Подготовка к экзамену по математическому анализу

Определения:

1. Предел последовательности:

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного ε существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или $x_n \longrightarrow a$ при $n \longrightarrow \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Поскольку неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то все элементы сходящейся последовательности за исключением конечного их числа при любом $\varepsilon > 0$ лежат в ε-окрестности точки a.

2. Предел функции

-по Коши:

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что если $0 < |x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - a| < \varepsilon$.

- по Гейне:

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из $\mathring{U}(x_0)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

3. Окрестность и ε-окрестность точки x ∈ R; окрестности +∞, −∞ и ∞

Окрестностью $U(x)$ точки x называют любой интервал, содержащий эту точку; ε-окрестностью точки x (при положительном ε) называют интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Окрестностями точек $-\infty$ и $+\infty$ называют соответственно интервалы вида $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число. Иногда рассматривают бесконечность ∞ «без знака». Окрестностью такой бесконечности называют объединение двух бесконечных интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число.

4. Сходящайся, ограниченная, возрастающая, убывающая, невозрастающая, неубывающая, монотонная, фундаментальая последовательности.

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Ограниченная последовательность (*ограниченная с обеих сторон последовательность*) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества X, для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется ***нижней гранью*** данной последовательности.

Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества X, все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется ***верхней гранью*** данной последовательности.

Фундаментальная последовательность (*сходящаяся в себе последовательность*, *последовательность Коши*) — это последовательность элементовметрического пространства, в которой для любого наперёд заданного расстояния найдётся такой элемент, расстояние от которого до любого из следующих за ним элементов не превышает заданного. Для числовых последовательностей понятия фундаментальной и сходящейся последовательностей эквивалентны, однако в общем случае это не так.

5. Бесконечно малая и бесконечно большая функции.

Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

Функция $f(x)$, определённая в некоторой проколотой окрестности точки x_0, называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$. Аналогично определяются бесконечно большие функции и при других предельных переходах.

6. Бесконечно малые функции: одного порядка, несравнимые, эквивалентные. Порядок малости.

Пусть бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ отличны от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$, то говорят, что бесконечно малая $\varphi(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\psi(x)$, а $\psi(x)$ имеет более низкий порядок малости по сравнению с $\varphi(x)$. Записывают это так: $\varphi(x) = o(\psi(x))$, $x \to x_0$. Последняя запись служит лишь для обозначения указанного соотношения между бесконечно малыми. Привычные свойства равенств могут при этом нарушаться. Например, очевидно, $x^2 = o(x)$ и $x^3 = o(x)$ при $x \to 0$. Отсюда, однако, не следует, что $x^2 = x^3$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0$, и на этот раз функция $\psi(x)$ имеет при $x \to x_0$ более высокий порядок малости по сравнению с $\varphi(x)$.

Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = C$, то говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются при $x \to x_0$ бесконечно малыми одного порядка и пишут $\varphi(x) = O(\psi(x))$, обязательно указывая, при каком предельном переходе имеет место это соотношение (в данном случае при $x \to x_0$). В случае $C = 1$, т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми и пишут $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $x \to x_0$. Если при $x \to x_0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела отношения $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, то говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не сравнимы при $x \to x_0$.

7. Порядок роста.

Пусть f(x) и g(x) — бесконечно большие при x → x0 функции. Говорят, что f(x) имеет порядок роста k по сравнению с g(x), если f(x) и (g(x))^k имеют одинаковый порядок роста при x → x0.

8. Приращение функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, и пусть $\Delta x \neq 0$ таково, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Как известно, знаменатель дроби под знаком последнего предела называется приращением аргумента, а числитель — приращением функции. Поэтому говорят также, что производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

9. Непрерывная функции в точке (эквивалентные определения).

Функция f(x) называется непрерывной в точке x0, если для любой последовательности точек {xn} промежутка I , для которой limn→∞ xn = x0, выполняется равенство limn→∞ f(xn) = f(x0).

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, и пусть на X задана числовая функция $f(x)$. Эта функция называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

10. Непрерывная функция на интервале, на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ определена на правосторонней окрестности $[x_0, x_0+\eta)$, $\eta > 0$, точки x_0. Это функция называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$. Аналогично можно определить непрерывность слева: функция $f(x)$ должна быть определена на левосторонней окрестности $(x_0-\eta, x_0]$, $\eta > 0$, точки x_0, и должно выполняться равенство $\lim\limits_{x\to x_0-} = f(x_0)$. Заметим, что оба эти определения эквивалентны данному выше определению непрерывности функции, заданной на произвольном множестве $X \subset \mathbb{R}$. Если I — промежуток числовой прямой, и $f\colon I \to \mathbb{R}$, то функция $f(x)$ называется непрерывной на I, если эта функция непрерывна в каждой точке промежутка I. При этом непрерывность на левом конце промежутка (если он принадлежит I) понимается как непрерывность справа; непрерывность на правом конце (если он принадлежит I) понимается как непрерывность слева. В частности, можно говорить о функциях, непрерывных на отрезке.

11. Точки разрыва: устранимого, I-го рода, II-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 или в проколотой окрестности этой точки. Если данная функция не является непрерывной в точке x_0, то x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$. Говорят также, что функция $f(x)$ терпит разрыв этой точке. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} = f(x_0+0)$, то x_0 называется точкой разрыва первого рода. Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Во всех прочих случаях говорят о разрыве второго рода. Если x_0 — точка разрыва первого рода, и если $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, то такой разрыв называют устранимым. Доопределив функцию $f(x)$ в точке устранимого разрыва x_0 (или изменив ее значение в этой точке, если функция в ней определена), полагая $f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$, получим новую функцию, которая будет непрерывна в точке x_0.

12. Наклонная асимптота.

Пусть снова функция $f(x)$ определена при $x > x_0$, и пусть $f(x) = Ax + B + o(1)$ при $x \to +\infty$. Тогда прямая $y = Ax + B$ называется (правой) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

13. Производная функции в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, и пусть $\Delta x \neq 0$ таково, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to\infty} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Как известно, знаменатель дроби под знаком последнего предела называется приращением аргумента, а числитель — приращением функции. Поэтому говорят также, что производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

14. Одностороння (левая или правая) производная функции.

Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, и если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty$, или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет бесконечную производную, равную соответственно $+\infty$ или $-\infty$. Геометрически наличие бесконечной производной означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке вертикальна.

