ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
1 курс 2 семестр для фак.-тов ИУ,РЛ,БМТ. ***/2010г***

Интегралы и ДУ

1. Сформулировать определение первообразной. Доказать ее свойства.

2. Сформулировать теорему о разложении правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.

4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.

5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем значении интеграла.

6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла.

7. Вывести формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

8. Вычисление определенных интегралов. Вывести правило интегрирования по частям и интегрирования подстановкой.

9. Интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу и теорему о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом.

10. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

11. Определение несобственного интеграла от непрерывных функций на бесконечном промежутке. Доказать признаки сравнения таких интегралов (1-ого рода).

12. Определение несобственного интеграла от неограниченных функций на конечном отрезке интегрирования. Доказать признаки сходимости таких интегралов (2-ого рода).

13. Фигура S ограничена лучами $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta (0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi)$ и кривой $r = f(\gamma)$, где r, γ - полярные координаты. Вывести формулу S фигуры (в полярных координатах).

14. Вывести формулы для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела по площадям параллельных сечений и объемов тел вращения.

15. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a,\ x = b(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.

16. Вывести формулы для вычисления с помощью определенного интеграла длины дуги в декартовой и полярной системах координат.

Дифференциальные уравнения

1. Сформулировать задачу Коши и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи для ДУ 1-ого порядка. Особые точки и особые решения ДУ 1-ого порядка.

2. Линейные ДУ 1-ого порядка. Интегрирование линейных неоднородных ДУ 1-ого порядка методом вариации произвольной постоянной и методом подстановки "uv".

3. Интегрирование ДУ n-ого порядка, допускающих понижение порядка.

4. Определения линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Определитель Вронского. Доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций.

5. Определения линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Определитель Вронского. Доказать теорему о вронскиане линейно независимых частных решений линейного однородного ДУ (ЛОДУ) n-ого порядка.

6. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения ЛОДУ n-го порядка. Доказать теорему о структуре общего решения ЛОДУ n-ого порядка.

7. Определение ФСР ЛОДУ n-ого порядка. Доказать теорему о существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка.

8. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

9. Нахождение общего решения ЛОДУ 2-ого порядка при одном известном частном решении.

10. Построение общего решения ЛОДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае действительных различных и действительных кратных корней характеристического уравнения (с выводом).

11. Построение общего решения ЛОДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения. (с выводом)

12. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения ЛНДУ n-го порядка.Доказать теорему о структуре общего решения ЛНДУ n-ого порядка и теорему о наложении частных решений.

13. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения ЛНДУ n-ого порядка.(вывод в случае $n = 2$).

14. Доказать теоремы о свойствах частных решений ЛОДУ n-го порядка.

15. Сформулировать задачу Коши и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи для нормальной системы ДУ. Сведение нормальной системы к одному ДУ высшего порядка.

16. ДУ n-ого порядка, разрешенное относительно старшей производной, и задача Коши для него. Сведение этого уравнения к нормальной системе ДУ.

17. Первые интегралы нормальной системы ДУ, их применение и нахождение.

18. Доказать теорему о существовании ФСР системы ЛОДУ.

19. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения однородной системы линейных уравнений. Доказать теорему о структуре общего решения однородной системы линейных ДУ.

20. Доказать теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных ДУ 1-ого порядка.

21. Метод вариации произвольных постоянных для линейных неоднородных систем.

Задачи для подготовки к экзамену по математическому анализу
1 курс 2 семестр, спец. ИУ, РЛ, БМТ.

1. Неопределенный интеграл.

Проинтегрировать:

1. $\int (7-5x)\cdot e^{2x}dx;$
2. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx;$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}};$
4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^5 x};$
5. $\int \sqrt{x^2-2x+10}dx.$

2. Приложение определенного интеграла.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\cdot\sin 2\varphi$.
2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды:

$$\begin{cases} x = 7(t-\sin t) \\ y = 7(1-\cos t) \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью OX.
4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $9x^2+y^2=9$ вокруг оси OY.

3. Несобственные интегралы 1 и 2 рода.

Исследовать на сходимость интегралы:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\cdot(x^3+1)}\cdot dx;$
2. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x\cdot dx}{\sqrt{x^5+2x+7}};$
3. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}dx;$
4. $\int_0^1 \frac{5x+2}{\sqrt[3]{(x^2-1)(x^3-1)}}\cdot dx$

4. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

Решить уравнения:

1. $(1+e^{-x})\cdot y'' = y';$
2. $yy''+(y')^2 = 3(y')^3$ при начальных условиях $y(0)=1,\ y'(0)=1.$
3. $x\cdot y''-y' = x^2\cdot e^x$ при начальных условиях $y(1)=0,\ y'(1)=e.$

5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома. Указать вид общего решения (без вычисления коэффициентов).

1. $y^{IV}+y'' = 7e^{-x}+x^4-3+5\cdot\cos x - x^2\sin x;$
2. $y'''-3y''+4y'-2y = x^4e^x+x^2e^x\cdot\cos x-3e^x\sin x+e^{-x}\cdot\cos 2x.$
3. Даны все корни характеристического уравнения для уравнения с постоянными коэффициентами $\lambda = 0;\ 1;\ 1;\ 2\pm i$ и правая часть уравнения $f(x) = e^{2x}\cdot\sin x$. Не определяя численного значения коэффициентов, написать вид общего решения.

6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод Лагранжа.

Решить уравнения:

1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;
2. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$;
3. Решить уравнение $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известно его частное решение соответствующего однородного уравнения: $y_1 = x$.