Вопрос - [1]

- Функция F(x) называется **первообразной** функции f(x) в интервале (a, b), если F(x) дифференцируема и F'(x)=f(x) в интервале (a, b).
- **Свойства первообразной**:
  1) Если F(x) – первообразная функции f(x) в (a, b), то F(x)+C – первообразная функции f(x) в (a, b).
  2) Если функция Φ(x) дифференцируема в (a, b) и Φ'(x)=0 для ∀x∈(a, b), то Φ(x)=const в (a, b).
  3) Основная теорема о первообразной: Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - ∀ первообразные функции f(x) в (a, b), то $F_1(x)$ - $F_2(x)$ = const.
  4) Если $F_1(x)$ – одна из первообразных функции f(x) в (a, b), то ∀ первообразная F(x) функции f(x) имеет вид F(x)= $F_1(x)$+c в (a, b).
  5) О существовании первообразной: Если функция f(x) кусочно непрерывна в (a, b), то она имеет первообразную в этом интервале.
- **Неопределенным интегралом** называется множество всех первообразных функции f(x)
- **Свойства неопределенного интеграла**:
  1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
  2) $d\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)dx$
  3) $\int dF(x) = F(x) + C$
  4) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C, A = const$
  5) $\int\big(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\big)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx + C$
  6) Об инвариантности неопределенного интеграла: Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$- ∀ дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$. Интеграл не изменяется, если вместо переменной подставить некоторую дифференцируемую функцию.

Вопрос - [2]

Рассмотрим многочлен с действительными коэффициентами $P_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

$P_n = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{e_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{e_2} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{e_m}$ – ***разложение многочлена*** *на линейные и квадратичные множители (k_i – кратность действительного корня x_i, e_j – кратность пары комплексно-сопряженных корней)*

∀ рациональная функция $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$. Если $m \geq n$, то дробь называется **неправильной**, если $m < n$, то **правильная**. **Простейшими (элементарными) дробями** называются дроби вида: 1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$; 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$;

- **Теорема о разложении правильной рациональной дроби на простейшие**: ∀ правильную рациональную дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ $(m < n)$ можно представить единственным образом в виде суммы простейших дробей$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{a_0}\Big(\frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{B_1}{(x-x_1)^{k_s}} + \cdots + \frac{B_{k_s}}{(x-x_1)} + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{e_1}} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{e_1-1}} + \cdots + \frac{C_{e_1}x+D_{e_1}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \cdots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_mx+q_m)^{e_m}} + \cdots + \frac{M_{e_m}x+N_{e_m}}{(x^2+p_mx+q_m)}$, где $A_1 \dots M_{em} \dots N_{em}$ – постоянные коэффициенты, называемые коэффициентами разложения. (1)
- **Методы нахождения коэффициентов разложения**:
  1) Приводим к общему знаменателю равенство (1) и, отбрасывая знаменатель, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x.
  2) Частный случай: Если $P_n = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ имеет кратные корни, то, добавляя $x=x_1, x=x_2 \dots$,получим алгебраическое уравнение для нахождения коэффициентов разложения.
- **Интегрирование простейших дробей**:
  1) $\int \frac{Adx}{x-a} = Aln|x - a| + C$

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + C$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left|x+\frac{p}{2}=t\right| = \cdots = \frac{M}{2}ln|x^2+px+q| + (N-\frac{Mp}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{2x+p}{2a} + C$

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \left[x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^4}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2 = t^2+a^2\right] =$
$\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^m}dt = \cdots$

5) $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \begin{vmatrix} u=(t^2+a^2)^{-m} \\ v=t \end{vmatrix} = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int\frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{m+1}}dt = \cdots$

Вопросы - [3]+[4]+[5]+[6]+[8]+[11]

- **Определенным интегралом** от функции f(x) на отрезке [a, b] называется предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ при условии, что $n \to \infty, max\Delta x_k \to 0$
- **Свойства определенного интеграла**:
  1) Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)dx$
  2) Если функция f(x) интегрируема на [a, b], то $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
  3) $\int_a^b cdx = c(b-a)$
  4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
  5) Для любых трех чисел a, b, c $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Вопрос - [3]

Теорема о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции:
Если функция $f(x) \geq 0 (f(x) < 0)$ и интегрируема на [a, b], то интеграл – число того же знака
$\int_a^b f(x)dx \geq 0 (\int_a^b f(x)dx < 0)$
□: Пусть $f(x) \geq 0$. Тогда в интегральной сумме $J_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ все слагаемые ≥ 0 => $J_n \geq 0$ =>
(т. О сохранении пределом знака функции) $\lim J_n \geq 0$ => $\lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \geq 0$ ■

Вопрос - [4]

Теорема об оценке определенного интеграла:
Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на [a, b] функции f(x), то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
□: По условию $m = minf(x), M = maxf(x)$ на $[a,b]$ => $m \leq f(x) \leq M$ =>
(*т. Об интегрировании неравенства*) $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$ =>
(*свойства опр. интеграла*) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ ■

Вопрос - [5]

Теорема об оценке модуля определенного интеграла:
Если функция f(x) непрерывна на [a, b], то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
□: По условию функция непрерывна на [a, b] => $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ =>
(*т. Об оценке определенного интеграла*) $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ => $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ ■