Если функция $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки x_0, т.е. на полуинтервале $[x_0, x_0+\eta)$, $\eta>0$, то в точке x_0 можно рассмотреть предел

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

который в случае его существования называется правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$. Аналогично можно рассмотреть левую производную $f'_-(x_0)$ для функции, определенной на левосторонней окрестности $(x_0-\eta, x_0]$, $\eta>0$, точки x_0. Левая и правая производные называются односторонними.

15. Дифференцируемая функция.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Эта функция называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение может быть представлено в виде

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\,,\Delta x\to 0\,,$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx.

16. Дифференциал первого порядка.

Дифференциалом $df(x)$ функции $f(x)$ в точке x называется $f'(x)\Delta x$. Эта часть приращения $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ линейна относительно Δx, а при $f'(x)\neq 0$ она является главной частью Δy при $\Delta x\to 0$. Приращение Δx независимой переменной называется дифференциалом независимой переменной и обозначается dx. В таком случае $df(x)=f'(x)dx$, и $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$. Правую часть этого равенства используют также для обозначения производной; при этом $\dfrac{df(x)}{dx}$ следует рассматривать не как дробь, а как единое выражение.

17. Производная n-го порядка.

Тогда производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в точке x по определению есть $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

18. Дифференциал n-ого порядка.

Зафиксировав в равенстве $df(x)=f'(x)\,dx$ дифференциал независимой переменной dx, мы получим функцию от x, для которой можно вычислить дифференциал в точке x. Если при этом считать дифференциал независимого переменного равным его прежнему значению dx, то мы получим дифференциал второго порядка исходной функции: $d^2f(x)=d\left(f'(x)\,dx\right)=\left(f'(x)\,dx\right)'dx=f''(x)\,dx^2$, т.е. $d^2f(x)=f''(x)\,dx^2$. Дифференциал n-го порядка определяется по индукции. Если дифференциал порядка $n-1$ уже определен, то дифференциал n-го порядка по определению есть $d^nf(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)$. При этом в качестве dx берётся то же значение, что и в дифференциале $(n-1)$-го порядка. Докажем по индукции, что $d^nf(x)=f^{(n)}(x)\,dx^n$. При $n=1$ и $n=2$ это равенство справедливо. Пусть при некотором n имеем равенство $d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx$; тогда $d^{n+1}f(x)=d\left(d^nf(x)\right)=d\left(f^{(n)}(x)\,dx^n\right)=\left(f^{(n)}(x)\,dx^n\right)'dx=f^{(n+1)}(x)\,dx^{n+1}$, и по индукции формула $d^nf(x)=f^{(n)}\,dx^n$ доказана.

19. Возрастающая, невозрастающая, убывающая, неубывающая, монотонная, строго монотонная функции.

Функция $f(x)$, определенная на промежутке I, называется неубывающей на этом промежутке, если для любых точек x_1 и x_2 этого промежутка из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Если последнее неравенство заменить на $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, $f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_2) < f(x_1)$, то получим определения соответственно невозрастающей, возрастающей и убывающей функций. Все такие функции называются монотонными, а две последние — строго монотонными.

20. Строгоий и нестрогий локальный минимумы, максимум, экстремум.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0, если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Если последнее неравенство заменить на $f(x) \geqslant f(x_0)$, то мы получим определение локального минимума. А если потребовать, чтобы для всех $x \neq x_0$ выполнялось строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ или $f(x) > f(x_0)$, то получится определение соответственно строгого локального максимума и строгого локального минимума. Во всех этих четырех случаях точка x_0 называется точкой локального экстремума; в двух последних случаях говорят о точке строгого локального экстремума.

21. Стационарная и критическая точки.

Точки, в которых производная функции равна нулю, назы- ваются стационарными точками этой функции. Точки, в которых производная функции равна нулю, бесконечности или не существует, называются критическими точками функ- ции (а также точками, подозрительными на экстремум).

22. Выпуклость (вверх или вниз) графика функции на промежутке, точка перегиба.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Говорят, что функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на этом интервале, если для любой касательной к графику этой функции каждая точка касательной, отличная от точки касания, лежит выше (ниже) точки графика функции с той же абсциссой. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если существует $\delta > 0$ такое, что направления выпуклости функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ различны (т.е. при переходе через точку перегиба направление выпуклости функции меняется на противоположное). Точка $(x_0, f(x_0))$ называется при этом точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Теоремы:

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности.

Теорема (*о единственности предела*). Последовательность может иметь не более одного предела.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Тогда для $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3} > 0$ найдется номер N_1 такой, что при всех $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$; найдется также номер N_2 такой, что при всех $n \geqslant N_2$ выполняется неравенство $|b - x_n| < \varepsilon$. Пусть $n \geqslant \max(N_1,\ N_2)$. Тогда $|a-b| = |a-x_n+x_n-b| \leqslant |a-x_n|+|x_n-b| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon = \dfrac{2|a-b|}{3}$, т.е. $|a-b| < \dfrac{2}{3}|a-b|$ — противоречие. Теорема доказана.

2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности.

Теорема (*об ограниченности сходящейся последовательности*). Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ сходится, и пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда для положительного числа 1 существует номер N такой, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < 1$. Отсюда $|x_n| - |a| \leqslant |a - x_n| < 1$, т.е. $|x_n| < |a| + 1$. Следовательно, $|x_n| \leqslant \max(|x_1|, \ldots, |x_N|,\ |a|+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, и последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Теорема доказана.

Рассмотрим арифметические операции над последовательностями. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда можно составить последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$, называемые соответственно суммой, разностью, произведением и частным исходных последовательностей. В случае частного предполагается, что $\{y_n\}$ состоит из ненулевых чисел.

3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

Теорема (*о локальной ограниченности функции, имеющей предел*). Для функции $f(x)$, имеющей (конечный) предел при $x \to x_0$ существует проколотая окрестность этой точки, на которой данная функция ограничена.

Доказательство. Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тогда для положительного числа 1 найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < 1$. Отсюда

$$|f(x)| = |f(x) - a + a| \leqslant |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|, \quad \text{т.е.} \quad |f(x)| < 1 + |a|,$$

и мы видим, что $f(x)$ ограничена в проколотой δ-окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \delta)$ точки x_0. Теорема доказана.

4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела.

