Билет 11

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение условного экстремума ФНП.
2. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f(u(x,y), v(x,y))$.
3. Сформулировать теорему о неявной функции.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sqrt{x+y-z} = e^{x-2y+z}$ в точке $(2,3,4)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 15xy$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ при условии

$$xy = 2.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Задача

8. На кривой

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 = 15$$

найти точки, наиболее удалённые от оси OX.

Билет 12

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение функции Лагранжа и множителей Лагранжа задачи на условный экстремум ФНП.
2. Записать формулу для вычисления производной сложной функции вида $u = f(x(t), y(t), z(t))$.
3. Сформулировать теорему Тейлора для функции двух переменных.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точке $(2,2,1)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + y^3 - 6xy$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - 5$ при условии

$$xy = 1.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Сформулировать теорему о неявной функции. Вывести формулы для частных производных неявной функции.

Задача

8. Найти те нормали к поверхности $x^2 + y^2 = 5z$, которые проходят через точку $(3, 9, -3)$.

Билет 1

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение открытой окрестности и открытого множества в $\mathbb{R}^n$.

2. Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$.

3. Сформулировать необходимые условия экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^3+z^3=5xyz$ в точке $(2,1,1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=4y^3+2xy+x^2+3$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z=1/x+1/y$ при условии

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. На гиперболическом параболоиде $xy+x+y-2z-5=0$ найти точку, наименее удалённую от точки $O(0,0,0)$.

Билет 2

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение предельной точки, граничной точки множества, и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.

2. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

3. Сформулировать достаточные условия экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=y+\ln\frac{x}{z}$ в точке $(1,1,1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=-11x^2+16xy-6y^2+66x-44y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z=4x^2+9y^2-16$ при условии

$$xy=\frac{3}{2}.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. Среди касательных плоскостей к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}=1$$

найти ту, которая отсекает от положительного октанта $x>0$, $y>0$, $z>0$ тетраэдр наименьшего объёма.

ФНП, РК2: для ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ; 2014-2015 уч. год

Билет 7

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение (полного) первого дифференциала ФНП.

2. Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

3. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ в точке $(1, 0, 2)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 2y - x^2$ при условии

$$y^2 = 2x - 1.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования (для вторых производных функции двух переменных).

Задача

8. На эллипсоиде

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1$$

найти точку, наиболее удалённую от точки $(1, -1, 0)$.

ФНП, РК2: для ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ; 2014-2015 уч. год

Билет 8

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение второго дифференциала ФНП и матрицы Гессе.

2. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

3. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1 = 0$ в точке $(1, 1, 1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2$ при условии

$$2x^2 + y^2 = 4.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу для дифференцирования сложной ФНП (можно ограничиться случаем функции вида $z = f(x(t), y(t))$).

Задача

8. Среди касательных плоскостей к поверхности

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 1, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0,$$

найти ту, которая отсекает от положительного октанта $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ тетраэдр наименьшего объёма.

Билет 3

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение ограниченного и связного множества в $\mathbb{R}^n$.
2. Перечислить основные свойства градиента ФНП.
3. Сформулировать необходимые условия условного экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xy + e^{xz} = 0$ в точке $(5, -1/5, 0)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 + xy + 2$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = e^x - y$ при условии

$$y - x = 5.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования (для вторых производных функции двух переменных).

Задача

8. В каких точках поверхности $xy + 2yz + 3zx + 6 = 0$ касательная плоскость параллельна одной из координатных плоскостей?

Билет 4

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение предела ФНП по множеству и непрерывной ФНП.
2. Записать уравнения касательной и нормали к поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

в точке (x_0, y_0, z_0).

3. Сформулировать достаточные условия условного экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ в точке $(1, 0, 1)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = 3\ln x + 4\ln y - xy - x - y$.
6. Исследовать на экстремум функцию $z = xy$ при условии

$$x^2 + y^2 = 6.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести формулу для дифференцирования сложной ФНП (можно ограничиться случаем функции вида $z = f(x(t), y(t))$).

Задача

8. Среди эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через точку $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ найти тот, который имеет наименьший объём.

Билет 9

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение градиента ФНП и производной ФНП по направлению.

2. Записать уравнения касательной и нормали к поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

в точке (x_0, y_0, z_0).

3. Сформулировать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $(1, 2, 3)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 3y^2 - 2x^2 - 4y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = x + 2y$ при условии

$$x^2 + 3y^2 = 21.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. Найти такие a, b, c, чтобы эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

касался плоскости $7x + 3y + z = 21$ в точке $(2, 2, 1)$.

Билет 10

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач; оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение (обычного) экстремума (локального максимума и минимума) ФНП.

2. Перечислить основные свойства градиента ФНП.

3. Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях того, чтобы выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ было полным дифференциалом.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ в точке $(1, 1, 2)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{x-y}$ при условии

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А; необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. Среди эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через точку $(\sqrt{7}, \sqrt{5}, \sqrt{3})$ найти тот, который имеет наименьший объём.