Вопрос - [6]

Теорема о среднем для определенного интеграла:
Если функция f(x) непрерывна на [a, b], а функция y(x) знакопостоянна и интегрируема на [a, b], то существует точка C ∈ (a, b): $\int_a^b f(x)y(x)dx = f(c)\int_a^b y(x)dx$
□: По условию функция f(x) непрерывна на [a, b] => ($т.$ *Вейерштрасса*)$m \le f(x) \le M$ на $[a, b], m = minf(x), M = maxf(x)$
По условию существует y(x)>0 => (*т. О сохранении знака подынтегральной функции*) $\int_a^b y(x)dx > 0$, тогда $my(x) \le f(x)y(x) \le My(x) =>$
(*т. Об интегрировании неравенства + свойства опр. интеграла*)$m\int_a^b y(x)dx \le \int_a^b f(x)y(x)dx \le M\int_a^b y(x)dx$ $|: \int_a^b y(x)dx$
$m \le \frac{\int_a^b f(x)y(x)dx}{\int_a^b y(x)dx} \le M =>$ (*т. Больцано-Коши*)$\exists$т.$C \in (a, b): U = f(c) => \int_a^b f(x)y(x)dx = f(c)\int_a^b y(x)dx$ ■

Вопрос - [7]

- Функция $J(x) = \int_a^x f(t)dt$, где $[a, x] \subset [a, b]$ называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом.**
- **Теорема о производной от интеграла по его верхнему пределу:**
  Если функция f(x) непрерывна на [a, b], то $J'^{(x)} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$
  □: По определению $J(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in (a, b)$. Возьмем $x + \Delta x \in (a, b)$
  $\Delta J = (опр)J(x + \Delta x) - J(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$ (*свойство опр. интеграла*)
  $-\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$ |*По условию* $y(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$| =
  => (*т. О среднем*) $= f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x$ ■

Вопрос - [8]

Формула Ньютона-Лейбница:
Если функция f(x) непрерывна на [a, b], то $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$
□: Пусть F(x) – любая первообразная функции f(x) и из т. «О производной от интеграла по верхнему пределу» $\int_a^x f(t)dt$ – первообразная функции f(x) => (*Осн. т. о первообразной*) $\int_a^x f(t)dt = F(x) + const$ (*)
1) Положим $x = a$ $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C => F(a) + C = 0 => C = -F(a)$. Подставим в (*)
$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$
2) Положим $x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ ■

Вопрос - [9]

Теорема об интегрировании подстановкой для определенного интеграла:
Если функции $x = y(t), \varphi'(t), f(y(t))$ непрерывны на [a, b] и $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (1)
□: По функции замены переменной в неопределенном интеграле: (2) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, т.е. если F(x) – первообразная функции f(x), то F(y(t)) – первообразная функции $F(y(t))\varphi'(t)$
Применим формулу Ньютона-Лейбница отдельной к левой и правой частям равенства (2):

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(y(t))|_\alpha^\beta = F(y(\beta)) - F(y(\alpha)) = F(b) - F(a) => (1)$ ■

Вопрос - [10]

Теорема об интегрировании по частям для определенного интеграла:

Если функции $u(x)$ и $v(x)$дифференцируемы в (a, b), то $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$

□: По определению $d(uv) = udv + vdu => udv = d(uv) - vdu => \int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$ ■

Вопрос - [11]

Интегрирование четных, нечетных функций на отрезке, симметричных относительно начала координат. Интегрирование периодичных функций.

- f(x) – четная функция на [a, b], $f(-x) = f(x)$
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \left|\begin{matrix}\text{для } I \text{ интегралов} \\ {\scriptstyle x=-t,\ dx=-dt} \\ {\scriptstyle x1=-a, t1=a, x2=0=t2}\end{matrix}\right| = -\int_{-a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$
$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$
- f(x) – нечетная функция на [a, b], $f(-x) = -f(x)$
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \left|\begin{matrix}\text{для } I \text{ интегралов} \\ {\scriptstyle x=-t,\ dx=-dt} \\ {\scriptstyle x1=-a, t1=a, x2=0=t2}\end{matrix}\right| = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$
- Если периодическая функция f(x) непрерывна на [a, a+T], где T-период, то $\forall a \in \mathbb{R}$ и $\forall T > 0$:
$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

Вопросы - [12]+[13]+[14]

Несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$ называется предел определенного интеграла:

1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$
2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim\limits_{a\to-\infty} F(a)$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) - \lim\limits_{a\to-\infty} F(a)$

Вопрос - [12]

Признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода:

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и для $\forall x \in [a, +\infty)$ выполняется неравенство $0 < f(x) \le \varphi(x)$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится ($\int_a^{+\infty} f(x)dx < \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$) □:

$$\left.\begin{matrix}\text{По усл. } \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \text{ сходится } => (\textit{опр.}) \ \exists \text{ кон. } \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)dx = M => \int_a^b \varphi(x)dx \le M \\ \text{По усл. } 0 < f(x) \le \varphi(x) => (\textit{т.Об инт.нер-ва}) \ 0 < \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx \le M \\ => \int_a^b f(x)dx \le M (\text{функция верхнего предела при } b > a - \text{огранич.}) \\ \int_a^{b_1} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b_1} f(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx \ (\text{при } b_1 \ge b) => \text{функция } \uparrow, \text{если } b \uparrow\end{matrix}\right\} =>$$

