<u>1)</u> (опр. первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределенного интеграла)

Опр. *Пусть f(x) и F(x)- заданы на пром.I F(x) назыв первообразной ф-ции f(x) если ∀ x ϵ I (F(x))'=f(x)*

Св-ва П 1)Если F(x)-первооб. f(x) то и F(x)+c явл. первооб. f(x) где C ϵ IR.

2)Если ф-ции F(x) и G(x) –первообр одной и той же ф-ции f(x) то F(x)-G(x)=C CϵIR

Свойства НИ:

1)Если F(x) первообр f(x), то и $\int f(x)dx = F(x) + C$ где C – произвольная константа

2) $(\int f(x)dx)' = f(x)$,

3) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

4)$\int 1df(x) = F(x) + C$

5) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$ ∀ *a* ϵ *IR*, α ≠ 0

6)$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

2)(Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей)

-Любую правильн. рац.дробь вида $.Q_m = b_m(x - C_1)^{k_1}(x - C_2)^{k_2} \dots (x - C_i)^{k_i} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{e_1}(x^2 + p_1x + q_2)^{e_2} \dots (x^2 + p_sx + q_i)^{e_i}$

можно представить в виде суммы простейших рац. дробей

$$\frac{P_n(x)}{Q(X)} = \frac{A_{11}}{x-C_1} + \frac{A_{12}}{(x-c_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-c_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x-C_2} + \dots + \frac{A_{1k_2}}{(x-c_2)^{k_2}} + \dots \frac{A_{i1}}{x-C_i} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x-c_i)^{k_i}} + \frac{B_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{12}x+D_{12}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{1e_1}x+D_{1e_1}}{(x^2+p_sx+q_1)^{e_1}} + \dots + \frac{B_{j1}x+D_{j1}}{x^2+p_sx+q_j} + \frac{B_{j2}x+D_{j2}}{(x^2+p_sx+q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jR_j}x+D_{je_j}}{(x^2+p_sx+q_j)^{e_j}}$$

Интегрирование простейших дробей

$$1)\ \int \frac{A}{(x - C_1)^k}dx = \begin{cases} A\ln|x - C_1| + C, k = 1 \\ -\frac{A}{k-1}\frac{A}{(x - C_1)^{k-1}} + C, k = 2,3 \dots\dots \end{cases}$$

$$2)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p) - D + \frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(D - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{B}{2}I_k + \left(D + \frac{Bp}{2}\right)I_k$$

$$I_k = \begin{cases} A\ln|x - C_1| + C, k = 1 \\ -\frac{A}{k-1}\frac{A}{(x - C_1)^{k-1}} + C, k = 2,3.. \end{cases}$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{(\left(x - \frac{p^2}{4}\right)^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right))^k} = \begin{vmatrix} t = x + \frac{p}{2} \\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \int \frac{t}{(t^2+a^2)^k} - \int t\, d\frac{1}{(t^2+m^2)^k} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2\mathrm{k}\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2\mathrm{k}\int (\frac{t}{(t^2+a^2)^{k+1}} - \frac{a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}})\mathrm{dt} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2\mathrm{k}J_k - 2ka^2J_k + 1 \quad \Rightarrow J_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} * \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}J_k$$

Однако $J_1 = \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{t}}{4} + \mathrm{C}$, значит мы легко можем найти J_k , A_k ϵ ***N*** в частности

$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{t}{t^2+a^2}\frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{t}}{a} + \mathrm{C}$

3) (свойства опр. интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции)

- Св-ва : 1 Линейность: Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на [*a*,*b*], A_1 и A_2 – произвольн. числа.Тогда $A_1\ f_1(x)$+ $A_2\ f_2(x)$ так же интегр. на [*a*,*b*];

$\int_a^b (\mathrm{A}_1f_1(x) + \mathrm{A}_2f_2(x))dx = \mathrm{A}_1\int_a^b f_1(x)dx + \mathrm{A}_2\int_a^b f_2(x)dx$

2.Аддитивность. Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, c] и [c, b]. Тогда она интегрируема и на отрезке [a, b], причем

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

3.Ориентирован. промежутка интегрир.

$\int_a^b f(x)dx =$ -$\int_b^a f(x)dx$ Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, b] тогда верно равенство

4.Теорема (о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции**)**

Пусть *f(x)* интегрируема на [*a, b*] и *f(x)* ≥*0* и ∀x Є[*a,b*], тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

-Доказательство $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$ *поскольку* $\Delta x_i > 0$ *и f(*ξ_i*)*≥ 0

∀ ξ_i ϵ[*a,b*], Переходя к пределу λ(τ)->0 получим требуемое $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5. Теорема (об интегрир. нерав.)