Теорема (*о сохранении функцией знака своего предела*). Пусть предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ положителен. Тогда функция $f(x)$ положительна в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a > 0$. Тогда для положительного числа $\dfrac{a}{2}$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \dfrac{a}{2}$. Это неравенство равносильно такому: $-\dfrac{a}{2} < f(x) - a < \dfrac{a}{2}$; следовательно, $f(x) > \dfrac{a}{2}$, т.е. данная функция положительна при $x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \delta)$. Теорема доказана.

Переформулированные соответствующим образом последние три теоремы остаются в силе и для других рассмотренных выше предельных процессов.

5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве.

Теорема (*о предельном переходе в неравенстве*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0, причем для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то $a \geqslant b$.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы $a < b$, и пусть $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$. Тогда существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Аналогично существует $\delta_2 > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|g(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$. Если $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, и $0 < |x - x_0| < \delta$, то $f(x) < a + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} = b - \varepsilon < g(x)$, т.е. $f(x) < g(x)$ для указанных значений x — противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Если в условии теоремы неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ заменить на строгое, т.е. если $f(x) > g(x)$, то отсюда, вообще говоря, не следует, что $a > b$. Например, при $|x| < 1$, $x \neq 0$, имеем $|x| > x^2$. В то же время $\lim\limits_{x \to 0} |x| = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции.

Теорема (*о пределе промежуточной функции*). Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и пусть существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, равные одному и тому же числу a. Тогда и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

Доказательство. Для произвольного положительного числа ε существуют положительные числа δ_1 и δ_2 такие, что при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$, а при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|h(x) - a| < \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$. Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, выполняется неравенство $a - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < a + \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$, и $|g(x) - a| < \varepsilon$. Таким образом, при $0 < |x - x_0| < \delta$ имеет место неравенство $|g(x) - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$. Теорема доказана.

Заметим, что аналоги доказанных теорем справедливы и для других рассмотренных выше предельных процессов (в том числе и в теории последовательностей).

7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций.

Теорема (*об арифметических операциях над функциями, имеющими предел*). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = ab$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$. Последнее равенство справедливо при $b \neq 0$, а также при условии, что $g(x) \neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Доказательство. Утверждение теоремы можно вывести из доказанных выше теорем об арифметических операциях над сходящимися последовательностями, используя определение предела функции по Гейне. Рассмотрим, например, утверждение о пределе частного. Пусть $\mathring{U}(x_0)$ — проколотая окрестность точки x_0, в которой определены функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, все элементы которой лежат в $\mathring{U}(x_0)$, и при этом $\lim\limits_{x\to x_0} x_n = x_0$. По определению предела функции по Гейне имеем равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, причем $g(x_n) \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. По теореме о пределе частного из теории последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{a}{b}.$$

Поэтому в соответствии с определением предела функции по Гейне $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$. Аналогично можно доказать два оставшихся утверждения теоремы. Теорема доказана.

8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции.

Теорема (*о пределе сложной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 и принимает значения в проколотой окрестности $\mathring{V}(y_0)$ точки y_0, причём $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Тогда, если функция $g(y)$ определена на $\mathring{V}(y_0)$, и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = a$, то для ε найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|g(y) - a| < \varepsilon$. Для положительного числа δ в силу равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ существует число $\eta = \eta(\delta) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \eta$, имеет место неравенство $|f(x) - y_0| < \delta$; при этом в силу того, что $f(x) \in \mathring{V}(y)$, и, следовательно, $f(x) \neq y_0$, выполняется также неравенство $|f(x) - y_0| > 0$. Таким образом, по заданному $\varepsilon > 0$ мы нашли $\eta > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \eta$, выполняется неравенство $0 < |f(x) - y_0| < \delta$; в таком случае для всех указанных x выполняется неравенство $|g(f(x)) - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = a$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема остаётся в силе, если какие-либо из чисел x_0, y_0 или a заменить символами $-\infty, +\infty$ или ∞. Можно также рассмотреть аналоги доказанной теоремы, в которых фигурируют односторонние пределы. Ограничение $f(x) \neq y_0$ можно отбросить, если функция $g(y)$ определена при $y = y_0$, и $g(y_0) = a$.

9. Сформулируйте и докажите теорему о первом замечательном пределе.

Теорема (*о первом замечательном пределе*). Имеет место равенство

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Доказательство. Т.к. функция $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ является чётной, то достаточно доказать равенство $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A, и пусть угол AOB равен x (радиан). Пусть, далее, CA — перпендикуляр к этой оси, C — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда площадь $\triangle OAB$ меньше площади сектора OAB, а площадь этого сектора меньше площади $\triangle OAC$, т.е.

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x \text{ , и}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 . \qquad (1)$$

Чтобы можно было применить теорему о пределе промежуточной функции, достаточно доказать, что $\cos x \to 1$ при $x \to 0+$. Т.к. $0 < \sin x < x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (это следует из доказанного; на деле неравенство верно при всех $x > 0$), то $\sin x \to 0$ при $x \to 0+$. Отсюда следует, что $\sin^2 \dfrac{x}{2} \to 0$ при $x \to 0+$, а поскольку $\cos x = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$, то $\cos x \to 1$ при $x \to 0+$. Поэтому из (1) вытекает требуемое. Теорема доказана.

10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Теорема (*о связи функции, ее предела и бесконечно малой*). Равенство $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = a + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Требуется доказать, что $f(x) = a + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Обозначим $\varphi(x) = f(x) - a$. Тогда из определения предела функции получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| = |\varphi(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, т.е. $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f(x) = a + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$, а т.к. $\varphi(x) = f(x) - a$, то также и неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную.

Теорема (*о произведении бесконечно малой величины на ограниченную*). Пусть в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, причем $f(x)$ ограничена на $\mathring{U}(x_0)$, а $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$. Тогда произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство. Т.к. $f(x)$ ограничена на множестве $\mathring{U}(x_0)$, то существует число c такое, что $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in \mathring{U}(x_0)$. Далее, пусть задано $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{c+1}$ (т.к. $c \geqslant 0$, то $c + 1 \neq 0$) существует $\delta > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{c+1}$. Для указанных x имеем $|f(x) \cdot \varphi(x)| \leqslant c \cdot \dfrac{\varepsilon}{c+1} < \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = 0$, и функция $f(x) \cdot \varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$. Теорема доказана.

12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой.