$=>$ (*т. Вейерштрасса*) $\exists$кон $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \le M =>$ (*опр*) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. ■

Вопрос - [13]

Предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода:
Если функции f(x) и g(x) непрерывны на $[a, +\infty)$ и $f(x) > 0, g(x) > 0\ \forall x \in [a, +\infty)$ и $\exists$кон $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$ (или $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$), то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

□: По условию $\exists$кон $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \Rightarrow \forall \xi > 0\ \exists M = M(\xi) > 0: \forall x > M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \xi$

$\lambda - \xi < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \xi\ [\times g(x) > 0] \Rightarrow (\lambda - \xi)g(x) < f(x) < (\lambda + \xi)g(x) (*)$

Подберем ξ так, чтобы $\lambda - \xi > 0$. Пусть $a > M$

1) Пусть по условию $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и из (*): $(\lambda - \xi)g(x) < f(x) \to$ (*признак сравн. по нер-ву*) $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda - \xi)g(x)dx$ сходится => (*св-во лин*) $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится

2) Пусть по условию $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится => $\int_a^{+\infty} (\lambda + \xi)g(x)dx$ сходится и $0 < f(x) < (\lambda + \xi)g(x)$ => (*признак сравн. по нер-ву*) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится

Аналогично, если расходится… ■

Вопрос - [14]

Признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода:
Если функция f(x) непрерывна и знакопеременна на $[a, +\infty)$ и $\int |f(x)|dx$ сходится, то $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.

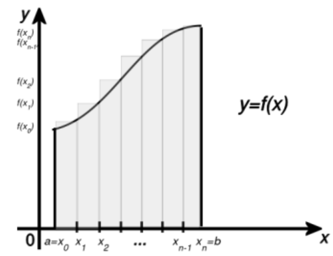
□: По условию функция y=f(x) непрерывна на $[a, +\infty) \Rightarrow -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\ [+|f(x)|] \Rightarrow 0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)| \Rightarrow 2\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится по условию => (*признак сравн.по нер-ву*) $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx$ сходится => $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и называется абсолютно сходящейся. ■

Вопрос - [15]

- **Несобственным интегралом 2-го рода** от функции f(x), имеющей разрыв в правом конце отрезка, называется предел, определенный интегралом $\int_a^b f(x)dx\ [f(b) = \infty] = \lim\limits_{\xi\to 0} \int_a^{b-\xi} f(x) = \lim\limits_{\xi\to 0} F(b - \xi) - F(a)$

  Аналогично:
  - $\int_a^b f(x)dx\ [f(a) = \infty] = \lim\limits_{\xi\to 0} \int_{a+\xi}^b f(x) = F(b) - \lim\limits_{\xi\to 0} F(a + \xi)$
  - $\int_a^b f(x)dx\ [f(c) = \infty] = \lim\limits_{\xi\to 0} \int_a^{c-\xi} f(x) + \lim\limits_{\xi\to 0} \int_{a+\xi}^b f(x) = \lim\limits_{\xi\to 0} F(c - \xi) - \lim\limits_{\xi\to 0} F(c + \xi) - F(a) + F(b)$
- **Признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода:**
  1) Если функции f(x) и g(x) непрерывны в [a, b) и $f(b) = \infty, g(b) = \infty$ и для $\forall x \in [a, b)$ выполняется неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится
  2) Если функция f(x) непрерывна и знакопеременна в [a, b) и $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно
  3) Если функции f(x) и g(x) непрерывны в [a, b) и $f(b) = \infty, g(b) = \infty$ и $\exists$кон $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$ (или $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$), то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Вопрос - [16]

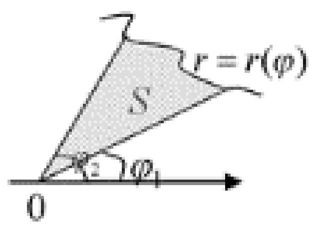


$$S = \lim_{\lambda \to 0} f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n \qquad \lambda = \max \Delta x_k$$

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{n=1}^{k} f(x_n)\Delta x_n \ = \int_a^b f(x)dx$$

Площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей прямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(x_k)$. При стремлении к нулю длин всех отрезков Δx_k площадь указанной ступенчатой фигуры будет стремиться к площади отмеченной на рисунке ступенчатой фигуры, лежащей под графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

Вопрос - [17]



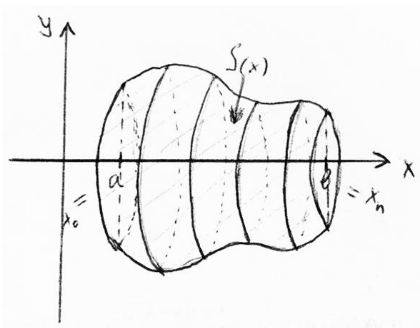
Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$:
Разобьём криволинейный сектор на n частичных криволинейных секторов лучами $\varphi_0 \le \alpha < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \cdots < \varphi_n < \beta$
$\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}, k = \overline{1,n}$. Возьмем произвольно угол $\widetilde{\varphi_k} \in \Delta\varphi_k$
$T = T(\widetilde{\varphi_n})$ – длина радиус-вектора, соотв. углу $\widetilde{\varphi_n}$
$S_{\text{крив сект}} \approx S_{\text{круг сект}} => S = \frac{1}{2}\left(T(\widetilde{\varphi_k})\right)^2 \Delta\varphi_k;\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} T^2(\widetilde{\varphi_k})\Delta\varphi_k$