Пусть функции $f_1\ (x)$ и $f_2\ (x)$ интегрируемы на отрезке [*a, b*], *f1(x)* ≤ *f2(x)* ∀x Є[*a,b*] . Тогда $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx;$

6.Теорема (об оценке) Пусть f(x) интегрир. на [*a*,*b*] и m≤f(X)≤M ∀x Є[*a*,*b*]

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

7. Теорема (об оценке модуля определенного интеграла)

Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [*a, b*] . Тогда функция |*f(x)*| также интегрируема на этом отрезке, и $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

8. Терема(о среднем) Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*] . Тогда ∃*ξ* ∈ [*a, b*] такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

4 **(Св-ва опр. интеграла. Доказать теорему об оценке опр. интеграла)**

- Св-ва : 1 Линейность: Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на [*a*,*b*], A_1 и A_2 – произвольн. числа.Тогда $A_1\ f_1(x)$+ $A_2\ f_2(x)$ так же интегр. на [*a*,*b*];

$$\int_a^b (\mathrm{A}_1f_1(x) + \mathrm{A}_2f_2(x))dx = \mathrm{A}_1\int_a^b f_1(x)dx + \mathrm{A}_2\int_a^b f_2(x)dx$$

2.Аддитивность. Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, c] и [c, b]. Тогда она интегрируема и на отрезке [a, b], причем

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

3.Ориентирован. промежутка интегрир.

$\int_a^b f(x)dx =$ -$\int_b^a f(x)dx$ Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, b] тогда верно равенство

Теорема: Пусть f(x) интегрируема на [a;b] и m≤f(x)≤M для любых x принадлежащих [a;b], тогда:

m(b-a)≤ $^b\int_a$ f(x)dx≤M(b-a)

Док-во: (Из теоремы об интегр. неравенств) следует, что если m≤f(x)≤M для любых x принадлежащих[a;b] то $^b\int_a$mdx≤$^b\int_a$f(x)dx≤$^b\int_a$Mdx -> m(b-a)≤ $^b\int_a$ f(x)dx≤M(b-a)

5 **(Св-ва опр. интеграла. Доказать теорему об оценке модуля опр. Интеграла)**

- Св-ва : 1 Линейность: Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на [*a*,*b*], A_1 и A_2 – произвольн. числа.Тогда $A_1\ f_1(x)$+ $A_2\ f_2(x)$ так же интегр. на [*a*,*b*];

$$\int_a^b (\mathrm{A}_1f_1(x) + \mathrm{A}_2f_2(x))dx = \mathrm{A}_1\int_a^b f_1(x)dx + \mathrm{A}_2\int_a^b f_2(x)dx$$

2.Аддитивность. Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, c] и [c, b]. Тогда она интегрируема и на отрезке [a, b], причем

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

3.Ориентирован. промежутка интегрир.

$\int_a^b f(x)dx =$ -$\int_b^a f(x)dx$ Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, b] тогда верно равенство

Теорема: Пусть f(x) интегрируема на [a;b], тогда |f(x)| так же интегрируем на [a;b] при этом

| $^b\int_a$ f(x)dx|≤ $^b\int_a$ |f(x)|dx

Док-во: Интегрируемость |f(x)| очевидна следует из того, что если f(x) интегр. на [a;b] то и –f(x) интегр.на [a;b]

Запишем очевидное нер-во $|^N\sum_{i=1} f(c)\Delta x_i| \leq {}^N\sum_{i=1}|f(c)|\Delta x_i$

Поскольку для любых a1….an принадлежащих R

|a1+…..+an|≤|a1|+….+|an|

Переходя к пределу λ(r)->0 получим : | $^b\int_a$ f(x)dx|≤ $^b\int_a$ |f(x)|dx

6 (**Св-ва опр. интеграла. Доказать теорему о среднем для опр. Интеграла)**

- Св-ва : 1 Линейность: Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на [*a*,*b*], A_1 и A_2 – произвольн. числа.Тогда $A_1\ f_1(x)$+ $A_2\ f_2(x)$ так же интегр. на [*a*,*b*];

$$\int_a^b (\mathrm{A}_1f_1(x) + \mathrm{A}_2f_2(x))dx = \mathrm{A}_1\int_a^b f_1(x)dx + \mathrm{A}_2\int_a^b f_2(x)dx$$

2.Аддитивность. Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, c] и [c, b]. Тогда она интегрируема и на отрезке [a, b], причем

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

3.Ориентирован. промежутка интегрир.