Теорема (*о связи между бесконечно большой и бесконечно малой*). Пусть функция $\varphi(x)$ отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Эта функция бесконечно мала при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда функция $f(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$ является бесконечно большой (при $x \to x_0$).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, и пусть задано (сколь угодно большое) положительное число E. Возьмём столь малое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon < \dfrac{1}{\mathrm{E}}$; тогда $\dfrac{1}{\varepsilon} > \mathrm{E}$. Т.к. $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$. По условию теоремы $\varphi(x)$ отлична от нуля в проколотой окрестности точки x_0; отсюда $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{\varphi(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon} > \mathrm{E}$, т.е. $|f(x)| > \mathrm{E}$. Поэтому $|f(x)| \to +\infty$ при $x \to x_0$, и $f(x)$ является бесконечно большой при указанном предельном переходе. Необходимость доказана. *Достаточность* доказывается аналогично. Теорема доказана.

13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела.

Теорема (*об использовании эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов*). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции, отличные от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0, и пусть $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to x_0$. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{g(x)} = A$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также равный A.

Доказательство. Имеем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = A\,,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$. Теорема доказана.

14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

Теорема (*о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых*). Бесконечно малые $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ эквивалентны (при $x \to x_0$) тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости при $x \to x_0$ по сравнению с каждой из них.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \to x_0$. Требуется доказать, что разность $\varphi(x) - \psi(x)$ имеет более высокий порядок малости при $x \to x_0$ по сравнению с каждой их функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. По определению эквивалентных бесконечно малых имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$; по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой выполняется равенство $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Отсюда $\dfrac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = \varepsilon(x)$. Т.к. $\varepsilon(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то $\varphi(x) - \psi(x) = o\big(\psi(x)\big)$, $x \to x_0$. Аналогично можно показать, что $\varphi(x) - \psi(x) = o\big(\varphi(x)\big)$ при $x \to x_0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\varphi(x) - \psi(x) = o\big(\psi(x)\big)$, $x \to x_0$. Тогда $\dfrac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = o(1)$, и $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + o(1)$, $x \to x_0$. Через $o(1)$ обозначают бесконечно малую величину, характер стремления которой к нулю неизвестен или не представляет интереса. Из последнего равенства следует, что $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \to x_0$. К такому же выводу можно прийти, рассматривая равенство $\varphi(x) - \psi(x) = o\big(\varphi(x)\big)$, $x \to x_0$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков.

Теорема *(о сумме бесконечно малых разных порядков).* Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \psi(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ функции, и пусть k_i — порядок малости функций $\varphi_i(x)$ относительно $\psi(x)$, $i = 1, \ldots, n$, причём числа $k_1, \ldots, k_n$ попарно различны. Тогда сумма $\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x)$ эквивалентна при $x \to x_0$ слагаемому минимального порядка относительно $\psi(x)$.

Доказательство проведём по индукции. При $n = 1$ нечего доказывать. Пусть при некотором $n \geqslant 1$ утверждение теоремы справедливо, и пусть даны бесконечно малые $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \psi(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Пусть (для определённости) k_{n+1} — минимальное среди чисел $k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}$, а k_n — минимальное среди чисел $k_1, \ldots, k_n$. Тогда по предположению индукции $\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) \sim \varphi_n(x)$, $x \to x_0$. Далее,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} + 1 \right) =$$

$$= 1 + \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = 1 + \lim_{x \to x_0} (\psi(x))^{k_n - k_{n+1}}.$$

Последний предел равен нулю, т.к. $\big(\psi(x)\big)^{k_n - k_{n+1}} \to 0$ при $k_n > k_{n+1}$. Таким образом, $\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x) \sim \varphi_{n+1}(x)$ при $x \to x_0$, и по индукции теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и для бесконечно больших функций: сумма бесконечно больших различных порядков эквивалентна слагаемому наивысшего порядка.

16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций.

Теорема (*о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке. Тогда в точке x_0 непрерывны функции $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$; последнее — при условии, что $g(x)$ отлична от нуля в указанной окрестности точки x_0.

Доказательство вытекает из свойств пределов и определения непрерывной функции. Например, для частного рассматриваемых функций имеем на основании теоремы о пределе частного:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\,.$$

Отсюда непосредственно вытекает непрерывность функции $f(x)/g(x)$ в точке x_0. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично. Теорема доказана.

17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции.

Теорема (*о непрерывности сложной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и принимает значения в окрестности $V(y_0)$ точки $y_0=f(x_0)$, и пусть на $V(y_0)$ определена функция $g(y)$. Тогда, если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то сложная функция $g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство проведём с помощью теоремы о пределе сложной функции (с учётом сделанного там замечания). В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=y_0$, а при $y\to y_0$ имеем $g(y)\to g(y_0)$. Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} g\big(f(x)\big)=g(y_0)=g\big(f(x_0)\big)$, т.е. $g\big(f(x)\big)$ непрерывна при $x=x_0$. При этом требование $f(x)\neq y_0$ в проколотой окрестности точки x_0 здесь можно отбросить, т.к. $g(y)$ определена при $y=y_0$, и $g(y_0)=\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$. Теорема доказана.

18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки.

Теорема (*о сохранении знака непрерывной функции*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и $f(x_0)\neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть для определённости $f(x_0)>0$. Тогда, т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, по теореме о сохранении функцией знака своего предела неравенство $f(x)>0$ будет выполняться также и в некоторой окрестности точки x_0. Теорема доказана.

19.Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функции y = sin x.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Предварительно докажем неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|\,, \tag{2}$$

которое справедливо при всех x. По ходу доказательства теоремы о первом замечательном пределе было доказано неравенство $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. При $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$ такое неравенство также справедливо, т.к. $|\sin x| \leqslant 1$, и $\frac{\pi}{2} > 1$. При $x = 0$ неравенство (1), очевидно справедливо. Осталось рассмотреть случай $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. В этом случае (2) запишется так: $-\sin x \leqslant -x$ или $\sin(-x) \leqslant -x$. Последнее неравенство справедливо, т.к. $-x > 0$. Таким образом, (2) доказано. Теперь можно доказать непрерывность синуса в любой точке x_0. Имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|, \text{ т.е. } |\sin x - \sin x_0| \leqslant |x-x_0|.$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то, взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0| < \delta = \varepsilon$, и непрерывность функции $f(x) = \sin x$ доказана в произвольной точке x_0.

20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке.

Рассмотрим теоремы о свойствах функций непрерывных на отрезке. **Теорема** (*Больцано-Коши*). Если функция определена и непрерывна на некотором отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то эта функция обращается в нуль хотя бы в одной точке данного отрезка.

