphi|.$$

Theo (7.4) ta có :

$$\cos\theta = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \quad (7.15)$$

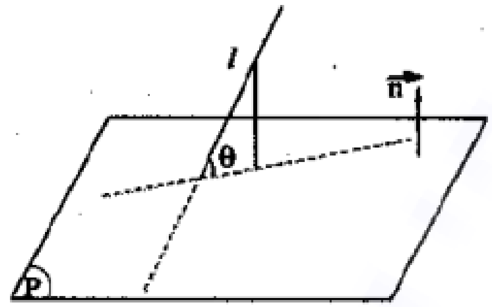
4. Góc của đường thẳng với mặt phẳng

Góc của đường thẳng *l* với mặt phẳng P là góc θ của đường thẳng *l* với hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng P (hình 7.18). Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz đường thẳng *l* có vectơ chỉ phương là $\vec{\alpha}(a, b, c)$ và mặt phẳng P có phương trình tọa độ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ký hiệu φ là góc của vectơ chỉ phương $\vec{\alpha}(a, b, c)$ của đường thẳng *l* với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A, B, C)$ của mặt phẳng P. Ta có : $\sin\theta = |\cos\varphi|$. Do đó góc θ có thể xác định như sau :

$$\sin\theta = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (7.16)$$



Hình 7.18

7.4. TÍNH CÁC KHOẢNG CÁCH

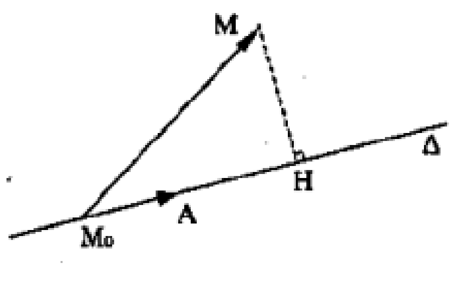
Định nghĩa : Khoảng cách giữa hai tập con X và Y của không gian điểm $Đ^n$, ký hiệu $\zeta(X, Y)$, là một số thực không âm được xác định như sau :

$$\zeta(X, Y) = \inf\left\{\left|\overrightarrow{AB}\right| : A \in X, B \in Y\right\}. \qquad (7.17)$$

7.4.1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz của không gian điểm $Đ^3$ đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{\alpha}(a, b, c)$, đi qua điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$. $M(x, y, z)$ là một điểm bất kỳ thuộc $Đ^3$.

Khoảng cách $\zeta(M, \Delta)$ là độ dài đoạn thẳng vuông góc MH, (hình 7.19). Ta nhận thấy rằng, MH là đường cao của hình bình hành có các cạnh là $\overrightarrow{M_oM}$ và $\overrightarrow{M_oA} = \vec{\alpha}$. Theo định nghĩa của tích vectơ thì số đo diện tích của hình bình hành đó bằng số đo độ dài của vectơ $\overrightarrow{M_oM} \wedge \vec{\alpha}$. Do đó ta có :



Hình 7.19

$$\zeta(M, \Delta) = \frac{\left|\overrightarrow{M_oM} \wedge \vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|}.$$

Theo các công thức (7.3) và (7.5) ta có :

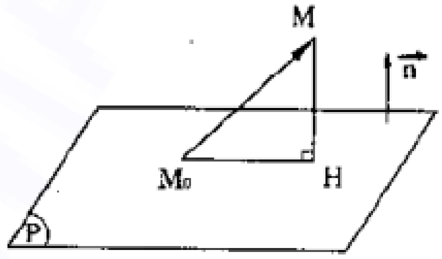
$$\zeta(M, \Delta) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-y_o & z-z_o \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_o & z-z_o \\ a & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad (7.18)$$

7.4.2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz mặt phẳng P có phương trình tọa độ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

M(x, y, z) là một điểm bất kỳ trong $Đ^3$. Khoảng cách $\zeta(M, P)$ là độ dài đoạn thẳng MH (điểm H là chân đường thẳng vuông với mặt phẳng P (hình 7.20). Lấy điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in P$. Ký hiệu φ là góc giữa vectơ $\overrightarrow{M_oM}$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A, B, C)$, xét tam giác vuông M_oMH ta có :



Hình 7.20

$$\zeta(M, P) = \left|\overrightarrow{M_oM}\right| \, |\cos\varphi|.$$

Theo các công thức (7.1) và (7.4) ta có :

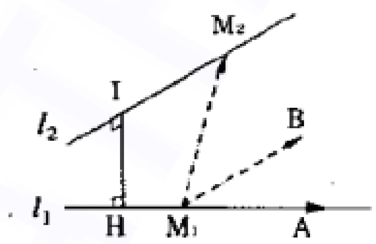
$$\zeta(M, P) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_oM}.\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$= \frac{|A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (7.19)$$

7.4.3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Xét hai đường thẳng chéo nhau l_1 và l_2. Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz đường thẳng l_1 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{\alpha_1}(a_1, b_1, c_1)$ và đi qua điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$; đường thẳng l_2 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{\alpha_2}(a_2, b_2, c_2)$ và đi qua điểm $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (hình 7.21). Khoảng cách $\zeta(l_1, l_2)$ là độ dài đoạn thẳng vuông góc chung IH của hai đường thẳng l_1 và l_2. Ta nhận thấy rằng, IH là đường cao của hình hộp có các cạnh là $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{\alpha_1}$ và $\overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{\alpha_2}$. Theo ý nghĩa hình học của tích hỗn tạp các vectơ thì thể tích hình hộp đó có giá trị bằng $\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}\right]\right|$; còn diện tích đáy của hình hộp bằng $\left|\overrightarrow{\alpha_1} \wedge \overrightarrow{\alpha_2}\right|$. Do đó ta có :



Hình 7.21

$$\zeta(l_1, l_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{\alpha_1} \wedge \overrightarrow{\alpha_2}\right|}.$$

Theo các công thức (7.3), (7.5) và (7.8) ta có :

$$\zeta(l_1, l_2) = \frac{\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}. \qquad (7.20)$$

7.5. ĐƯỜNG BẬC HAI

7.5.1. Nhắc lại các đường cônic

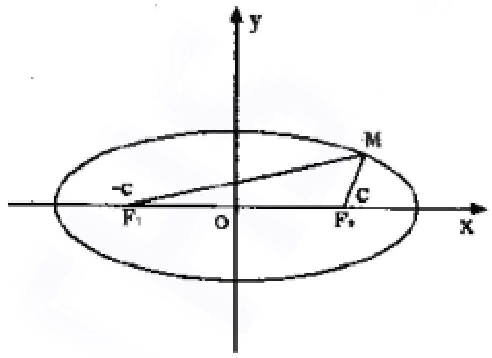
1. Elip

Elip là quỹ tích những điểm trong mặt phẳng có tổng các khoảng cách đến hai điểm cho trước F_1 và F_2 (gọi là *tiêu điểm*) bằng một số không đổi 2a $(a > c = \frac{1}{2}\zeta(F_1, F_2))$; khoảng cách $\zeta(F_1, F_2)$ gọi là *tiêu cự*.

Nếu chọn hệ trục tọa độ vuông góc O.xy sao cho $F_2(-c, 0)$, $F_1(c, 0)$ (hình 7.22) thì phương trình elip có dạng chính tắc (dạng đơn giản) là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.21)$$

trong đó : $b^2 = a^2 - c^2$; a, b được gọi là các *bán trục*.



Hình 7.22

2. Hypecbôn

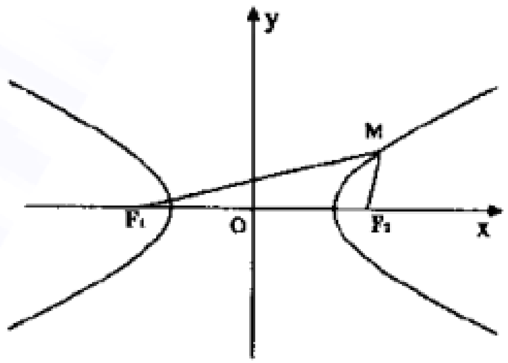
Hypecbôn là quỹ tích những điểm trong mặt phẳng có giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách đến hai điểm cố định F_1 và F_2 (gọi là tiêu điểm) bằng một số không đổi 2a.