$\int_a^b f(x)dx =$ -$\int_b^a f(x)dx$ Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, b] тогда верно равенство

Теорема: Пусть f(x) непрерывна на [a;b], тогда существует с принадлежащие [a;b] такое что $^b\int_a$f(x)dx=f(c)(b-a)

Док-во: Из свойства ф-ий непрерывных на отр. следует, что f(x) достигает на [a;b] своего максимума M и минимума m. И принимает все значения на [m;M] (m≤f(x)≤M) для любых x принадлежавших [a;b]->(Из теоремы об интегр. неравенств)

m(b-a)≤ $^b\int_a$ f(x)dx≤M(b-a) --> m≤ $^b\int_a$ f(x)dx*(1/(b-a))≤M --> существует с принадлежащие [a;b] такое что $^b\int_a$ f(x)dx*(1/(b-a))=f(c) --> $^b\int_a$f(x)dx=f(c)(b-a)

7)(Определение интеграла с переменным верхним пределом.

Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.)

Опр.: Пусть f(x) интегр.на [a,b],тогда ∀x∈[a,b] опр.интегралом F(x)=$^x\int_a$f(t)dt, который назыв.интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема: Пусть f(x) интегр.на [a,b] и f(x) непрерывна в некой точке x_0∈[a,b],тогда F(x)= $^x\int_a$f(t)dt диф-ема в x_0 и F'(x_0)=f(x_0)

Док-во: Достаточно док-ть, что

$\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0}{\Delta x} - f(x_0)) = 0$

$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|\Delta x|}|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - f(x_0)\Delta x| = \frac{1}{|\Delta x|}|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1dt| = \frac{1}{|\Delta x|}|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t) - f(x_0))dt| \leq \frac{1}{|\Delta x|}|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t) - f(x_0)|dt|$

f(x) по усл. непрерывна в x_0⇒∀ $\frac{\mathrm{E}}{2}$>0 ∃ δ>0: ∀t∈(x_0-δ, x_0+δ) выполняется:

|f(t)-f(x_0)|< $\frac{\mathrm{E}}{2}$ ⇒

$\left|\int_{\mathrm{x0}}^{\mathrm{x0}+\Delta x}|\mathrm{f(t)} - \mathrm{f(x0)}|dt\right| \leq \left|\left|\int_{\mathrm{x0}}^{\mathrm{x0}+\Delta x}\frac{E}{2}dt\right|^2\right.$

=$\frac{\mathrm{E}}{2}$|Δx|⇒при|Δx|<δ: $\frac{1}{\Delta x}\frac{\mathrm{E}}{2}$ |Δx|=$\frac{\mathrm{E}}{2}$<E⇒∀E>0 ∃δ>0 такое, что при |Δx|<δ

$|\frac{F(x0+\Delta x)-F(x0)}{\Delta x} - f(x0)|$<E ⇒

$\log_{\Delta x\to 0}|\frac{F(x0+\Delta x)-F(x0)}{\Delta x} - f(x0)|$=0

8. (Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.)

- Св-ва : 1 Линейность: Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на [*a*,*b*], A_1 и A_2 – произвольн. числа.Тогда $A_1\ f_1(x)$+ $A_2\ f_2(x)$ так же интегр. на [*a*,*b*];

$\int_a^b (\mathrm{A}_1f_1(x) + \mathrm{A}_2f_2(x))dx = \mathrm{A}_1\int_a^b f_1(x)dx + \mathrm{A}_2\int_a^b f_2(x)dx$

2.Аддитивность. Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, c] и [c, b]. Тогда она интегрируема и на отрезке [a, b], причем

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

3.Ориентирован. промежутка интегрир.$\int_a^b f(x)dx =$ -$\int_b^a f(x)dx$ Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, b] тогда верно равенство.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

Пусть f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и φ (x) — какая-либо первообразная функции f(x) на отрезке [a,b]. Тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(\mathrm{a})$

Док-во: Интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ также будет первообразной функции f(x) на отрезке [a,b]. Две первообразные отличаются на константу $\varphi(x) - \int_a^x f(t)dt = C$

Подставим x=a, получим $\varphi(a) - \int_a^a f(t)dt = C$=> φ(a)=C, имеем $\varphi(x) - \int_a^x f(t)dt = \varphi(a)$

Подставим x=b, получим $\varphi(b) - \int_a^b f(t)dt = \varphi(a)$=> $\int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$

9. (Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла.)

Пусть f(x) непрерывна на [a;b], пусть ϕ(t) непрерывно диф-ма на [α, β] , тогда если a = ϕ(α) и b=ϕ(β), то справедливо равенство

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$

Док-во: Пусть F(x) первообразн. ф-ии f(x) на [a;b] эта первообр сущ-ет, поскольку f9x0 непрер. на [a;b]. Тогда F(ϕ(t))' = F (ϕ(t)) ϕ'(t) = f(ϕ(t)) ϕ'(t).

Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$. Но также и

$\int_a^b \mathrm{f}(\phi(\mathrm{t}))\phi'(t)\,d\mathrm{t} =$

$F(\phi(t))|_\alpha^\beta = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a)$

следовательно : $F(b) - F(a) = \int_b^a f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$

10.(Сформулировать и доказать теорему об интегрир. По частям для опр. интеграла.)

