кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 1

Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл, его свойства, связь с дифференциалом. Таблица основных неопределенных интегралов.

В дифференциальном исчислении рассматривались методы вычисления производной заданной функции. Теперь мы займемся обратной задачей:по данной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию, для которой $f(x)$ была бы производной.

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на одном и том же промежутке I.Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на этом промежутке,если для любого $x \in I$ существует производная $F'(x)$, равная $f(x)$.Для граничной точки (если она принадлежит I под $F'(x)$ понимается соответствующая односторонняя производная.

Пример. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для $f(x) = 3x^2$ на промежутке $-\infty < x < \infty$ функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на промежутке $-1 < x < 1$; функция $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ является первообразной для $f(x) = \sqrt{x}$ промежутке$[0; +\infty)$.

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$, где C — постоянная, также будет первообразной этой функции (т.к. $F'(x) = (F(x) + C)'$).

Далее, если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функции $f(x)$, то $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Поэтому в силу известного условия постоянства функции на промежутке разность $F(x) - G(x)$ является константой, т.е. $F(x) - G(x) = C$. Таким образом, вся совокупность первообразных функции $f(x)$ описывается выражением $F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-либо фиксированная первообразная, а C — произвольная постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ (на некотором промежутке) называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx;$$

при этом символ $\int$ называется *интегралом*; $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*; $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*; x *-переменной интегрирования.* Из вышесказанного следует, что если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ,$$

где C — произвольная постоянная. Восстановление функции по ее производной (или, что тоже самое, отыскание соответствующего неопределенного интеграла) называется интегрированием этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную по отношению к операции дифференцирования.
Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Пример. Проверим, что при $a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Имеем

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}.$$

Впоследствии будет доказано, что всякая функция, непрерывная на некотором промежутке, имеет на этом промежутке первообразную. Всюду в дальнейшем будем считать, что функции, стоящие под знаком интеграла,непрерывны; если же подынтегральная функция имеет точки разрыва, то будем рассматривать эту функцию лишь на тех промежутках, на которых она непрерывна.
Поэтому все первообразные, о которых будет идти речь, существуют, и мы не будем это каждый раз особо оговаривать.

Пример. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке I . Тогда, как известно из курса дифференциального исчисления, на любом промежутке $I_1 \subset I$, не содержащем нулей рассматриваемой функции, выполняется равенство

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Поэтому

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C;$$

в частности,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

причем применять последнюю формулу можно на любом промежутке, не содержащем нуля.
Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла, непосредственно вытекающие из соответствующего определения.
1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int F(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель, отличный от нуля, можно вынести за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \alpha \neq 0.$$

В самом деле, пусть

$$\int f(x)dx = F(x) + C;$$

тогда $\alpha F(x)$ -одна из первообразных функции $\alpha f(x)$, и

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha F(x) + C.$$

Поэтому доказываемое равенство принимает вид:

$$\alpha F(x) + C = \alpha \left(F(x) + C \right).$$

Такое равенство (понимаемое как равенство двух множеств функций) справедливо, т.к. если C пробегает множество всех вещественных чисел, то и αC при $\alpha \neq 0$ также пробегает это множество.

4. Неопределенный интеграл от суммы двух (или большего числа) функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то $F_1(x) + F_2(x)$ есть первообразная суммы $f_1(x) + f_2(x)$. Поэтому доказываемое равенство принимает вид

$$F_1(x) + F_2(x) + C = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2,$$

где C, C_1, C_2 независимо пробегают множество вещественных чисел; само равенство понимается как равенство двух множеств функций. Ясно, что сумму $C_1 + C_2$ в правой части можно "заменить на одну произвольную постоянную", и, следовательно, доказываемое равенство справедливо.
Вычисление неопределенных интегралов основано на применении таблицы основных интегралов и правил интегрирования.

Таблица интегралов

$$1. \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; 2. \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1; \qquad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$4. \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$5. \quad \int \sin x = -\cos x + C;$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$7. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$9. \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$10. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$$

$$11. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.$$

Полезно также помнить некоторые интегралы, содержащие гиперболические функции:

$$12. \quad \int \operatorname{sh} x dx = chx + C;$$

$$13. \quad \int \operatorname{ch} x dx == \operatorname{sh} x + C;$$

$$14. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$15. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Все приведенные формулы могут быть доказаны дифференцированием правых частей. Проверим, например, формулу 11; имеем

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

и мы видим, что данная формула справедлива.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 2

Интегрирование подстановкой и заменой переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.

Основными приемами вычисления интегралов являются подстановка и замена переменной.

Теорема (об интегрировании подстановкой).

Пусть функции φ и f определены соответственно на промежутках I_1 и I_2, φ дифференцируема на I_1 , причем $\varphi(x) \in I_2$ для любого $x \in I_1$. Пусть далее

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

на промежутке I_2. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$$

на промежутке I_1.

<u>Доказательство.</u>

Имеем $$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

и доказываемое равенство справедливо.

Отметим важный частный случай доказанной теоремы:

если

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0.$$

Особенно часто это замечание используется при $b = 0$ или при $a = 1$:

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C, \quad a \neq 0;$$
$$\int f(x+b)dx + F(x+b) + C.$$

Пример.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C;$$

аналогично

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

При практическом применении доказанной теоремы обычно используют формальный прием, называемый *"подведением под знак дифференциала"*:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C;$$

в простых случаях вспомогательную переменную $u = \varphi(x)$ не вводят,т.е. сразу пишут

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

Пример. Вычислим интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Имеем

$$I = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}(\operatorname{tg}\frac{x}{2})'dx = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Т.к. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,то отсюда

$$I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C.$$

Теорема (об интегрировании заменой переменной).

Пусть функция φ дифференцируема на промежутке I_1 и взаимно однозначно отображает его на промежуток I_2 , причем $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in I_1$. Пусть, далее, функция f определена на I_2 . Тогда, если на промежутке I_1

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C,$$

то на промежутке I_2

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

где $\varphi^{-1}(x)$ - функция, обратная к функции $\varphi(t)$.

Доказательство.

Из условий теоремы следует, что функция $\varphi^{-1}(x)$ дифференцируема, и

$$(\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

Поэтому

$$\big(F(\varphi^{-1}(x))\big)' = F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x).$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Пример. Пусть требуется вычислить

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \qquad -a < x < a, \qquad a > 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = a \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Нетрудно проверить, что все условия последней теоремы выполнены. Имеем

$$\int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C.$$

Заменяя в последнем выражении t на $\varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$, получаем

$$I = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

Теорема (об интегрировании по частям).

Пусть функции u и v дифференцируемы на промежутке I ,и функция $u' \cdot v$ имеет на этом промежутке первообразную. Тогда

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx.$$

Доказательство.

Запишем правило дифференцирования произведения:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Отсюда

$$\int u' \cdot v dx = \int ((uv)' - uv') dx = uv - \int u \cdot v' dx.$$

Теорема доказана.

Примеры.

1. Рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int bx dx \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Имеем

$$I_1 = \int e^{ax} \left(\frac{\sin bx}{b}\right)' dx = e^{ax} \cdot \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} I_2;$$

$$I_2 = \int e^{ax} \left(-\frac{\cos bx}{b}\right)' dx = -e^{ax} \cdot \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx = -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} I_1.$$

Т.о., для нахождения I_1 и I_2 получаем такую систему:

$$I_1 = e^{ax} \frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b} I_2,$$
$$I_2 = -e^{ax} \frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b} I_1.$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$I_2 + \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Рассмотрим теперь некоторые интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

Пусть $$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \quad a \neq 0.$$

Вычислим вспомогательный интеграл:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то, обозначив

$$k^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{и} \quad u = x + \frac{b}{2a},$$

получим

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 - k^2} = \frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{u - k}{u + k} \right| + C;$$

если же $D < 0$, то $k^2 = -D$, и

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + k^2} = \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} \frac{u}{k} + C.$$

При $D = 0$ имеем

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{au} + C.$$

Т.о., остается лишь вернуться к прежней переменной x .

Вычисление интеграла I можно свести к вычислению I_1 :

$$I = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \cdot I_1;$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Аналогично вычисляется и интеграл

$$J = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

Вычислим вспомогательный интеграл

$$J_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}} = \int \frac{du}{\sqrt{a(u^2 \pm k^2)}},$$

где $\qquad u = x + \dfrac{b}{2a}, \qquad k = \dfrac{|b^2-4ac|}{4a^2};$

при $D = b^2 - 4ac > 0$ под радикалом в последнем интеграле берется знак "-", а при $D < 0$ - знак "+". В результате дело сводится к вычислению табличных интегралов вида

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}}, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} \quad \text{или} \quad \int \frac{du}{|u|} = \pm \int \frac{du}{u};$$

знак перед последним интегралом выбирается в зависимости от расположения промежутка интегрирования относительно нуля.

Вычисление интеграла J сводится к вычислению J_1 :

$$J = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) J_1;$$

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 3

Рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших (без доказательства). Интегрирование простейших дробей. Интегрирование правильных и неправильных рациональных дробей.

Отношение двух многочленов

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0},$$

где $Q(x) \not\equiv 0$, называется рациональной дробью. Мы будем предполагать, что коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ вещественны.
Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь называется правильной; в противном случае - неправильной. Если дробь является неправильной, то, разделив числитель на знаменатель, мы представим такую дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Поскольку интегрирование многочлена не представляет трудностей, мы ограничимся рассмотрением вопроса об интегрировании правильных дробей.

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-\alpha)^m} \quad \text{и} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}, \quad m,n = 1,2,...,$$

называются простейшими. При этом предполагается, что $A \neq 0$, $B^2 + C^2 > 0$, и квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней. Займемся сначала интегрированием простейших дробей. Имеем

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A \cdot \ln|x-\alpha| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}dx = -\frac{A}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + C, \quad m = 2,3,....$$

Интегралы от дробей

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

мы уже рассматривали. Действуя в том же духе, получаем

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx \ = \ \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p) \ + \ C \ - \ \frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx \ = \ \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} \ +$$

$$+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = -\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+$$
$$+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

и дело сводится к вычислению интеграла

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$I_n=\int\frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}.$$

Т.к. по предположению квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней, то мы можем обозначить $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$. После замены $t=x+\frac{p}{2}$ мы получим такой интеграл:

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

При $n=1$ имеем табличный интеграл:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Далее, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_n=\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}(t)'dt=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1}.$$

Отсюда такое рекуррентное соотношение:

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n,$$

которое позволяет, зная I_1 , в принципе найти I_n при любом натуральном n . Например,

$$I_2=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}+C.$$

Т.о., мы можем проинтегрировать любую простейшую дробь.
Напомним некоторые сведения из алгебры многочленов. Всякий многочлен

$$Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0,\quad a_n\neq 0,$$

степени n с вещественными коэффициентами мбыть представлен в виде

$$Q(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},\qquad (*)$$

где $\alpha_1,...,\alpha_r,p_1,...,p_s,q_1,...,q_s-$ вещественные числа; квадратные трехчлены не имеют вещественных корней, и $k_1+...+k_r+2(l_1+...+l_s)=n.$

При этом если многочлен $Q(x)$ не имеет вещественных корней, то в написанном разложении отсутствуют линейные множители, а если все корни этого многочлена вещественны, то отсутствуют квадратные трехчлены. Отметим еще, что разложение (*) единственно (с точностью до порядка сомножителей).

В курсе высшей алгебры доказывается, что всякая правильная рациональная дробь $P(x)/Q(x)$, знаменатель которой записывается в виде (*), следующим образом представляется в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + ... + \frac{A_{r_1}}{x-\alpha_r} + ... + \frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} +$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + ... + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)_{l_1}} + ... + \frac{B_{s_1}x+C_{s_1}}{x^2+p_sx+q_s} + ... + \frac{B_{sl_s}x+C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} \quad (**)$$

Такое представление единствнно (с точностью до порядка слагаемых). Мы видим, таким образом, что для того, чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь, следует найти для знаменателя разложение (*), а затем представить эту дробь в виде (**). После этого задача сведется к интегрированию простейших дробей. Чтобы фактически найти разложение (**), рекомендуется записать правую часть с неопределенными коэффициентами, затем выполнить сложение написанных дробей и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях в числителях левой и правой частей получившегося равенства. Для нахождения неопределенных коэффициентов образуется система линейных уравнений; эта система всегда совместна (и более того, можно доказать, что она имеет единственное решение). При решении этой системы можно использовать и дополнительные равенства, получающиеся из(**) подстановкой вместо x каких-либо конкретных значений.

Пример. Требуется проинтегрировать рациональную дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 5}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

В данном случае степень числителя больше степени знаменателя; разделим числитель на знаменатель, пользуясь известным алгоритмом:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -x^4 & +2x^3 & -x^2 & +x & +5 & x^4-x^3-x+1 \\
\cline{7-7}
2x^5 & -2x^4 & & -2x^2 & +2x & & 2x+1 \\
\cline{1-5}
& x^4 & +2x^3 & +x^2 & -3x & +5 & \\
& x^4 & -x^3 & & -x & +1 & \\
\cline{2-6}
& & 3x^3 & +x^2 & -2x & +4. &
\end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x + 1 + \frac{3x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

Далее, разложим на линейные и квадратичные множители знаменатель, заметив, что $x = 1$ - его корень. Имеем

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1);$$

т.к. квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не имеет вещественных корней, то требуемое разложение получено. Запишем теперь разложение выделенной ранее правильной дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{3x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

Выполнив сложение дробей в правой части и приравняв числители слева и справа, получим

$$3x^3 + x^2 - 2x + 4 = A(x^3 - 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1).$$

Отсюда

$$\begin{array}{c|r} x^3 & 3 = A + C \\ x^2 & 1 = B + D - 2C \\ x & -2 = B + C - 2D \\ 1 & 4 = -A + B + D. \end{array}$$

Сложив все уравнения, получим, что $3B = 6$, т.е. $B = 2$. Подставим это значение B во второе и третье уравнения системы:

$$D - 2C = -1C - 2D = -4.$$

Отсюда $C = 2,\ D = 3;$ из первого уравнения системы находим $A = 1$. Окончательно получаем такое равенство

$$\frac{3x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}.$$

Для исходной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 5}{x^4 - x^3 - x + 1} = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}.$$

Здесь заслуживает внимания лишь интеграл

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + 2 \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \ln(x^2 + x + 1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Для интеграла от рациональной функции $P(x)/Q(x)$ имеем следовательно, такое выражение

$$\int \frac{2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 5}{x^4 - x^3 - x + 1} dx = x^2 + x + \ln|x - 1| -$$

$$- \frac{2}{x - 1} + \ln(x^2 + x + 1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 4

Интегрирование выражений, рационально зависимых от тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Через $R(x, y, ..., t)$ будем обозначать рациональную функцию указанных аргументов (т.е. отношение двух многочленов от этих аргументов). Выше мы научились интегрировать рациональные функции. В дальнейшем основным приемом интегрирования функций различных классов будет применение таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду. Этот прием называется рационализацией подынтегрального выражения.
Интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \qquad (*)$$

подстановкой

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi,$$

сводится к интегралу от рациональной функции.В самом деле,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Рассмотренная подстановка называется универсальной.

Пример. Применим универсальную подстановку для вычисления интеграла

$$I = \int \frac{dx}{1 + 3\cos x}.$$

Имеем

$$I = \int \left(1 + 3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^{-1} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{2-u^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \right| + C.$$

При вычислении интеграла (*) часто используют также подстановки

$$u = \cos x, \quad u = \sin x, \quad u = \operatorname{tg} x.$$

В некоторых случаях применение этих подстановок оказывается более выгодным, чем применение универсальной подстановки. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \cdot \sin^n x dx,$$

где m и n - целые числа. Пусть сначала n - нечетное число; тогда

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \cdot \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = -\int \cos^m x \cdot (1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} d\cos x =$$

$$= -\int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du,$$

где $u = \cos x$. Если нечетным является m, то применяем подстановку $u = \sin x$. Если m и n являются четными, то, поскольку

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

можно применить подстановку $u = \operatorname{tg} x$. В этом случае $x = \operatorname{arctg} u, \quad dx = \dfrac{du}{1+u^2}$, и мы получаем, что

$$I_{m,n} = \int \left(\frac{1}{1+u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{u^2}{1+u^2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{du}{1+u^2},$$

т.е. дело сводится к интегрированию рациональной функции. Если оба числа m и n являются нечетными, то можно применить подстановку $u = \cos 2x$. В самом деле,

$$I_{m,n} = \int (\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos x \cdot \sin x dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} d\cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1+u}{2} \right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{1-u}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} du,$$

и получился интеграл от рациональной функции, т.к. показатели степени $\dfrac{m-1}{2}$ и $\dfrac{n-1}{2}$ являются целыми числами (быть может, отрицательными).

Пример. Применим последний прием для вычисления интеграла

$$I_{9,7} = \int \cos^9 x \cdot \sin^7 x dx.$$

Имеем

$$I_{9,7} = \int (\cos^2 x)^4 \cdot (\sin^2 x)^3 \cdot \cos x \cdot \sin x dx = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1+u}{2} \right)^4 \cdot \left(\frac{1-u}{2} \right)^3 du =$$

$$= -\frac{1}{2^9}\int (1+u)(1-u^2)^3 du = -\frac{1}{512}\left(\int (1-u^2)^3 du + \int (1-u^2)^3 u du\right) =$$

$$= -\frac{1}{512}\left(\int (1-3u^2+3u^4-u^6) du - \frac{1}{2}\int (1-u^2)^3 d(1-u^2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{512}\left(u - u^3 + \frac{3}{5}u^5 - \frac{u^7}{7} - \frac{(1-u^2)^4}{8}\right) + C, \qquad u = \cos 2x.$$

Интегралы $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx$ и $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$ вычисляются с помощью формул элементарной тригонометрии:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x),$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x),$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x).$$

Например,

$$\int \sin 2x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x dx + \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{r_n}\right) dx, \qquad \text{где}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0; \quad r_1, ..., r_n - \text{рациональные числа}, m - \text{их общий}$$

наименьший знаменатель.

Пусть

$$t = \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{m}};$$

тогда

$$x = r(t) = \frac{\delta tm - \beta}{\alpha - \gamma t^m}; \qquad dx = r'(t)dt,$$

и мы получаем, что

$$I = \int R(r(t), t^{mr_1}, ..., t^{mr_n}) r'(t) dt,$$

после чего дело сводится к интегрированию рациональной функции.

Пример. Пусть

$$I = \int \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}.$$

Тогда, применяя указанную выше подстановку, получаем

$$t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad x = \frac{t^4+1}{t^4-1}, \qquad dx = \frac{-8t^3 dt}{(t^4-1)^2};$$

$$I=\int t\cdot\frac{t^4-1}{2t^4}\cdot\frac{-8t^3dt}{(t^4-1)^2}=-4\int\frac{dt}{t^4-1}=-2\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+2\operatorname{arctg}t+C,\qquad t=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Рассмотрим теперь интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$;разберем два случая. Пусть сначала квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней; в этом случае $a>0$, и имеет смысл подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x.$$

Тогда
$$ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}\cdot tx+ax^2;$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b};\qquad dx=\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}\right)'dt;$$

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b};\quad t-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}\right)\cdot\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}\right)'dt,$$

и дело сводится к интегрированию рациональной функции. Рассмотренная подстановка является одной из подстановок Эйлера.

Пример. Пусть
$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

Применим подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+1}=t-x,\qquad x=\frac{t^2-1}{t},\qquad dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt;$

$$I=\int\frac{2t}{t^2-1}\left(t-\frac{t^2-1}{2t}\right)^{-1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$$

Пусть теперь квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет два вещественных корня, т.е.