Следствие (*теорема о промежуточном значении*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и если $f(a) = A$, $f(b) = B$, то эта функция принимает все значения, лежащие на отрезке с концами в точках A и B.

Теорема *(Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции)*. Непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений.

Теорема *(о непрерывности обратной функции)*. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $\big[f(a), f(b)\big]$ определена обратная функция $f^{-1}(y)$, которая непрерывна и возрастает на этом отрезке.

21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 или в проколотой окрестности этой точки. Если данная функция не является непрерывной в точке x_0, то x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$. Говорят также, что функция $f(x)$ терпит разрыв этой точке. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} = f(x_0+0)$, то x_0 называется точкой разрыва первого рода. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Во всех прочих случаях говорят о разрыве второго рода. Если x_0 — точка разрыва первого рода, и если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то такой разрыв называют устранимым. Доопределив функцию $f(x)$ в точке устранимого разрыва x_0 (или изменив ее значение в этой точке, если функция в ней определена), полагая $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$, получим новую функцию, которая будет непрерывна в точке x_0.

22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.

Теорема (*о необходимых и достаточных условиях наличия наклонной асимптоты*). Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = Ax + B$ тогда и только является правой асимптотой графика данной функции, когда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-Ax\big) = B\,.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = Ax + B$ — правая наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда по определению $f(x) = Ax+B+o(1)$, $x \to +\infty$. Отсюда $\dfrac{f(x)}{x} = A + \dfrac{B}{x} + \dfrac{o(1)}{x} \to A$, $f(x) - Ax = B + o(1) \to B$, если $x \to +\infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если $f(x) - Ax \to B$ при $x \to +\infty$, то $f(x) - Ax = B + o(1)$, $x \to +\infty$. Поэтому прямая $y = Ax + B$ есть (правая) наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = A$ здесь не понадобился. Достаточность доказана. Теорема доказана.

23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Теорема (*необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции*). Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$ в этой точке.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Требуется доказать существование $f'(x_0)$. По определению дифференцируемости $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. После деления на Δx получаем: $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1) \to A$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, производная $f'(x_0)$ существует (и равна A). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$, $\Delta x \to 0$. После умножения на Δx получаем: $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(1)\cdot\Delta x$, $\Delta x \to 0$. Очевидно, $o(1)\cdot\Delta x = o(\Delta x)$, поэтому функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что число A в определении дифференцируемости равно $f'(x_0)$. В связи с этой теоремой функцию, имеющую (конечную) производную в некоторой точке, называют дифференцируемой в этой точке. Сам процесс вычисления производной называют дифференцированием функции.

24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции.

Теорема (*о непрерывности дифференцируемой функции.*) Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Отсюда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \big(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\big) = 0$, т.е. $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$. Теорема доказана.

25,26. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций; сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций.

Теорема (*о производной суммы, произведения и частного.*) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда в этой точке дифференцируемы также функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (последняя — при условии $g(x) \neq 0$), причём

Доказательство. Имеем:

$$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big(\big(f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)\big) - \big(f(x) \pm g(x)\big)\Big) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) = f'(x) \pm g'(x)\,.$$

Производная произведения может быть вычислена так:

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) =$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $g(x)$, которая является следствием дифференцируемости: $g(x + \Delta x) \to g(x)$ при $\Delta x \to 0$.

В случае производной частного рассуждаем аналогично

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} =$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}\,.$$

Теорема доказана.

27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции.

Теорема (*о производной сложной функции*). Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ определены в окрестностях соответственно точек x_0 и y_0 и дифференцируемы в этих точках, $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, и $\big(g(f(x))\big)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Доказательство. Функция $f(x)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна в точке x_0. Пусть функция $g(y)$ определена для тех y, для которых $|y - y_0| < \varepsilon$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \varepsilon$, и для таких x имеет смысл сложная функция $g(f(x))$. Таким образом, сложная функция $g(f(x))$ определена в окрестности точки x_0, и можно говорить о её производной в этой точке. Запишем определение дифференцируемости функции $g(y)$ в точке y_0:

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y)\,, \quad \Delta y \to 0.$$

Пусть $\alpha(\Delta y) = \dfrac{o(\Delta y)}{\Delta y}$, если $\Delta y \neq 0$, и $\alpha(\Delta y) = 0$, если $\Delta y = 0$. Очевидно, $\alpha(\Delta y) \to 0$, если $\Delta y \to 0$. Определение дифференцируемости можно переписать так:

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\cdot\Delta y, \quad \Delta y \to 0.$$

При достаточно малом Δx подставим сюда $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда

$$g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'(y_0)\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) + \alpha(\Delta y)\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big)\,.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\big(g(f(x))\big)'\Big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(g'(y_0)\,\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) + \\ &\quad + \lim_{\Delta x\to 0}\big(\alpha(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big)\cdot\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \to 0$, т.к. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ — дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Кроме того, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому последний предел в (1) равен нулю, и мы получаем требуемое равенство:

$$\big(g(f(x))\big)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0)\cdot f'(x_0)\,.$$

Теорема доказана.

28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции.

Теорема (*о производной обратной функции.*) Пусть функция $f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение окрестности $U(x_0)$ точки x_0 на окрестность $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причём обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0. Тогда, если существует $f'(x_0) \neq 0$, то существует также и $(f^{-1})'(y_0)$, причём

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Доказательство. Пусть $y_0 + \Delta y \in V(y_0)$, и пусть $f^{-1}(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$. Далее, $f^{-1}(y_0) = x_0$, и

$$\begin{aligned} &f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x\,, \\ &f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(f^{-1}(y_0 + \Delta y)) - y_0 = y_0 + \Delta y - y_0 = \Delta y\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Если $\Delta y \neq 0$ то и $\Delta x \neq 0$ — это вытекает из того, что отображение $f\colon U(x_0) \to V(y_0)$ взаимно однозначно. Заметим ещё, что из непрерывности функции $f^{-1}(y)$ в точке y_0 и из (2) следует, что если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$. Теперь можно вычислить производную обратной функции:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Теорема доказана.

29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка.

Рассмотрим теперь сложную функцию $f(x(t))$. Дифференциал этой функции можно найти с помощью правила дифференцирования сложной функции: $df(x(t)) = f'(x(t))\,x'(t)\,dt$. Поскольку $x'(t)\,dt = dx(t)$, то имеем также равенство $df(x(t)) = f'(x(t))\,dx(t)$. Если не указывать здесь зависимость от t, то мы вернёмся к прежней форме (1) записи дифференциала: $df(x) = f'(x)\,dx$. Подмеченное свойство называется инвариантностью формы записи дифференциала: в равенстве (1) можно считать x независимой переменной или функцией новой переменной t — в обоих случаях это равенство справедливо.