Пусть u(x) и v(x) непрерывно дифференцируемы на [a;b], тогда справедливо равенство

$\int_a^b \mathrm{u(x)\ v'(x)dx}$ =u(x) v(x)I_a^b - $\int_a^b \mathrm{u'(x)\ v(x)dx}$

Док-во:

Рассмотрим функцию f(x)=u(x) v(x)- $\int_a^b \mathrm{u'(t)\ v(t)dt}$.

Найдем производную: (F(x))'= u'(x) v(x)+ +u(x)v'(x)-($\int_a^x \mathrm{u'(t)\ v(t)dt}$)'= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)-u'(x)v(x)= u(x)v'(x) (по т. о произв. Интеграла с перем. Верхним пределом) : ($\int_a^x \mathrm{u'(t)\ v(t)dt}$)'= u'(x)v(x) => F(x)-первообразная функции u(x)v'(x)

Применим формулу Ньютона Лейбница :

$\int_a^b \mathrm{u(x)\ v'(x)dx}$= F(x) I_a^b= u(x) v(x)I_a^b - $\int_a^b \mathrm{u'(x)\ v(x)dx}$

11. (Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.) *Свойства в билетах:3,5,6,8!!*

Пусть f(x) — периодическая с периодом T функция. Тогда, если f(x) непрерывна на каком-либо отрезке длины T, то она непрерывна на всей числовой прямой и интеграл $\int_a^{a+T} f(x)dx$ не зависит от a.

Док-во: Докажем первое утверждение от противного. Пусть x_0 – точка разрыва f(x). Тогда в силу её периодичности x_0+Tn — также точка разрыва f(x) $\forall n \in Z$. Следовательно, не существует отрезка длины T, на котором f(x) непрерывна. Противоречие: f(x) не имеет точек разрыва.

Запишем очевидное равенство: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$

В последнем интеграле сделаем замену: x=t+T, A=0, B=a, dx=dT и $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dT = \int_0^a f(x)dt$, т.к. f(t+T)=f(t)(T—период)=> $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$

Т.е. $\int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(t)dt$ и $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Теорема (Об интегрировании чётных и нечётных функций по симметричному промежутку

Пусть f(x) непрерывна на отрезке [-a,a]. Тогда:

1)Если f(x) — четная, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

2)Если f(x) — нечетная, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Док-во: напишем очевидное рав-во: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$, в первом интеграле сделаем замену: -x=t, A=a, B=0, dx=-dt, и $\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt$, и $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(-x) + f(x))dx$

Т.к. $\int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$

1)Если f(x) — четная, то f(-x)=f(x) и $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

2)Если f(x) — нечетная, то f(-x)=-f(x) и $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

12**) (Опр. несобств интеграла 1-го рода. Сформулир и док-ть признак сходимости по неравенству для несобств. Инт. 1-го рода.)**

Опр. Пусть f(x) опр-на ∀x >= a и интегрир на любом отрезке [a;b] , b ∈ [a;+ ∞) . Тогда на промеж[a;+ ∞) можно задать F(b) = $\int_a^b f(x)dx$. Если сущ-ет конечн предел $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ б то этот предел назыв несобств интегралом 1-го рода от функции f(x) на пром [a;+ ∞) и обознач $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пусть f(x) и g(x) опр-ны на промеж [a;+ ∞] и интегрир на любом отрезке [a;b] , b ∈ [a;+ ∞) . Пусть также 0<=f(x)<= (x) ρ∀x ∈ [a;+ ∞). Тогда: 1) если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то сход $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. 2)Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится , то расходится и $\int_a^{+\infty} \rho(x)dx$.

Док-во: Пусть $\int_a^{+\infty} \rho(x)dx$ сход, тогда $\int_a^{+\infty} \rho(x)dx \le c => \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} \rho(x)dx \le c =>$ сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, а $\int_a^{+\infty} \rho(x)dx$ сход, то приходим к противоречию уже доказанного => $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расход => $\int_a^{+\infty} \rho(x)dx$ расход.

15.(Опр. несобств инт 2-го рода и признаки сходимости таких интег)

Опр. Пусть f(x) опр на [a;b) неогранич в левой окрестности точки b и интегрир на любом отрезке [a;n] Тогда $\lim_{n\to b} f(x)dx$ назыв несобств интегр 2-го рода от ф-ции f(x) по промеж [a;b) : $\int_a^b f(x)dx$.