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}=|x-\lambda|\cdot\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}},$$

и мы имеем интеграл уже рассмотренного типа:

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}dx=\int R\left(x,\ |x-\lambda|\cdot\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right)dx.$$

Здесь рационализация достигается подстановкой

$$t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}.$$

В заключении отметим, что многие интегралы от элементарных функций не выражаются через элементарные функции; таковы, например,встречающиеся в приложениях интегралы $\int e^{-x^2}dx,\ \int\cos x^2dx,\ \int\sin x^2dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{dx}{\ln x}$ и др.

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 5-6

Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Теорема об интегрируемости кусочно-непрерывной функции (без доказательства). Геометрическая интерпретация определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Теоремы об оценке и о среднем значении.

Множество точек $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ называется разбиением отрезка $[a,\ b]$; отрезки $[x_{i-1},\ x_i],\quad i = 1, ..., n,$ называются отрезками разбиения; длина $i-$го отрезка разбиения обозначается Δx_i т.е. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; число $\lambda(\tau) = \max\limits_i \Delta x_i$ называется диаметром разбиения.

Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана функция $f(x)$. Выберем произвольно точки $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i],\quad i = 1, ..., n,$ и составим сумму

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которая называется интегральной суммой функции $f(x)$, отвечающей разбиению τ и точкам $\xi_1, ..., \xi_n,$ выбранным на отрезках разбиения. Предел интегральных сумм $\sigma(\tau)$ при условии, что диаметр разбиения $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$, называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$. Этот предел (если он существует и не зависит от выбора точек ξ_i) обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

в котором a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Более точно определение предела интегральных сумм выглядит так.

Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(\tau)$ при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения τ , для которого $\lambda(\tau) < \delta$ при любом выборе точек на отрезках разбиения выполняется неравенство

$$|I - \sigma(\tau)| < \varepsilon.$$

Это же определение, как и в случае предела функций, можно записать и на языке последовательностей.

Примеры.

1. Пусть $f(x) \equiv C$ на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = C(b-a).$$

Мы видим, что в данном случае интегральные суммы не зависят от способа разбиения отрезка и выбора точек на отрезках разбиения. Поэтому предел таких сумм (при условии, что диаметр разбиения стремится к нулю) равен $C(b-a)$; этому же числу равен и соответствующий интеграл:

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

2. Пусть $f(x) = x$ на отрезке $[a, b]$. Можно доказать, что интеграл $\int_a^b x dx$ существует. Поэтому предел интегральных сумм не зависит от выбора точек на отрезках разбиения, и , следовательно, данный интеграл равен пределу полусуммы двух интегральных сумм:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Отсюда ясно, что

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

.

3. Рассмотрим функцию Дирихле

$$\chi(x) \ = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Для любого отрезка $[a, b]$ и для любого его разбиения τ , выбрав все точки на отрезках разбиения рациональными, получим, как и выше, что

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Выбрав указанные точки иррациональными, получим,что

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Нетрудно проверить, что теорема о единственности предела справедлива и для пределов интегральных сумм. Поэтому для функции Дирихле интегральные суммы не имеют предела (при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$), и эта функция неинтегрируема.
В связи с последним примером возникает вопрос об условиях интегрируемости функции.

Теорема (о необходимом условии интегрируемости функции).
Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена (на этом отрезке).
В связи с этой теоремой (на доказательство которой у нас нет времени) заметим, что одной лишь ограниченности еще недостаточно для интегрируемости функции - в этом можно

убедиться на примере функции Дирихле.
Пусть снова имеется функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$. Эта функция называется кусочно-непрерывной на этом отрезке, если существует разбиение

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

такое, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале $(x_{i-1},\ x_i)$, и при этом существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_i-0} f(x), \quad i = 1, 2, ..., n.$
Иными словами, функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f(x)$ имеет разрывы 1-го рода. В частности, непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция кусочно- непрерывна на этом отрезке.

Теорема (об интегрируемости кусочно-непрерывной функции).
Если функция кусочно-непрерывна на некотором отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.
Эту теорему принимаем без доказательства. Из нее следует, что непрерывная на отрезке функция интегрируема (на этом отрезке). Заметим еще, что кусочная непрерывность функции не является необходимым условием интегрируемости.
Рассмотрим геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Пусть дана геометрическая фигура, ограниченная сверху графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, с боков отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ и снизу отрезком $[a,b]$ оси абсцисс. Такая фигура называется криволинейной трапецией (рис. 1).

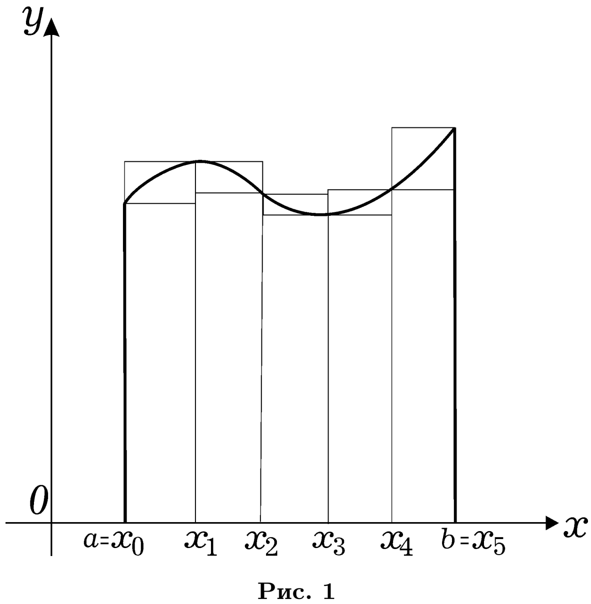

Рис. 1

Вычислим площадь S криволинейной трапеции. Для этого возьмем разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ на отрезке $[a,b]$ и выберем на отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ точки ξ_i и η_i, в которых достигается соответственно минимальное и максимальное значения непрерывной на этом отрезке функции $f(x); \quad i = 1, 2, ..., n.$ Обозначив через S_i площадь криволинейной трапеции, отвечающей изменению x на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, запишем очевидное неравенство

$$f(\xi_i)\Delta x_i \ \leqslant\ S \ \leqslant\ f(\eta_i)\Delta x_i.$$

Просуммируем такие неравенства по $i = 1, 2, ..., n.$ Т.к. $\sum_{i-1}^{n} S_i = S$, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ \leqslant\ S \ \leqslant\ \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i.$$

Поскольку непрерывная функция интегрируема,то при стремлении диаметра разбиения к нулю получаем отсюда, что

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant S \leqslant \int_a^b f(x)dx.$$

Следовательно, $S = \int_a^b f(x)dx.$ Т.о., интеграл от неотрицательной непрерывной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла.

1. Линейность. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, и пусть α_1 и α_2 - произвольные вещественные числа. Тогда функция $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, и

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

Для доказательства запишем очевидное равенство для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_1 f_1(\xi_i) + \alpha_2 f_2(\xi_i))\Delta x_i = \alpha_1 \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$, получаем требуемое. Заметим, что просто сослаться на известные теоремы из теории пределов мы здесь не можем, т.к. понятие предела интегральных сумм не сводится непосредственно к понятию предела функции. При более подробном изложении следовало бы рассмотреть несколько теорем о свойствах пределов интегральных сумм (при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$).

2. Аддитивность. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ очевидна в случае кусочно-непрерывной функции; в общем случае оставляем этот факт без доказательства. Поскольку $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то при составлении интегральной суммы для интеграла из левой части доказываемого равенства можно считать, что соответствующее разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = c = y_0 < y_1 < ... < y_m = b$ содержит точку c . Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{j=1}^m f(\eta_j)\Delta y_j$$

будет интегральной суммой для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и одновременно суммой интегральных сумм для интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx.$

После перехода к пределу при $max\ \Delta x_i \longrightarrow 0$ и $max\ \Delta y_j \longrightarrow 0$ получим требуемое. Можно доказать, что на самом деле определенный интеграл является аддитивной функцией ориентированного промежутка. Для того, чтобы сформулировать соответствующее свойство, распространим понятие определенного интеграла на случай $a > b$ (т.е. на случай, когда нижний предел интегрирования больше верхнего) с помощью равенства

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx;$$

при $a = b$ будем считать, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = 0.$$

При таком обобщении понятия интеграла справедливо следующее утверждение.
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке I, и если $a, b, c -$ произвольные точки этого отрезка, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

причем, разумеется, все написанные интегралы существуют.
Для доказательства следует рассмотреть все возможные случаи расположения точек a, b, c на отрезке I (при этом, если среди точек a, b, c есть совпадающие, то получается очевидное равенство, а если все эти точки различны, то доказываемое равенство очевидным образом следует из установленного выше свойства "обычной" аддитивности определенного интеграла).
3. <u>Интегрирование неравенств.</u> Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, и пусть в каждой точке x этого отрезка выполняется неравенство $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)dx. \qquad (*)$$

Для доказательства, как обычно, запишем соответствующее соотношение для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя здесь к пределу, получим требуемое.
Если на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

то из (*) следует, что

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

4. <u>Неравенство для абсолютных величин.</u> Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx. \qquad (**)$$

Факт интегрируемости функции $|f(x)|$ нетрудно доказать для кусочно-непрерывной функции $f(x)$; в общем случае принимаем это без доказательства. Запишем очевидное неравенство для интегральных сумм:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при стремлении к нулю диаметра разбиения, получаем требуемое. Заметим, что (**) можно обобщить и на случай $a \geqslant b$; в этом случае соответствующее неравенство приобретает вид:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Рассмотрим еще теорему о среднем для определенного интеграла.

Теорема (о среднем). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то эта функция достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшнго значения M и принимает все значения из отрезка $[m,M]$. Далее, из неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$ получаем, что

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a),$$

или

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

Поэтому существует число $\xi \in [a,b]$ такое, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Отсюда легко следует требуемое. Теорема доказана.

Геометрический смысл доказанной теоремы заключается в том, что на отрезке $[a,b]$ найдется точка ξ такая, что площадь соответствующей криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$; при этом предполагается, что $f(x)$ неотрицательна на $[a,b]$ (рис. 2).

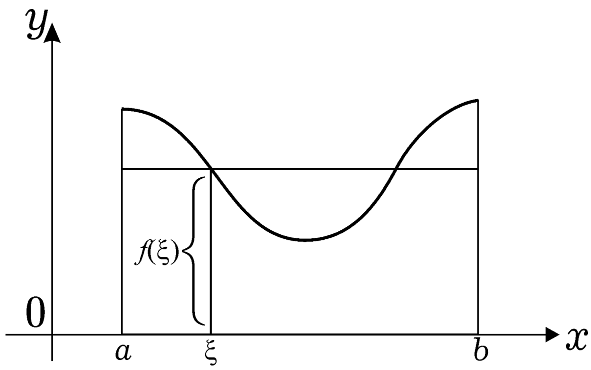

Рис. 2

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 7

Определенный интеграл с переменным верхним пределом и теорема о его производной. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то, как отмечалось выше, для любого x , $a \leqslant x \leqslant b$, существует интеграл

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \qquad (*)$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом).
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$, определяемая равенством $(*)$, непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть x и $x+\Delta x$ - точки отрезка $[a,b]$. Т.к. $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и, следовательно, ограничена на этом отрезке, то существует число M такое, что для любого $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M.$ Поэтому

$$|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leqslant \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leqslant \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} M dt \right| = M \cdot |\Delta x|,$$

т.е. $|F(x+\Delta x) - F(x)| \leqslant M|\Delta x| \to 0$ при $\Delta x \to 0,$ и функция непрерывна в точке x . Теорема доказана.

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом).
Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в некоторой точке x этого отрезка. Тогда функция (*) дифференцируема в точке x , и $F'(x) = f(x).$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right) = 0. \qquad (**)$$

Оценим сверху модуль выражения под знаком предела в левой части этого равенства; имеем

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dt\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x}(f(t)-f(x))dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\left|\int\limits_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|dt\right|.$$

Т.к. функция f непрерывна в точке x , то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом t, $|t-x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(t)-f(x)| < \varepsilon/2$.

Поэтому для указанных t

$$\left|\int\limits_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot|\Delta x|.$$

Окончательно

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot|\Delta x| < \varepsilon,$$

если $|\Delta x| < \delta$. Это означает справедливость (**). Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную. В качестве такой первообразной можно взять, например, интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a). \qquad (*)$$

Доказательство. Одной из первообразных функции $f(x)$ является

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt;$$

две первообразные функции $f(x)$ различаются самое большее на константу, т.е.

$$\Phi(x) - \int\limits_a^x f(t)dt = C.$$

Подставляя сюда $x = a$, получаем, что $C = \Phi(a)$. Поэтому

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)-\Phi(a).$$

При $x = b$ получаем требуемую формулу. Теорема доказана.
Доказанную теорему часто называют основной теоремой интегрального исчисления. Формула (*) называется формулой Ньютона-Лейбница; эту формулу часто записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

правую часть при этом называют двойной подстановкой от a до b . Заметим еще, что формула Ньютона-Лейбница справедлива и при $a \geqslant b$.

Примеры.

1. $\int\limits_a^b xdx = \dfrac{x^2}{2}\Big|_a^b = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$ - результат, не без труда полученный нами ранее.

2. $\int\limits_1^x \dfrac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^x = \ln x;$

это равенство справедливо при любом $x > 0$.

Теорема (о замене переменной в определенном интеграле). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке I , а функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке α, β , причем $\varphi(t) \in I$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда, если $a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Доказательство. В силу сделанных предположений оба интеграла, входящие в последнее равенство, существуют. Пусть $F(x) -$ первообразная функции $f(x)$ на отрезке I ; эта первообразная существует в силу непрерывности $f(x)$ на I .
Тогда $F(\varphi(t))$ будет первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, что проверяется непосредственно. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из двух написанных равенств следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема (интегрирование по частям для определенного интеграла). Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = u(x) \cdot v(x) - \int\limits_a^x u'(t) \cdot v(t) dt;$$

имеем

$$F'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Следовательно, $F(x) -$ первообразная для $u(x) \cdot v(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = F(x)\Big|_a^b = \Big(u(x) \cdot v(x) - \int\limits_a^x u'(t) \cdot v(t) dt\Big)\Big|_a^b =$$

$$= u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \sin x dx.$$

Имеем

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} (-\cos x)' dx = -\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln \sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{2}{\sqrt[4]{27}}.$$

Функция $f(x)$, заданная на всей вещественной прямой, называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Теорема(об интеграле от периодической функции).Если периодическая с периодом $T > 0$ функция $f(x)$ интегрируема на каком-либо отрезке длины T , то она интегрируема на любом отрезке, и интеграл

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx$$

не зависит от α .

Доказательство. Для упрощения доказательства предположим дополнительно, что $f(x)$ непрерывна при всех x . Напишем очевидное равенство:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} = \int\limits_{\alpha}^{0} + \int\limits_{0}^{T} + \int\limits_{T}^{\alpha+T}.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx \ = \int\limits_{0}^{\alpha} f(u+T)du = \int\limits_{0}^{\alpha} f(u)du.$$

Следовательно, в равенстве (*)

$$\int\limits_{\alpha}^{0} + \int\limits_{T}^{\alpha+T} = 0, \quad \text{и} \quad \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} = \int\limits_{0}^{T}.$$

Теорема доказана.

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\alpha;\ \alpha]$. Тогда

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int\limits_{-\alpha}^{0} + \int\limits_{0}^{\alpha}.$$

Предположив, что функция $f(x)$ непрерывна, сделаем в первом интеграле замену $x = -t$; получим:

$$\int\limits_{-\alpha}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{\alpha}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{\alpha} f(-t)dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\alpha} (f(x) + f(-x))dx.$$

Поэтому в случае четной функции

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\alpha} f(x)dx,$$

а в случае нечетной

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0.$$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 8

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку (1-го рода). Несобственные интегралы от неограниченных функций на отрезке (2-го рода).

Определенный интеграл от неограниченной на отрезке функции не существует; функцию, заданную на неограниченном промежутке, нельзя проинтегрировать по этому промежутку. Эти ограничения оказываются неудобными при рассмотрении многих теоретических и прикладных задач. Поэтому возникает необходимость расширить понятие интеграла. Это делается с помощью дополнительного предельного перехода.

Рассмотрим сначала интегралы по неограниченному промежутку.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда на промежутке $[a, +\infty)$ определена функция

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует (конечный) предел

$$\lim_{b\to+\infty} F(x), \qquad (*)$$

то этот предел называется несобственным интегралом (1-го рода) от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx.$$

В случае существования предела (*) последний интеграл называют сходящимся, в противном случае - расходящимся.

Если $f(x) \geqslant 0$ и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, то значение этого интеграла можно истолковать геометрически как площадь бесконечной криволинейной трапеции (рис. 1).

Для функции $f(x)$, заданной для $x \leqslant b$ и интегрируемой на любом отрезке $[a, b]$, можно рассмотреть несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

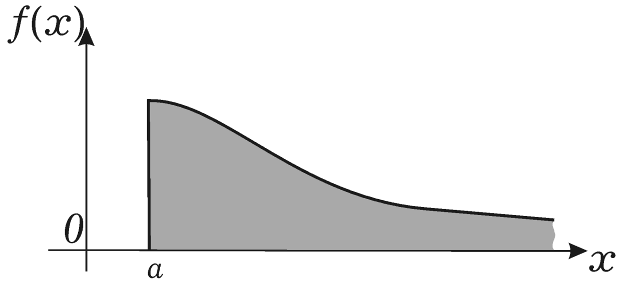

Рис. 1

Если же функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, то, выбрав произвольно точку c на этом отрезке, можно рассмотреть несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Такой интеграл считается сходящимся, если существуют оба предела в правой части последнего равенства. Нетрудно проверить, что сходимость (т.е. существование) интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ и его значение не зависят от выбора точки c .

Из определений несобственных интегралов следует, что для непрерывной функции $f(x)$ в случае сходимости соответствующих интегралов справедливы следующие обобщения формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{\infty},$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty},$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на соответствующем промежутке;

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x), \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ получаем

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{1}^{\infty} = \infty.$$

Итак, интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α и расходится при $\alpha \leqslant 1$.
Свойства несобственных интегралов вытекают из известных свойств пределов и определенных интегралов.
В перечисленных ниже свойствах 1-3 будем считать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены при $x \geqslant a$ и интегрируемы на любом отрезке $[a, b]$.

1. *Аддитивность.* Пусть $c \in [a, +\infty)$. Тогда несобственные интегралы

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_c^\infty f(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости

$$\int\limits_a^\infty = \int\limits_a^c + \int\limits_c^\infty .$$

В самом деле,

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b .$$

Переходя здесь к пределу при $b \to \infty$, получаем требуемое.

2. *Линейность.* Пусть существуют интегралы

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Тогда для любых вещественных чисел α и β существует интеграл от функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$ по промежутку $[a, \infty)$, причем

$$\int\limits_a^\infty (\alpha f(x) \ + \ \beta g(x))dx \ = \ \alpha \int\limits_a^\infty f(x)dx \ + \ \beta \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из определения несобственных интегралов.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, \infty)$, и пусть для любого x из этого промежутка $f(x) \leqslant g(x)$.
Тогда

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx \ \leqslant \ \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Доказательство очевидно.
Рассмотрим несобственные интегралы 2-го рода. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале вида $(b-\epsilon, \ b)$, $\quad 0 < \epsilon < b-a$. Предположим далее, что эта функция интегрируема на отрезке $[a, \eta]$ при любом $\eta < b$.
Предел (если он существует)

$$\lim_{\eta \to b-0} f(x)dx \qquad\qquad (*)$$

называется несобственным интегралом (2-го рода) от (неограниченной) функции $f(x)$ по промежутку $[a, b)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Можно доказать, что если при выполнении прочих перечисленных выше условий функция $f(x)$ ограничена на $[a, b)$, то после доопределения этой функции при $x = b$ любым значением получается интегрируемая на $[a, b]$ функция, причем интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен пределу (*). Поэтому новое понятие получается лишь для функции $f(x)$, неограниченной на любом интервале вида $(b - \varepsilon,\ b)$. Геометрически несобственный интеграл рассматриваемого вида истолковывается как площадь неограниченной криволинейной трапеции (рис. 2).