Nếu ta chọn hệ trục tọa độ vuông góc O.xy sao cho $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ (hình 7.23) thì phương trình hypecbôn có dạng chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.22)$$

trong đó : $b^2 = c^2 - a^2$.

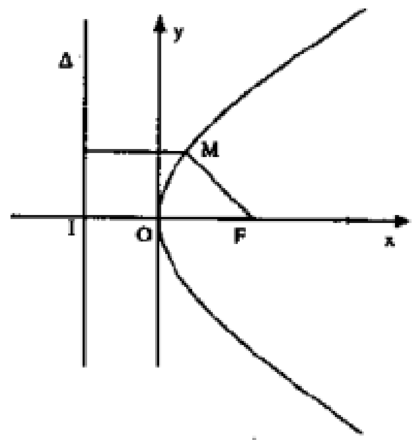
Trục Ox được gọi là *trục thực* ; trục Oy được gọi là *trục ảo* của hypecbôn.



Hình 7.23

3. Parabôn

Parabôn là quỹ tích những điểm trong mặt phẳng cách đều



Hình 7.24

một điểm F cho trước (gọi là *tiêu điểm*) và một đường thẳng Δ cố định (gọi là *đường chuẩn*).

Nếu ta chọn hệ trục tọa độ vuông góc O.xy sao cho $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ và đường chuẩn Δ có phương trình $x = -\frac{p}{2}$ (hình 7.24) thì parabôn có phương trình chính tắc :

$$y^2 = 2px. \tag{7.23}$$

7.5.2. Đưa phương trình của đường bậc hai về dạng chính tắc và phân loại đường bậc hai

Giả sử $(0, \vec{i}, \vec{j})$ là một hệ tọa độ vuông góc của không gian Đ^2.

Định nghĩa : Một đường bậc hai $\mathscr{S}$ là quỹ tích những điểm M(x, y) trong mặt phẳng có tọa độ thỏa mãn phương trình có dạng :

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_o = 0 \tag{7.24}$$

trong đó các hệ số a_{11}, a_{22}, a_{12} không đồng thời bằng 0.

Phương trình (7.24) được gọi là *phương trình tổng quát của đường bậc hai*.

Một bài toán được đặt ra là : Hãy xác định dạng của các đường bậc hai $\mathscr{S}$ cho bởi phương trình tổng quát (7.24). Để trả lời câu hỏi này, đưa phương trình của đường cong về dạng đơn giản.

– *Bước 1*. Khử số hạng chứa tích hai tọa độ ở vế trái của (7.24), xét dạng toàn phương :

$$\omega(\vec{u}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \tag{7.25}$$

trong đó : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Theo Mệnh đề 6.2, trong không gian E^2 có một cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương ω. Giả sử Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ sang cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ (Q là ma trận trực giao). Ta có :

$$\left(\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2}\right) = \left(\vec{i} \quad \vec{j}\right) Q.$$

Ta có phép biến đổi tọa độ tương ứng (phép quay) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Trong cơ sở chính tắc $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\}$ dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(\vec{u}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \qquad (7.26)$$

trong đó : λ_1, λ_2 là các giá trị riêng của ma trận đối xứng $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ và các cột của ma trận chuyển Q là các vectơ riêng của ma trận A.

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y', phương trình của đường cong $\mathscr{L}$ có dạng :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a'_o = 0. \qquad (7.27)$$

– *Bước 2 :* Để đơn giản các số hạng bậc nhất ở vế trái (7.27), nhóm các số hạng theo từng biến ở vế trái, sau đó thực hiện phép biến đổi tọa độ bởi phép tịnh tiến có dạng :

$$\begin{cases} x' = x'_o + X \\ y' = y'_o + Y \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XY, phương trình đường bậc hai cho bởi (7.24) có một trong 9 dạng sau :

Trường hợp 1 : Nếu $\lambda_1\lambda_2 > 0$ thì ta có :

1) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$: Đường $\mathscr{L}$ là elip (đường tròn khi $a^2 = b^2$).

2) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$: Đường $\mathscr{L}$ suy biến về 1 điểm.

3) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$: Đường $\mathscr{L}$ được gọi là elip ảo.

Trường hợp 2 : Nếu $\lambda_1\lambda_2 < 0$, chẳng hạn $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ thì ta có :

4) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$: Đường $\mathscr{L}$ là hypecbôn.

5) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ hay $\left(\dfrac{X}{a} + \dfrac{Y}{b}\right)\left(\dfrac{X}{a} - \dfrac{Y}{b}\right) = 0$: Đường $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng cắt nhau.

Trường hợp 3 : Nếu $\lambda_1\lambda_2 = 0$, chẳng hạn $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, thì ta có :

6) Hoặc $Y^2 = 2pX$: Đường $\mathscr{L}$ là parabôn.

7) Hoặc $Y^2 = b^2$ hay $Y = \pm b$: Đường $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng song song với trục O'X.

8) Hoặc $Y^2 = -b^2$ hay $Y = \pm ib$: Đường $\mathscr{L}$ được gọi là cặp đường thẳng ảo liên hợp song song.

9) Hoặc $Y^2 = 0$: Đường $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng trùng nhau và trùng với trục O'X.

Kết luận : Đường bậc hai $\mathscr{L}$ cho bởi phương trình tổng quát (7.24) chỉ có thể là một trong 9 loại trên. Trong đó các loại 3) và 8) không có ý nghĩa hình học.

Ví dụ : Đường cong $\mathscr{L}$ trong hệ tọa độ vuông góc $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ có phương trình :

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Hãy viết phương trình chính tắc của $\mathscr{L}$, xác định vị trí và vẽ đường cong đó đối với hệ trục tọa độ O.xy.

Bước 1 : Xét dạng toàn phương :

$$\begin{cases} \omega(\vec{u}) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 \\ \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{cases}$$

Ma trận của dạng ω đối với cơ sở trực chuẩn $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có các giá trị riêng : $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.

Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng 9 là $\alpha = (t, 2t)$, $t \neq 0$, với $t = 1$ ta có : $\alpha_1 = (1, 2)$; ứng với giá trị riêng 4 là $\alpha = (-2t, t)$, $t \neq 0$, với $t = 1$ ta có : $\alpha_2 = (-2, 1)$: Các vectơ α_1, α_2 là hệ trực giao. Chuẩn hóa ta có :

$$\beta_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right); \ \beta_2 = \frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Thực hiện phép chuyển cơ sở :

$$\left(\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2}\right) = \left(\vec{i} \quad \vec{j}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

hay
$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \\ \overrightarrow{u_2} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} \end{cases}$$

Tương ứng với phép chuyển cơ sở trên ta có phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ O.x'y' đường cong đã cho có phương trình :

$$9x'^2 + 4y'^2 + 8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 14\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 5 = 0$$

hay
$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Bước 2 : Nhóm các số hạng ở vế trái (b) theo từng biến ta có :

$$9\left(x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) + 5 = 0.$$

Biến đổi để các biểu thức trong ngoặc thành các chính phương ta có :

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{36}{5} + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{20} + 5 = 0,$$

hay
$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Chuyển điểm gốc O về điểm $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$ bởi phép tịnh tiến :

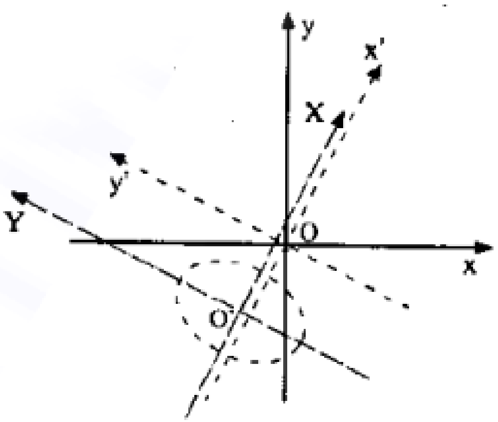
$$\begin{cases} x' = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} + X \\ y' = \dfrac{1}{4\sqrt{5}} + Y \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XY phương trình đường cong đã cho có dạng :

$$9X^2 + 4Y^2 = \frac{9}{4}$$

hay
$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{9}{16}} = 1 \qquad (c)$$

Vậy đường cong đang xét là elip (hình 7.25).