Признаки сходимости:

1)Признак сравнения в предельной форме. Пусть f(x) и g(x) опр-ны на [a;b), неогранич в левой окрестности точки b и интегрир на любом отрезке [a;n] ⊂ [a;b). Пусть также f(x)>0 и g(x)>0 ∀x∈ [a;b). Тогда если сущ предел $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k\ (0 < k < +00)$, то $\int_a^b f(x)dx$ и: $\int_a^b g(x)dx$ сходим и расходим одноврем

2) …. Пусть также ∀x∈ [a;b) $0 \le f(x) \le g(x)$,

Тогда: а) если $\int_a^b g(x)dx$ *сход то* $\int_a^b f(x)dx$ *сход так же и про расход.*

13.(Определение несобств. интеграла 1 рода. Предельный признак сравнения для несобств. интегралов 1 рода.)

Пусть f(x) определена ∀ x ≥ a и интегрируема на любом отрезке [a,b] , b ∈ [a,+∞) , тогда на промежутке [a;+∞] можно задать F(b) = $\int_a^b f(x)dx$. Если существует конечный предел $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b)$, то этот предел называют несобственным интегралом 1 рода от *f(x)* на промежутке [a;+∞) и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Пусть *f(x)* и *g(x)* положительны и определены $\forall x \ge 2$ и интегрируемы на любом отрезке $[a,b]$, $b \in [a,+\infty)$, тогда, если $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно

Пусть $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, тогда для $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0\ \ \exists\delta = \delta\left(\frac{k}{2}\right) > 0$ такое что $\forall x \ge \delta(\frac{k}{2})$ выполнено неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon = \frac{k}{2}$

$$-\frac{k}{2} + k < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{k}{2} + k$$

$$\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2}$$

$$0 < \frac{k}{2}g(x) < f(x) < \frac{3k}{2}g(x)\ \ \forall x \ge \delta(\frac{k}{2})$$

- если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится => (по аддитивности) $\int_{\delta(\frac{k}{2})}^{+\infty} f(x)dx$ сходится => сходится и несобственный интеграл $\int_{\delta(\frac{k}{2})}^{+\infty} \frac{k}{2} g(x)dx$ => (аддитивность) сходится и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$
- если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ – сходится => (по аддитивности) $\int_{\delta(\frac{k}{2})}^{+\infty} g(x)dx$ сходится => сходится и несобственный интеграл $\int_{\delta(\frac{k}{2})}^{+\infty} \frac{3k}{2} f(x)dx$ => (аддитивность) сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

14. (Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.)

Опр. Несобственного интеграла 1-го рода

Пусть f(x) определена $\forall x \ge a$ и интегрируема на любом отрезке [a,b], $b \in [a;+\infty)$. Тогда на промежутке $[a;+\infty)$ можно задать $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Если существует конечный предел $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b)$, то этот предел назыв. несобственным интегралом 1-го рода от функции f(x) на промежутке $[a,+\infty)$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема (о сходимости абсолютно сходящегося несобственного интеграла.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Док-во: Запишем очевидное рав-во:

$0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)\}\quad \forall x \in [a;+\infty)$

По условию $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$— сходится => (св. лин.)$\int_a^{+\infty} 2|f(x)|dx$— сходится. Тогда по теореме о признаке сравнения сходится и интеграл $\int_a^{+\infty}(f(x) + |f(x)|)dx$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty}(f(x) + |f(x)|)dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$— тоже сходится(как линейная комбинация сходящихся несобственных интегралов.

20.**{Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = a(\varphi) > 0$, где r и φ — полярные координаты точки, $\mathrm{a} \le \varphi \le \mathrm{b}$.Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой}**

Если $\boldsymbol{r = r(\varphi)}$ задана в полярной системе координат, то $\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\cdot\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [\alpha,\beta]$

Имеем: $((r(\varphi)\cdot\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\cdot sin\,\varphi)')^2 = (r'(\varphi)\cdot\cos\varphi - r(\varphi)\cdot\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\cdot\sin\varphi + r(\varphi)\cdot\cos\varphi)^2 =$

$$((r'(\varphi))^2\cdot\cos^2\varphi + r^2(\varphi)\cdot\sin^2\varphi - 2r'(\varphi)\cdot r(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi + (r'(\varphi))^2\cdot\sin^2\varphi + r^2(\varphi)\cdot\cos^2\varphi + 2r'(\varphi)\cdot r(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi = (r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)$$

В итоге имеем $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi)^2 + (r(\varphi))^2}\,d\varphi$.

16.**(Фигура ограничена кривой y = f(x) ≥ 0, прямыми x = a, x = b и y = 0 (a<b). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.)**

Разобьем отрезок [a;b] :

a = $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

Запишем очевидное равенство:

$f(\eta_i)\Delta x_i \le S_i \le f(\xi)\Delta x_i$

Где S_i – площадь под графиком функции $f(x)$, ограниченной $x = x_{i-1}$; $x = x$ и $y = 0$.