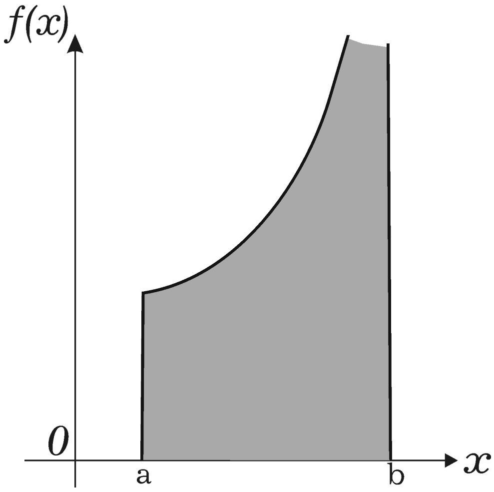

Рис. 2

Если функция $f(x)$ задана на полуинтервале $(a, b]$ и не ограничена на интервале $(a,\ a + \varepsilon)$ при любом ε, $0 < \varepsilon < b - a$, и при этом интегрируема на любом отрезке $[\xi, b]$, $\xi > a$, то можно рассмотреть предел

$$\lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^b f(x)dx.$$

В случае существования этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $(a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

В случае неограниченности функции $f(x)$, заданной на интервале (a, b), в соответствующих полуокрестностях точек a и b, можно рассмотреть интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^c f(x)dx + \lim_{\eta \to b-0} \int_c^\eta f(x)dx, \qquad (*)$$

который существует тогда и только тогда, когда существуют оба предела в правой части. Как и в случае несобственных интегралов 1-го рода, можно доказать, что значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)$ не зависит от выбора точки c.

Разумеется, при рассмотрении последнего интеграла предполагалось, что функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$. Для несобственных интегралов 2-го рода справедлива обобщенная формула Ньютона-Лейбница; для интеграла (*) эта формула имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0),$$

где функция $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $F(x)$ − первообразная этой функции на указанном интервале; $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$, $\quad F(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x)$.

Примеры.

1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$ является функция $F(x) = \arcsin x$. Поэтому

$$I = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

2. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Несобственным такой интеграл является при $\alpha > 0$. Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \infty.$$

Т.о., рассматриваемый интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Свойства несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны свойствам интегралов по неограниченным промежуткам.

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 9-10

Признаки сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости. Несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Поскольку вычислить несобственный интеграл удается далеко не всегда, основное внимание уделяется вопросам сходимости.

Рассмотрим сначала неотрицательную функцию $f(x)$, заданную при $x \geqslant a$ и интегрируемую на любом отрезке $[a, b]$. В этом случае функция

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

будет неубывающей на промежутке $[a, +\infty)$; применяя известный признак существования предела монотонной функции, получаем отсюда, что предел

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = \int\limits_a^\infty f(x)dx \qquad (**)$$

существует тогда и только тогда, когда $F(b)$ ограничена при всех достаточно больших b. Рассмотрим теоремы, в которых используется последнее замечание.

Теорема (признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ при любом b, и пусть для любого $x \geqslant a$ выполняется неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, следует расходимость $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

Доказательство. Из неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ следует, что для любого b

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если второй из этих интегралов сходится, то, ввиду неотрицательности $g(x)$ для некоторой константы C при всех $b \geqslant a$ выполняется неравенство

$$\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant C.$$

Но тогда из предыдущего неравенства для интегралов следует, что при $b \geqslant a$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant C.$$

Отсюда вытекает сходимость последнего интеграла.
Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится, то мы получаем противоречие с только что доказанным. Поэтому расходимость первого интеграла влечет расходимость второго.
Теорема доказана.

Пример. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}}$. Известно, что интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x}$ расходится. Поэтому из неравенства $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}}$ следует расходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{\ln x + 1}}$.

Теорема (признак сравнения в предельной форме). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны при $x \geqslant a$ и интегрируемы на любом отрезке $[a, b]$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 < K < \infty,$$

то интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. В теореме содержатся четыре утверждения. Докажем лишь одно из них: если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{K}{2} > 0$. Тогда при всех $x \geqslant \Delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad K - \varepsilon \ < \ \frac{f(x)}{g(x)} \ < \ K + \varepsilon.$$

Т.к. $K - \varepsilon = \dfrac{K}{2}$, то отсюда следует, что при всех указанных x выполняется неравенство $\dfrac{K}{2} g(x) < f(x)$. На основании предыдущей теоремы получаем, что сходится интеграл

$$\int\limits_{\Delta(\varepsilon)}^\infty \frac{K}{2} \cdot g(x)dx,$$

а тогда сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Из этой теоремы вытекает, что если $f(x)$ и $g(x)$ положительны (по крайней мере для достаточно больших x) и являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to \infty$, то интегралы от этих функций указанного вида сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^\infty \arcsin \frac{1}{x} dx.$$

Т.к. $\arcsin \frac{1}{x} > 0$ при $x \geqslant 1$, и $\arcsin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$ следует расходимость данного интеграла.
Аналогичные признаки сходимости (расходимости) справедливы и для несобственных интегралов второго рода.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{sh} x}{(\sqrt{1+x}-1)(1-\cos x)(e^x-1)\ln(1+x)} dx.$$

Обозначим подынтегральную функцию через $f(x)$. Положительность этой функции для всех $x \in (0,1]$ не вызывает сомнения. Используя известную таблицу эквивалентных бесконечно малых, получаем, что

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x} \cdot x^4}{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2} = \frac{4}{\sqrt{x}}, \quad x \to +0.$$

Известно, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится. Поэтому сходится и исследуемый интеграл.
Более сложным является вопрос о сходимости несобственных интегралов от функций, принимающих значения разных знаков. Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b]$. Тогда то же самое верно и для функции $|f(x)|$. Поэтому в данной ситуации мы можем рассмотреть два несобственных интеграла

$$I_1 = \int\limits_a^\infty f(x)dx \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int\limits_a^\infty |f(x)|dx.$$

Если I_2 сходится, то про I_1 говорят, что этот интеграл сходится абсолютно. Если же I_1 сходится, а I_2 расходится, то говорят, что I_1 сходится условно.

Теорема (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Здесь, как обычно, предполагается, что функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на каждом отрезке $[a, b]$. Напишем очевидное неравенство, верное для любого $x \geqslant a$:

$$0 \leqslant f(x) + |f(x)| \leqslant 2|f(x)|.$$

Т.к. $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ по условию сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty 2 \cdot |f(x)|dx$. Следовательно, по признаку сравнения сходится интеграл

$$\int\limits_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx.$$

Но тогда сходится и интеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx - \int\limits_a^\infty |f(x)|dx.$$

Теорема доказана.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}dx$ сходится абсолютно, т.к. сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}}dx.$$

Сходимость последнего интеграла вытекает из очевидного неравенства

$$\frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

и сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Привести пример условно сходящегося интеграла не так-то просто.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$$

Имеем

$$\int\limits_1^A \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_1^A \frac{(-\cos x)'}{\sqrt{x}}dx = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Big|_1^A - \frac{1}{2}\int\limits_1^A \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}dx.$$

Предел правой части при $A \to \infty$ существует: для двойной подстановки это очевидно, а для интеграла это верно в силу его сходимости (установленной в последнем примере). Таким образом, интеграл I сходится. Докажем, что абсолютной сходимости здесь нет. Для этого заметим сначала, что

$$\int\limits_{K\pi}^{(K+1)\pi} |\sin x|dx = \left[\begin{array}{c} x = t + K\pi \\ dx = dt \end{array}\right] = \int\limits_0^\pi \sin t dt = -\cos t\Big|_0^\pi = 2,$$

и $\quad \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \geqslant \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{(K+1)\pi}}$, $\quad$ если $\quad K\pi \leqslant x \leqslant (K+1)\pi$, $\quad K = 1, 2, ...$

Отсюда

$$\int\limits_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1}} \to \infty \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Поэтому интеграл $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx$ расходится, а тогда расходится и интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx$. Итак, интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится условно.

Рассмотрим еще т.н. интегралы с несколькими особенностями. Пусть I – промежуток с граничными точками a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и пусть существует разбиение

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

этого промежутка такое, что некоторая функция $f(x)$, определенная во всех точках промежутка I за исключением, быть может, точек указанного разбиения, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке, целиком лежащем на каком-либо из интегралов (x_{i-1}, x_i), $i = 1, ..., n$. В этой ситуации можно рассмотреть (вообще говоря, несобственные) интегралы

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Если все эти интегралы сходятся, то говорят, что $f(x)$ интегрируема на промежутке I; соответствующий несобственный интеграл определяется равенством

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Используя свойства интегралов, можно показать, что правая часть не зависит от выбора разбиения, обладающего указанными выше свойствами.

Пример. Рассмотрим интеграл $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}}$. Разбиение, о котором речь в последнем определении, состоит из точек $-1, 0, 1$;

$$I = \int\limits_{-1}^{0} + \int\limits_{0}^{1}.$$

Оба последних интеграла сходятся, поэтому функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}}$ интегрируема на $(-1; 1)$.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 11

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах, параметрическии и в полярных координатах.

Рассмотрим вопрос о вычислении площади с помощью определенного интеграла. Выше было установлено, что при $f(x) \geqslant 0$ площадь S соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ неположительна, т.е. $f(x) \leqslant 0$, то, очевидно,

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пользуясь этими замечаниями, нетрудно установить, что если плоская геометрическая фигура ограничена сверху и снизу соответственно графиками непрерывных функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x) \geqslant \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, а с боков - отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, то площадь S этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx.$$

Если плоская кривая задана параметрически, т.е. в виде

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

причем

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad a < b, \quad \varphi'(t) > 0 \quad \text{на} \quad [\alpha, \beta],$$

то эту же кривую можно задать и явным уравнением

$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$; $\varphi^{-1}(x) -$ функция, обратная по отношению к $\varphi(t)$. Все это хорошо известно из начального курса анализа.

Если $y(x) \geqslant 0$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно вычислить следующим образом:

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_a^b \psi(\varphi^{-1}(x))dx = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right] =$$

$$= \int_\alpha^\beta \psi(\varphi^{-1}(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Т.о., в данном случае справедлива формула

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Нетрудно видеть, что при $\varphi'(t) < 0$ эта формула справедлива лишь с точностью до знака; поэтому в общем случае

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)|\varphi'(t)|dt.$$

Пример. Вычислим площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$
Запишем параметрические уравнения данного эллипса:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

При таком представлении дуга эллипса, лежащая в первой четверти, отвечает изменению параметра t на отрезке $[0, \pi/2]$. Используя симметричность эллипса, для искомой площади S получаем формулу

$$S \ = \ 4\int_0^{\pi/2} b\sin t| - a\sin t|dt \ = \ 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \ =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}dt \ = \ 4ab\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab, \qquad \text{т.е.} \quad S = \pi ab.$$

Криволинейным сектором называется геометрическая фигура, ограниченная отрезками лучей $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис. 1).

Для вычисления площади криволинейного сектора рассмотрим разбиение

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta \quad \text{отрезка} \quad [\alpha, \beta]$$

и предположив, что $r(\varphi)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке (рис. 2), напишем очевидное неравенство

$$\frac{1}{2}r^2(\eta_i)\Delta\varphi_i \ \leqslant \ S_i \ \leqslant \ \frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i, \qquad (*)$$

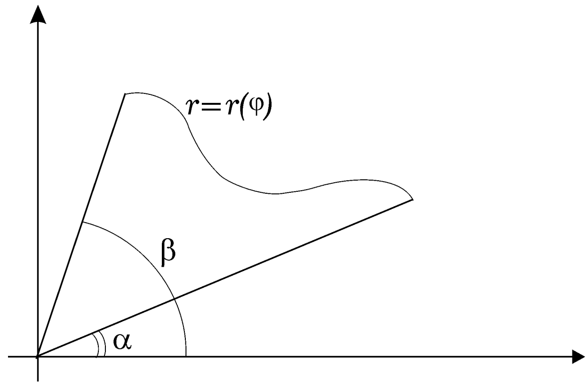

Рис. 1

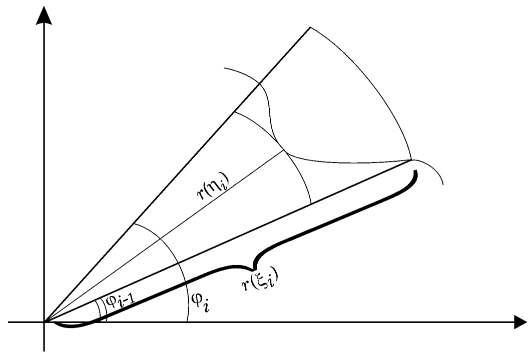

Рис. 2

в котором S_i – площадь криволинейного сектора, отвечающего изменению φ на отрезке $[\varphi_{i-1},\ \varphi_i]$; $r(\eta_i)$ и $r(\xi_i)$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $r(\varphi)$ на указанном частичном отрезке разбиении; при составлении неравенства (*) была использована известная школьная формула для площади криволинейного сектора. Кроме того, мы предполагаем дополнительно, что $r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Суммируя неравенства (*) по $i = 1, 2, ..., n$ получим, что для площади S рассматриваемого криволинейного сектора справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\eta_i)\Delta\varphi_i \ \leqslant\ S\ \leqslant\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i.$$

Переходя здесь к пределу при $max_i\Delta\varphi_i \to 0$, получаем требуемую формулу:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример. Пусть требуется вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ (рис. 3).

Используя симметричность этой кривой, получаем:

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4} a^2\cdot 2\cos 2\varphi d\varphi = 4a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

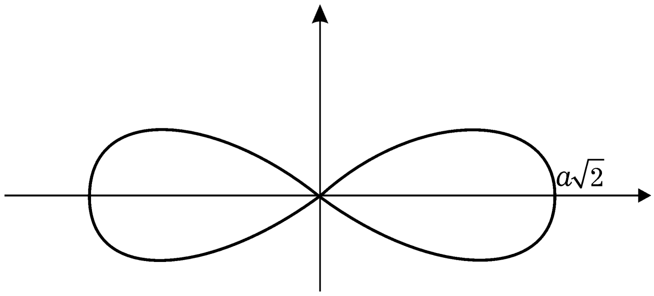

Рис. 3

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 12-13

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и объемов тел вращения. Вычисление длины дуги кривой и площади поверхности вращения. Метод Симпсона приближенного вычисления определенного интеграла.

Определенные интегралы можно применять и для вычисления объемов. Пусть тело M (рис. 1) заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и пусть для каждой точки $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ фигуры, получающейся в сечении тела M плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через указанную точку. Предположим далее, что проекции двух сечений тела M такими плоскостями на плоскость OYZ лежат одна в другой (во всяком случае, для сечений, отвечающих достаточно близким плоскостям). Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b. \qquad (*)$$

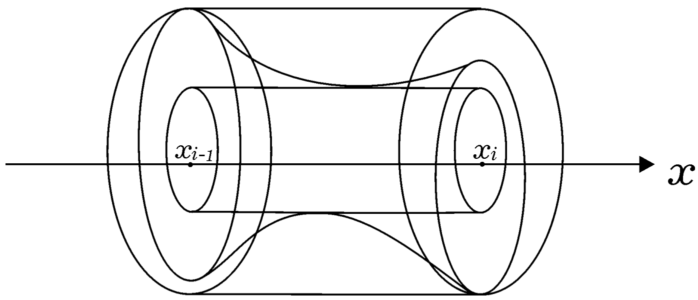

Рис. 1

Тогда объем V_i части M_i тела, расположенной между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ в силу сделанного выше предположения о проекциях сечений тела M при достаточно малом диаметре разбиения (*) удовлетворяет неравенству

$$S(\eta_i)\Delta x_i \leqslant V_i \leqslant S(\xi_i)\Delta x_i \, ,$$

где $S(\eta_i)$ и $S(\xi_i)$ – соответственно минимальное и максимальное значение функции $S(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$; здесь мы предполагаем дополнительно, что $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.
Геометрический смысл величин $S(\eta_i)\Delta x_i$ и $S(\xi_i)\Delta x_i$ очевиден - это объемы прямых

круговых цилиндров, один из которых содержится в части M_i тела M, а другой содержит внутри себя эту часть. Переходя в этом неравенстве к пределу при $max_i \Delta x_i \to 0$, получим неравенство

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx \ , \qquad \text{где} \quad V = \sum_{i=1}^n V_i \ - \quad \text{объем тела } M.$$

Если тело M получено вращением графика непрерывной функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то, очевидно,

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

и мы получаем такую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V + \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассматриваемое тело расположено между плоскостями $x = \pm a$. В сечении этого тела плоскостью, проходящей через точку $x \in (-a, a)$ перпендикулярно оси абсцисс, имеем эллипс

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1.$$

Площадь сечения $S(x)$ равна

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Заметим, что это равенство справедливо и при $x = \pm a$. Отсюда для искомого объема V получаем:

$$V = 2\int\limits_0^a S(x)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\int\limits_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Рассмотрим вопрос о вычислении длины дуги кривой. В начальном курсе анализа было установлено, что непрерывно дифференцируемая плоская кривая Γ, заданная уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(x), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

спрямляема, и производная $S'(t)$ переменной длины дуги вычисляется по формуле:

$$S'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Т.к. одной из первообразных функции из правой части этого равенства является

$$F(t) = \int\limits_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau,$$

то отсюда, поскольку $F(a)=0$, следует равенство

$$S(t)=\int\limits_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2}d\tau.$$

Поэтому для длины всей кривой имеем формулу

$$l(\Gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Если кривая Γ задана явно уравнением

$$y=y(x), \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

то, беря x в качестве параметра, получаем такую формулу

$$l(\Gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

Пусть кривая Γ задана в полярных координатах:

$$r=r(\varphi), \quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta.$$

Тогда $\qquad x=r(\varphi)\cos\varphi, \quad y=r(\varphi)\sin\varphi, \quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta;$

$$\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}=\sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2}=$$
$$=\sqrt{(r'(\varphi))^2+r^2(\varphi)}.$$

Поэтому

$$l(\Gamma)=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2+r^2(\varphi)}d\varphi.$$

Отметим еще формулу

$$l(\Gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

для длины пространственной кривой Γ, заданной уравнениями

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

Пример. Пусть кривая Γ задана уравнениями

$$x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=\operatorname{ch} t, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Тогда

$$l(\Gamma)=\int\limits_0^1 \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\operatorname{sh}^2 t}dt \;=\; \int\limits_0^1 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}dt \;=$$

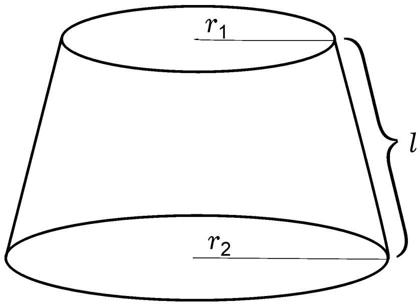

Рис. 2

$$= \int\limits_0^1 \operatorname{ch} t dt \ = \ \operatorname{sh} t|_0^1 \ = \ \operatorname{sh} 1 \ = \ \frac{e^2-1}{2e}.$$

Рассмотрим понятие площади поверхности вращения (рис. 2).