Hình 7.25

Chú ý : Nếu phương trình (7.24) có thể viết dưới dạng :

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0.$$

Khi đó ta có :

– Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ thì $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

– Nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ thì $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng cắt nhau.

7.6. MẶT BẬC HAI

7.6.1. Cấu tạo và phương trình chính tắc của một số mặt bậc hai

1. Mặt trụ bậc hai

Định nghĩa : *Mặt trụ* là một mặt S được tạo bởi một đường thẳng Δ di chuyển trong không gian luôn luôn song song với một phương cho trước và tựa vào một đường cong $\mathscr{L}$ cho trước.

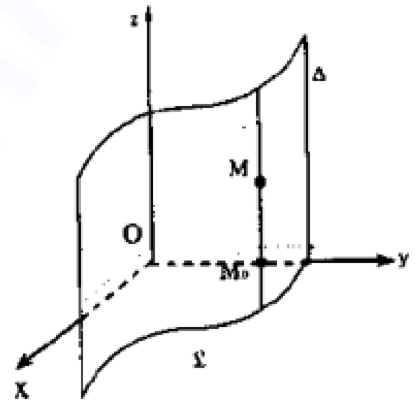
Đường thẳng Δ gọi là *đường sinh* ; đường cong $\mathscr{L}$ gọi là *đường chuẩn*.

Nếu đường chuẩn $\mathscr{L}$ là một đường cong bậc hai trong mặt phẳng P vuông góc với phương của đường sinh thì mặt S được gọi là *mặt trụ bậc hai*.

Phương trình chính tắc của mặt trụ bậc hai :

Nhận xét : Trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz xét mặt S xác định bởi phương trình :

$$f(x, y) = 0. \quad (7.28)$$



Hình 7.26

Giả sử điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in S$ (hình 7.26) ta có : $f(x_o, y_o) = 0$. Khi đó với mọi số thực z, điểm $M(x_o, y_o, z)$ cũng thuộc mặt S vì điểm $M(x_o, y_o, z)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.28). Do đó đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$ song song với trục Oz nằm trong mặt S. Vậy, mặt S cho bởi phương trình (7.28) là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn $\mathscr{L}$ có phương trình :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

Tương tự ta có : Trong không gian $Đ^3$ phương trình $g(y, z) = 0$ xác định mặt trụ có đường sinh song song với trục Ox ; phương trình $h(x, z) = 0$ xác định mặt trụ có đường sinh song song với trục Oy.

Theo nhận xét trên, nếu lần lượt lấy các đường bậc hai elip, hypecbôn, parabôn làm đường chuẩn ta có :

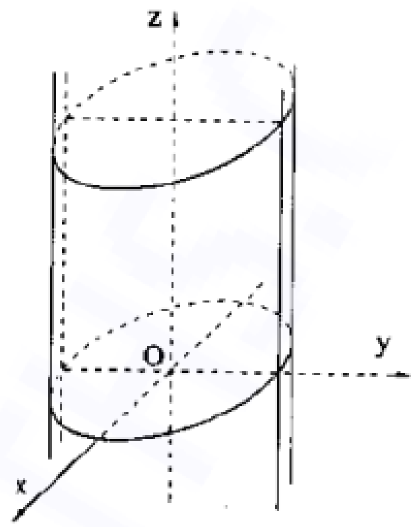
a) Mặt trụ elip

Mặt trụ elip (hình 7.27) có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.30)$$

Đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường elip :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (7.31)$$



Hình 7.27

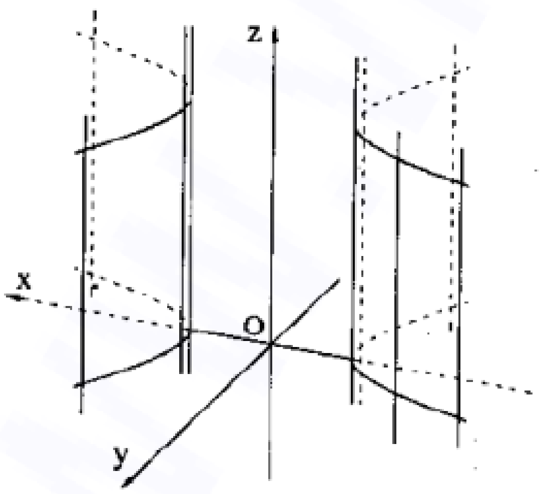
b) Mặt trụ hypecbôn

Mặt trụ hypecbôn (hình 7.28) có phương trình :

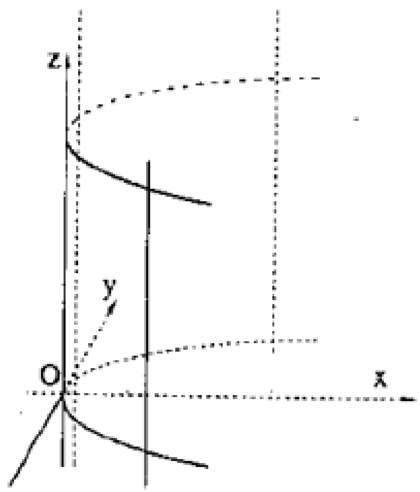
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.32)$$

Đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường hypecbôn :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (7.33)$$



Hình 7.28



Hình 7.29

c) Mặt trụ parabôn

Mặt trụ parabôn có phương trình :

$$y^2 = 2px \tag{7.34}$$

(hình 7.29, với $p > 0$).

Đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường parabôn :

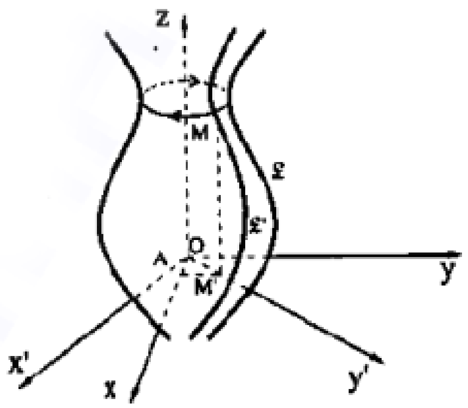
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases} \tag{7.35}$$

2. Mặt tròn xoay bậc hai và biến dạng của nó

Định nghĩa : Khi cho đường cong $\mathscr{L}$ quay xung quanh một đường thẳng Δ thì nó tạo thành một mặt S, mặt đó được gọi là *mặt tròn xoay* (hình 7.30).

Nếu $\mathscr{L}$ là một đường bậc hai, đường thẳng Δ là trục đối xứng của $\mathscr{L}$ thì mặt S gọi là *mặt tròn xoay bậc hai*.

Dưới đây ta giả thiết O.xyz là hệ trục tọa độ vuông góc.



Hình 7.30

Định lý 7.1 : Nếu đường cong $\mathscr{L}$ trong mặt phẳng O.yz có phương trình :

$$\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{7.36}$$

quay xung quanh trục Oz thì mặt tròn xoay S tạo bởi phép quay đó có phương trình là :

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{7.37}$$

Chứng minh : Lấy điểm $M(x, y, z) \in S$. Gọi $M'(x, y, 0)$ là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Xét hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y'z' có trục Oy' trùng với OM', trục Oz' trùng với trục Oz. Gọi $\mathscr{L}'$ là giao tuyến của mặt phẳng Oy'z' với mặt S. Khi ta quay mặt phẳng Oyz xung quanh trục Oz đến trùng với mặt phẳng Oy'z' thì đường cong $\mathscr{L}$ trùng với giao tuyến $\mathscr{L}'$. Do đó trong mặt phẳng Oy'z phương trình của đường cong $\mathscr{L}'$ có dạng f(y', z) = 0. Trong tam giác vuông OMA ta có :

$$y' = OM' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Do đó ta có :

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Vậy, điểm $M(x, y, z) \in S$ có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.37). Dễ thấy rằng, mỗi điểm có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.37) thì thuộc mặt S. Định lý được chứng minh.