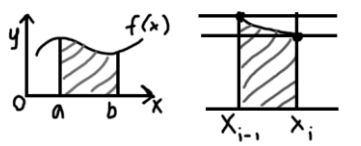
$f(\eta_i)$ и $f(\xi_i)$ – наим. и наиб. (MIN и MAX) знач. Функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$.

Проинтегрируем на i от 1 до n, получим:

$\sum_{i=1}^n f(\eta_j)\Delta x_i \le S \le \sum_{i=1}^n f(\xi_j)\Delta x$.

Переходя к пределу $\lambda(\tau) \to 0$ Получим:

$\int_a^b f(x)\,dx \le S \le \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow S = \int_a^B f(x)\,dx$.



17.(**Фигура ограничена лучами φ = α, φ = β и кривой r = f(φ). Здесь r и φ – полярные координаты точки, 0 ≤ α < β ≤ 2π. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры.)**

Выполним τ разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$:

$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi n = \beta$

Запишем очевидное равенство:

$\frac{1}{2}r^2(\eta_i)\Delta\varphi_i < S_i < \frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\varphi$.

Где S_i - площадь криволинейного сектора, ограниченного отрезками лучей:

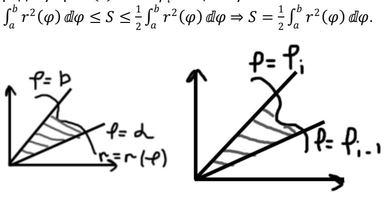
$\varphi = \varphi_{i-1}$ и $\varphi = \varphi_i$ и графиком $r = r(\varphi)$.

$r(\eta_i)$ и $r(\xi_i)$ – наим. и наиб. Значения функции $r(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_{i-1};\varphi_i]$.

Проинтегрируем по i до n , получим:

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n r^2(\eta_i)\,\Delta\varphi i \le S \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n r^2\,(\xi_i)\Delta\varphi_i$. Переходя к пределу при $\lambda(\tau)= \max\varphi_i \to 0$, получим:

$\frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)\,d\varphi \le S \le \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)\,d\varphi \Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)\,d\varphi$.



18. (**Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой y = f(x) ≥ 0, прямыми x = a, x = b и y = 0 (a < b). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.)**

Пусть тело M находится между плоскостями x=a и x=b.

Пусть $\forall x_0 \in [a;b]$

Известна $S(x_0)$ – площадь фигуры, полученной сечением тела M плоскостью $x = x_0$.

Пусть также $S(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Построим разбиение τ отрезка $[a;b]$:

$a = x_0 < \cdots < x_n = b$.

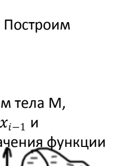
Запишем очевидное равенство:

$S(\eta_i)\Delta x_i \le V_i \le S(\xi_i)\Delta x_i$, где V_i – объем тела M, заключенный между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$. $S(\eta_i)$ и $S(\xi_i)$ – наим. и наиб. значения функции $S(x)$ на отрезке $[x_{i-1};x_i]$.

$\sum_{i=1}^n S(\eta_i)\Delta x_i \le V \le \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$.

Переходя к пределу $\lambda(\tau) \to 0$ Получим:

$V = \int_a^b S(x)\,dx$.



*Если тело M получено вращением графика непрерывной функции y=f(x) вокруг оси Ox, то $S = \pi f^2(x)$ и V тела вращения будет равен: $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

19.{Кривая задана в декартовых координатах уравнением y = f(x), где x и y — декартовые координаты точки, $\mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{b}$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой}

Пусть y=y(x) – непрерывно дифференцируемая кривая на [a;b]. Построим разбиение τ отрезка [a;b] :

$\mathrm{a} = \mathrm{x}_0 < \mathrm{x}_1 < \cdots < \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{b}$. Построим ломанную с вершинами в точках $(x_i, y_i)=(x_i, y(x_i))$

Тогда длина элемента этой прямой (по теореме Лагранжа):

$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y(x_i) - y(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y'(\xi_i))^2(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i$,

где $\xi_i \in (x_i - x_{i-1})$

Проинтегрируем по i от 1 до n:

$L^* = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}\cdot\Delta x$, перейдя к пределу $\lambda(\tau) \to 0$

Имеем $L = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} L^* = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$

21.**{ЛДУ 1-го порядка. Интегрирование ЛДУ 1-го порядка методом Бернулли (u*v) и методом Лагранжа (вариация произвольной постоянной)}**

-метод Бернулли:

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)\cdot y^{\alpha}$$

Подставим решение этого ДУ в виде $y = u(x)\cdot v(x)$

Имеем: $u'v + v'u + uv\cdot p(x) = f(x)(uv)^{\alpha}$

$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)(uv)^{\alpha}$

Найдём такое $v \neq 0$, что $v' + p(x)v = 0$, для чего решим его. Подставим v в наше ДУ, получим $u'v = f(x)(uv)^{\alpha}$ –ДУ с разделяющимися переменными. Решив его, найдём $u \Rightarrow y = uv$. При $\alpha = 0$ получим метод Бернулли для решения линейного ДУ 1-го порядка. При $\alpha > 0$ $y = 0$ также решение ДУ.