Из курса элементарной стереометрии известно, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна

$$2\pi \frac{r_1+r_2}{2} \cdot l.$$

Пусть плоская кривая Γ задана в виде графика непрерывно дифференцируемой неотрицательной функции

$$y = y(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

и пусть поверхность S получена вращением этой кривой вокруг оси OX (рис. 3).

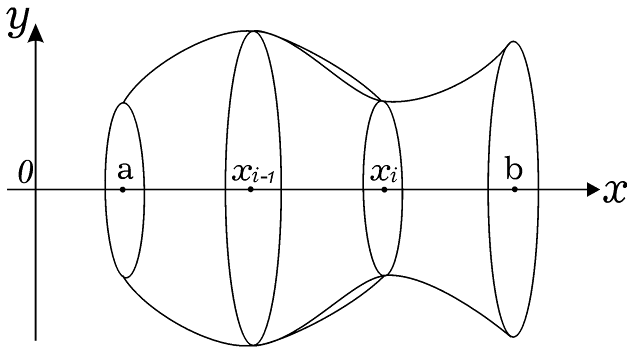

Рис. 3

Рассмотрим разбиение τ

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad \text{отрезка} \quad [a, b],$$

построим ломаную с вершинами в точках $(x_i,\ y(x_i)),\ i = 0, 1, ..., n,$ вписанную в кривую $\Gamma,$ и рассмотрим поверхность $S',$ полученную вращентем этой ломанной вокруг оси $OX.$

Эта поверхность является объединением боковых поверхнеостей усеченных конусов, и ее площадь

$$\mu S' = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y(x_i) - y(x_{i-1}))^2}.$$

Площадью μS поверхности $S,$ полученной вращением кривой Γ вокруг оси $OX,$ называется предел площадей $\mu S'$ при $\lambda(\tau) = max_i \Delta x_i \to 0.$ Для вычисления этого предела преобразуем указанное выше выражение для $\mu S'$, используя уже известный прием с применением теоремы Лагранжа:

$$\mu S' = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i) \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i +$$

$$+ 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} - y(\xi_i) \right) \cdot \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \qquad (*)$$

При $\lambda(\tau) \to 0$ первая сумма, очевидно, стремится к интегралу

$$2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Второе слагаемое при указанном предельном переходе стремится к нулю. Чтобы доказать это, заметим сначала, что $y'(x)$ в силу непрерывности ограничена на отрезке $[a, b]$:

$$|y'(x)| \leqslant M \quad \text{для любого} \quad x \in [a, b].$$

Поэтому

$$\left| \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} - y(\xi_i) \right| \leqslant \frac{|y(x_{i-1}) - y(\xi_i)| + |y(x_i) - y(\xi_i)|}{2} =$$

$$= \frac{|y'(\eta_i)(\xi_i - x_{i-1})| + |y'(\xi_i)(x_i - \xi_i)|}{2} \leqslant M \Delta x_i.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} - y(\xi_i) \right) \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} M \sqrt{1 + M^2} \Delta x_i^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(\tau) M \sqrt{1 + M^2} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lambda(\tau) M \sqrt{1 + M^2} (b - a) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda(\tau) \to 0.$$

Поэтому в (*) вторая сумма стремится к нулю при $\lambda(\tau) \to 0$ и для площади поверхности вращения имеем формулу

$$\mu S = 2\pi \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Заметим, что если в этой формуле заменить под знаком интеграла $y(x)$ на $|y(x)|$, то условие неотрицательности функции $y(x)$ можно отбросить.

Пример. Площадь поверхности вытянутого эллипсоида вращения. Такой эллипсоид получается при вращении вокруг оси OX эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b.$$

Имеем

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2, \qquad y \cdot y' = -\frac{b^2}{a^2} x,$$

$$y\sqrt{1+y'^2} \;=\; \sqrt{y^2+(yy')^2} \;=\; \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2} \;=\; \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}.$$

Отношение $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2$, где ε – эксцентриситет эллипса, поэтому, учитывая симметричность рассматриваемой поверхности, для искомой площади μS получаем такое выражение (которое преобразовываем с помощью замены $x=\dfrac{t}{\varepsilon}$):

$$\mu S = 4\pi\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\int\limits_0^{a\varepsilon}\sqrt{a^2-t^2}dt.$$

Используя найденную ранее первообразную

$$\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C,$$

получаем отсюда:

$$\mu S = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}\right)\Bigg|_0^{a\varepsilon} = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\left(\frac{a\varepsilon}{2}\sqrt{a^2-a^2\varepsilon^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\varepsilon\right).$$

Т.к. $a^2-a^2\varepsilon^2 = a^2-a^2\dfrac{a^2-b^2{}^2}{a}=b^2$, то окончательно имеем

$$\mu S = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\left(\frac{ab\varepsilon}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\varepsilon\right) = 2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

Рассмотрим теперь формулу Симпсона, позволяющую находить приближенные значения определенных интегралов. Формулы для приближенных значений интегралов называются квадратурными формулами.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Возьмем разбиение этого отрезка точками

$$x_i = a+\frac{b-a}{n}i, \qquad i=0,1,...,n,$$

на n равных частей и выберем точки

$$\xi_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2} = a+\frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right),$$

являющиеся серединами отрезков разбиения.

На каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ заменим приближенно интеграл $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ интегралом

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(Ax^2+Bx+C)dx \qquad\qquad (*)$$

от квадратичной функции, график которой проходит через точки

$$(x_{i-1},\ f(x_{i-1})), \qquad (\xi_i,\ f(\xi_i)), \qquad (x_i,\ f(x_i)).$$

Непосредственное нахождение коэффициентов A, B, C связано с громоздкими вычислениями, которых можно избежать, например, следующим образом. В интеграле (*) сделаем замену переменной $x=t+\xi_i$. Тогда получим интеграл

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta}\left(\tilde{A}t^2+\tilde{B}t+\tilde{C}\right)dt, \qquad \text{где} \quad \eta=\frac{1}{2}\Delta x_i,$$

$$\tilde{A}t^2 + \tilde{B}t + \tilde{C} = A(t+\xi_i)^2 + B(t+\xi_i) + C.$$

Подставляя в последнее равенство вместо t последовательно числа $-\eta$, 0, η, получаем такую систему уравнений для нахождения коэффициентов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$:

$$\begin{cases} \tilde{A}\eta^2 - \tilde{B}\eta + \tilde{C} = f(x_{i-1}) \\ \tilde{C} = f(\xi_i) \\ \tilde{A}\eta^2 + \tilde{B}\eta + \tilde{C} = f(x_i). \end{cases}$$

Используя специфику этой системы, легко находим, что

$$\tilde{A} = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)}{2\eta^2},$$

$$\tilde{B} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2\eta}, \quad \tilde{C} = f(\xi_i).$$

Поэтому последний интеграл равен

$$\left(\tilde{A}\frac{t^3}{3} + \tilde{B}\frac{t^2}{2} + \tilde{C}t\right)\Bigg|_{-\eta}^{\eta} = 2\cdot\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)}{2\eta^2}\cdot\frac{\eta^3}{3} + 2f(\xi_i)\eta =$$

$$= \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f(\xi_i)}{3}\cdot\eta = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f(\xi_i)}{6}\Delta x_i.$$

Таково же и значение интеграла (*), из которого вычисленный интеграл был получен заменой переменной. Для исходного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ получаем теперь такую приближенную формулу:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x_i}{6}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f(\xi_i)) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right),$$

в которой $\quad x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i, \quad i = 1, ..., n-1, \quad \xi_i = a + \dfrac{b-a}{n}\left(i - \dfrac{1}{2}\right), \quad i = 1, ..., n.$

Полученная приближенная формула называется формулой Симпсона. Можно доказать, что если $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, и $|f^{(4)}(x)| \leqslant M$ для всех x из этого отрезка, то абсолютная погрешность формулы Симпсона оценивается сверху величиной

$$\frac{1}{2880}\cdot\frac{M(b-a)^5}{n^4}.$$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 14

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальное уравнение первого порядка, его решения. Частные и общие решения. Интегральные кривые. Понятие частной производной функции нескольких переменных. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Теорема Коши о существовании решения дифференциального уравнения (без доказательства).

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными являются функции нескольких переменных, то уравнения называются уравнениями в частных производных. В противном случае, т.е. если неизвестные функции являются функциями одной переменной, уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Мы будем изучать обыкновенные дифференциальные уравнения и системы таких уравнений.

Пример. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;1)$, у которой угловой коэффициент касательной в каждой точке равен ординате точки касания.

По условию, если уравнение кривой имеет вид $y = y(x)$, то

$$y' = y.$$

Дополнительно известно, что $y(0) = 1$.

Полученное дифференциальное уравнение является примером уравнения первого порядка; порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение. В общем виде дифференциальное уравнение 1-го порядка можно записать так:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – неизвестная функция, $y' = y'(x)$ – производная этой функции, а F – заданная функция трех переменных.

Решением такого дифференциального уравнения называется функция $y = y(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале I, после подстановки которой в уравнение (1) получается верное равенство при любом $x \in I$. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения часто называют интегрированием, а сами решения – интегралами этого уравнения.

Нам потребуются некоторые понятия, относящиеся к функциям двух переменных. Все множества, о которых идет речь в нижеследующих определениях, являются плоскими. Окрестностью точки на плоскости называется открытый круг (т.е. круг без точек ограничивающей его окружности) положительного радиуса с центром в этой точке. Множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую ее окрестность. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве. Множество называется областью, если оно одновременно открыто и связно.

Примеры. Круг $K = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 < 1\}$ радиуса 1 с центром в начале координат является открытым множеством; круг $\overline{K} = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ открытым множеством не является.

Оба круга K и $\overline{K}$ являются примерами связных множеств; при этом круг K является областью. Объединение двух непересекающихся кругов не является связным множеством (и, следовательно, не является областью).

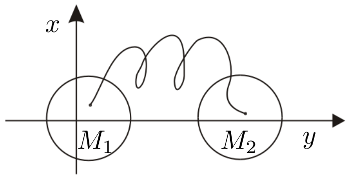

Рис.1

Уравнением, разрешенным относительно производной, называется уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Пусть правая часть этого уравнения определена на некоторой области G плоскости переменных x и y, а функция

$$y = f(x, C). \tag{3}$$

определена на области D плоскости переменных x, C.

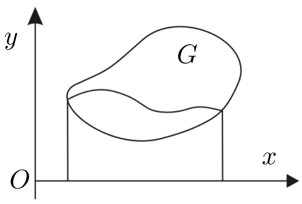

Рис.2

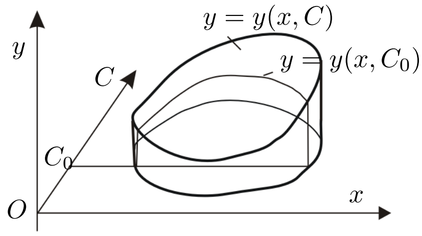

Рис.3

Функция (3) называется общим решением уравнения (2), если выполнены следующие условия.

1. При любом фиксированном C функция $y = y(x, C)$ есть решение данного дифференциального уравнения (такое решение, получающееся из общего решения при фиксированном C называют частным решением).

2. Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется значение $C = C_0$ такое, что $y_0 = y(x_0, C_0)$.

По поводу первого пункта этого определения следует заметить, что при некоторых значениях C может и не существовать таких x, при которых $(x, C) \in D$. Эти значения C следует исключить из рассмотрения. Если значения x, при которых $(x, C) \in D$ существуют, то может случиться, что областью определения функции $y = y(x, C)$ при фиксированном C служит объединение нескольких (или даже бесконечного числа) непересекающихся интервалов. В этом случае имеются в виду решения, заданные на отдельных интервалах, входящих в указанную область определения.

Интегрируя то или иное дифференциальное уравнение, мы нередко приходим к соотношению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{4}$$

Разрешив это соотношение относительно y, получаем отсюда общее решение. Однако выразить y из (4) в элементарных функциях не всегда возможно. В таких случаях общее решение оставляют в неявном виде. Равенство (4), неявно задающее общее решение, называют общим интегралом соответствующего дифференциального уравнения. Неявно заданное решение, получаемое из (4) при фиксированном C, называют частным интегралом.

Пример. Покажем, что

$$y = Ce^x \tag{5}$$

есть общее решение уравнения

$$y' = y, \tag{6}$$

полученного в рассмотренном в начале лекции примере.

Очевидно, при любом фиксированном C функция (5) есть решение уравнения (6). Если задана произвольная точка (x_0, y_0), то для нахождения соответствующего значения C_0 имеем уравнение

$$y_0 = Ce^{x_0},$$

откуда $C_0 = y_0 e^{-x_0}$, и мы получаем такое частное решение

$$y = y_0 e^{x - x_0}.$$

Таким образом, установлено, что (5) есть общее решение уравнения (6). Кривая, проходящая через т. $M(0;1)$, о которой речь в указанном примере, задается, следовательно, уравнением $y = e^x$. То, что других таких кривых не существует, следует из формулируемой ниже теоремы существования и единственности.

Задача Коши для уравнения

$$y' = f(x, y)$$

ставится следующим образом.

Дана точка (x_0, y_0) из области определения правой части этого уравнения. Требуется найти решение, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Это условие называется начальным условием, а x_0 и y_0 – начальными значениями. Геометрически задача Коши заключается в отыскании интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

Чтобы сформулировать уже упоминавшуюся теорему существования и единственности, нам потребуется понятие частной производной. Пусть функция $f(x, y)$ определена в области G на плоскости переменных x, y; частной производной этой функции в точке $(x, y) \in G$ по переменному y называется предел (при условии, что он существует):

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Для вычисления такой производной следует зафиксировать x и продифференцировать получившуюся функцию одной переменной.

Теорема (Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка).

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ на некоторой области G плоскости переменных x, y. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует решение $y = y(x)$ уравнения

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Любые два решения этого уравнения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию, совпадают всюду, где они оба определены.

Эту теорему принимаем без доказательства.

Таким образом, при выполнении условий сформулированной теоремы решение соответствующей задачи Коши существует и единственно. На геометрическом языке утверждение теоремы означает, что через каждую точку области, в которой задана правая часть уравнения, проходит в точности одна интегральная кривая этого уравнения. Ясно также, что уравнение, для которого выполнены требования теоремы существования и единственности, имеет бесконечно много решений: достаточно зафиксировать x_0 и рассмотреть решения, удовлетворяющие начальному условию $y(x_0) = y_0$ при различных y_0 таких, что $(x_0, y_0) \in G$.

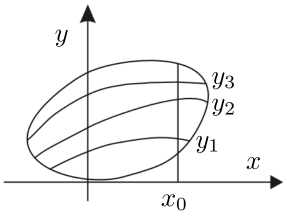

Рис.4

Таким способом можно получить столько различных решений, сколько точек имеется на соответствующем интервале.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 15

Решение дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все его решения. Если заданы дополнительные условия (обычно начальные), то требуется найти решения, удовлетворяющие этим дополнительным условиям. Как правило, дело сводится к нахождению общих интегралов (общих решений) и выделению частных интегралов (частных решений), удовлетворяющих дополнительным условиям (если такие условия заданы).

Если решение дифференциального уравнения удается записать с помощью арифметических операций, операции взятия функции от функции и операции нахождения первообразной, примененных конечное число раз к элементарным функциям, то говорят, что это дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах. Заметим, что большинство дифференциальных уравнений, встречающихся в теоретических и прикладных задачах, не интегрируются в квадратурах.

Рассмотрим методы интегрирования в квадратурах некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнение вида

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{1}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны соответственно на интервалах I_1 и I_2, причём $g(y) \neq 0$ при любом $y \in I_2$. Если $y = y(x)$ – решение уравнения (1), то

$$\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = f(x). \tag{2}$$

Обозначим через $G(y)$ и $F(y)$ первообразные соответственно функций $1/g(y)$ и $f(x)$ на указанных интервалах. Из (2) следует, что

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C.$$

Можно доказать, что при сделанных относительно $f(x)$ и $g(y)$ предположениях соотношение

$$G(y) = F(x) + C$$

есть общий интеграл уравнения (1). Отсюда получаем такой формальный прием для отыскания решений этого уравнения.

Разделяем переменные и умножаем обе части на dx:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx;$$

находим соответствующие первообразные (причём в левой части переменной интегрирования считаем y) и записываем общий интеграл в виде

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

В этом равенстве интегралы означают какие-либо фиксированные первообразные (а не всю их совокупность). Если требуется найти интегральную кривую, проходящую через точку $(x_0, y_0),\ x_0 \in I_1,\ y_0 \in I_2$, то соответствующее решение задается неявно равенством

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{x_0}^{x} f(\eta)d\eta.$$

Может оказаться, что в уравнении (1) функция $g(y)$ равна нулю в некоторых точках $y_1, y_2 \ldots$ интервала I_2. В таком случае указанный приём применяется на каждом из интервалов, на которые эти точки делят I_2; при этом следует иметь в виду, что все функции $y \equiv y_1, y \equiv y_2, \ldots$ являются решениями уравнения (1). Про эти решения говорят, что они "теряются при разделении переменных" $\big($т.е. при делении обеих частей уравнения на $g(y)\big)$.

Пример. Рассмотрим уравнение $2\sqrt{1-x^2}\ y' = x(1-y^2)$.
После разделения переменных получаем, что

$$\frac{2dy}{y^2-1} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

далее, находим первообразные

$$2\int \frac{dy}{y^2-1} = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C\ ,$$

$$-\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + C\ .$$

Поэтому имеем на каждой из областей

$$\Pi_1 = \big\{(x,y)\ :\ x \in (-1;1),\ y \in (-\infty;-1)\big\},$$

$$\Pi_2 = \big\{(x,y)\ :\ x \in (-1;1),\ y \in (-1;1)\big\} \text{ и}$$

$$\Pi_3 = \big\{(x,y)\ :\ x \in (-1;1),\ y \in (1;\infty)\big\}$$

такой общий интеграл

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \sqrt{1-x^2} + C$$

рассматриваемого уравнения. Сюда следует добавить еще решения $y = \pm 1$, потерянные при разделении переменных. В данном случае нетрудно найти и общее решение; например, на открытом квадрате Π_2 имеем последовательно:

$$\frac{1-y}{1+y} = e^{\sqrt{1-x^2}+C}\ ;$$

$$y = \frac{1-C_1 e^{\sqrt{1-x^2}}}{1+C_1 e^{\sqrt{1-x^2}}}\ , \quad C_1 = e^C > 0.$$

Здесь общее решение определено в области $-1 < x < 1$, $C_1 > 0$. Если в последнюю формулу для y подставить какое-либо отрицательное значение C_1 (например, $C_1 = -1$), то мы также получим решение исходного уравнения, однако соответствующая интегральная кривая не будет лежать в квадрате Π_2. Этот пример показывает, что нужно соблюдать определенную осторожность, утверждая, что "при подстановке в общее решение любого значения C получается частное решение исходного уравнения".

Дифференциальное уравнение 1-го порядка часто записывают в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{3}$$

Здесь $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – заданные в некоторой области (непрерывные) функции. Если считать x независимой переменной, а $y = y(x)$ – неизвестной функцией, то уравнение (3) эквивалентно такому

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Если же считать, что y независимая переменная, а $x = x(y)$ – неизвестная функция, то (3) эквивалентно уравнению

$$M(x, y)\frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0.$$

Про уравнение (3) говорят, что оно записано через дифференциалы (или в симметрической форме).