Một cách tương tự, khi cho đường cong có phương trình :

$$\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Ox thì ta được mặt tròn xoay có phương trình :

$$g\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0. \qquad (7.38)$$

Khi cho đường cong có phương trình :

$$\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oy thì ta được mặt tròn xoay có phương trình :

$$h\left(\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0. \qquad (7.39)$$

Áp dụng Định lý 7.1 lần lượt cho đường cong $\mathscr{L}$ là elip, hypecbôn, parabôn, cặp đường thẳng cắt nhau quay xung quanh trục đối xứng ta sẽ tạo được mặt bậc hai sau đây :

a) Elipxôit

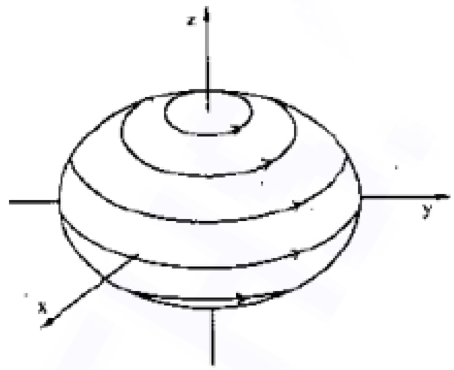
Nếu cho elip có phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *elipxôit tròn xoay* (hình 7.31). Elipxôit tròn xoay có phương trình :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1. \quad (7.40)$$

Bây giờ ta thực hiện một phép co dãn mặt elipxôit tròn xoay (7.40) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{a}{b}y, z\right)$ thì sẽ được một mặt cong có phương trình là :



Hình 7.31

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.41)$$

Mặt có phương trình (7.41) được gọi là *elipxôit.*

b) Hypecbôlôit một tầng

Nếu cho hypecbôn có phương trình :

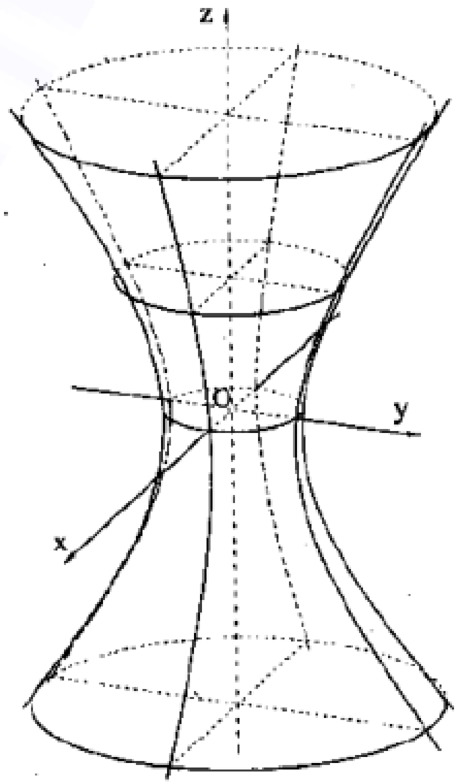
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục ảo Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *hypecbôlôit tròn xoay một tầng* (hình 7.32).

Hypecbôlôit tròn xoay một tầng có phương trình là :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.42)$$

Bây giờ ta thực hiện một phép co dãn mặt hypecbôlôit tròn xoay



Hình 7.32

một tầng (7.42) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{b}{a}y, z\right)$ thì sẽ được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (7.43)$$

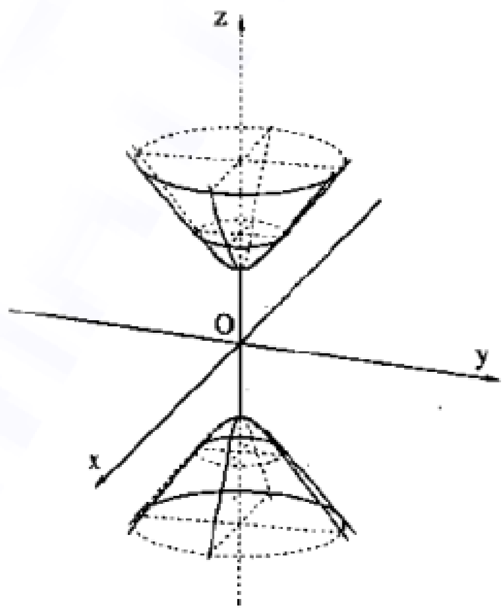
Mặt có phương trình (7.43) được gọi là *hypecbôlôit một tầng.*

c) Hypecbôlôit hai tầng

Nếu cho hypecbôn có phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục thực Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *hypecbôlôit tròn xoay hai tầng* (hình 7.33).



Hình 7.33

Hypecbôlôit tròn xoay hai tầng có phương trình là :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (7.44)$$

Bây giờ ta thực hiện một phép co dãn mặt hypecbôlôit tròn xoay hai tầng (7.44) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{a}{b}y, z\right)$ thì sẽ được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (7.45)$$

Mặt có phương trình (7.45) được gọi là *hypecbôlôit hai tầng.*

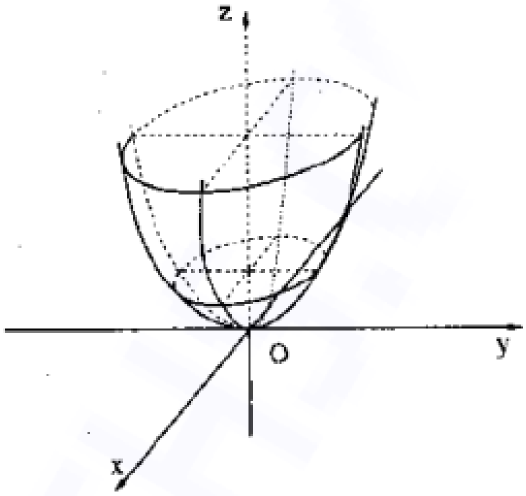
d) Parabôlôit elip

Nếu cho parabôn có phương trình :

$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *parabôlôit tròn xoay* (hình 7.34, với p > 0). Parabôlôit tròn xoay có phương trình là :

$$x^2 + y^2 = 2pz. \qquad (7.46)$$



Hình 7.34

Bây giờ ta thực hiện phép co dãn mặt parabôlôit tròn xoay (7.46) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \sqrt{\frac{p}{q}}y, z\right)$

thì ta được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z\ ;\ pq > 0. \qquad (7.47)$$

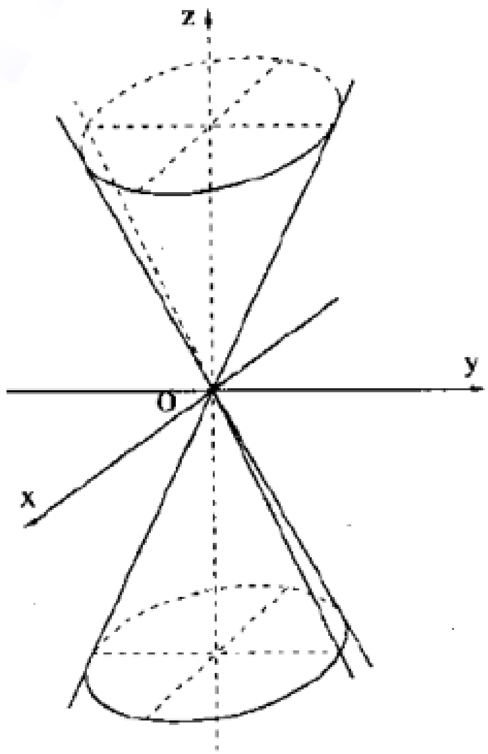
Mặt có phương trình (7.47) được gọi là *parabôlôit elip* có đỉnh O, trục Oz.