В силу непрерывности функции $T^2(\varphi)$на $[\alpha, \beta]$ $\exists \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} T^2(\widetilde{\varphi_k})\Delta\varphi_k =>$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} T^2(\varphi)d\varphi$$

Вопрос - [18]

Тело образовано вращение вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \ge 0$, прямыми x=a, x=b, y=0 (a<b). Пусть известна площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox. Пусть функция непрерывна на [a, b].

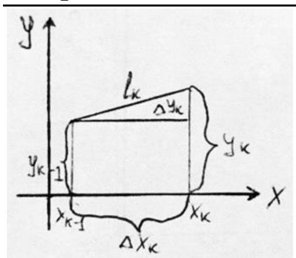


Разобьем тело плоскостями $x = x_0 = a, x = n_1, \ldots, x_{k-1} = x, x = x_k \ldots x = x_n = b$ на слови $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1,n}$

В каждом частичном интервале возьмем произвольную точку $\xi_k \in \Delta x_k$. Проведем плоскости $x = \xi_1 \ldots x = \xi_n$. В каждом интервале построим цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси Ox, а направляющая является контуром сечения тела плоскостью $x = \xi_k : S(\xi_k)$.

$V_k = S(\xi_k)\Delta x_n; V = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_n =>$*в силу непрерывности функции на отрезке* $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_n = V = \int_a^b S(x)dx$. *Так как* $S = \pi R^2 = \pi y^2(x) = \pi f^2(x) =>$*подставим в* ***формулу объема*** $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Вопрос - [19]



Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x), [a, b]$.
Разобъем кривую:
$l = \lim_{max\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} l_k;\ y_k = f(x_k), y_{k-1} = f(x_{k-1});\ \Delta y = y_k - y_{k-1}$
$l_n = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\Delta x_k;\ \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(\xi_k) -$ т. Лагранжа

$$l = \lim_{max\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Вопрос - [20]

Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0, [\alpha, \beta]$.
Пусть $r(\varphi), r'(\varphi)$ непр на $[\alpha, \beta]$.

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} => \begin{cases} x'_\varphi = r'cos\varphi - rsin\varphi \\ y'_\varphi = r'sin\varphi + rcos\varphi \end{cases} => (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2$$

Подставим в формулу **длины дуги**: $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$

Вопрос - [21]

- **Дифференциальное уравнение 1-го порядка** - уравнение F(x, y, y’)=0
- ДУ 1-го порядка вида $y' = f(x)g(y)$ или $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$, где $f(x), f_1(x), f_2(x)$ интегрируемы и зависят только от x, а $g(y), g_1(y), g_2(y)$ интегрируемы и зависят только от y, называется ДУ **с разделяемыми переменными**.
- ДУ 1-го порядка вида $y' + p(x)y = g(x)$, где $p(x), g(x) -$ непрерывные функции, называется **линейным** ДУ 1-го порядка. Если $g(x) = 0$ – ДУ называется **однородным**.
- ДУ 1-го порядка вида $y' + p(x)y = g(x)y^n, p(x), g(x)$ – непрерывнаые функции, $n \neq 0, n \neq 1$, называется **уравнением Бернулли**.
- **Интегрирование ЛНДУ 1-го порядка методом Бернулли (подстановки):**
  Рассмотрим ур. Бернулли: $y' + p(x)y = g(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$ Общее решение ДУ находится в виде $y = u(x)v(x)$, где $u(x) -$ частное решение, $v(x) -$ общее решение. $y' = u'v + uv'$, подставим y и y' в наше ДУ: $u'v + uv' + p(x)uv = g(x)u^n v^n$
  1) $u' + p(x)u = 0 => u = e^{-\int p(x)dx} -$ частное решение
  2) $uv' = g(x)u^n v^n$(с разд. перем) $=> \frac{v^{1-n}}{1-n} = \int g(x)e^{(1-n)\int p(x)dx} dx + C$
  Подставляем в исходное: $y = u(x)v(x)$
- **Интегрирование ЛНДУ 1-го порядка методом Лагранжа (вариации произв.постоянной):**
  Рассмотрим ЛДУ $y' + p(x)y = g(x)$
  1) Соответствующее однородное ДУ $y' + p(x)y = 0$ с раздлеяемыми переменными
  $y_{оо} = Ce^{-\int p(x)dx} -$ общее решение ДУ
  2) Обозначим $c = c(x), y_{он} = c(x)e^{-\int p(x)dx}, y'_{он} = c'^{e^{-\int p(x)dx}} + ce^{-\int p(x)dx}(-p(x))$ подставляем в исходное уравнение: $c'^{e^{-\int p(x)dx}} - p(x)ce^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x)$
  $$c(x) = \int g(x)e^{-\int p(x)dx} dx + c_1$$
  $$y = y_{оо} + y_{чн} = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int g(x)e^{-\int p(x)dx} dx$$