Уравнение с разделяющимися переменными, записанное в такой форме, имеет вид:

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0.$$

После разделения переменных получаем уравнение

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx.$$

Рассмотрим ещё однородные уравнения. Функция $h(x, y)$ называется однородной функцией степени m, если для любых x, y и $t > 0$ выполняется равенство

$$h(tx, ty) = t^m h(x, y).$$

Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одной и той же степени, то дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется однородным. Считая для определённости, что $x > 0$, а функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями степени m, преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\left(x;\ x \cdot \dfrac{y}{x}\right)}{N\left(x;\ x \cdot \dfrac{y}{x}\right)} = -\frac{x^m M\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

где $f(u) = -\dfrac{M(1, u)}{N(1, u)}$.

Таким образом, однородное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Чтобы решить это уравнение, введем новую неизвестную функцию $z = y/x$, т.е. $xz = y$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx}\ ,$$

и для нахождения z имеем уравнение

$$x\,\frac{dz}{dx} = f(z) - z.$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, найдем z, а затем и y.

Пример. Пусть требуется решить уравнение $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$.
Будем считать, что $x > 0$ и $x^2 - y^2 > 0$; соответствующая область заштрихована на чертеже (граничные точки исключаются).

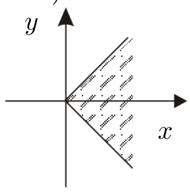

Рис.5

В этой области данное уравнение эквивалентно такому:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\ .$$

Это – однородное уравнение; вводим новую неизвестную функцию $z = y/x$ и получаем уравнение

$$xz' + z = \sqrt{1 - z^2} + z\ ; \quad \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}\ .$$

Найдя первообразные , получим

$$\arcsin z = \ln|x| + C\ ; \quad \arcsin\frac{y}{x} = \ln|x| + C\ .$$

Это – общий интеграл исходного уравнения (в указанной области). Поскольку $x > 0$, то этот общий интеграл можно записать и так:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln x + C\ .$$

В данном случае можно найти и общее решение:

$$y = x\ \sin(\ln x + C),\ -\frac{\pi}{2} < \ln x + C < \frac{\pi}{2}\ .$$

Уравнение

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{4}$$

называется линейным; функции $p(x)$ и $f(x)$ будем считать непрерывными на некотором интервале I. Чтобы решить уравнение (4), найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y' + p(x)y = 0. \tag{5}$$

Пусть $P(x)$ – какая-либо первообразная функции $p(x)$ на интервале I. Тогда, как легко проверить, функция

$$y(x, C) = Ce^{-P(x)},\ x \in I,\ -\infty < C < \infty\ ,$$

есть общее решение уравнения (5). Этот результат можно получить и "естественным" путем, заметив, что (5) является уравнением с разделяющимися переменными. Далее применим метод вариации постоянной, состоящий в том, что постоянная C, входящая в общее решение, заменяется функцией $C(x)$; затем эта последняя функция определяется из исходного неоднородного уравнения (4). Имеем:

$$\left(C(x)e^{-P(x)}\right)' + C(x)p(x)e^{-P(x)} = f(x); \quad C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + C(x)p(x)e^{-P(x)} = f(x)$$

$$C'(x) = f(x)e^{P(x)}.$$

Отсюда

$$C(x) = \int f(x)\, e^{-P(x)}\, dx + C_1 \ ,$$

где интеграл в правой части означает какую-любо фиксированную первообразную соответствующей функции (а не всю совокупность этих первообразных). Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y(x, C_1) = \left(\int f(x)\, e^{-P(x)}\, dx + C_1 \right)\ e^{-P(x)} \ ,$$

где $P(x)$ – какая-либо первообразная функции $p(x)$ на интервале I.

К линейным уравнениям первого порядка сводится уравнение Бернулли

$$y' + p(x)\, y = f(x)\, y^{\alpha} \ ,$$

где α отлично от 0 и 1 (т.к. при этих значениях α получается линейное уравнение). Разделим обе части последнего уравнения на y^{α}:

$$y' \cdot y^{-\alpha} + p(x)\, y^{1-\alpha} = f(x).$$

Если $z = y^{1-\alpha}$, то $z' = (1-\alpha)y' \cdot y^{-\alpha}$ и относительно z имеем линейное уравнение:

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' + p(x)\, z = f(x)$$

Решив его, найдем z, а затем и y. При $\alpha > 0$ уравнению Бернулли удовлетворяет также функция, тождественно равная нулю. Другой подход к решению уравнений Бернулли состоит в следующем. Пусть $y = u \cdot v$; тогда

$$u' \cdot v + u(v' + p(x) \cdot v) = f(x)(u\, v)^{\alpha}.$$

Подберем $v \not\equiv 0$ так, чтобы было

$$v' + p(x)\, v = 0 \ ,$$

для чего достаточно решить линейное однородное уравнение первого порядка. После этого для определения u получаем уравнение

$$u' \cdot v = f(x)(u \cdot v)^{\alpha},$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решив его, найдем u, а затем и $y = u \cdot v$.

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 16

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Изоклины. Геометрическое решение дифференциальных уравнений с помощью изоклин. Особые точки и особые решения дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y)\ , \tag{1}$$

где правая часть определена на области G плоскости переменных x, y. Такое дифференциальное уравнение устанавливает связь между координатами точки $M(x, y) \in G$ и угловым коэффициентом касательной $y'(x)$ к интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через эту точку:

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x) = f(x, y)\ .$$

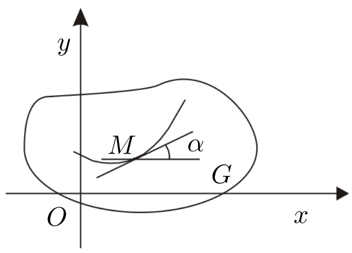

Рис.6

Касательным вектором к этой кривой в указанной точке является вектор

$$\{1, y'(x)\} = \{1, f(x, y)\}\ .$$

Если каждой точке $M(x, y) \in G$ поставить в соответствие такой вектор, то мы получим в области G поле направлений. Интегральные кривые – это те кривые, для которых вектор $\{1, f(x, y)\}$ является касательным в соответствующей точке. Поэтому, если в области G выбрать достаточно густую сеть точек и в каждой точке $M(x, y)$ нарисовать исходящий из этой точки вектор с координатами $\{1, f(x, y)\}$, то можно приближенно изобразить интегральные кривые уравнения (1), проводя эти кривые так, чтобы они в каждой своей точке касались векторов построенного поля направлений. Построение поля направлений облегчается использованием изоклин. Изоклиной дифференциального уравнения (1) называется множество точек плоскости, в каждой из которых угловой коэффициент касательной к интегральным кривым этого уравнения имеет постоянное значение. Очевидно, уравнение изоклины имеет вид

$$f(x, y) = k\ ,$$

где k – упомянутое в определении изоклины постоянное значение углового коэффициента касательной. Таким образом, изоклины являются линиями уровня функции $f(x,y)$ из правой части уравнения (1).

Пример. Пусть дано уравнение

$$y' = x^2 - y^2 \ .$$

Областью определения правой части является вся плоскость переменных x, y. Уравнения изоклин имеют вид

$$x^2 - y^2 = k \ .$$

При $k = 0$ имеем пару вещественных пересекающихся прямых (биссектрис координатных углов). При построении поля направлений (чтобы не загромождать чертеж) будем рисовать не векторы, а короткие отрезки прямых, проходящих через точки построенных изоклин и имеющих соответствующие угловые коэффициенты. При $k \neq 0$ изоклинами являются гиперболы.

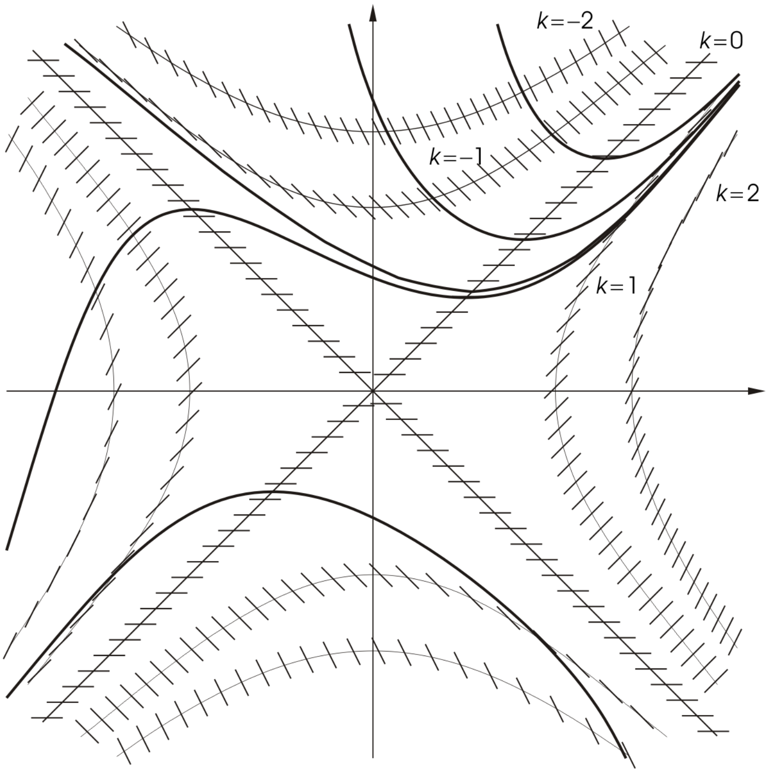

Рис.7

Пусть снова имеется дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y) \ , \qquad (1)$$

правая часть которого определена на области G плоскости переменных x, y. Если для точки $M(x_0, y_0) \in G$ найдутся две интегральные кривые, проходящие через эту точку и не совпадающие ни в какой ее окрестности, или через эту точку не проходит ни одна интегральная кривая, то M называется особой точкой данного дифференциального уравнения. Точка, не являющаяся особой, называется обыкновенной. В частности, обыкновенными являются все точки, имеющие окрестность, в которой выполняются требования теоремы существования и единственности. Решение уравнения (1) называется особым, если все точки соответствующей интегральной кривой суть особые точки этого дифференциального уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \ .$$

Здесь правая часть определена на всей плоскости переменных x, y; условия теоремы существования и единственности нарушены в точках оси OX, т.к. при $y = 0$ функция $f(x, y) = 3y^{2/3}$ не имеет частной производной по переменной y. Т.к. данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, то в каждой из областей $y > 0$ или $y < 0$ можно без труда найти общее решение

$$y = (x + C)^3.$$

Ясно, что при любом фиксированном значении C эта формула дает решение рассматриваемого уравнения, заданное при всех значениях x. С другой стороны $y \equiv 0$ также есть решение этого уравнения. Последнее решение является особым, т.к. через каждую точку соответствующей интегральной кривой (в данном случае оси абсцисс) проходит не меньше двух интегральных кривых этого уравнения.

Если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на интегральной кривой, отвечающей особому решению $y = y(x)$, то через эту точку проходит и другая интегральная кривая $y = y_1(x)$ данного дифференциального уравнения. Т.к. $y_1'(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, то эти кривые имеют общую касательную в точке M. Это простое замечание позволяет использовать для нахождения особых решений понятие огибающей из теории кривых.

Пусть имеется семейство плоских кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0 \ , \tag{2}$$

зависящих от параметра C. При каждом фиксированном C уравнение (2) задает неявно соответствующую кривую этого семейства.

Кривая γ называется огибающей семейства (2), если в каждой своей точке γ касается некоторой кривой этого семейства, не совпадая с ней ни в какой окрестности указанной точки. Если (2) задает семейство решений дифференциального уравнения (1), то огибающая этого семейства также будет решением (очевидно, особым) этого уравнения $\big($если только эта огибающая может быть задана уравнением $y = y(x)\big)$. Действительно, если $y = y(x)$ – уравнение огибающей и x_0 – произвольная точка из области определения функции $y(x)$, то для некоторого решения $y = y_1(x)$ данного уравнения $y(x_0) = y_1(x_0)$ и $y'(x_0) = y_1'(x_0)$. Поэтому из равенства $y_1'(x_0) = f\big(x_0, y_1(x_0)\big)$ следует, что $y'(x_0) = f\big(x_0, y(x_0)\big)$. Т.к. x_0 – произвольная точка из области определения функции $y(x)$, то $y(x)$ – решение уравнения (1).

Чтобы составить уравнение огибающей, можно рассуждать следующим образом. Если γ касается кривых семейства (2), отвечающих изменению параметра C на интервале $C_1 < C < C_2$, то на этом интервале γ можно задавать параметрически уравнениями

$$x = \varphi(C) \ , \quad y = \psi(C) \ .$$

В таком случае должно выполняться равенство

$$\Phi\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 \ ,$$

т.к. в точке $\big(\varphi(C), \psi(C)\big)$ кривая γ и кривая семейства (2), отвечающая данному значению параметра C, имеют общую точку. Чтобы записать условие наличия общей касательной, найдем соответствующие угловые коэффициенты. Для γ угловой коэффициент касательной в точке кривой, отвечающей значению C параметра, равен $\psi'(C)\big/\varphi'(C)$. Предположим, что функция $\Phi(x, y, C)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным, и

$$(\Phi_x')^2 + (\Phi_y')^2 > 0 \ .$$

Пусть, для определенности, в окрестности точки (x, y) кривой $\Phi(x, y, C) = 0$ отлична от нуля производная Φ'_y. Из теоремы о неявной функции, рассматриваемой в теории функций нескольких переменных, следует, что тогда угловой коэффициент касательной к этой кривой в указанной точке есть

$$-\frac{\Phi'_x(x, y, C)}{\Phi'_y(x, y, C)} \ .$$

Поэтому условие наличия общей касательной запишется в виде

$$\frac{\psi'(C)}{\varphi'(C)} = -\frac{\Phi'_x\big(\varphi(C), \psi(C), C\big)}{\Phi'_y\big(\varphi(C), \psi(C), C\big)} \ .$$

Отсюда

$$\Phi'_x \cdot \varphi'(C) + \Phi'_y \cdot \psi'(C) = 0 \ .$$

Таким образом, для функций $\varphi(C)$ и $\psi(C)$ выполняются равенства

$$\begin{gathered} \Phi\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 \ , \\ \Phi'_x \cdot \varphi'(C) + \Phi'_y \cdot \psi'(C) = 0 \ , \end{gathered} \tag{3}$$

где значения частных производных функции Φ вычисляются в точке $\big(\varphi(C), \psi(C), C\big)$. Продифференцируем по C первое из этих равенств:

$$\Phi'_x \cdot \varphi'(C) + \Phi'_y \cdot \psi'(C) + \Phi'_C = 0 \ .$$

С учетом (3) получаем отсюда такие необходимые условия того, чтобы кривая γ была огибающей семейства $\Phi(x, y, C) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 \\ \Phi'_C\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из этой системы можно, в принципе, найти $\varphi(C)$ и $\psi(C)$. Если переписать последние равенства в виде

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi_C(x, y, C) = 0 \end{aligned}\right\} \ , \tag{5}$$

то, исключив C, можно получить неявное уравнение кривой γ. Заметим, что условия (4) или (5) лишь необходимы для того, чтобы определяемая ими кривая была огибающей, достаточными эти условия не являются. Поэтому, найдя параметрические уравнения кривой из (4) или неявное уравнение из (5), следует проверить, действительно ли найденная кривая является огибающей.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = 3(y - \sin x)^{2/3} + \cos x \ . \tag{6}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что при любом C функция

$$y = (x + C)^3 + \sin x \tag{7}$$

есть решение этого уравнения. Здесь семейство интегральных кривых задается с помощью функции

$$\Phi(x, y, C) = y - (x + C)^3 - \sin x \ .$$

Для нахождения уравнения огибающей имеем систему

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(x,y,C) = y - (x+C)^3 - \sin x = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = -3(x+C)^2 = 0 \end{array}\right\} .$$

Отсюда $x + C = 0$, и $y = \sin x$. Надо еще проверить, что последнее равенство задает огибающую. Легко видеть, что при $x = x_0$ кривые $y = \sin x$ и $y = (x - x_0)^3 + \sin x$ имеют общую касательную в точке с абсциссой $x = x_0$. Поэтому $y = \sin x$ – огибающая семейства кривых (7) и, следовательно, особое решение уравнения (6).

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 17

Дифференциальные уравнения n-го порядка. Частные и общие решения. Задача Коши и ее геометрическая интерпретация ($n = 2$). Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (без доказательства). Краевая задача. Понижение порядка некоторых типов дифференциальных уравнений n-го порядка.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 ,$$

где x – независимая переменная, $y{-}y(x)$ – неизвестная функция, $y' = y'(x), \dots, y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ – производные соответствующих порядков неизвестной функции, F – заданная функция указанных переменных.

В дальнейшем в основном ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений n-го порядка, разрешенных относительно старшей производной, т.е. уравнений вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Мы будем считать, что правая часть последнего уравнения определена и непрерывна на некоторой области $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Решением уравнения (1) называется n раз (непрерывно) дифференцируемая функция $y = y(x)$, заданная на некотором интервале I, после подстановки которой в уравнение получается верное равенство при всех $x \in I$. Общим решением уравнения (1) называется функция

$$y = y(x, C_1, \dots, C_n) , \tag{2}$$

заданная на некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, C_1, \dots, C_n$ и обладающая следующими свойствами.

1. При любых фиксированных $C_1, \dots, C_n$, для которых существует хотя бы один интервал I такой, что для любого $x \in I$ точка $(x, C_1, \dots, C_n)$ лежит в области D, функция (2) является решением уравнения (1) на любом таком интервале. Иногда это свойство формулируют короче: при любых фиксированных $C_1, \dots, C_n$ функция (2) есть решение уравнения (1).

2. Для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ из области определения правой части уравнения (1) найдутся числа $C_{10}, \dots, C_{n0}$ такие, что функция

$$y = y(x, C_{10}, \dots, C_{n0})$$

определена на некотором интервале, содержащем точку x_0, и удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{array}{l} y(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_0 \ , \\ y'(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y'_0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_0^{(n-1)} \end{array} .$$

Соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \ ,$$

неявно задающее общее решение, называют общим интегралом. Подробно смысл последнего определения не рассматриваем. Всякое решение уравнения (1), получающееся из общего решения при фиксированных $C_1, \ldots, C_n$, называется частным решением этого уравнения; неявно заданное решение, получаемое таким способом из общего интеграла, называется частным интегралом.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все его решения; обычно дело сводится к нахождению общего интеграла (общего решения). Если заданы начальные условия (или иные дополнительные условия), то требуется найти частное решение, удовлетворяющее этим условиям.

Для уравнений n-го порядка справедлива теорема, аналогичная теореме существования и единственности для уравнений первого порядка.

Теорема (Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка).

Если в уравнении

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

функция f и ее частные производные по переменным $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области G пространства переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ из этой области существует решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ .$$

Любые два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены.

Эту теорему принимаем без доказательства.

Как и в случае уравнения первого порядка задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ ,$$

называется задачей Коши. Из сформулированной теоремы следует, что при выполнении ее условий решение задачи Коши существует и единственно. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи Коши для уравнения второго порядка.

$$y'' = f(x, y, y') \ . \tag{3}$$

Здесь требуется найти решение этого уравнения, удовлетворющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0 \ , \quad y'(x_0) = y'_0 \ ,$$

где (x_0, y_0, y'_0) – некоторая точка из области определения правой части (3).

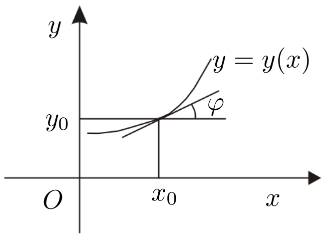

Рис.8

Геометрически это означает, что надо найти интегральную кривую на плоскости переменных x, y, проходящую через точку (x_0, y_0) и касающуюся в этой точке прямой с заданным угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\varphi = y_0'$. Варьируя y_0', мы можем получить бесконечно много интегральных кривых, проходящих через указанную точку. Отсюда следует, что (при выполнении условий сформулированной теоремы) уравнение (3) второго порядка имеет бесконечно много решений. Аналогичный вывод справедлив и для уравнений более высоких порядков.