3. Mặt nón bậc hai

Khi cho cặp đường thẳng cắt nhau có phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *mặt nón tròn xoay* (hình 7.35) có phương trình là :



Hình 7.35

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (7.48)$$

Bây giờ nếu ta thực hiện một phép co dãn mặt tròn xoay (7.48) theo phương của trục Oy bằng cách dịch mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{a}{b}y, z\right)$ thì ta được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (7.49)$$

Mặt xác định bởi phương trình (7.49) được gọi là *mặt nón bậc hai* có đỉnh O, trục Oz.

4. Parabôlôit hypecbôn (hay mặt yên ngựa)

Parabôlôit hypecbôn là mặt được xác định bởi phương trình :

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z;\ pq<0. \qquad (7.50)$$

Dưới đây sẽ xét hình dạng (ý nghĩa hình học) của mặt parabôlôit hypecbôn.

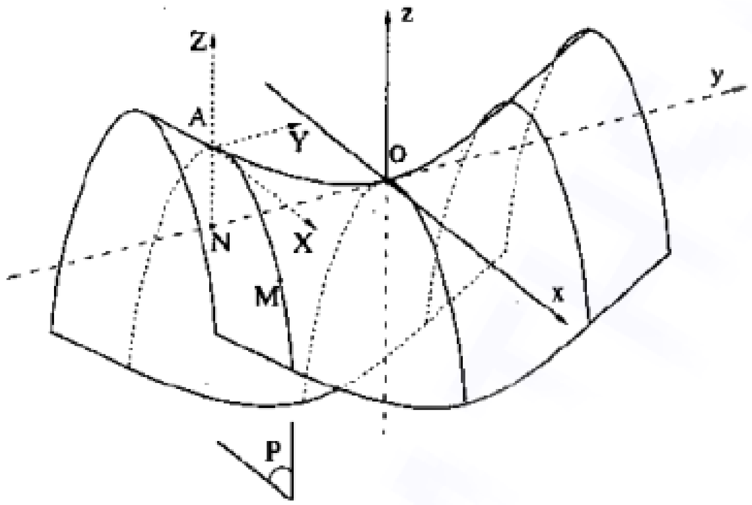
Giả sử trong mặt phẳng O.yz ta có parabôn :

$$\begin{cases} y^2 = 2qz;\ q>0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Trong mặt phẳng O.xz ta có parabôn :

$$\begin{cases} x^2 = 2pz;\ p<0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Bây giờ ta cho parabôn (II) di chuyển trong không gian sao cho mặt phẳng chứa parabôn này luôn luôn song song với mặt phẳng Oxz và đỉnh của parabôn (II) di chuyển trên parabôn (I), trục đối xứng có phương không đổi. Parabôn (II) sẽ tạo nên một mặt S, có hình dạng cái yên ngựa (hình 7.36). Đó là mặt parabôlôit hypecbôn được xác định bởi phương trình (7.50). Thật vậy, giả sử điểm $M(x, y, z) \in S$. Qua điểm M ta dựng mặt phẳng P song song với mặt phẳng Oxz. Mặt phẳng P cắt trục Oy tại điểm N(O, y, O). Giao tuyến của mặt phẳng P với mặt phẳng S là một parabôn có đỉnh A ; điểm A là giao điểm của mặt phẳng P với parabôn (I) nên $A\left(0, y_A, \frac{y_A^2}{2q}\right)$, trong đó : $y_A = y$.



Hình 7.36

Ta thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ :

$$\begin{cases} x = X \\ y = y_A + Y \\ z = \dfrac{y_A^2}{2q} + Z \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - y_A \\ Z = z - \dfrac{y_A^2}{2q} \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

Giao tuyến của mặt S với mặt phẳng P đi qua điểm M(x, y, z) trong hệ trục tọa độ mới A.XYZ có vị trí đúng như vị trí của parabôn (II) trong hệ trục tọa độ O.xyz. Vậy phương trình của giao tuyến đó là :

$$\begin{cases} X^2 = 2pZ \\ Y = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Đối với tọa độ của điểm M(x, y, z) từ các hệ thức (b) và (c) ta có :

$$x^2 = X^2 = 2pZ = 2p\left(z - \frac{y_A^2}{2q}\right) = 2p\left(z - \frac{y^2}{2q}\right).$$

Do đó ta có :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Vậy, điểm M(x, y, z) ∈ S có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.50) và S là mặt parabôlôit hypecbôn.

Tóm lại : Ta có 9 loại mặt bậc hai : Trụ elip (7.30), trụ hypecbôn (7.32), trụ parabôn (7.34), elipxôit (7.41), hypecbôlôit một tầng (7.43), hypecbôlôit hai tầng (7.45), parabôlôit elip (7.47), mặt nón bậc hai (7.49) và parabôlôit hypecbôn (7.50).

7.6.2. Đưa phương trình của mặt bậc hai về dạng chính tắc và phân loại mặt bậc hai

Dưới đây ta luôn luôn giả thiết $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ là một hệ tọa độ vuông góc trong không gian Đ^3.

Định nghĩa : Một mặt bậc hai S là quỹ tích những điểm M(x, y, z) trong không gian Đ^3 với tọa độ thỏa mãn phương trình có dạng sau :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o = 0 \quad (7.51)$$

trong đó các hệ số a_{ij} ; i, j = 1, 2, 3, không đồng thời bằng 0.

Phương trình (7.51) được gọi là *phương trình tổng quát của mặt bậc hai*.

Một bài toán được đặt ra là : Hãy xác định dạng của mặt bậc hai S cho bởi phương trình tổng quát (7.51).

Để trả lời câu hỏi này, cần phải tìm phương trình chính tắc của mặt đang xét.

– *Bước 1 :* Để khử các số hạng chứa tích hai tọa độ ở vế trái (7.51) ta xét dạng toàn phương :

$$\omega(\vec{u}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad (7.52)$$

trong đó : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Theo Mệnh đề 6.2, trong không gian Euclid E^3 có một cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương ω. Giả sử ma trận trực giao Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ về cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$.

Ta có :

$$\{\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2} \quad \overrightarrow{u_3}\} = \{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\}Q.$$

Phép biến đổi tọa độ tương ứng là :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Trong cơ sở chính tắc $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(\vec{u}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2. \tag{7.53}$$

Cần lưu ý $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các giá trị riêng của ma trận đối xứng $A = (a_{ij})_{3\times 3}$; các cột của ma trận Q là các vectơ riêng của A.

Đối với hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y'z' phương trình của mặt bậc hai S cho bởi (7.51) có dạng :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a'_o = 0. \tag{7.54}$$

– *Bước 2 :* Nhóm các số hạng theo từng biến ở vế trái (7.54). Sau đó thực hiện phép biến đổi hệ tọa độ bởi phép tịnh tiến có dạng :

$$\begin{cases} x' = x'_o + X \\ y' = y'_o + Y \\ z' = z'_o + Z \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XYZ phương trình của mặt S cho bởi (7.51) sẽ là một trong 17 dạng sau đây :

Trường hợp 1 : Các giá trị riêng λ_1, λ_2 và λ_3 đều khác 0.

a) Nếu λ_1, λ_2, λ_3 cùng dấu thì ta có :

1. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$: Mặt S là elipxôit.

2. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$: Mặt S được gọi là elipxôit ảo (không có ý nghĩa hình học).

3. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$: Mặt S suy biến về một điểm.

b) Nếu λ_1, λ_2, λ_3 khác dấu, chẳng hạn λ_1, λ_2 khác dấu với λ_3 thì ta có :

4. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$: Mặt S là hypecbôlôit một tầng.

5. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$: Mặt S là hypecbôlôit hai tầng.

6. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$: Mặt S là mặt nón bậc hai.