Вопрос - [22]

- **Теорема Коши о существовании и единственности решения ДУ n-го порядка:**
  Если функция $f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$ и ее частные производные $f'_y, f'_{y'} \dots f'_{y^{(n-1)}}$ непрерывны в некоторой области D(n+1) мерного пространства $(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0 \dots y^{(n-1)}_0)$ из D в $U(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $\exists!$ решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям задачи Коши.
- **Интегрирование ДУ n-го порядка, допускающих понижение порядка:**
  1) $y^{(n)} = f(x)$ – метод последовательного интегрирования
  $$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1 => y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + c_1\right) dx =>$$

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + c_1 \frac{x^\wedge(n-1)}{(n-1)!} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$$

2) $F(x, y^{(n)}, y^{(n+1)} \ldots y^{(k)}) = 0$ – ДУ, не содержащее неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ в явном виде.
Подстановка $y^{(n)} = \varphi(x), y^{(n-1)} = \varphi'(x), \ldots, y^{(k)} = \varphi^{(n-k)}(x)$ – понижение порядка ДУ на k.
Получаем $F(x, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n-k)}) = 0\ (*)$.
Если найдено общее решение ДУ (*) $p = \psi(x_1, c_1 \ldots c_{n-k})$, то общее решение ДУ $y^{(n)} = \psi(x_1, c_1 \ldots c_{n-k})$ находим методом последовательного интегрирования.
3) $F(y, y', \ldots, y^{(n)})$ – ДУ, не содержащее независимую переменную x в явном виде
Подставим $y' = \varphi(y), y'' = \frac{d}{dx}\varphi(y) = \frac{d\varphi}{dy} * \frac{dy}{dx} = \varphi'\varphi$ и так далее…
Понижаем порядок ДУ на 1.
4) $\frac{d}{dx}F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ – ДУ, левая часть которого является полной производной функции.

Вопрос - [23]

- $L[y] = f(x) -$ линейное неоднородное ДУ, $L[y] = 0 -$ линейное однородное ДУ, где $L[y] -$ линейный оператор $= y^{(n)} + \varphi_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n-1}(x)y' + \varphi_n(x)y$
- **Теорема Коши о существовании и единственности решение ЛДУ n-го порядка:**
Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны на [a, b], то для любого начального условия существует единственного решение $y = \varphi(x)$ ДУ на этом отрезке. (Аналогично т.Коши для ДУ)
- **Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка:**
  1) Множество частных решений ЛОДУ с непрерывными $p_i(x), i = \overline{1, n}$, на $[a, b]$ функциями образует линейное пространство
  □: Докажем:
  1. Если y(x) – частное решение ДУ, то существует решение cy(x), c=const
  2. Если y1(x), y2(x) – частные решения ДУ, то y1+y2 – решение ДУ
  (1) По условию y(x) – частное решение ДУ => (опр.) $L[y] \equiv 0 =>$
  $(\textit{свойство линейности})\ L[cy] = cL[y] = c * 0 = 0 => cy -$ решение ДУ
  (2) По условию y1(x), y2(x) – частные решения ДУ => $L[y_1] \equiv 0, L[y_2] \equiv 0$ (*св-во линейности*)
  $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0 => y_1 + y_2 -$решение ДУ
  => множество частных решений ЛОДУ образуют линейное пространство ■
  2) **О размерности пространства частных решений ЛОДУ:**
  Максимальное число линейно независимых частных решений ЛОДУ с непрерывными $p_i(x), i = \overline{1, n}$ на $[a, b]$ функциями равно n.
  □: По условию $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимые частные решения ЛОДУ. Пусть $y_{n+1}(x)$ – решение ДУ, для которого существуют производные $y'_{n+1}(x), \ldots, y_{n+1}^{(n-1)}(x)$ и которое удовлетворяет любым заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'^{(x_0)} = y'_0 \ldots\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$
  По теореме о структуре общего решения $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ – решение ДУ.
  По условию $p_i(x), i = \overline{1, n}$ непрерывны на $[a, b]$ => выолнены условия теоремы Коши =>
  $y_{n+1} = y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) =>$ (опр)$y_1(x) \ldots y_{n+1}(x) -$линейно зависимы, а значит $\dim(L) = n$ ■

Вопросы - [24]+[25]

- Функции $y_1(x), y_2(x) \ldots y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на [a, b], если существует нетривиальная линейная комбинация этих функций, равная нулю на этом отрезке

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \cdots + \alpha_ny_n(x) = 0, \exists\alpha_i \neq 0$$

- Функции $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ называются **линейно независимыми** на [a, b], если только тривиальная линейная комбинация этих функций равна нулю на этом отрезке
$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \text{все } \alpha_i = 0 \ (i = \overline{1,n})$$
- **Определителем Вронского (вронскианом)** называется определитель вида:
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \dots & y'_n(x) \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Вопрос - [24]