При решении задачи Коши для уравнения (1) n-го порядка при известном общем решении $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ проходится выделять частное решение, определяя $C_1, \dots, C_n$ из системы

$$
\begin{aligned}
&y(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_0 \ , \\
&y'(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_0' \ , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&y^{(n-1)}(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)} \ ,
\end{aligned}
$$

в которой начальные значения заданы в одной точке x_0. При решении многих задач, однако, приходится находить частное решение, удовлетворяющее начальным значениям, заданным при различных x. Задача отыскания такого частного решения называется краевой задачей для уравнения n-го порядка.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения второго порядка

$$
y'' = f(x, y, y') \tag{4}
$$

При этом будем рассматривать решения этого уравнения, заданные не на интервале, а на отрезке; под производными функции $y = y(x)$ в граничных точках отрезка будем понимать соответствующие односторонние производные. Общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные, поэтому для их определения потребуется два условия.

Пусть требуется найти решение уравнения (4), заданное на отрезке $[x_1, x_2]$ и удовлетворяющее условиям

$$
y(x_1) = y_1 \ , \quad y(x_2) = y_2 \ .
$$

Эти условия называются краевыми условиями 1-го рода.

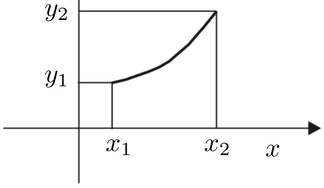

Рис.9

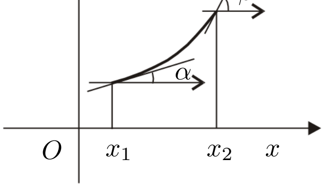

Рис.10

Геометрически такая задача означает, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Если задать значения производных

$$
y'(x_1) = y_1' \ , \quad y'(x_2) = y_2' \ ,
$$

то получим краевые условия второго рода. Задача отыскания решений решений уравнения (4), удовлетворяющего таким условиям, геометрически означает, что требуется найти интегральную кривую, имеющую в точках с абсциссами x_1 и x_2 касательные с угловыми коэффициентами $y_1' = \operatorname{tg}\alpha$ и $y_2' = \operatorname{tg}\beta$ соответственно.

Рассматривают и смешанную краевую задачу, когда задаются условия разного рода.

В отличие от задачи Коши, которая при достаточно общих предположениях имеет единственное решение, краевая задача может не иметь решений или иметь несколько (и даже бесконечно много) решений. Для решения краевой задачи находят общее решение соответствующего дифференциального уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2, а затем (если это возможно), определяют C_1 и C_2, при которых выполняются краевые условия.

Пример. Пусть имеется уравнение

$$y'' + y = 0\ .$$

Нетрудно проверить, что общее решение имеет в данном случае вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x\ .$$

Найдем решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 1\ , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ .$$

Имеем

$$\begin{aligned} &C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ &C_1 \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}\ .$$

Полученная система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 1$. Требуемое решение есть

$$y = \cos x + \sin x\ .$$

Если задать краевые условия в виде $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$, то для определения C_1 и C_2 получим систему:

$$\begin{aligned} &C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ &C_1 \cos\pi + C_2 \sin\pi = 1 \end{aligned}\ ,$$

которая, как легко видеть, несовместна. Решений у соответствующей краевой задачи нет.

Нетрудно проверить, что при краевых условиях $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$ краевая задача для рассматриваемого уравнения имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим некоторые уравнения, допускающие понижение порядка. Пусть дано уравнение

$$F\big(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0\ ,$$

не содержащее явно y. Положим $z = y'$ и в результате получим уравнение $(n-1)$-го порядка

$$F\big(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\big) = 0$$

относительно новой неизвестной функции z. Решив его (если это возможно), найдем z, а затем и y.

Если требуется решить уравнение n-го порядка, не содержащее явно x, т.е. уравнение вида

$$F\big(y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0\ ,$$

то понизить порядок такого уравнения можно с помощью новой неизвестной функции $p = p(y)$, для которой $y' = p(y)$. Из последнего равенства

$$y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y)\ ,$$

и при $n = 2$ для определения неизвестной функции p получаем уравнение

$$F\big(y, p(y), p'(y) \cdot p(y)\big) = 0$$

первого порядка, при решении которого y следует считать независимой переменной, а $p = p(y)$ – неизвестной функцией этой переменной. Решив последнее уравнение, найдем $p(y)$, а затем и y из уравнения $y' = p(y)$. В случае уравнения n-го порядка этот прием позволяет свести исходную задачу к аналогичной задаче для уравнения $(n-1)$-го порядка.

Пример. Пусть требуется найти решение уравнения

$$2yy'' = 1 + (y')^2 \ ,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

Введем новую неизвестную функцию $p(y)$, для которой $y' = p(y)$. Поскольку $y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y)$, то для определения $p(y)$ имеем уравнение 1-го порядка

$$2y\, p \cdot p' = 1 + p^2 \ .$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и находя первообразные, получаем

$$\ln(1 + p^2) = \ln|y| + C \ . \tag{5}$$

Для определения C запишем это уравнение так

$$\ln\Big(1 + \big(y'(x)\big)^2\Big) = \ln|y(x)| + C \ .$$

Подставив $x = 0$, получим с учетом начальных условий

$$\ln 2 = \ln 1 + C \ ,$$

т.е. $C = \ln 2$. Поэтому из (5) получаем

$$1 + p^2 = \pm 2y \ ;$$

т.к. $y(x) > 0$ в окрестности интересующей нас точки $x = 0$, то справа выбираем знак "+"; поскольку $p\big(y(0)\big) = y'(0)$ также также положительно, то

$$p = \sqrt{2y - 1} \ .$$

Для определения y имеем, следовательно, уравнение

$$y' = \sqrt{2y - 1} \ .$$

Решив это уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$\sqrt{2y - 1} = x + C \ .$$

подставив $x = 0$, найдем $C = 1$. Поэтому $\sqrt{2y-1} = x + 1$, и окончательно

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 2\right) \ .$$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 18-19

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка, однородные и неоднородные. Теорема существования и единственности решения. Дифференциальный оператор $L[y]$, его свойства. Линейное пространство решений однородного линейного дифференциального уравнения. Линейная зависимость и независимость системы функций на промежутке. Определитель Вронского (вронскиан). Теорема о вронскиане системы линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения. Теорема о структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения. Размерность пространства решений однородного линейного дифференциального уравнения. Фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения. Формула Остроградского-Лиувилля и ее следствия. Понижение порядка однородного линейного уравнения (при известном частном решении).

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x) \ , \tag{1}$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ определены на некотором промежутке I числовой прямой; мы будем считать, что все эти функции непрерывны на указанном промежутке. Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется однородным, в противном случае (т.е. если $b(x)$ отлична от тождественного нуля) – неоднородным.

Теорема (о существовании и единственности решения линейного уравнения n-го порядка). Для любой точки $x_0 \in I$ и для любых чисел $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ существует решение $y = y(x)$ уравнения (1), определенное на всем промежутке I и удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Любые два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают во всех точках промежутка I.

Эту теорему принимаем без доказательства.

В дальнейшем будем рассматривать лишь те решения уравнения (1), которые заданы на всем промежутке I (т.н. непродолжаемые решения).

Пусть X – множество всех n раз непрерывно дифференцируемых функций на интервале I; Y – множество всех непрерывных функций на этом интервале. Легко проверить, что X и Y – линейные пространства относительно обычных операций сложения функций и умножения их на числа. Нулём этих пространств служит функция, тождественно равная нулю на промежутке I.

Отображение $L : X \to Y$, определяемое равенством

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y \ ,$$

является линейным оператором, т.к.

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \ , \quad L[\alpha y] = \alpha L[y]$$

для любых элементов y, y_1, y_2 пространства X и для любого числа α. Оба эти равенства проверяются непосредственно. Линейный оператор $L[y]$ называется линейным дифференциальным оператором n-го порядка.

Теорема (о пространстве решений линейного однородного уравнения n-го порядка). Совокупность всех решений линейного однородного уравнения n-го порядка образует линейное пространство.

Доказательство. Уравнение (1) при $b(x) \equiv 0$ можно записать в виде

$$L[y] = 0 \ . \tag{2}$$

Если y, y_1, y_2 – произвольные решения этого уравнения и α – вещественное число, то в силу линейности оператора L имеем

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + K[y_2] = \overline{0} \ , \quad L[\alpha y] = \alpha L[y] = \overline{0} \ ,$$

где $\overline{0}$ означает функцию, тождественно равную нулю на промежутке I. Мы видим, что $y_1 + y_2$ и αy – также решения уравнения (2). Прочие условия из определения линейного пространства также проверяются без труда. Поэтому совокупность решений уравнения (2) образует линейное пространство. Теорема доказана.

Для системы функций

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) \ ,$$

заданных на промежутке I, обычным образом вводится понятие линейной зависимости; такая система называется линейно зависимой, если существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация этих функций:

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \ , \quad \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 \ .$$

В противном случае (т.е. когда тождественному нулю может равняться лишь тривиальная линейная комбинация этих функций) система функций называется линейно независимой.

Если система функций $y_1, \ldots, y_n$, заданных на промежутке I, состоит из $n-1$ раз дифференцируемых функций, то определителем Вронского (вронскианом) этой системы функций называют определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ .$$

Теорема (об определителе Вронского линейно зависимой системы функций). Если система $n-1$ раз дифференцируемых на промежутке I функций $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю.

Доказательство. Т.к. функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация этих функций, тождественно равная нулю:

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \ .$$

Дифференцируя это равенство $n-1$ раз, получим

$$\begin{array}{l} \alpha_1 y_1' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \ . \end{array} .$$

Мы видим, что столбцы определителя Вронского рассматриваемой системы функций линейно зависимы, и, следовательно, этот определитель равен нулю. Теорема доказана.

Замечание. Равенство нулю определителя Вронского является лишь необходимым условием линейной зависимости функций. Например, функции $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x|x|$ линейно независимы на интервале $(-1;1)$, однако определитель Вронского этой системы функций равен нулю в каждой точке указанного интервала.

Теорема (об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка). Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимая система решений уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \ , \tag{3}$$

где $a_1 = a_1(x), \ldots, a_n = a_n(x)$ – функции, непрерывные на промежутке I. Тогда определитель Вронского этой системы решений не равен нулю ни в одной точке промежутка I.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы в некоторой точке $x_0 \in I$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Из этого равенства следует, что столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы, т.е. существует нетривиальный набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такой, что

$$\begin{array}{c} \alpha_1 y_1^{(j)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(j)}(x_0) = 0 \ , \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \ . \end{array} \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$; по теореме о пространстве решений линейного однородного уравнения эта функция есть решение уравнения (3). Функция, тождественно равная нулю на промежутке I, также удовлетворяет этому уравнению и начальным условиям (4). По теореме существования и единственности получаем отсюда, что $y(x) \equiv 0$, т.е. существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, что противоречит линейной независимости этих функций. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0 \ ,$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке I. Тогда совокупность всех решений этого уравнения есть линейное пространство размерности n.

Доказательство. То, что совокупность X всех решений данного дифференциального уравнения образует линейное пространство, уже доказано (см. теорему о линейном пространстве решений линейного однородного уравнения). Чтобы доказать, что $\dim X = n$, достаточно указать в X базис из n векторов. С этой целью рассмотрим решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющие таким начальным условиям

$$\begin{array}{l} y_1(x_0) = 1\,, \quad y_1'(x_0) = \ldots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ y_2(x_0) = 0\,, \quad y_2'(x_0) = 1\,,\ y_2''(x_0) = \ldots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = \ldots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0\,, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1\,, \end{array}$$

где x_0 – произвольная точка промежутка I. Существование таких решений следует из теоремы **существования** и единственности. Решения эти линейно независимы, т.к.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Далее, если $y(x)$ – произвольное решение рассматриваемого уравнения, и если

$$y(x_0) = C_1\,,\ y'(x_0) = C_2\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,,$$

то в точке x_0, очевидно, выполняются равенства

$$\begin{array}{c} y^{(j)}(x_0) = C_1 y_1^{(j)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(j)}(x_0)\,, \\ j = 0, 1, \ldots, n-1\,. \end{array}$$

Поэтому по теореме существования и **единственности**

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

при любом $x \in I$. Таким образом, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ образуют базис в X и, следовательно, $\dim X = n$. Теорема доказана.

Базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения называется фундаментальной системой решений этого уравнения. Если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения, то общее решение такого уравнения можно записать в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)\,,$$

где $C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения линейного однродного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0\,,$$

где, как обычно, $a_1(x)$ и $a_2(x)$ – функции, непрерывные на некотором промежутке. Для определителя Вронского указанных решений имеем

$$W'(x) = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x) y_1' - a_2(x) y_1 & -a_1(x) y_2' - a_2(x) y_2 \end{vmatrix} = -a_1(x) W(x)\,,\ \text{т.е.}$$

$$W'(x) + a_1(x) W(x) = 0\,.$$

Мы видим, что определитель Вронского $W(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y' + a_1(x)y = 0 \ . \tag{5}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что этому же уравнению удовлетворяет и функция

$$y(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \ ,$$

причём $y(x_0) = W(x_0)$, где x_0 – произвольная фиксированная точка промежутка I. Из теоремы существования и **единственности** для уравнения (5) получаем, что для всех $x \in I$ выполняется равенство

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \ .$$

Это равенство называется формулой Остроградского-Лиувилля.

Аналогичная формула справедлива и для линейного однородного уравнения n-го порядка: если $y_1, \ldots, y_n$ – решения уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \ ,$$

то

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \ ,$$

где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ ,$$

а x_0 – произвольная точка промежутка, на котором заданы коэффициенты уравнения.

Если известно частное решение $\varphi(x)$ линейного однородного уравнения, то порядок уравнения может быть понижен. Соответствующий прием рассмотрим для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \ . \tag{6}$$

Подставим в это уравнение $y = z \cdot \varphi(x)$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Т.к.

$$\begin{aligned} y' &= z \cdot \varphi'(x) + z'\varphi(x) = 0 \ , \\ y'' &= z \cdot \varphi''(x) + 2z'\varphi'(x) + z''\varphi(x) \ , \end{aligned}$$

то для определения z имеем уравнение

$$z\big(\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x)\big) + 2z'\varphi'(x) + z''\varphi(x) + a_1(x)z' \cdot \varphi(x) = 0 \ .$$

Коэффициент при z здесь равен нулю, и z определяется из уравнения

$$z''\varphi(x) + \big(2\varphi'(x) + a_1(x)\varphi'(x)\big) \cdot z' = 0 \ ,$$

которое не содержит z и легко сводится к линейному однородному уравнению первого порядка.

Другой подход к понижению порядка линейного однородного уравнения при известном частном решении основан на применении формулы Остроградского-Лиувилля. Если, как и выше, $\varphi(x)$ – известное частное решение уравнения (6), то

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & \varphi(x) \\ y' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} , \tag{7}$$

и для определения $y = y(x)$ получается линейное однородное уравнение первого порядка. Если при этом нас не интересуют начальные условия для $y(x)$, то x_0 и $W(x_0)$ в правой части (7) можно задать произвольно. Например, можно находить $y = y(x)$ из уравнения

$$\begin{vmatrix} y & \varphi(x) \\ y' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)dx} ,$$

где $\displaystyle\int a_1(x)dx$ означает произвольную фиксированную первообразную функции $a_1(x)$.

Пример. Пусть требуется найти общее решение уравнения

$$2\sqrt{x} \cdot y'' - (4\sqrt{x} + 1)\, y' + (2\sqrt{x} + 1)\, y = 0 ,$$

если известно его частное решение $\varphi(x) = e^x$. Второе частное решение (линейно независимое с первым) ищем в виде $y = z\, e^x$; имеем $y' = (z' + z)\, e^x$, $y'' = (z'' + 2z' + z)\, e^x$, и для определения z получаем уравнение

$$2\sqrt{x}(z'' + 2z' + z) - (4\sqrt{x} + 1)(z' + z) + (2\sqrt{x} + 1)\, z = 0 .$$

После очевидных преобразований находим $\dfrac{z''}{z'} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Нас интересует лишь частное решение этого уравнения, например, $z' = e^{\sqrt{x}}$. Отсюда

$$z = \int e^{\sqrt{x}} dx = \int 2t\, e^t dt = 2t\, e^t - 2\int e^t dt = 2(t-1)\, e^t + C = 2(\sqrt{x} - 1)\, e^{\sqrt{x}} + C .$$

Таким образом, можно взять $z = 2(\sqrt{x} - 1)\, e^{\sqrt{x}}$. Поэтому фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения составляют функции

$$y_1(x) = e^x \quad \text{и} \quad y_2(x) = 2(\sqrt{x} - 1)\, e^{\sqrt{x} + x} ,$$

а общее решение можно записать в виде

$$y = C_1 e^x + C_2(\sqrt{x} - 1)\, e^{\sqrt{x} + x} ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (коэффициент 2, входящий в решение $y_2(x)$, "поглощается" постоянной C_2).

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 20-21

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (вывод для $n = 2$). Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Теорема о наложении частных решений. Метод Лагранжа вариации постоянных (вывод для $n = 2$). Структура частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \ , \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – вещественные числа. Уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1). Пусть λ_0 – вещественный корень характеристического уравнения. Тогда $y_0(x) = e^{\lambda_0 x}$ есть решение уравнения (1). В самом деле, $y_0^{(k)}(x) = \lambda_0^k e^{\lambda_0 x}$ (доказывается по индукции), поэтому

$$y_0^{(n)} + a_1 y_0^{(n-1)} + \ldots + a_n y_0 = (\lambda_0^n + a_2\lambda_0^{n-1} + \ldots + a_n) \cdot e^{\lambda_0 x} = 0 \ .$$

Пусть имеется комплекснозначная функция $w(x) = u(x) + i\,v(x)$ вещественной переменной x. Считая, что $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы (соответствующее число раз), положим по определению

$$w^{(k)}(x) = u^{(k)} + i\,v(k)(x), \quad k = 0, 1, \ldots \ .$$

При таком определении сохраняются правила дифференцирования суммы, произведения и частного, а также многие другие свойства операции дифференцирования. Далее, если $z = x + i\,y$, то будем считать по определению, что

$$e^z = e^{x+i\,y} = e^x(\cos y + i\,\sin y) \ .$$

Пусть $\lambda = \alpha + i\,\beta$, и пусть x - вещественная переменная. Тогда

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x + i\,\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\,\sin\beta x) \ .$$

Поэтому

$$(e^{\lambda x})' = \alpha\, e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\ \sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\beta\sin\beta x + i\,\beta\cos\beta x) = (\alpha + i\,\beta)\, e^{(\alpha+i\,\beta)\,x} = \lambda\, e^{\lambda x}\ .$$

По индукции можно доказать формулу

$$(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}\ , \quad k = 0, 1, 2\dots\ .$$

Нетрудно проверить, что если функция $w(x) = u(x)+i v(x)$ есть решение уравнения (1), то ее вещественная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ также будут решениями этого уравнения (при вещественных коэффициентах $a_0, a_1, \dots, a_n$). С помощью равенства $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$ можно без труда проверить, что если $\lambda_0 = \alpha + i\beta \neq 0$, есть комплексный корень характеристического уравнения, то $w(x) = e^{\lambda_0 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ есть решение уравнения (1), а тогда и функции $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ также будут решениями этого уравнения. Мы видим, что, зная корни характеристического уравнения, можно находить частные решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Если известны все корни характеристического уравнения, то можно построить и общее решение соответствующего дифференциального уравнения. Подробно рассмотрим уравнение второго порядка. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\ , \tag{2}$$

где a_1 и a_2 - вещественные числа. Напишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0\ . \tag{3}$$

Для уравнения (3) возможен один (и только один) из следующих случаев.