30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.

Теорема (*Ферма*). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке I и в некоторой внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (или наименьшее) значение на этом промежутке. Тогда, если существует производная $f'(x_0)$, то эта производная равна нулю.

Доказательство. Для определённости будем считать, что в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0\,,$$

т.к. здесь числитель неположителен, а знаменатель положителен. Далее,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0\,,$$

т.к. числитель по-прежнему неположителен, а знаменатель отрицателен. Таким образом, $f'(x_0) \leqslant 0$ и $f'(x_0) \geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. Случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимальное значение рассматривается аналогично. Теорема доказана.

31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

Теорема (*Ролля*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), и пусть $f(a)=f(b)$. Тогда на интервале (a,b) найдётся точка c такая, что $f'(c)=0$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M в точке c_1 и наименьшего значения m в точке c_2. Если $m=M$, то, поскольку, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, функция $f(x)$ постоянна на $[a,b]$ и её производная равна нулю во всех точках интервала (a,b); в качестве точки c, в которой $f'(c)=0$, можно взять любую точку этого интервала. Если же $m<M$, то в силу условия $f(a)=f(b)$ хотя бы одна из точек c_1 или c_2 является внутренней точкой отрезка $[a,b]$, и тогда по теореме Ферма в этой внутренней точке производная функции $f(x)$ равна нулю. Теорема доказана.

32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

Теорема (*Лагранжа*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда на этом интервале существует точка c такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\,.$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), поскольку этими свойствами обладает $f(x)$. Далее $F(a)=f(a)$ и $F(b)=f(a)$ — это проверяется непосредственно. Мы видим, что для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $c\in(a,b)$, для которой

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\,.$$

Отсюда вытекает требуемое равенство. Теорема доказана.

33. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

Теорема (*Коши*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причём $g'(x)$ отлична от нуля в каждой точке этого интервала. Тогда на (a,b) найдется точка c такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Доказательство. Сначала заметим, что $g(b)-g(a)\neq 0$. В самом деле, если бы выполнялось равенство $g(b)=g(a)$, то на интервале (a,b) по теореме Ролля нашлась бы точка ξ, в котрой $g'(\xi)=0$. По условию теоремы такой точки нет. Поэтому $g(b)-g(a)\neq 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a))\,.$$

Легко видеть, что для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $c\in(a,b)$ такая, что

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(c)=0\,.$$

Из этого равенства вытекает требуемое. Теорема доказана.

34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций.

Теорема (*правило Лопиталя раскрытия неопределенностей*). Пусть в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 определены и дифференцируемы функции $f(x)$ и $g(x)$, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,,$$

и $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathring{U}(x_0)$. Тогда если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K\,, \tag{1}$$

то и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K\,, \tag{2}$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$. В результате получим функции, непрерывные в окрестности $U(x_0) = \mathring{U}(x_0) \cup \{x_0\}$ точки x_0. Для этих новых функций оставим прежние обозначения. Заметим, что если $x \neq x_0$, то $g(x) \neq 0$. Если бы было $g(x) = 0$, то, как и при доказательстве теоремы Коши, к отрезку с концами в точках x_0 и x можно было применить теорему Ролля, и тогда нашлась бы точка ξ , в которой $g'(\xi) = 0$. По условию теоремы это невозможно. Поэтому для любого $x \neq x_0$ имеем $g(x) \neq 0$. Пусть $x \neq x_0$, и пусть для определенности $x > x_0$. Для пары функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ выполнены все условия теоремы Коши. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K\,,$$

т.к., очевидно, $c \to x_0$, если $x \to x_0$. Здесь $c \in (x_0, x)$ — точка, существование которой обеспечивается теоремой Коши. Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, и теорема доказана.

35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности.

С помощью правила Лопиталя вычислим несколько важных пределов. Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, и пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{a^x}{x^\alpha}$. Мы имеем здесь дело с неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Преобразуем сначала выражение под знаком предела:

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{\left(a^{1/\alpha}\right)^x}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha$$

Где $b = a^{1/\alpha} > 1$. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b^x}{x}$. Для раскрытия этой неопределенности (вида $\dfrac{\infty}{\infty}$) применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(b^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} b^x \ln b = +\infty\,.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha = +\infty\,.$$

Мы видим, что показательная функция (с основанием большим единицы) растёт быстрее степенной (с любым показателем степени). Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Рассмотрим предел

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a^\beta x}$. И здесь целесообразно предварительно преобразовать выражение под знаком предела:

$$\frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x}\right)^\beta .$$

Вычислим сначала предел выражения в скобках. Для этого надо раскрыть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^{\alpha/\beta}\right)'}{(\log_a x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot x^{(\alpha/\beta)-1}}{\dfrac{1}{x\ln a}} = \frac{\alpha\ln a}{\beta} \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha/\beta} = +\infty .$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x}\right)^\beta = +\infty .$$

Мы видим, что степенная функция (с положительным показателем степени) растет быстрее любой степени логарифма при $x \to +\infty$.

Рассмотрим еще при $0 < a < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ предел $\lim\limits_{x\to0+} x^\alpha \log_a^\beta x$. Здесь мы имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Пусть $x = \dfrac{1}{t}$. Тогда $t \to +\infty$, и мы получаем

$$\lim_{x\to0+} x^\alpha \log_a^\beta x = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-\log_a t)^\beta}{t^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_{a^{-1}}^\beta t}{t^\alpha} = 0$$

в силу предыдущего результата. Таким образом, $\lim\limits_{x\to0+} x^\alpha \log_a^\beta x = 0$.

36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формулой Тейлора называется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k + r_n(x);$$

слагаемое $r_n(x)$ называется остаточным членом. Рассмотрим два варианта формулы Тейлора.

Теорема (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет в этой окрестности производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Тогда для любого $x \in U(x_0)$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)\,!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

где θ — некоторое число из интервала $(0, 1)$.