Теорема о вронскиане линейно зависимых функций:
Если функции $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ линейно зависимы на [a, b], то W(x)=0 на всем этом отрезке (или для $\forall x \in [a,b]$)
□: По условию функции $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ линейно зависимы на [a, b] => (опр.)
$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \ \exists \alpha_i \neq 0 \\ \text{Дифференцируем это уравнение } (n-1) \text{ раз} \\ \alpha_1 y_1{}'(x) + \alpha_2 y_2{}'(x) + \dots + \alpha_n y_n{}'(x) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$
- система линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и ненулевым решением. Система имеет ненулевое решение ⇔ определитель системы равен нулю, а определитель – определитель Вронского. ■

Вопрос - [25]

Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка:
Если линейно независимые на [a, b] функции являются частными решениями ЛОДУ с непрерывными $p_i(x), i = \overline{1,n}$ на [a, b] функциями, то $W(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a,b]$
□: Методом от противного
Предположим в $\forall x_0 \in [a,b]$ $W(x_0) = 0$. Подберем числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ так, чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений имела ненулевое решение
$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \ \exists \alpha_i \neq 0 \\ \alpha_1 y_1{}'(x) + \alpha_2 y_2{}'(x) + \dots + \alpha_n y_n{}'(x) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Это возможно, т.к. $W(x_0) = 0$. По условию $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ линейно независимые частные решения ЛОДУ => (*следствие свойства частных решений*) $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$ – решение ДУ, удовлет. нулевым начальным условиями $y(x_0) = 0, y'^{(x_0)} = 0 \dots y^{(n-1)}(x_0) = 0$ (из системы).
По условию $p_i(x), i = \overline{1,n}$ непрерывны на [a, b] => выполняется условие т. Коши о существовании и единственности решения; $y \equiv 0$ – решение системы => $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ => $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ – линейно зависимые функции, что противоречит условиям теоремы => предположение неверно => $W(x_0) \neq 0$ для $\forall x_0 \in [a,b]$ ■

Вопрос - [26]

Теорема о существовании фундаментальной системы решений ЛОДУ n-го порядка:
У любого ЛОДУ n-го порядка существует ФСР.
□: Возьмем произв. n^2 чисел $\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} & \dots & y_n(x_0) = y_{n0} \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)} \end{cases}$ (*)

С единственным ограничением: $\begin{vmatrix} y_{10} & \dots & y_{n0} \\ . & . & . \\ y_{10}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$

Пусть частные решения ЛОДУ $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ удовлетворяют начальным условиям (*). Тогда

$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \dots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \dots & y'_n(x_0) \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$ => (*утверждение о ненулевом вронскиане и линейно независимой системе*) $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ – линейно независимы на отрезке [a, b]. => (*определение*) $y_1, y_2, \dots, y_n$ образует ФСР. ■

Вопрос - [27]

Теорема о структуре общего решения ЛОДУ n-го уравнения:

Общее решение ЛОДУ с непрерывными $p_i(x), i = \overline{1, n}$ на [a, b] функциями равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными: $y_{\text{оо}} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$

□: 1) Докажем, что $y_{\text{оо}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ является решением ДУ.

По условию $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ – частное решение ДУ => (*определение*) $L[y_1] \equiv 0 \dots L[y_n] \equiv 0$ => $L[y_{\text{оо}}] = L[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)] = (\text{св.лин}) c_1 L[y_1] + \dots + c_n L[y_n] = 0$ => $y_{\text{оо}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ - решение ДУ.

2) Докажем, что $y_{\text{оо}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ является общим решением ДУ.

По условию $p_i(x), i = \overline{1, n}$ непрерывны на [a, b] => выполняется условие т. Коши о существовании и единственности решения => (*опр. общего решения*) решение будет общим, если для произвольно заданных начальных условий постоянные $c_1 \dots c_n$ найдутся единственным образом.

Пусть $y_{\text{оо}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0 \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0 - \ \forall \text{т.} \in [a, b]$

$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ (*) – система линейных неоднородных алгебраических уравнений с неизвестными $c_1 \dots c_n$ и определителем системы равным вронскиану.

$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \dots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \dots & y'_n(x_0) \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$ (т.к. по условию $y_1, y_2, \dots, y_n$ образует ФСР) =>

Система (*) имеет единственное решение $c_1 \dots c_n$ => $y_{\text{оо}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ - общее решение ДУ. ■

Вопрос - [28]

Формула Острогадского-Лиувилля для ЛДУ 2-го порядка:

$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – частные решения ДУ.

$y_1'' + p_1(x) y_1' + p_2(x) y_1 = 0 \ (* \, y_2)$

$+$ => $y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') + p_2(x)(y_1 y_2 - y_2 y_1) = 0$

$y_2'' + p_1(x) y_2' + p_2(x) y_2 = 0 \ (* \, y_1)$

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$; $\frac{dW(x)}{dx} = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$; $\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x) W(x) = 0$ – ДУ с разделяющимися переменными.