Trường hợp 2 : Có một giá trị riêng λ_i bằng 0, chẳng hạn $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, còn $\lambda_3 = 0$.

a) Nếu λ_1 và λ_2 cùng dấu thì ta có :

7. Hoặc $\dfrac{X^2}{p} + \dfrac{Y^2}{q} = \pm 2Z$, $pq > 0$: Mặt S là parabôlôit elip.

8. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$: Mặt S là trụ elip.

9. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$: Mặt S được gọi là trụ elip ảo (không có ý nghĩa hình học).

10. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=0$ hay $\left(\dfrac{X}{a}+i\dfrac{Y}{b}\right)\left(\dfrac{X}{a}-i\dfrac{Y}{b}\right)=0$: Mặt S được gọi là cặp mặt phẳng ảo cắt nhau (không có ý nghĩa hình học).

b) Nếu λ_1 và λ_2 khác dấu, chẳng hạn $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ thì ta có :

11. Hoặc $\dfrac{X^2}{p}+\dfrac{Y^2}{q}=\pm 2Z$, $pq<0$: Mặt S là parabôlôit hypecbôn.

12. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=\pm 1$: Mặt S là trụ hypecbôn.

13. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=0$ hay $\left(\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}\right)\left(\dfrac{X}{a}-\dfrac{Y}{b}\right)=0$: Mặt S là cặp mặt phẳng cắt nhau.

Trường hợp 3 : Có hai giá trị riêng λ_i, λ_j bằng 0, chẳng hạn $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=\lambda_3=0$.

Khi đó phương trình (7.54) có dạng :

$$\lambda_1 x'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+2a'_3z'+a'_o=0.$$

a) Nếu $D=\sqrt{a'^2_2+a'^2_3}\neq 0$ thì ta chuyển hệ tọa độ vuông góc O.x'y'z' về hệ tọa độ vuông góc O.x"y"z" bởi phép biến đổi tọa độ sau đây :

$$\begin{cases} x'=x'' \\ y'=\dfrac{a'_3}{D}y''+\dfrac{a'_2}{D}z'' \\ z'=-\dfrac{a'_2}{D}y''+\dfrac{a'_3}{D}z'' \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ O.x"y"z" phương trình của mặt cho bởi (7.51) có dạng :

$$\lambda_1 x''^2+2a'_1x''+2Dz''+a'_o=0.$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ :

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{a'_1}{\lambda_1} + X \\ y'' = Y \\ z'' = -\dfrac{a'_o}{2D} + \dfrac{a'^2_1}{2D\lambda_1} + Z \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ vuông góc O'.XYZ phương trình mặt S có dạng :

14. $X^2 = 2pZ$: Mặt S là trụ parabôn.

b) Nếu D = 0 thì phương trình (7.54) có dạng :

$$\lambda_1 x'^2_1 + 2a'_1 x' + a'_o = 0.$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{a'_1}{\lambda_1} + X \\ y' = Y \\ z' = Z \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XYZ phương trình của mặt S cho bởi (7.51) sẽ là một trong các dạng sau :

15. Hoặc $X^2 = k^2$ hay $X = \pm k$: Mặt S là cặp mặt phẳng song song.

16. Hoặc $X^2 = -k^2$ hay $X = \pm ik$: Mặt S được gọi là cặp mặt phẳng ảo song song (không có ý nghĩa hình học).

17. Hoặc $X^2 = 0$: Mặt S là cặp mặt phẳng trùng nhau.

Kết luận : Bằng các phép biến đổi tọa độ thích hợp, phương trình tổng quát (7.51) của mặt bậc hai có thể đưa về một trong 17 loại trên. Trong đó có 9 loại phương trình của các mặt bậc hai ta đã xét ở mục 7.6.1. Các trường hợp còn lại là phương trình của cặp mặt phẳng cắt nhau, hoặc song song, hoặc trùng nhau, hoặc suy biến về một điểm, hoặc mặt ảo không có ý nghĩa hình học.

Chú ý : Nếu phương trình (7.51) có thể viết dưới dạng :

$$(ax + by + cz + d)(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Khi đó xét ma trận :

$$\overline{A} = \left(A \left|\begin{matrix} d \\ d' \end{matrix}\right.\right) = \left(\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix}\left|\begin{matrix} d \\ d' \end{matrix}\right.\right)$$

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ thì S là cặp mặt phẳng cắt nhau.

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = 1$ thì S là cặp mặt phẳng trùng nhau.

– Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì S là cặp mặt phẳng song song.

7.6.3. Ví dụ

Trong hệ tọa độ vuông góc $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ mặt S có phương trình :

$$x^2 - yz - 4x + 3y + z = 0. \tag{a}$$

Để biết S là mặt gì thì ta phải tìm phương trình chính tắc của nó.

Bước 1 : Tương ứng với phương trình (a) ta xét dạng toàn phương :

$$\omega(\vec{u}) = x^2 - yz. \tag{b}$$

Ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở trực chuẩn $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là :

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Do đó ma trận A có các giá trị riêng là :

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = -\frac{1}{2}$$

Ta xác định ma trận trực giao Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sang cơ sở chính tắc $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ của dạng toàn phương (b). Các cột của ma trận Q là các vectơ riêng đơn vị của ma trận A. Vectơ riêng $\alpha_i = (x, y, z)$ của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_i là nghiệm khác θ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)x = 0 \\ -\lambda_i y - \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \lambda_i z = 0 \end{cases}$$

– Với $\lambda_1 = 1$ ta có :

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)$$

– Với $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ta có :

$$\alpha_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

– Với $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ ta có :

$$\alpha_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vậy ma trận chuyển Q có dạng :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Ta có :

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z' \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z' \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y'z' mặt S có phương trình :

$$x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} z'^2 - 4x' + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z'\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x'^2 - 4x' + \frac{1}{2} y'^2 - \sqrt{2} y' - \frac{1}{2} z'^2 + 2\sqrt{2} z' = 0$$

$$\Leftrightarrow \; (x' - 2)^2 - 4 + \frac{1}{2}\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(z' - 2\sqrt{2}\right)^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; (x' - 2)^2 + \frac{1}{2}\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(z' - 2\sqrt{2}\right)^2 = 1. \qquad \text{(b)}$$

Bước 2 : Thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ bằng cách đưa điểm gốc O về điểm $O'\left(2, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$:

$$\begin{cases} x' = 2 + X \\ y' = \sqrt{2} + Y \\ z' = 2\sqrt{2} + Z \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XYZ, mặt S có phương trình chính tắc :

$$X^2 + \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} = 1. \tag{c}$$

Mặt S là hypecbôlôit một tầng.

7.6.4. Mặt kẻ bậc hai

Định nghĩa : Mặt S được gọi là *mặt kẻ* nếu tại mỗi điểm $M \in S$ có ít nhất một đường thẳng Δ đi qua M sao cho : $\Delta \subset S$.

Như vậy, mỗi mặt kẻ được tạo bởi các đường thẳng. Các đường thẳng đó gọi là *đường sinh của mặt kẻ*.

Theo định nghĩa ta có : *Các mặt trụ bậc hai, mặt nón bậc hai là các mặt kẻ bậc hai.*

Dưới đây sẽ chứng tỏ các mặt hypecbôlôit một tầng, parabôlôit hypecbôn cũng là các mặt kẻ.

1) Xét mặt hypecbôlôit một tầng có phương trình chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Phương trình trên có thể viết dưới dạng :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

hoặc

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \tag{7.55}$$

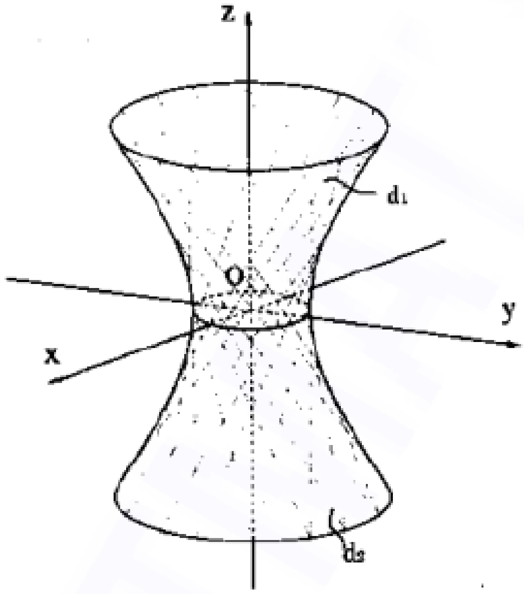
Từ (7.55) trực tiếp suy ra hai họ đường thẳng sau đây nằm hoàn toàn trong mặt hypecbôlôit một tầng đang xét :

$$d_1 : \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{7.56}$$

và $\quad d_2 : \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$ (7.57)

trong đó : λ, μ là các tham số không đồng thời bằng 0.