Билет 5

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение частной производной ФНП в точке.

2. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f(u(x,y), v(x,y))$.

3. Сформулировать теорему о связи непрерывности и дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $e^z - z + xy = 3$ в точке $(2,1,0)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - x - y^2 + 6y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + \sqrt{3}y + 2$ при условии

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Сформулировать теорему о неявной функции. Вывести формулы для частных производных неявной функции.

Задача

8. На кривой

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 7y + 19 = 0$$

найти точки, наименее удалённые от оси OX.

Билет 6

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 20 баллов

Теория

1. Дать определение дифференцируемой ФНП в точке.

2. Записать формулу для вычисления производной сложной функции вида $u = f(x(t), y(t), z(t))$.

3. Сформулировать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$ в точке $(1,0,-1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - 12xy + 17y^2 - 2y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = 4 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ при условии

$$xy = -2.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 4–12 баллов

Теория

7. Вывести уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Задача

8. Найти те нормали к поверхности $z^2 = x + y + 10$, которые проходят через точку $O(0,0,0)$.

7. Теорема о связи непрерывности и диф-сти ФНП

Если ф-ция $f(u)$ диф-ма в т. x_0, то она непрерывна в этой точке.

8. Т. о необходимых усл. диф-мости ФНП:

Если ф-ция $z = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ диф-ма в т. $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n_0})$, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по ~~об~~ всем независ. переменным. Причем

$$\left(f'_{x_1}(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n_0}) = A, \text{ а } f'_{x_2}(x_{10}, \dots x_{n_0}) = B \text{ и т.д.}\right)$$

все коэф. a_i в $\Delta f(x) = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \dots + a_n \Delta x_n + o(\rho)$ равны значениям ~~в~~ соотв. частных произв. в т. x:

$$a_i = f'_{x_i}(x), \quad i = \overline{1,n}$$

9. Т. о достаточных усл. диф-сти ФНП:

Если ф-ция $u = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ имеет частные производные по всем аргументам, в некоторой окрестности т. $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$, причем все эти частные произв. непрерывны в самой т. M_0, то указанная ф-ция диф-ма в т. M_0.

10. Первый диф-л ФНП:

Диф-лом du 1-го порядка ф-ции ~~f~~ $u = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ наз-ют выражение:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

11. Второй диф-л ФНП:

Диф-лом ~~du~~ 2-го порядка d^2u ф-ции $u = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ наз-ся диф-л от её диф-ла 1-го порядка, рассматриваемого как ф-ции переменных $x_1, x_2, \dots x_n$ при фикс. знач. $dx_1, dx_2 \dots dx_n$

$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta$

следует $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$

При этом пишут:

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

5. Частная производная ФНП в точке.

Пусть $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ - произвольная фикс. точка из области определения ф-ции $u = f(x_1 \ldots x_n)$. Придавая знач-ю переменной x_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ приращение Δx_k, рассм. предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots x_n)}{\Delta x_k}$$

Этот предел наз. частной произв. данной ф-ции по переменной x_k в точке $(x_1, \ldots x_n)$ и обознач. $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1 \ldots x_n)$.

6. Диф-мая ФНП в точке.

Ф-ция $u = f(P)$ наз-ся диф-мой в точке $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, если всюду в некот. окр-сти этой точки полное приращение ф-ции может быть представлено в виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \ldots A_n$ - числа, не зависящ. от $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$.

19. Формула производная ФНП по направлению:

Ф-ция $z=f(u)$, вектор $\bar{l}$ (напр-щий)

$$\frac{\partial z}{\partial l}=(\operatorname{grad} z, l_0) \text{ , где } \bar{l}_0=\frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}$$

20. Св-ва градиента:

1. Градиент направлен по нормали к пов-сти уровня (или к линии ур-ия)

2. Градиент напр. в сторону возр. ф-ции поля

3. Модуль гр. = наибольшей производной по напр. в данной т. поля

21.

22. Т. об условиях сущ-я касат. пл-сти к пов-сти, зад-й ур-ем $F(x,y,z)=0$.

Для сущ-ния касат. пл-сти к пов-сти $z=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ в т. $M(x_1^0,x_2^0,\dots x_n^0)$ необходимо и дост. диф-мости ф-ции $f(x_1,\dots x_n)$ в т. M.

14. Записать ф-лы для вычисл. частных произв. $z = f(u(x,y), v(x,y))$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

15. Запис. ф-лу для вычисл. произв. сложной ф-ции: $z = f(x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

16. Т о неявной ф-ции.

17. Запис. ф-лы для вычисл. частн. произв. неявной ф-ции $z(x,y)$, зад. ур-ем $F(x,y,z) = 0$:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad и \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

18. Градиент ФНП - вектор, координаты которого равны частным производным по соотв. аргументам.

$u = f(x,y,z)$ $\quad \overline{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$