$\int_{x_0}^{x} \frac{dW}{W} = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx$ => $\ln|W| \,\Big|_{x_0}^{x} = \ln\left| e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx} \right|$ =>

$\boxed{W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx}}$ - <u>формула Острогадского-Лиувилля для ЛОДУ 2-го порядка.</u>

Вопрос - [29]

Формула для общего решения ЛОДУ 2-го порядка при одном известном частном решении:
$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$
$y = y_1(\text{x})$ – известное частное решение
$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1{}^2} = \frac{W(x)}{y_1{}^2} = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1{}^2} => \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1{}^2}dx => y2 = y1\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1{}^2}dx$ – 2-ое частное решение ДУ. Докажем, что частные решения образуют ФСР:

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y1\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1{}^2}dx \\ y_1' & y1'\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1{}^2}dx + y_1\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1{}^2} \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)dx} \neq 0 \text{ для } \forall x \in [a,b] =>$$

y_1 и y_2 образуют ФСР => (*т. О структуре общего решения*) $y_{\text{оо}} = c_1 y_1(x) + c_2 y1\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1{}^2}dx$

Вопрос – [30]

Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:
Общение решение ЛНДУ с непрерывными $\varphi_i(x), i = \overline{1,n},$ и $f(x)$ на $[a,b]$ функциями равно сумме общего решения соответствующего ЛОДУ и какого-либо частного решения ЛНДУ. $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$
□: 1) Докажем, что $y_{\text{он}}$ – решение ДУ. По условию $y_{\text{оо}}$ – решение ДУ => (*опр.*) $L[y_{\text{оо}}] \equiv 0, y_{\text{чн}}$ – решение ДУ => (*опр.*) $L[y_{\text{чн}}] = f(x)$ $L[y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}] = L[y_{\text{оо}}] + L[y_{\text{чн}}] = 0 + f(x) = f(x)$ =>(*опр.*) $y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$ – решение ДУ.
2) Докажем, что $y_{\text{он}}$ – общее решение ДУ. По т. О структуре общего решения ЛОДУ $y_{\text{оо}} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$ где $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}$ образует ФСР.
По условию $\varphi_i(x), i = \overline{1,n},$ и $f(x)$ на $[a,b]$ непрерывны => выполняется условие т. Коши => (*опр.*) решение будет общим, если для произвольно заданных начальных условий постоянные $c_1 \dots c_n$ найдутся единственным образом.
Пусть $y_{\text{он}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + y_{\text{чн}}$ удовлетворяет любым начальным условиям $y_{\text{он}}(x_0) = y_0 \dots y_{\text{он}}{}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0 -\ \forall\text{т.} \in [a,b]$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) + y_{\text{чн}}(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'^{(x_0)} + c_2 y_2'^{(x_0)} + \dots + c_n y_n'^{(x_0)} + y_{\text{чн}}'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y_{\text{чн}}^{(\text{n}-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (*) \begin{cases} \dots = y_0 - y_{\text{чн}}(x_0) \\ \dots \\ \dots = y_0^{(n-1)} - y_{\text{чн}}^{(\text{n}-1)}(x_0) \end{cases}$$

Система (*) - система линейных неоднородных алгебраических уравнений с неизвестными $c_1 \dots c_n$ и определителем системы равным вронскиану.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \dots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \dots & y'_n(x_0) \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ для } \forall x \in [a,b]$$ => Система (*) имеет

единственное решение $c_{10} \dots c_{n0}$ =>(*опр.*) $y_{\text{он}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + y_{\text{чн}}$ – общее решение ДУ. ■
Вопросы - [31]+[32]

Вывод формулы для общего решения ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных (1 и 2 пункты) и комплексных (3 п.) корней характеристического уравнения:
$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$
Характеристическое уравнение: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$

$$k_{1,2} = -\frac{\text{a}_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{2} - a_2}$$

1) $k_1 \neq k_2 \in R$

$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x} => y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют ФСР: $W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} =$ $e^{k_1 x} e^{k_2 x}(k_2 - k_1) \neq 0 => y_{\text{оо}} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$

2) $k_1 = k_2 \in R$

$y_1 = e^{kx}, y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{{y_1}^2} dx = e^{kx} \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = xe^{kx} => W(x) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + xke^{kx} \end{vmatrix} =$ $e^{2kx} \neq 0$ – ФСР $=> y_{\text{оо}} = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$

3) $k_{1,2} = \alpha \pm \beta,\ \beta \neq 0$

$y = e^{kx} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + \mathrm{i} \sin \beta x)$ – формула Эйлера =>

$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$; $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$; $W(x) = |\dots| \neq 0$ – ФСР

$y_{\text{оо}} = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ъ

Вопрос – [33]

- $L[y] = f(x), a_i = const\left(i = \overline{1, n}\right) =>$ ЛОДУ: $L[y] = 0$
  $k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0 => y_{\text{оо}} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$; f(x) – квазиполином
  $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x) => y_{\text{чн}} = x^{\text{г}} e^{\alpha x}(T_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x)$, где г – кратность корня $\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения; $\text{г} = 0,$ если $\alpha \pm \beta i$ не является корней характеристического уравнения; $T_s(x), Q_s(x)$ – полные многочлены степени s с непрерывными коэффициентами, где $s = \max(m, n)$ – **частное решение ЛНДУ с пост. коэффициентами и специальной правой частью в виде квазимногочлена**
- **Теорема о наложении частных решений:**
  Если y_i – частное решение ЛНДУ $L[y] = f_i(x)$, то $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ – решение ДУ $L[y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$
  □: По условию y_i – решение ЛНДУ $L[y] = f_i(x)$ => (*опр.*) $L[y_i] = f_i(x)$
  $L[y] = L[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} L[\alpha_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L[y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$ =>(*опр.*) $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ – решение ДУ $L[y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$ ■