Vậy hypecbôlôit một tầng là mặt kẻ (hình 7.37).



Hình 7.37

2) Xét mặt parabôlôit hypecbôn có phương trình chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Phương trình trên có thể viết dưới dạng :

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z. \tag{7.58}$$

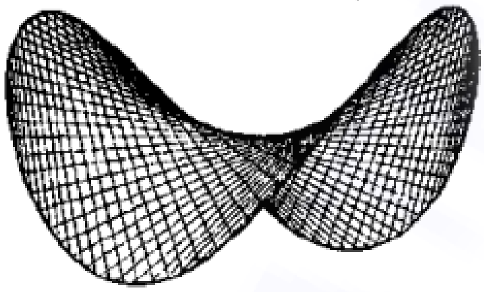
Từ phương trình (7.58) trực tiếp suy ra hai họ đường thẳng sau đây nằm hoàn toàn trong mặt parabôlôit hypecbôn đang xét :

$$e_1 : \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \mu 2z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \lambda \end{cases} \tag{7.59}$$

$$\text{và} \qquad e_2: \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \mu 2z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \lambda \end{cases} \tag{7.60}$$

trong đó : λ, μ là các tham số, $\mu \neq 0$.

Vậy parabôlôit hypecbôn là mặt kẻ (hình 7.38).



Hình 7.38

BÀI TẬP

Đề bài

Xét hệ toạ độ vuông góc $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

7.1. Xác định góc giữa các vectơ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ và $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

7.2. Tính diện tích hình bình hành ABCD có $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

7.3. Tính diện tích tam giác với các đỉnh A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(4, 3, 2).

7.4. Tìm tích hỗn tạp của các vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

7.5. Chứng minh các điểm A(5, 7, –2), B(3, 1, –1), C(9, 4, –4) và D(1, 5, 0) cùng nằm trong một mặt phẳng.

7.6. Tính thể tích hình chóp tam giác có các đỉnh A(2, 2, 2), B(4, 3, 3), C(4, 5, 4), D(5, 5, 6).

7.7. Với giá trị nào của m các vectơ $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vuông góc với nhau.

7.8. Chứng minh rằng, các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không thể vuông góc với nhau nếu : $(\vec{a}.\vec{i}) > 0$, $(\vec{a}.\vec{j}) > 0$, $(\vec{a}, \vec{k}) > 0$, $(\vec{b}.\vec{i}) < 0$, $(\vec{b}.\vec{j}) < 0$, $(\vec{b}.\vec{k}) < 0$.

7.9. Các số thực $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ thỏa mãn các đẳng thức :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = 0 \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0 \end{cases}$$

có thể đồng thời khác 0 được không ?

7.10. Chứng minh rằng :

1) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$;

2) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{O}$.

7.11. 1) Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2) Áp dụng đối với trường hợp $M_1(2, -1, 1)$, $M_2(3, 2, 1)$, $M_3(-1, 3, 2)$.

7.12. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + y + 2z = 3$.

7.13. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $x + 5y + 9z = 13$, $3x - y - 5z = -1$ và điểm $M(0, 2, 1)$.

7.14. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $x + 2y + 3z - 5 = 0$, $3x - 2y - z + 1 = 0$ và chắn các trục Ox, Oz những đoạn bằng nhau.

7.15. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua các điểm $P(0, 2, 0)$, $Q(2, 0, 0)$ và tạo với mặt phẳng $x = 0$ một góc 60°.

7.16. Tìm điểm M trên mặt phẳng $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ sao cho đường thẳng OM lập với các trục tọa độ những góc bằng nhau.

7.17. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $\left(1 + \sqrt{2}\right)x + 2y + 2z = 4$, $x + y + z = -1$ và tạo với mặt phẳng tọa độ Oxy một góc 60°.

7.18. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $2x - y - 12z = 3$, $3x + y - 7z = 2$ và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y + 5z = 1$.

7.19. Lập phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ và qua gốc tọa độ.

7.20. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(0, 2, 1)$ và song song với các vectơ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

7.21. Xác định góc giữa vectơ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ và mặt phẳng :

$$x + y + 2z - 4 = 0.$$

7.22. Viết phương trình tham số của các đường thẳng :

1) Đi qua hai điểm $M_1(2, 0, 1)$, $M_2(-4, 1, 2)$.

2) Là giao tuyến của các mặt phẳng $2x - y + 3z = 1$ và $5x + 4y - z = 7$.

7.23. Từ gốc tọa độ hạ đường vuông góc với đường thẳng :

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = z - 3.$$

Viết phương trình đường thẳng vuông góc đó.

7.24. Hãy xác định tham số λ sao cho các đường thẳng sau đây cắt nhau :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{\lambda} \text{ và } \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}.$$

Tìm giao điểm của chúng.

7.25. Hãy xác định điểm N đối xứng với điểm $M(1, 1, 1)$ qua mặt phẳng $x + y - 2z = 6$.

7.26. Hãy xác định điểm N đối xứng với điểm $M(1, 1, 1)$ qua đường thẳng :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

7.27. Viết phương trình mặt phẳng đi qua đường thẳng :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

và song song với đường thẳng :

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

7.28. Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ trên mặt phẳng $x + y + 2z - 5 = 0$.

7.29. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm M(1, 1, 1) và vuông góc với các vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

7.30. Tìm phương trình các hình chiếu của đường thẳng :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 26 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

trên các mặt phẳng tọa độ.

7.31. Tìm phương trình đường thẳng đi qua điểm M(1, −2, 3) và lập với các trục Ox và Oy các góc 45° và 60°.

7.32. Tìm góc giữa các đường thẳng :

$$\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

7.33. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm M(0, 2, 1) và tạo với các vectơ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{k}$ những góc bằng nhau.

7.34. Chứng minh rằng, trong mặt phẳng Oxy các phương trình sau xác định một cặp đường thẳng :

1) $x^2 + 8xy + 16y^2 - 25 = 0$;

2) $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$.

7.35. Viết phương trình chính tắc rồi vẽ các đường bậc hai có phương trình :

1) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 20x + 4 = 0$;

3) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

3) $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$;

4) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

7.36. Tìm phương trình của mặt tạo bởi đường thẳng Δ di chuyển trong không gian O.xyz luôn luôn đi qua điểm M(0, 0, 1) và tựa vào đường elip :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Đó là mặt gì ?

7.37. Các phương trình sau đây xác định mặt gì ? Dựng các mặt đó.

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;

3) $x^2 - y^2 = 1$; 4) $y^2 = 2x$;

5) $z^2 = y$; 6) $z + x^2 = 0$;

7) $x^2 + y^2 = 2y$; 8) $x^2 + y^2 = 0$;

9) $x^2 - z^2 = 0$; 10) $y^2 = xy$.

7.38. Lập phương trình giao tuyến của mặt nón $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ với các mặt phẳng :

1) $y = 3$; 2) $z = 1$;

3) $x = 0$.

7.39. Tìm phương trình của mặt nhận được khi quay đường thẳng sau đây quanh trục Oz :

$$\begin{cases} 2y + z - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

7.40. Tìm phương trình parabôlôit elip có đỉnh tại gốc tọa độ, trục là trục Oz và cho trước hai điểm M(−1, −2, 2) và N(1, 1, 1) nằm trên mặt đó.