1. Корни уравнения (3) вещественны и различны. Обозначим эти корни λ_1 и λ_2. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\ .$$

Здесь нужно проверить лишь линейную независимость решений y_1 и y_2; чтобы убедиться в этом, составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1\cdot x} & e^{\lambda_2\cdot x} \\ \lambda_1\, e^{\lambda_1\cdot x} & \lambda_2\, e^{\lambda_2\cdot x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1\cdot x}\cdot e^{\lambda_2\cdot x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot x}\cdot(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0\ .$$

Таким образом, y_1 и y_2 линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

2. Уравнение (3) имеет один вещественный корень кратности 2; обозначим этот корень λ_0. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции $y_1 = e^{\lambda_0\cdot x}$ и $y_2 = x\, e^{\lambda_0\cdot x}$, а общее решение этого уравнения есть

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_0\cdot x}\ .$$

Проверим, что y_2 есть решение уравнения (2). Т.к. λ_0 - корень кратности 2 характеристического уравнения (3), то $\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2 = 0$ и $2\lambda_0 + a_1 = 0$. Далее

$$\begin{aligned} y_2' &= (1 + \lambda_0 x)\cdot e^{\lambda_0\cdot x}\ , \\ y_2'' &= (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x)\cdot e^{\lambda_0\cdot x} \end{aligned}\ .$$

Отсюда

$$y_2''+a_1y_2'+a_2y_2 = e^{\lambda_0\cdot x}(2\lambda_0+\lambda_0^2x+a_1+a_1\lambda_0x+a_2x) = e^{\lambda_0\cdot x}(2\lambda_0+a_1+x\left(\lambda_0^2+a_1\lambda_0+a_2)\right) = 0 \ ,$$

т.е. y_2 – решение уравнения (2). Проверим линейную независимость y_1 и y_2:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0\cdot x} & x\cdot e^{\lambda_0\cdot x} \\ \lambda_0\, e^{\lambda_0\cdot x} & (1+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0\cdot x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0\cdot x}\cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_0 & 1+\lambda_0 x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0\cdot x} \neq 0 \ .$$

Таким образом, y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

3. Характеристическое уравнение (3) имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, $\beta \neq 0$. В этом случае фундаментальная система решений уравнения (2) имеет вид

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \ , \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \ ,$$

а общее решение записывается так:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \ .$$

Здесь в проверке нуждается лишь линейная независимость решений y_1 и y_2; имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha\cdot x}\cos\beta x & e^{\alpha\cdot x}\sin\beta x \\ e^{\alpha\cdot x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha\cdot x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha\cdot x}\cdot \begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta\, e^{2\alpha\cdot x}(\cos^2\beta x+\sin^2\beta x) = \beta\, e^{2\alpha\cdot x} \neq 0 \ .$$

Поэтому y_1 и y_2 линейно независимы.

В случае уравнения n-го порядка каждому вещественному корню λ_0 характеристического уравнения кратности r ставим в соответствие систему функций $e^{\lambda_0 x}$, $xe^{\lambda_0 x}$, … , $x^{r-1}e^{\lambda_0 x}$, а каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\,\beta$, $\beta \neq 0$, кратности s – систему функций

$$\begin{aligned} &e^{\alpha\cdot x}\cos\beta x \ , \quad xe^{\alpha\cdot x}\cos\beta x \ , \quad \ldots \ , \quad x^{s-1}e^{\alpha\cdot x}\cos\beta x \ , \\ &e^{\alpha\cdot x}\sin\beta x \ , \quad xe^{\alpha\cdot x}\sin\beta x \ , \quad \ldots \ , \quad x^{s-1}e^{\alpha\cdot x}\sin\beta x \ . \end{aligned}$$

Можно доказать, что все такие функции являются решениями уравнения (1), а совокупность этих функций образует фундаментальную систему решений указанного уравнения.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x) \ , \tag{4}$$

где $a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ – функции, непрерывные на промежутке I.

Теорема (о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения). Общее решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$y = y_0(x) + C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x) \ , \tag{5}$$

где $y_0(x)$ – частное решение уравнения (4), а $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Уравнение (4) с помощью рассмотренного выше дифференциального оператора можно записать так:

$$L[y] = b(x) \ ;$$

соответствующее однородное уравнение запишется в виде

$$L[y] = 0 \ .$$

Применяя этот дифференциальный оператор к (5), получим:

$$L[y] = L[y_0 + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n] = L[y_0] + C_1 L[y_1] + \ldots + C_n L[y_n] = b(x) \ ,$$

и, следовательно, при любых $C_1, \ldots, C_n$ функция y, определяемая равенством (5), является решением уравнения (4).

Проверим теперь, что при соответствующем подборе констант $C_1, \ldots, C_n$ можно получить решение, удовлетворяющее любым начальным условиям

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y'_0 \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ .$$

Для определения констант $C_1, \ldots, C_n$ имеем такую систему:

$$\begin{array}{l} y(x_0) + C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)}(x_0) + C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ . \end{array}$$

Определитель этой системы

$$W(x_0) = \left| \begin{array}{lll} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{array} \right| \neq 0 \ ,$$

т.к. $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (4). Поэтому требуемый набор постоянных $C_1, \ldots, C_n$ существует. Оба условия, входящие в определение общего решения, проверены. Теорема доказана.

Теорема (о наложении частных решений). Пусть имеются два линейных неоднородных уравнения

$$L[y] = b_1(x) \quad \text{и} \quad L[y] = b_2(x) \ ;$$

где $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$, и пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения этих уравнений. Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения $L[y] = b_1(x) + b_2(x)$.

Доказательство. Имеем $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = b_1(x) + b_2(x)$, т.е. $y_1 + y_2$ – решение уравнения $L[y] = b_1(x) + b_2(x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим метод Лагранжа вариации постоянных. Пусть $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $L[y] = 0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения $L[y] = b(x)$ можно искать в виде

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x) \ , \tag{6}$$

где функции $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ определяются из системы

$$\begin{array}{l} C'_1 y_1 + \ldots + C'_n y_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-1)} = b(x) \ . \end{array}$$

Т.к. определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ne 0 \ ,$$

то из этой системы $C_1', \dots, C_n'$ определяются однозначно, а сами функции $C_1, \dots, C_n$ – с точностью до произвольных постоянных. Если в (6) подставить именно эти функции $C_1 = C_1(x), \dots, C_n = C_n(x)$, то получим частное решение уравнения (4).

Докажем последнее утверждение для $n = 2$. Уравнение в этом случае имеет вид

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \ ,$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$ – непрерывные на некотором промежутке функции. Частное решение данного уравнения ищем в виде

$$y(x) = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 \ ,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \ ,$$

а $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ – подлежащие определению функции. Предположим, что они удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} &C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 = 0 \\ &C_1'\, y_1' + C_2'\, y_2' = b(x) \ . \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &y'(x) = C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 + C_1\, y_1' + C_2\, y_2' = C_1\, y_1' + C_2\, y_2' \ ; \\ &y''(x) = C_1'\, y_1' + C_2'\, y_2' + C_1\, y_1'' + C_2\, y_2'' = b\,(x) + C_1\, y_1'' + C_2\, y_2'' \ . \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) + C_1\, y_1'' + C_2\, y_2'' + a_1(x)(C_1\, y_1' + C_2\, y_2') + a_2(x)(C_1\, y_1 + C_2\, y_2) = \\ = b(x) + C_1\big(y_1'' + a_2(x)y_1' + a_2(x)y_1\big) + C_2\big(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\big) = b(x) \ , \end{aligned}$$

т.е. $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$, и наше утверждение доказано.

Квазимногочленом называется сумма нескольких слагаемых вида

$$e^{\alpha\cdot x}\big(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\big) \ , \tag{7}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[y] = b(x)$$

и квазимногочленом в правой части рекомендуется искать методом неопределённых коэффициентов (методом подбора). Для каждого слагаемого вида (7), входящего в правую часть решаемого уравнения, частное решение уравнения $L[y] = e^{\alpha\cdot x}\big(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\big)$ ищется в виде

$$x^r e^{\alpha\cdot x}\big(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\big) \ , \tag{8}$$

где $r = 0$, если $\alpha + i\,\beta$ не есть корень характеристического уравнения, и r равно кратности этого корня в противном случае; $R(x)$ и $S(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами, степень каждого из которых равна максимальной из степеней $P(x)$ и $Q(x)$. Для нахождения неопределённых коэффициентов выражение (8) подставляется в соответствующее уравнение, и затем приравниваются коэффициенты при подобных членах слева и справа. После того, как частные решения найдены для всех слагаемых, входящих в $b(x)$, частное решение исходного уравнения определяется с помощью теоремы о наложении решений.

Пример. Пусть требуется найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x + 2e^x \ .$$

Здесь характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности 2. Найдем частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x \ . \tag{9}$$

Здесь $\alpha = \beta = 0$; максимальная степень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равна 1. Решение ищем в виде

$$y_{10} = ax + b \ .$$

Подставляя это в уравнение (9), получаем $-2a + ax + b = x$, откуда $a = 1$, $b = 2$ и $y_{10} = x + 2$.

Для уравнения

$$y'' - 2y' + y = 2e^x$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $r = 2$; частное решение ищем в виде $y_{20} = ax^2e^x$. Подставляя это в уравнение, получаем

$$a(x^2 + 4x + 2)e^x - 2a(x^2 + 2x)e^x + ax^2e^x = 2e^x \ , \quad a = 1 \ ;$$

частное решение $y_{20} = x^2e^x$. Для исходного уравнения частное решение y_0 находится по теореме о наложении решений:

$$y_0 = y_{10} + y_{20} = x + 2 + x^2e^x \ .$$

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 22

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Автономные системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство и фазовые траектории. Задача и теорема Коши. Частные и общее решения. Сведение дифференциального уравнения высшего порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Сведение нормальной системы к дифференциальному уравнению высшего порядка (вывод для $n = 2$). Первые интегралы системы. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений при помощи первых интегралов. Интегрируемые комбинации. Симметрическая форма записи нормальной автономной системы дифференциальных уравнений.

Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \tag{1}$$

или

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \ , \quad i = 1, \ldots, n \ . \tag{2}$$

В системе (1) (или (2)) x – независимая переменная, $y_1, \ldots, y_n$ – неизвестные функции этой переменной, $f_1, \ldots, f_n$ – заданные функции. Мы будем считать, что эти последние функции определены на некоторой области $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Решением системы (1) называется совокупность $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ дифференцируемых на некотором интервале I функций, которая обращает все уравнения этой системы в верные равенства при любом $x \in I$. График решения (т.е. кривая $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)\ , x \in I$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{x,y_1,\ldots,y_n}$) называется интегральной кривой системы (1). Нормальная система называется автономной, если правые части этой системы не зависят явно от x:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases}. \tag{3}$$

Введя новую неизвестную функцию, всякую систему можно свести к автономной: если положить $y_{n+1} = x$, то система (1) перепишется в виде

$$y_i' = f_i(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n) \ , \quad i = 1, \ldots, n \ ,$$
$$y_{n+1}' = 1 \ ,$$

и мы получим автономную систему. Область G пространства переменных $y_1, \ldots, y_n$, на которой заданы правые части системы (3), называются фазовым пространством; если $y_i = y_i(x),\ i = 1, \ldots, n,\ x \in I$ – решение указанной системы, то кривая в области G, задаваемая этими уравнениями, называется фазовой траекторией данной автономной системы.

Задача Коши для системы (1) ставится следующим образом. Дана точка $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$, принадлежащая области определения правых частей этой системы; требуется найти решение $y_i = y_i(x),\ i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x_0) = y_{i0},\ i = 1, \ldots, n$.

Теорема (Коши существования и единственности для нормальной системы). Пусть правые части системы

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \ , \quad i = 1, \ldots, n \ ,$$

определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $y_1, \ldots, y_n$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,y_1,\ldots,y_n}$. Тогда для любой точки $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in G$ существует решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $y_i'(x_0) = y_{i0}\ , \quad i = 1, \ldots, n$. Любые два решения этой системы, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены. Без доказательства.

Общим решением системы (1) называется совокупность функций

$$y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n) \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \tag{4}$$

определенных на некоторой области D пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,C_1,\ldots,C_n}$, обладающая следующими свойствами.

1. Для любого набора $C_1, \ldots, C_n$, при котором существует хотя бы один интервал I такой, что при любом $x \in I$ точка $(x, C_1, \ldots, C_n) \in D$, функции (4) задают решение системы (1) на любом таком интервале.

2. Для любой точки $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ из области определения правых частей системы (1) найдется набор $(C_{10}, \ldots, C_{n0})$ такой, что $y_i(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_{i0},\ i = 1, \ldots, n$.

Решение системы (1), получающееся из общего решения при фиксированных значениях $C_1, \ldots, C_n$, называется частным решением этой системы. Решить систему – значит найти все ее решения (или найти частное решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям).

Всякую систему, в которой уравнения разрешены относительно старших производных, а число уравнений равно числу неизвестных, можно с помощью введения новых неизвестных функций свести к нормальной системе. Рассмотрим соответствующий прием для системы из двух уравнений:

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} &= f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m-1)}) \ , \\ y_2^{(m)} &= f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m-1)}) \ . \end{aligned}$$

Пусть $y_{11} = y_1,\ y_{12} = y_1', \ldots, y_{1n} = y_1^{(n-1)}, y_{21} = y_2,\ y_{22} = y_2', \ldots, y_{2m} = y_2^{(m-1)}$. Относительно этих функций получаем такую (нормальную) систему:

$$\begin{aligned} & y_{11}' = y_{12}, \ldots, y_{1,n-1}' = y_{1n} \ , \\ & y_{1n}' = f_1(x, y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2m}) \ , \\ & y_{21}' = y_{22}, \ldots, y_{2,m-1}' = y_{2m} \ , \\ & y_{2m}' = f_2(x, y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2m}) \ . \end{aligned}$$

Ясно, что одно уравнение n -го порядка этим приемом будет сведено к нормальной системе относительно n неизвестных функций. В принципе верно и обратное: при определенных условиях нормальную систему можно свести к одному уравнению. Пусть имеется нормальная система двух уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2)\ . \end{cases}$$

Продифференцируем по x первое уравнение и подставим в получившееся выражение вместо y_2' правую часть второго уравнения системы:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial y_1}\, y_1' + \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial y_2} \cdot f_2(x, y_1, y_2)\ .$$

Затем из первого уравнения системы определим y_2 как функцию x , y_1 , y_1', т.е. $y_2 = y_2(x, y_1, y_1')$ и поставим эту функцию вместо y_2 в полученное ранее равенство. Т.о., следствием данной системы является уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции $y_1 = y_1(x)$. Аналогичным приемом можно получить и уравнение относительно $y_2 = y_2(x)$.

Рассмотрим снова нормальную систему (2):

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\ , \quad i = 1, \ldots, n\ , \tag{2}$$

правые части которой определены на области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,y_1,\ldots,y_n}$. Всегда будем предполагать, что для этой системы выполнены требования теоремы существования и единственности. Пусть имеется функция $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$, заданная на области G. Выражение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\ ,$$

в котором все частные производные вычисляются в точке $(x, y_1, \ldots, y_n)$, называется производной функции Φ в силу системы (2). Функция $\Phi : G \to \mathbb{R}$ называется первым интегралом системы (2), если для любого решения этой системы $y_i = y_i(x)\ ,\ i = 1, \ldots, n$, заданного на некотором интервале I, функция

$$\Phi\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$$

постоянна на этом интервале.

Теорема (об условиях, при которых функция является первым интегралом системы). Пусть в системе (2) правые части непрерывно дифференцируемы в области G по всем переменным. Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция

$$\Phi\ :\ G \to \mathbb{R}$$

была первым интегралом этой системы необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции, составленная в силу системы, равнялась нулю всюду в области G.

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ – первый интеграл системы (2), и пусть $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ – произвольная точка области G. По теореме **существования** и единственности найдется решение $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, системы (2), заданное на некотором интервале I, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x_0) = y_0$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, т.к. Φ – первый интеграл системы (2), то функция $\Phi\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ постоянна на интервале I. Поэтому

$$\frac{d\,\Phi}{d\,x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, y_i'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) = 0$$

для любого $x \in I$ $\Big($ все частные производные функции Φ вычисляются в точке $\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ $\Big)$. Подставляя в последнее равенство $x = x_0$, получим, что производная в силу системы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$

равна нулю в точке $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ области G. Т.к. последняя точка была взята произвольно, то эта производная равна нулю всюду в области G. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для функции Φ производная в силу системы (2) равна нулю всюду в области G. Рассмотрим произвольное решение этой системы $y_i = y_i(x)$ $, i = 1, \ldots, n$, заданное на некотором интервале I. Требуется доказать, что функция

$$\Phi\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) \tag{5}$$

постоянна на интервале I. Продифференцируем эту функцию по x на указанном интервале:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, y_i'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) = 0\ ,$$

т.к. $\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) \in G$, и производная функции Φ в силу системы равна нулю в каждой точке этой области. Мы видим, что производная функции (5) равна нулю в каждой точке интервала I. Поэтому Φ постоянна на этом интервале. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Для автономной системы

$$y_i' = f_i(y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, \ldots, n\ , \tag{6}$$

правые части которой заданы на области $G \subset \mathbb{R}^n_{y_1,\ldots,y_n}$, первым интегралом называется такая функция $\Phi\ :\ G \to \mathbb{R}$, что для любого решения $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n$, системы (6), заданного на интервале I, функция

$$\Phi\big(y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$$

постоянна на этом интервале. Другими словами, функция Φ постоянна вдоль всякой фазовой траектории системы (4). Для функции Φ, заданной на области G, производной в силу системы (4) называется

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i(y_1, \ldots, y_n)\ , \tag{7}$$

где все частные производные вычисляются в точке $(y_1, \ldots, y_n)$. Для автономных систем справедлив аналог теоремы об условиях, при которых функция является первым интегралом: в предположении непрерывной дифференцируемости функции Φ и правых частей системы (6) для того, чтобы Φ была первым интегралом необходимо и достаточно, чтобы производная функции Φ в силу системы, т.е. функция (7), равнялась нулю во всех точках области G.

Если известен первый интеграл Φ системы (2), то, разрешая уравнение

$$\Phi(x, y_1, \ldots, y_n) = C$$

относительно, например, y_n, получим

$$y_n = y_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, C)\ .$$

Подставляя правую часть этого равенства вместо y_n в первые $n-1$ уравнений системы (2), мы перейдем к системе из $n-1$ уравнений относительно $n-1$ неизвестных функций. Если найдены n независимых первых интегралов системы (2):

$$\begin{array}{l} \Phi_1 = (x, y_1, \ldots, y_n) = C_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n = (x, y_1, \ldots, y_n) = C_n \ , \end{array} \tag{8}$$

то, разрешая эти уравнения относительно $y_1, \ldots, y_n$, получим общее решение исходной системы:

$$y_1 = y_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = y_n(x, C_1, \ldots, C_n) \ .$$

Равенства (8) образует общий интеграл системы (2); точное определение этого понятия не рассматриваем. Независимость функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ понимается в том смысле, что отличен от нуля определитель (якобиан):

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Интегрируемой комбинацией системы (2) называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием этой системы и легко интегрирующееся. Иногда систему дифференциальных уравнений удается решить, найдя достаточное количество интегрируемых комбинаций.