-метод Лагранжа:

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)$$

Чтобы решить такое ДУ, можно воспользоваться методом Лагранжа вариации производной постоянной. Этот метод заключается в том, что мы имеем решение ДУ в виде $y = C^{*}\cdot e^{-p(x)}$

Т.е. в общем решении ДУ $y' + p(x)\cdot y = 0$. Считаем $y = C^{*}(x)\cdot e^{-p(x)}$ – неизвестной функцией.

Подставим её в данное ДУ, мы найдём $C^{*}(x) \Rightarrow$ и общее решение ДУ.

$$y = C^{*}(x)\cdot e^{-p(x)} \Rightarrow y' = \left(C^{*}(x)\right)'\cdot e^{-P(x)} - C^{*}(x)\cdot e^{-P(x)}\cdot p(x)$$

$$C^{*}(x) = \int f(x)e^{p(x)}\,dx + C$$

И общее решение ДУ: $y(x,C) = \left(\int f(x)e^{p(x)}\,dx + C\right)e^{-p(x)}$

24. Определения лин-зав и лин-незав систем функций. Доказать теорему об определителе Вронского лин-зав систем функций.

- Опр: С-ма функций $y_1(x)\ldots y_n(x)$, определённая на интервале I, называется лин-зав на интервале I, если $\exists$ числа $A_1, A_2\ldots A_n$ такие, что $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 \neq 0$ и $A_1y_1(x) + \ldots + A_ny_n(x) = 0$ $\forall x\in I$. В противном случае с-ма функций называется лин-незав.

- Т-ма: Пусть $y_1(x)\ldots y_n(x)$ – лин-зав с-ма (n-1) раз диф-мых на интервале I функций. Тогда $W(x)\equiv 0$ $\forall x\in I$.

- Док-во: С-ма $y_1(x)\ldots y_n(x)$ лин-зав-я => $\exists$ числа $A_1, A_2\ldots A_n$ такие, что $A_1y_1(x) + \ldots + A_ny_n(x) = 0$ $\forall x\in I$. Продиф-уем рав-во (n-1) раз:

$$\begin{cases} A_1y_1(x) + \ldots + A_ny_n(x) = 0 \\ A_1y_1'(x) + \ldots + A_ny_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ A_1y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + A_ny_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Обозначим $Y_i = \begin{pmatrix} y_i(x) \\ y_i'(x) \\ \ldots \\ y_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

Имеем $A_1Y_1 + A_2Y_2 + \ldots + A_nY_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ => Столбцы $Y_1\ldots Y_n$ лин-зав-мы => $W(x)=0$ $\forall x\in I$.

22. Теорема Коши о сущ-ии и един-сти решения ДУ n-го порядка. Интегр-е ДУ n-го порядка, допуск. понижение степени.

- Теорема: Пусть в ДУ $y^{(n)}=f(x, y, y'\ldots y^{(n-1)})$ ф-ия f(x) и все её частные произв-ые по перем. $y, y'\ldots y^{(n-1)}$ непрер. в некоторой области пространства перем. $x, y, y'\ldots y^{(n-1)}$. Тогда для $\forall$ точки $x_0, y_0, y_0'\ldots y_0^{(n-1)} \in G$ $\exists$ решение этого ДУ, удовл. условиям: $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y_0'\ldots y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Два решения, удовл. одним нач. условиям, совпадают повсюду, где они определены.

- Интегр-е ДУ:

1) ДУ $y^{n}=f(x)$ можно решить, n раз проинтег-в f(x).

2) ДУ вида $F(x, y^{k}, y^{(k+1)}, y^{M})=0$, не содержащих $y, y'\ldots y^{(k-1)}$ в явном виде, можно преобразовать в ДУ порядка (n-k) заменой $y^{k}=z$, при этом получим $F(x, z, z'\ldots z^{(n-k)})=0$. Решив его относительно z (если это возможно), найдём z, а затем и y, k раз проинтег-в z=z(x).

25(Линейно-зависимая и линейнонезависимая система функций. Определитель Вронского системы лин. независ. частных решений ЛОДУ n-го порядка.)

Теорема: Пусть $y_1 = y_1(x)\ldots y_n(x)$ – лин.независ. система решений ЛОДУ. $\forall\exists\in\Rightarrow$

$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y=0$ (1), где $a_1(x)\ldots a_n(x)$-непрерывны на промежутке I.