Доказательство. Пусть $x \in U(x_0)$, и пусть для определенности $x > x_0$. Рассмотрим на отрезке $[x_0, x]$ две функции $\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k\,!} \cdot (x - t)^k$ и $\psi(t) = (x - t)^{n+1}$. Для этих функций имеем $\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!} \cdot (x - x)^k = f(x) - f(x) = 0$,

$$\varphi(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k, \quad \psi(x) = (x - x)^{n+1} = 0, \quad \psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}.$$

Вычислим производные:

$$\varphi'(t) = \Big(f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k\,!} \cdot (x - t)^k\Big)' =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!}\Big(f^{(k+1)}(t) \cdot (x - t)^k - k\, f^{(k)}(t)(x - t)^{k-1}\Big) =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!}(x - t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)\,!} \cdot (x - t)^{k-1}.$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования $l = k - 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)\,!} \cdot (x - t)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l\,!}(x - t)^l = f'(t) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l\,!} \cdot (x - t)^l.$$

Следовательно,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \cdot (x - t)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!}(x - t)^k + f'(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l\,!}(x - t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \cdot (x - t)^n,$$

т.е. $\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \cdot (x - t)^n$.

Далее, $\psi'(t) = -(n+1)(x - t)^n$, и непосредственно видно, что производная $\psi'(t)$ на интервале (x_0, x) отлична от нуля. К паре функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[x_0, x]$ применим теорему Коши. Имеем:

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta(x - x_0))}{\psi'(x_0 + \theta(x - x_0))},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Учитывая результаты проведенных вычислений, получаем отсюда:

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n\,!} \cdot (x - x_0 - \theta(x - x_0))^n \times$$

$$\times \frac{1}{-(n+1)(x - x_0 - \theta(x - x_0))^n} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)\,!},$$

т.е.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)\,!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы при x > x0. При x < x0 рассужде- ния аналогичны; если x = x0, то утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков до n-го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)\,,\ x \to x_0\,.$$

Доказательство. Равенство, которое требуется доказать, означает, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0\,.$$

Мы имеем здесь дело с неопределенностью $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, применим $n - 1$ раз правило Лопиталя

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)\,!} \cdot (x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)\,!} \cdot (x - x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n\,!(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n\,!} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0\,,$$

т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0)$. Теорема доказана.

38. Выведите формулу Маклорена для функции y = e^x с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)\,!} \cdot x^{n+1}\,, \quad 0 < \theta < 1$$

39. Выведите формулу Маклорена для функции y = sin x с остаточным членом в форме Лагранжа.

Если $f(x) = \sin x$, то

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right),\ f^{(k)}(0) = \sin k \cdot \frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^n\,, \text{ если } k = 2n+1\,, \\ 0\,, \text{ если } k = 2n\,, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Если при составлении формулы Маклорена учесть слагаемые, содержащие производные до $2n$-го порядка включительно, то остаточный член в форме Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{\sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)\,!} \cdot x^{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{\cos\theta x}{(2n+1)\,!} \cdot x^{2n+1}\,.$$

Поэтому

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,!} + (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)\,!} \cdot x^{2n+1}\,, \quad 0 < \theta < 1, \quad \text{и}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,!} + o(x^{2n})\,, \quad x \to 0\,.$$

40. Выведите формулу Маклорена для функции y = cos x с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right),\ f^{(k)}(0) = \cos k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^n\,, \text{ если } k = 2n\,, \\ 0\,, \text{ если } k = 2n+1\,, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

При составлении формулы Маклорена учтем производные $f^{(k)}(0)$ до $k = 2n+1$ включительно; при этом остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$\frac{\cos(\theta x + (n+1)\,\pi)}{(2n+2)\,!} \cdot x^{2n+2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\cos\theta x}{(2n+2)\,!} \cdot x^{2n+2}\,,$$

и мы получаем такие формулы

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\theta x}{(2n+2)\,!} \cdot x^{2n+2}$$

41. Выведите формулу Маклорена для функции y = ln(1 + x) с остаточным членом в форме Лагранжа.

Для логарифмической функции $f(x) = \ln(1+x)$ имеем $f(0) = \ln 1 = 0$;

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)\,!}{(1+x)^k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

42. Выведите формулу Маклорена для функции y = (1 + x)^α с остаточным членом в форме Лагранжа.

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$. Здесь производная порядка k вычисляется по формуле $f^{(k)}(x) = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$; при $x = 0$ имеем $f^{(k)}(0) = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$. Поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k\,!} \cdot x^k + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)\,!} \times$$
$$\times\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}\,, \quad 0 < \theta < 1\,.$$

43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции.

Теорема (*необходимые и достаточные условия монотонности функции*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех точках этого промежутка за исключением, быть может, конечного их числа. Для того, чтобы эта функция была неубывающей на промежутке I, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна всюду, где она определена.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ не убывает на промежутке I. Тогда в точке $x \in I$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

$$\text{т.к.} \quad f(x+\Delta x) - f(x) \geqslant 0, \quad \text{и} \quad \Delta x > 0.$$

Если x — правый конец промежутка I, причём $x \in I$, то следует взять $\Delta x < 0$; результат будет тем же. Таким образом, $f'(x) \geqslant 0$, и необходимость доказана; заметим, что непрерывность функции $f(x)$ здесь не понадобилась.

Достаточность. Пусть во всех точках промежутка I, в которых $f(x)$ дифференцируема, выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, и пусть x_1 и x_2, $x_2 > x_1$, — произвольные точки этого промежутка. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (x_1, x_2), то, применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0, \quad \text{т.е.} \quad f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

Если же на интервале (x_1, x_2) имеются точки $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < x_2$, в которых производная функции $f(x)$ не существует, то можно применить теорему Лагранжа к каждому из отрезков $[x_1, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_n, x_2]$. В результате, как и выше, получим $f(x_1) \leqslant f(\xi_1) \leqslant f(\xi_2) \leqslant \ldots \leqslant f(\xi_n) \leqslant f(x_2)$, т.е. $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Мы видим, что $f(x)$ и в самом деле не убывает на промежутке I. Достаточность доказана. Теорема доказана.

44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции.

Можно доказать аналогичную теорему и для невозрастающей функции $f(x)$; в этом случае (при выполнении прочих условий теоремы) надо потребовать, чтобы производная $f'(x)$ была неположительной всюду, где она определена.

45. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции.

Теорема (*достаточные условия возрастания функции на промежутке*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех его точках за исключением, быть может, конечного их числа. Если производная $f'(x)$ неотрицательна всюду, где она определена, и не равна тождественно нулю ни на одном интервале $I_1 \subset I$, то функция $f(x)$ возрастает на I.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $f(x)$ не убывает на I. Пусть для некоторых точек x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, этого промежутка $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда для любой точки $x \in (x_1, x_2)$ имеем $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Это означает, что функция $f(x)$ постоянна на (x_1, x_2), и, следовательно, $f'(x)$ тождественно равна нулю на этом интервале, что противоречит условиям теоремы. Поэтому на деле $f(x_1) \neq f(x_2)$, а тогда $f(x_1) < f(x_2)$, и функция $f(x)$ возрастает на I. Теорема доказана.