Пример. Пусть дана система

$$y_1' = y_2 \ , \ y_2' = y_1 \ .$$

Складывая уравнения системы, получаем:

$$(y_1 + y_2)' = y_1 + y_2 \ , \ \text{т.е. } y_1 + y_2 = C_1 e^x \ .$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим еще одну интегрируемую комбинацию:

$$(y_1 - y_2)' = -(y_1 - y_2) \ , \ \text{т.е. } y_1 - y_2 = C_2 e^{-x} \ .$$

Общее решение данной системы запишется в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left(C_1 e^x + C_2 e^{-x}\right) \ , \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left(C_1 e^x - C_2 e^{-x}\right) \ . \end{aligned}$$

Коэффициент 1/2 перед скобкам в правых частях "поглощается" произвольными постоянными; поэтому общее решение можно записать и так:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \ , \quad y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \ .$$

Другая форма записи общего решения получится, если привлечь гиперболические функции:

$$y_1 = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x \ , \quad y_2 = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x \ .$$

Нахождение интегрируемых комбинаций иногда облегчается записью системы уравнений в симметрической форме. Для автономной системы (6) такая запись имеет вид:

$$\frac{d\,y_1}{f_1(y_1,\ldots,y_n)} = \ldots = \frac{d\,y_n}{f_n(y_1,\ldots,y_n)}\ .$$

При использовании симметрической формы записи для нахождения интегрируемых комбинаций нередко оказывается полезным свойство равных отношений: если даны равные дроби $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ и произвольные числа $R_1,\ldots,R_n$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{R_1a_1 + R_2a_2 + \ldots + R_na_n}{R_1b_1 + R_2b_2 + \ldots + R_nb_n}\ .$$

Пример. Пусть требуется найти первый интеграл системы

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}\ ,$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – неизвестные функции от переменной t. Используя свойство равных отношений, получаем

$$\frac{xdx + ydy}{2xyz} = \frac{dz}{xy}\ .$$

Отсюда

$$xdx + ydy = 2zdz\ ;$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = z^2 + C\ .$$

Последнее равенство задает первый интеграл рассматриваемой системы.

кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 23

Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной систем линейных дифференциальных уравнений. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \ , \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $b_i = b_i(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ – функции, непрерывные на некотором промежутке I; a_{ij} называются коэффициентами системы, b_i – свободными членами. Систему (1) можно записать короче:

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + b_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

В матричной форме система (1) запишется так:

$$Y' = A\,Y + B \ , \tag{2}$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов, а $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Если все свободные члены равны нулю, то система (1) называется однородной; в противном случае – неоднородной.

Теорема (существования и единственности для системы линейных дифференциальных уравнений). Для любого x_0 из промежутка I, на котором определены и непрерывны коэффициенты и свободные члены системы (1), и для любых чисел $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ существует решение этой системы $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, определенное на промежутке I и удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$. Любые два решения этой системы, заданные на промежутке I и удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают во всех точках этого промежутка.

Как обычно, данную теорему принимаем без доказательства. В сформулированной теореме речь идет о решениях, заданных на всем промежутке I, т.е. о непродолжаемых решениях; всюду в дальнейшем будем рассматривать только такие решения системы (1).

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \ , \end{cases} \tag{3}$$

или

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

В матричной форме такая систем запишется следующим образом:

$$Y' = AY \ , \tag{4}$$

где Y и A были определены выше.

Теорема (о пространстве решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений). Совокупность всех (непродолжаемых) решений системы линейных однородных уравнений образует линейное пространство.

Доказательство. Для доказательства удобно использовать матричную форму записи (4) данной системы. Пусть Y, Y_1, Y_2 – решения этой системы, α – вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} &(Y_1 + Y_2)' = AY_1 + AY_2 = A(Y_1 + Y_2) \ , \\ &(\alpha Y_1)' = \alpha Y' = \alpha AY = A(\alpha Y) \ . \end{aligned}$$

Мы видим, что $Y_1 + Y_2$ и αY также является решениями системы (4). Прочие требования, входящие в определение линейного пространства, проверяются без труда. Теорема доказана.

Обычным образом вводится понятие линейной зависимости и линейной независимости вектор-функций вида

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \ ,$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – функции, заданные на некотором промежутке I (одном и том же для всех рассматриваемых функций).

Определителем Вронского системы вектор-функций

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \ldots \\ y_{n1} \end{pmatrix} \ , \ Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ \ldots \\ y_{n2} \end{pmatrix} \ , \ \ldots \ , \ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \ldots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

называется определитель

$$W = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \ . \tag{5}$$

Теорема (об определителе Вронского линейно зависимой системы вектор-функций). Если система вектор-функций $Y_1, \ldots, Y_n$, заданных на промежутке I, линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю на этом промежутке.

Доказательство. По условию существует равная нулю (т.е. столбцу высоты n, состоящему сплошь из нулей) нетривиальная линейная комбинация вектор-функций $Y_1, \ldots, Y_n$. Это означает линейную зависимость столбцов определителя (5). Поэтому данный определитель равен нулю в каждой точке промежутка I. Теорема доказана.

Теорема (об определителе Вронского линейно независимой совокупности решений однородной системы). Если совокупность вектор-функций $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независима и состоит из решений однородной системы (4), то определитель Вронского этой совокупности вектор-функций не равен нулю ни в одной точке промежутка, на котором определены (и непрерывны) коэффициенты указанной системы.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы определитель Вронского (5) равен нулю в некоторой точке $x = x_0$, промежутка I, на котором определены (и непрерывны) коэффициенты системы (4). В таком случае столбцы этого определителя в указанной точке линейно зависимы, т.е.

$$Y(x_0) = C_1 Y_1(x_0) + \ldots + C_n Y_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – нетривиальный набор вещественных чисел. По теореме о пространстве решений однородной системы $Y = Y(x)$ – решение системы (4), причем решение, не равное тождественно нулю, т.к. по условию $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независимы. С другой стороны, это решение в точке x_0 удовлетворяет тем же начальным условиям, что и тождественно равное нулю решение системы (4). Это, однако, противоречит теореме существования и **единственности** для линейных систем. Полученное противоречие доказывает теорему.

Совокупность n линейно независимых решений линейной однородной системы (4), взятых в определенном порядке, называется фундаментальной системой решений этой системы дифференциальных уравнений. Существование такой системы решений будет доказано ниже.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – совокупность решений системы линейных однородных уравнений (4), $W = W(x)$ – определитель Вронского этой совокупности решений. Тогда

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr} A(t)dt}, \tag{6}$$

где x_0 – произвольная точка промежутка, на котором заданы коэффициенты системы (4), а $\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ – след матрицы коэффициентов этой системы. Формула (6) называется формулой Остроградского-Лиувилля. Докажем ее для $n = 2$, т.е. для системы

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}.$$

Для решений этой системы

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$$

составим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$$

и запишем его производную:

$$W' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ a_{21}y_{11}+a_{22}y_{21} & a_{21}y_{12}+a_{22}y_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{22})\,W\ ,$$

т.е. $W = W(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = (a_{11} + a_{22})\,y$. Этому же уравнению удовлетворяет и функция

$$y(x) = W(x_0)\cdot e^{\int_{x_0}^{x}\left(a_{11}(t)+a_{22}(t)\right)dt}\ ,$$

что проверяется непосредственно. Т.к. $y(x_0) = W(x_0)$, то по теореме существования и единственности для линейного уравнения равенство $y(x) = W(x)$ выполняется на всем промежутке I. Формула Остроградского-Лиувилля доказана.

Теорема (о структуре общего решения линейной однородной системы). Совокупность решений системы линейных однородных уравнений (4) образует линейное пространство размерности n; общее решение такой системы записывается в виде

$$Y = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n\ ,$$

где $Y_1, \ldots, Y_n$ – базис пространства решений (фундаментальная система решений).

Доказательство. По теореме о пространстве решений линейной однородной системы совокупность решений такой системы образует линейное пространство. Надо лишь доказать, что в этом пространстве существует базис, состоящий из n решений. Рассмотрим решения

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \ldots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \ldots\ ,\ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \ldots \\ y_{nn} \end{pmatrix}\ ,$$

удовлетворяющие следующим начальным условиям

$$\begin{gathered} y_{11}(x_0) = 1\ ,\ y_{21}(x_0) = \ldots = y_{n1}(x_0) = 0\ , \\ y_{22}(x_0) = 1\ ,\ y_{12}(x_0) = y_{32}(x_0) = \ldots = y_{n2}(x_0) = 0\ , \\ y_{nn}(x_0) = 1\ ,\ y_{1n}(x_0) = \ldots = y_{n-1,n}(x_0) = 0\ , \end{gathered}$$

где x_0 – произвольная точка промежутка I, на котором заданы коэффициенты системы (4). Существование таких решений обеспечивается теоремой **существования** и единственности. Решения $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независимы, т.к. определитель Вронского этой системы решений в точке x_0 является определителем единичной матрицы и равен 1, т.е. отличен от нуля. Пусть дано какое-либо решение системы (4)

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, в точке x_0 выполняется равенство

$$Y = y_{10}Y_1 + \ldots + y_{n0}Y_n\ , \tag{7}$$

где $y_{10} = y_1(x_0), \ldots, y_{n0} = y_n(x_0)$. Это означает, что решения Y и $y_{10}Y_1 + \ldots + y_{n0}Y_n$ системы (4) удовлетворяют одним и тем же начальным условиям. Поэтому равенство (7) справедливо не только в точке x_0, но и на всем промежутке I (по теореме существования и **единственности**). Таким образом, доказано, что решения $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независимы, и через них линейно выражается всякое решение системы (4). Следовательно, указанные решения образуют базис пространства решений, размерность этого пространства равна n, а общее решение записывается в виде

$$Y = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n\ .$$

Теорема доказана.

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы). Общее решение неоднороной системы (2) может быть записано в виде

$$Y = Y_0 + C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \ , \tag{8}$$

где Y_0 – частное решение неоднородной системы, а $Y_1, \ldots, Y_n$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы.

Доказательство. Имеем

$$Y' = (Y_0 + C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n)' = Y_0' + (C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n)' = AY_0 + B + A(C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n) =$$
$$= A(Y_0 + C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n) + B = AY + B \ ,$$

т.е. $Y' = AY + B$, и Y – решение системы (2).

Пусть теперь дана произвольная точка $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, где x_0 берется из промежутка, на котором заданы коэффициенты системы. Чтобы решение (8) удовлетворяло начальным условиям, определяемым данной точкой, надо подобрать константы $C_1, \ldots, C_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{array}{l} y_{10}(x_0) + C_1 y_{11}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0) = y_1^{(0)} \\ y_{20}(x_0) + C_1 y_{21}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0) = y_2^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0}(x_0) + C_1 y_{n1}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0) = y_n^{(0)} \ , \end{array}$$

где коэффициентами системы служат значения в точке x_0 компонент решений $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$. Такая система всегда разрешима (и имеет единственное решение), т.к. ее определитель есть определитель Вронского фундаментальной системы решений $Y_1, \ldots, Y_n$, вычисленный в точке x_0. Таким образом, оба требования, входящие в определение общего решения, выполнены. Теорема доказана.

Рассмотрим метод вариации постоянных для отыскания частного решения неоднородной системы

$$Y' = AY + B \ . \tag{2}$$

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Тогда частное решение неоднородной системы (2) можно искать в виде

$$Y = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \ , \tag{8}$$

где $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ – некоторые функции. Подберем их так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n = B \ .$$

Это возможно, т.к. определитель Вронского фундаментальной системы решений отличен от нуля. Проверим, что для $C_1, \ldots, C_n$ вектор-функция (8) удовлетворяет системе (2). Имеем

$$Y' = (C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n)' = C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n + C_1 Y_1' + \ldots + C_n Y_n' =$$
$$= B + C_1 A Y_1 + \ldots + C_n A Y_n = B + A(C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n) = AY + B \ ,$$

т.е. $Y' = AY + B$, и наше утверждение справедливо.

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 24

Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (вывод только для случая действительных и различных корней).

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ , \ i = 1, \ldots, n \ . \tag{1}$$

В матричной форме эта система запишется так:

$$Y' = AY \ , \tag{2}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \ , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

Характеристическим уравнением системы (1) (или (2)) называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Если корни характеристического уравнения вещественны и различны, то нетрудно построить фундаментальную систему решений системы (1). В самом деле, обозначим эти корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и для каждого корня найдем отвечающий ему собственный вектор:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \ldots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} \ , \ldots , \ E_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \ldots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

Заметим теперь, что вектор-функции

$$Y_i = e^{\lambda_i x} E_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ ,$$

являются решениями системы (2):

$$Y_i' = \lambda_i e^{\lambda_i x} E_i = e^{\lambda_i x} A E_i = A(e^{\lambda_i x} E_i) = A Y_i \ , \text{ т.е. } Y_i' = A Y_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Проверим, что $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независимы; для этого составим определитель Вронского:

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

т.к. собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Мы видим, что решения $Y_1, \ldots, Y_n$ действительно образуют фундаментальную систему решений системы (2).

Пример. Пусть дана система

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \ , \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \ . \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \ , \qquad \lambda_1 = -2 \ , \lambda_2 = 4 \ .$$

Собственные векторы, отвечающие найденным собственным значениям, определяем из систем:

$$\begin{cases} 3\alpha_{11} + 3\alpha_{21} = 0 \ , \\ 3\alpha_{11} + 3\alpha_{21} = 0 \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\alpha_{12} + 3\alpha_{22} = 0 \ , \\ 3\alpha_{12} - 3\alpha_{22} = 0 \ . \end{cases}$$

В качестве собственных векторов можно взять

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Фундаментальную систему решений образуют вектор-функции

$$Y_1 = e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } Y_2 = e^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Общее решение имеет вид

$$Y = C_1 e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ;$$

в координатах

$$y_1 = -C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} \ , \ y_2 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} \ .$$

Т.к. коэффициенты характеристического уравнения системы (2) вещественны, то его комплексные корни распадаются на пары комплексно сопряженных. Для каждой пары $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, можно построить два линейно независмых решения системы (2).

Найдем ненулевой комплексный вектор

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} \ ,$$

для которого $AZ = (\alpha + i\beta)Z$. Как и в вещественном случае нетрудно проверить, что комплекснозначная функция

$$e^{(\alpha+i\beta)x}Z = e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + i \left(e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)$$

является решением системы (2). Отсюда получаем два вещественных решения этой системы:

$$X = e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$
$$Y = e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

На доказательстве линейной независимости решений X и Y не останавливаемся.

Задача (для желающих). Доказать, что решения X и Y линейно независимы.

Пример. Пусть требуется найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 \ , \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \ . \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = 0 \ , \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i \ .$$

"Комплексный собственный вектор"

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

находим из системы:

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$\begin{cases} -3iz_1 - 3z_2 = 0 \ , \\ 3z_1 - 3iz_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Отсюда видно, что в качестве компонент Z можно взять $z_1 = 1$, $z_2 = -i$. Комплекснозначное решение системы есть

$$e^{(1+3i)x} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^x \begin{pmatrix} \cos 3x + i\sin 3x \\ \sin 3x - i\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем фундаментальную систему решений исходной системы:

$$Y_1 = e^x \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_2 = e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ -\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим общее решение:

$$Y = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ -\cos 3x \end{pmatrix},$$

или в координатах

$$y_1 = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \ ,$$
$$y_2 = e^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x) \ .$$

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то следует для каждого вещественного корня λ кратности r найти размерность m соответствующего пространства собственных векторов. Если $m = r$, то, взяв базис $E_1, \ldots, E_r$ этого пространства, получим для λ в точности r линейно независимых решений системы (2):

$$Y_i = e^{\lambda x} E_i \ , \ i = 1, \ldots, r \ .$$

Если $m < r$, то найти r линейно независимых решений для λ можно методом неопределенных коэффициентов. При этом решения следует искать в виде

$$Y = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_{r-m} x^{r-m}) \, e^{\lambda x} \ , \tag{3}$$

где

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{10} \\ \ldots \\ C_{n0} \end{pmatrix} \ , \ldots \ , \ C_{r-m} = \begin{pmatrix} C_{1,r-m} \\ \ldots\ldots \\ C_{n,r-m} \end{pmatrix}$$

– столбцы, компоненты которых подлежат определению. Для этого Y подставляют в исходную систему, сокращают обе части на $e^{\lambda x}$ и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. В результате получается система линейных однородных алгебраических уравнений, которой удовлетворяют компоненты столбцов $C_0, \ldots, C_{r-m}$. Решая эту систему, можно получить r линейно независимых решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Как известно, комплексные корни (не являющиеся вещественными) уравнения с вещественными коэффициентами распадаются на пары комплексно сопряженных корней одной и той же кратности. Если $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, – одна из таких пар кратности r, то описанную выше процедуру следует применить в комплексном случае для одного из корней $\alpha + i\beta$, а затем отделить в полученных комплекснозначных решениях вещественную и мнимую части. Проделав все это для каждого корня характеристического уравнения, получим фундаментальную систему решений для исходной системы дифференциальных уравнений.

Пример. Пусть требуется найти фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + y_3 \ , \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 + y_3 \ , \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ . \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((3-\lambda)^2 - 1\big) = (2-\lambda)^2(4-\lambda); \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 4.$$

Для собственного значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ матрица однородной системы, которой удовлетворяют компоненты собственных векторов, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Здесь без труда находим два линейно независимых собственных вектора, отвечающих этому собственному значению:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

этим собственным векторам отвечают два линейно независимых решения рассматриваемой системы:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Для собственного значения $\lambda_3 = 4$ соответствующую матрицу однородной системы приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

В качестве собственного вектора можно взять

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

этому вектору соответствует такое решение исходной системы

$$Y_3 = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Требуемая фундаментальная система решений найдена:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad Y_3 = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Пример 2. Найдем фундаментальную систему решений для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 , \\ y_2' = -y_1 + 3y_2 . \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2 .$$

Для определения компонент собственных векторов имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Здесь пространство собственных векторов имеет размерность $m = 1$, т.е. меньше кратности $r = 2$ соответствующего собственного значения. Поэтому решение исходной системы ищем в виде

$$Y = (C_0 + C_1 x)\, e^{2x} ,$$

где $C_0 = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$.

Находим производную

$$Y' = (C_1 + 2C_0 + 2C_1 x)\, e^{2x}$$

и подставляем в исходную систему; после сокращения на e^{2x} получаем

$$C_1 + 2C_0 + 2C_1 x = A\,(C_0 + C_1 x)\ ,$$

или

$$\begin{cases} C_1 + 2C_0 = AC_0\ , \\ 2C_1 = A\,C_1\ , \end{cases}$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Отсюда такая система для определения компонент векторов C_0 и C_1:

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{10} = c_{10} + c_{20}\ , \\ c_{21} + 2c_{20} = -c_{10} + 3c_{20}\ , \\ 2c_{11} = c_{11} + c_{21}\ , \\ 2c_{21} = -c_{11} + 3c_{21}\ . \end{cases}$$

Упорядочив неизвестные, получим

$$\begin{cases} c_{10} - c_{20} + c_{11} = 0\ , \\ c_{10} - c_{20} + c_{21} = 0\ , \\ c_{11} - c_{21} = 0\ , \\ c_{11} - c_{21} = 0\ . \end{cases}$$

Матрицу этой системы приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} I & III & II & IV \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Неизвестные c_{10} и c_{11} – базисные, c_{20} и c_{21} – свободные. Фундаментальную систему решений образуют решения

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,$$

т.е.

$$C_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ C_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$C_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда такая фундаментальная система решений исходной системы дифференциальных уравнений:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Y_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{2x}\ .$$