Вопрос – [34]

Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения ЛНДУ 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых постоянных:

$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), f(x)$ – любая функция

Соответствующее однородное ДУ: $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$

$y_{\text{оо}} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), c_1, c_2 = const;\ y_{\text{он}} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), c_1(x), c_2(x) - ? =>$

$$\left.\begin{aligned} y'_{\text{он}} = c_1' y_1 + c_1 y'_1 + c_2' y_2 + c_2 y'_2 \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \end{aligned}\right\} y'_{\text{он}} = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 => y''_{\text{он}} = c_1' y'_1 + c_1 y''_1 + c_2' y'_2 + c_2 y''_2$$

$c_1' y'_1 + c_1 y''_1 + c_2' y'_2 + c_2 y''_2 + p_1(x)\left(c_1 y'_1 + c_2 y'_2\right) + p_2(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x) => c_1' y'_1 + c_2' y'_2 = f(x) => \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y'_1 + c_2' y'_2 = f(x) \end{cases}$ – система имеет единственные решения c_1' и c_2', т.к. определитель системы (вронскиан) не равен нулю для $\forall x \in [a, b]$ (по условию $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют ФСР)

$$\left.\begin{aligned} c'_1 = \varphi_1(x) => c_1 = \int \varphi_1(x) dx + \overline{c_1} \\ c'_2 = \varphi_2(x) => c_2 = \int \varphi_2(x) dx + \overline{c_2} \end{aligned}\right. \text{ подставляем в } y_{\text{он}} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$\boxed{y_{\text{он}} = \overline{c_1} y_1 + \overline{c_2} y_2 + y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx}$$

Вопрос – [35]

- $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$
  ДУ, в котором старшая производная $y^{(n)}$ выражается в виде функции от переменных x, y и

производных $y^{(i)}$ порядков меньше n, называется **ДУ n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.**

- Задача Коши: Найти решение ДУ, удовлетворяющему начальным условиям $y(x_0) = y_{10}, y'(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_{n0}$
- Нормальной системой ДУ называется система ДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(f, x_1, \dots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(f, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(f, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

- **Сведение ДУ к нормальной системе:**
$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$; Заменяем переменные: $y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n =>$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Вопрос – [36]

- Задача Коши (для НСДУ): Найти решение нормальной системы, удовлетворяющее начальным условиям $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x^{(n)}(t_0) = x_{n0}$
- **Т. Коши:** Если функции $f_1, \dots, f_n$ и их частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ непрерывны в некоторой области $D(n+1)$-мерного пространства $(f_1, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то для любой точки $(t_0, x_{10}, x_{20} \dots x_{n0}) \in D$ в $U(t_0)$ $\exists!$ решение $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям задачи Коши.
- **Сведение НСДУ к одному ДУ высшего порядка:**
$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(f, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(f, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(f, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ Рассмотрим НСДУ. Дифференцируем первое уравнение системы:
$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \left[\text{заменяем} \frac{dx_1}{dt} \dots \frac{dx_n}{dt} \text{ правой частью}\right] = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n = F_2$ Дифференцируем последнее уравнение аналогично:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} = F_3 \dots \frac{d^nx_1}{dt^n} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}$$

Получили систему уравнений: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2 \\ \dots \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n \end{cases}$ Из первых (n-1) уравнений выражаем $x_2, x_3 \dots x_n$ как функции от переменных $x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} =>$

- $\begin{cases} x_2 = \psi_2(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}) \\ x_3 = \psi_3 \\ \dots \\ x_n = \psi_n \end{cases}$ и подставляем в последнее уравнение системы:

  $\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}})$, т.о. получим ДУ n-го порядка. Найдем общее решение ДУ $x_1 = \varphi_1(t, c_1, \dots, c_n)$ и вычислим производные $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$, подставим в систему, т.о. получим общее решение ДУ: $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, c_1, \dots, c_n) \\ x_2 = \varphi_2 \\ \dots \\ x_n = \varphi_n \end{cases}$ Если система линейная, то получим линейное однородное ур-е.

Вопрос – [37]

- **Первым интегралом системы** называется уравнение, которое после подстановки в него решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ обращается в верное тождество.
- **Метод нахождения первых интегралов и их применение для решения системы ДУ (на примере):**

  $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$; $\frac{d(x_1+x_2)}{dt} = x_2 + x_1$(первая интегральная комбинация); $\int \frac{d(x_1+x_2)}{x_2+x_1} = \int dt$

  $\ln|x_2 + x_1| = \ln e^t + \ln c_1 \Rightarrow x_2 + x_1 = c_1 e^t$ – первый интеграл системы

  $\frac{d(x_1-x_2)}{dt} = x_2 - x_1$(вторая интегральная комбинация) $\Rightarrow x_1 - x_2 = c_2 e^{-t}$ – 2-ой первый инт. сист.

  Ответ: $\begin{cases} x_2 + x_1 = c_1 e^t \\ x_1 - x_2 = c_2 e^{-t} \end{cases}$ – общий интеграл системы.