7.41. Tìm phương trình elipxôit có các trục đối xứng là các trục tọa độ và ba điểm A(3, 0, 0), B(−2, 5/3, 0), C$\left(0, -1, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ nằm trên mặt đó.

7.42. Tìm phương trình giao tuyến của các mặt $z = 2 - x^2 - y^2$ và $z = x^2 + y^2$.

7.43. Phương trình $x^2 + z^2 = m(y^2 + z^2)$ xác định những mặt gì khi :

1) $m = 0$; 2) $0 < m < 1$;

3) $m > 1$; 4) $m < 0$;

5) $m = 1$.

7.44. Cho biết ý nghĩa hình học của các phương trình sau đây :

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy = 0$.

7.45. Mặt nón $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ cắt mặt phẳng $y = 2$ theo đường gì ?

7.46. Các phương trình sau đây xác định mặt gì ? Xác định vị trí mặt đó đối với hệ trục tọa độ ban đầu O.xyz.

1) $x^2 = yz$.

2) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$.

3) $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$.

4) $x^2 + y^2 - z^2 - 2y - 2z = 0$.

5) $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$.

6) $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$.

7) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

8) $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.

9) $x^2 - xy - xz + yz = 0$.

10) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 0$.

Đáp số và hướng dẫn

7.1. $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

7.2. $S = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = 49$ (đvdt).

7.3. $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{24}$ (đvdt).

7.4. 33.

7.6. $\frac{7}{6}$.

7.7. $m = 1$.

7.9. Không, vì ba vectơ khác 0 đồng phẳng không thể từng đôi một vuông góc với nhau.

7.10. *Hướng dẫn* : Tính toán hai vế rồi so sánh kết quả.

7.11. 1) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$.

2) $11x + 5y + 13z - 30 = 0$.

7.12. $x - 7y - 2z - 21 = 0$.

7.13. $x + y + z - 3 = 0$.

7.14. $5x + 2y + 5z - 9 = 0$.

7.15. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z\left(\pm\sqrt{2}\right) - 1 = 0$.

7.16. $M(5, 5, 5)$.

7.17. $\sqrt{2}\,x + y + z - 5 = 0$.

7.18. $4x + 3y - 2z - 1 = 0$.

7.19. $(A_1D_2 - A_2D_1)x + (B_1D_2 - B_2D_1)y + (C_1D_2 - C_2D_1)z = 0$.

7.20. $x - y + 2 = 0$.

7.21. $\arcsin\frac{5}{6}$.

7.22. 1) $x = 2 - 6t$, $y = t$, $z = -1 + 3t$;

2) $x = -11t$, $y = 2 + 17t$, $z = 1 + 13t$.

7.23. Chân đường vuông góc $H\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$; phương trình đường thẳng OH : $x = t$, $y = -2t$, $z = 4t$.

7.24. $\lambda = 1$, giao điểm $M(2, -2, 1)$.

7.25. $N(3, 3, -3)$.

7.26. $N\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7}\right)$.

7.27. $x - y - z + 4 = 0$.

7.28. $x = t, y = \frac{5}{3} - t, \ z = -\frac{5}{3}$.

7.29. $x = 1 + 5t, y = 1 - t, z = 1 - 7t$.

7.30. – Trên mặt phẳng Oyz :

$$5y + 5z - 64 = 0, x = 0$$

– Trên mặt phẳng Oxz :

$$5x + 5z - 2 = 0, y = 0$$

– Trên mặt phẳng Oxy :

$$5y - 5x + 62 = 0, z = 0.$$

7.31. $x = 1 + \sqrt{2}t$, $y = -2 + t, z = 3 \pm t$.

7.32. $\varphi = \arccos\frac{20}{21}$.

7.33. $x = t, y = 2 - t, z = 1 - t$.

7.35. 1) Elip với phương trình chính tắc :

$$\frac{5X^2}{4} + 5Y^2 = 1$$

2) Hypecbôn với phương trình chính tắc :

$$X^2 - \frac{Y^2}{9} = 1$$

3) Elip với phương trình chính tắc :

$$4X^2 + \frac{16Y^2}{9} = 1$$

4) Parabôn với phương trình chính tắc :

$$Y^2 = \sqrt{2}X.$$

7.36. Mặt nón đỉnh M(0, 0, 1) trục Oz có phương trình

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{4} = 0.$$

7.37. 1) Trụ tròn ; 2) Trụ elip ;

3) Trụ hypecbôn ; 4) Trụ parabôn ;

5) Trụ parabôn ; 6) Trụ parabôn ;

7) Trụ tròn ; 8) Trục Oz ;

9) Các mặt phẳng phân giác $x = z$ và $x = -z$;

10) Các mặt phẳng $y = 0$ và $y = x$.

7.38. 1) $x^2 + z^2 = 9$, $y = 3$ (đường tròn) ;

2) $y^2 - x^2 = 1$; $z = 1$ (hypecbôn) ;

3) $z^2 - y^2$, $x = 0$ (hai đường thẳng).

7.39. $4x^2 + 4y^2 - (z-2)^2 = 0.$

7.40. $3z = 2x^2 + y^2.$

7.41. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} + z^2 = 1.$

7.42. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ (đường tròn).

7.43. 1) Trục Oy ;

2) Nón có trục Oy và đỉnh tại gốc tọa độ ;

3) Nón có trục Ox và đỉnh tại gốc tọa độ ;

4) Gốc tọa độ ;

5) Hai mặt phẳng cắt nhau theo trục Oz.

7.44. 1) Xác định cặp mặt phẳng có phương trình :

$$x + 2y + 3z - 1 = 0 \text{ và } x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

2) Xác định đường thẳng $x = y = z$.

7.45. Giao tuyến là hypecbôn.

7.46. 1) Mặt nón với phương trình chính tắc :

$$X^2 - \frac{Y^2}{2} + \frac{Z^2}{2} = 0.$$

2) Elipxôit với phương trình chính tắc :

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} + Z^2 = 1.$$

3) Parabôlôit hypecbôn : $X^2 - Y^2 = 2Z.$

4) Nón bậc hai : $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0.$

5) Parabôlôit tròn xoay : $X^2 + Y^2 = 4Z.$

6) Hypecbôlôit một tầng :

$$X^2 + \frac{Y^2}{4} - \frac{Z^2}{4} = 1.$$

7) Hypecbôlôit hai tầng :

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1.$$

8) Parabôlôit hypecbôn :

$$X^2 - \frac{Z^2}{9} = 2Y.$$

9) Hai mặt phẳng $X = Y$ và $X = Z.$

10) Đường thẳng : $X = Y = Z.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Alecxandrov P.S. (1980), *Giáo trình hình học giải tích và đại số tuyến tính,* Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
2. Đankô P.E., Pôpôp A.G., Côgiepnhicôva I.Ia. (1983), *Bài tập toán cao cấp,* Nhà xuất bản Mir, Maxcơva (tiếng Việt).
3. Genphand G.M. (1966), *Bài giảng đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
4. Kostrikin A.I., Manin Ju.I. (1980), *Đại số tuyến tính và hình học giải tích,* MGU, Maxcơva (tiếng Nga).
5. Margier J.P., Vadot C. (1990), *Algèbre linéair, géométrie*, Vuibert, Paris.
6. Modenov P.S., Parkhomenkho A.S. (1976), *Bài tập hình học giải tích*, Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
7. Monier D.C. (1997), *Géometrie*, Dunod - Paru, Paris.
8. Phadeev D.C., Sominxki I.S. (1977), *Tuyển tập các bài tập dại số cao cấp,* Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
9. Praskuriakov I.V. (1967), *Tuyển tập các bài tập đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH – DN
TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
LƯU CHÍ ĐỒNG

Chế bản :
QUANG CHÍNH

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Mã số: 7B663M7–DAI

In 1.500 bản, khổ 16 x 24cm. Tại Nhà in Hà Nam
Số 29 - Đường Lê Hoàn - TX. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 431. Số xuất bản: 17-2007/CXB/74-2217/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2007.