46. Сформулируйте и докажите достаточное условие убывания дифференцируемой функции.

Аналогичная теорема справедлива и в отношении убывающих функций. Надо только в условиях теоремы неотрицательность производной заменить на неположительность.

47. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной).

Теорема (*первая теорема о достаточном условии наличия экстремума*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$ этой точки. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, а если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через x_0, то функция $f(x)$ имеет в этой точке строгий локальный максимум. Если же $f'(x)$ сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0, то экстремума в этой точке нет.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение теоремы. Если $f'(x)<0$ при всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$, то на полуинтервале $(x_0-\delta,\ x_0]$ функция $f(x)$ убывает, и для любого $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ имеем по теореме о достаточных условиях убывания функции неравенство $f(x)>f(x_0)$. На полуинтервале $[x_0,\ x_0+\delta)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x_0)<f(x)$ для всех $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$. Мы видим, что x_0 и в самом деле есть точка строгого локального минимума. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы. В случае последнего утверждения функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает на интервале $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ в зависимости от знака производной $f'(x)$; экстремума в точке x_0 в обоих случаях нет. Теорема доказана.

48. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной).

Теорема (*вторая теорема о достаточном условии наличия экстремума*). Пусть в точке x_0 у функции $f(x)$ существуют все производные до n-го порядка включительно, причем $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда, если n четно, и $f^{(n)}(x_0)>0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Если n четно, и $f^{(n)}(x_0)<0$, то в точке x_0 строгий локальный максимум. Если n нечетно, то экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство. Запишем для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано; в силу условия $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ имеем такое равенство:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0.$$

Отсюда

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x))\cdot(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где $$\alpha(x)=n!\frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n}\longrightarrow 0 \text{ при } x\to x_0.$$

Пусть теперь n четно, и $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда

$$\lim_{n\to x_0}(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x))=f^{(n)}(x_0)>0,$$

и по теореме о сохранении функцией знака своего предела существует проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 такая, что $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)>0$ для всех $x\in\mathring{U}(x_0)$. Далее, т.к. n четно, то также и $(x-x_0)^n>0$ для указанных x. Поэтому из (1) следует, что для всех $x\in\mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, т.е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Пусть n нечетно, и пусть для определенности $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда, как и выше, найдется проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0)$ такая, что для любого $x\in\mathring{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)>0$. Поскольку n нечетно, то при $x<x_0$ имеем неравенство $(x-x_0)^n<0$, а при $x>x_0$ — неравенство $(x-x_0)^n>0$. Поэтому из (1) получаем, что при $x<x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, а при $x>x_0$ — неравенство $f(x)>f(x_0)$, если, конечно, $x\in\mathring{U}(x_0)$. Мы видим, что экстремума в точке x_0 нет. К такому же выводу мы придем, если предположим, что $f^{(n)}(x_0)<0$. Теорема доказана.

49. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции.

Теорема (*достаточные условия выпуклости функции*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b), причем в каждой точке $x \in (a,b)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ выпукла вниз на указанном интервале. Если же во всех точках интервала (a,b) вторая производная $f''(x)$ отрицательна, то функция $f(x)$ выпукла вверх на этом интервале.

Доказательство. Докажем лишь первое утверждение теоремы (второе доказывается аналогично). Рассмотрим касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$. Уравнение такой касательной, как известно, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Пусть для определенности $x_0 < x < b$. Тогда разность ординат точки касательной $(x,\ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ и точки графика $(x, f(x))$ равна $\Delta y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Поэтому $\Delta y = (f'(x_0) - f'(c))(x - x_0)$, $c \in (x_0,\ x)$. Применим еще раз теоремму Лагранжа: $\Delta y = -f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $c_1 \in (x_0, c)$. Здесь $f''(c_1) > 0$, $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$, поэтому $\Delta y < 0$, и точка касательной лежит ниже соответствующей точки графика функции. Аналогично можно доказать это утверждение и в случае $a < x < x_0$. Таким образом, точки касательной лежат ниже соответствующих точек графика функции, и функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a,b). Теорема доказана.

50. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба.

Теорема (*необходимые условия наличия точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если x_0 — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) \neq 0$, и пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 существует окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, этой точки такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности. Тогда на обоих интервалах $(x_0 - \delta,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке x_0. Поэтому на деле $f''(x_0) = 0$, и теорема доказана.

Как и в случае точек экстремума условие $f''(x_0) = 0$ лишь необходимо для наличия перегиба в соответствующей точке. Достаточным это условие не является, как показывает пример функции $y = x^4$. Здесь $y''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$, однако эта функция выпукла вниз на интервале $(-\infty, \infty)$ и не имеет перегиба при $x = 0$.

51. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба.

Теорема (*первое достаточное условие наличия точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta > 0$, точки x_0 и непрерывна в указанной точке. Тогда если в соответствующей проколотой окрестности $(x_0-\delta)\cup(x_0+\delta)$ функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 есть точка перегиба функции $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности вторая производная $f''(x)$ положительна при $x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ и отрицательна при $x \in (x_0,\ x_0+\delta)$. Тогда на $(x_0-\delta,\ x_0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x_0,\ x_0+\delta)$ выпукла вверх, т.е. при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема (*второе достаточное условие наличия точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке x_0, причем $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f'''(x_0) > 0$. Тогда

$$f'''(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0-} \frac{f''(x)}{x - x_0}.$$

Выражение $\dfrac{f''(x)}{x - x_0}$ в некоторой левосторонней проколотой окрестности $(x_0 - \delta_1,\ x_0)$, $\delta_1 > 0$, должно иметь знак своего предела $f'''(x_0)$, т.е. $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, а тогда (т.к. $x - x_0 < 0$) выполняется неравенство $f''(x) < 0$. Аналогично

$$f'''(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f''(x)}{x - x_0},$$

и $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ при $x \in (x_0,\ x_0+\delta_2)$, $\delta_2 > 0$, т.е. $f''(x) > 0$ при указанных x.

Мы видим, что вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. По предыдущей теореме x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.