Тогда определитель этой системы не равен нулю ни в одной точке промежутка I.

Док-во*(От противного):*

Пусть $\exists x_0\in I$ *такое,что* $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$

Тогда $\exists A_1\ldots A_n$ такие,что $A_1^2+\ldots+A_n^2\neq 0$ и $A_1y_1^{(j)}(x_0)+A_2y_2^{(j)}(x_0)+\ldots+A_ny_n^{(j)}(x_0)=0$ (2) $\forall j=0,1\ldots(n-1)$.

Пусть $y(x)=A_1y_1+\ldots+A_ny_n$.Тогда y(x)-решение ДУ(1) как линейная комбинация решений. y(x) также удовлетворяет начальным условиям (2).

Функция $y^{*}(x)=0$ $\forall x\in I$ также является решением ДУ(1) и удовл.начальным усл.(2).

Но тогда по теореме о существовании и единственности решения:

$y(x)\equiv y^{*}(x)\equiv 0$ $\forall x\in I \Rightarrow y_1\ldots y_n$ – лин.зависимы. $\Rightarrow$ Противоречие

30.**Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.**

Общее решение $y^{|n|}+a_1(x)y^{|n-1|}+\ldots+a_n(x)y=b(x)$ (1) может быть записано в виде

$y(x, C_1\ldots C_n)=y_{\tau}(x)+C_1y_1+\ldots C_ny_n$,

где $y_{\tau}(x)$ – частное решение ДУ(1), $y_1\ldots y_n$ – ФСР соответствующего ДУ L[y]=0

Док-во:

Проверим 2 пункта определения общего решения:

1) $L[y(x,C_1\ldots C_n)] = L[y_{\tau}(x)] + C_1\cdot L[y_1]+\ldots+C_n\cdot L[y_n] = b(x) + C_1\cdot 0 + \ldots + C_n\cdot 0=b(x)$ $\forall C_1\ldots C_n \in R$

=> $y(x,C_1\ldots C_n) = y_{\tau}(x) + C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ Решение ДУ(1) $\forall C_1\ldots C_n \in R$

2) Пусть даны начальные условия $y(x_0)=y_0$

$y'(x_0) = y_0'\ldots y_0^{n-1}(x_0)=y_0^{n-1}$, $x_0 \in I$

Тогда для нахождения неизвестных $C_1\ldots C_n$ имеем СЛАУ.

$$\begin{cases} y_{\tau}(x_0) + C_1y_1(x_0) + \cdots + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ y_{\tau}'(x_0) + C_1y_1'(x_0) + \cdots + C_ny_n'(x_0) = y_0' \\ y_{\tau}^{n-1}(x_0) + C_1y_1^{n-1}(x_0) + \cdots + C_ny_n^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

Оба пункта входят в определение общего решения проверены

=>$y(x,C_1..C_n) = y_{\tau}(x)+C_1y_1+\ldots+C_ny_n$ является общем решением ДУ(1)

23. Теорема Коши о сущ-ии и един-сти решения лин. ДУ n-го порядка. Доказать св-ва частных решений лин. ОДУ n-го порядка.

- Теорема: Пусть в ДУ(1) $y^{n}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=b(x)$, где $a_1(x)\ldots a_n(x),b(x)$ непрерывны на интервале I. Тогда для $\forall x_0\in I$ и вообще $\forall$ чисел $y_0, y_0'\ldots y_0^{(n-1)}$ $\exists$ решение ДУ (1), удовл. нач. условиям $y_0=y(x_0)$, $y_0'=y'(x_0)\ldots y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_0)$. Два решения, удовл. одним и тем же условиям, совпадают при $\forall x\in I$.

- Св-ва:

1) Пусть $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ – частное решение ДУ(2) L[y]=0. Тогда y_1+y_2 – тоже решение ДУ(2).

2) Пусть y=y(x) – частное решение ДУ(2). Тогда λy – тоже решение ДУ(2) ($\forall\lambda\in\mathbb{R}$).

3) Пусть $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ – частные решения ДУ(3) L(y)=b(x). Тогда $y=y_1-y_2$ - решение ДУ(2).

- Док-ва:

1) Дано $L[y_1]=0$ и $L[y_2]=0$. Имеем $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]=0+0=0$

2) Дано L[y]=0. Имеем L[λy]=λL[y]=λ*0=0

3) Дано $L[y_1]=b(x)$ и $L[y_2]=b(x)$. Имеем $L[y_1-y_2]=L[y_1]-L[y_2]=b(x)-b(x)=0$

26. О существовании ФСР линейного однородного ДУ 2 n-го порядка

Пусть даны однородны ДУ n-го порядка

$y^{(n)}+a_1(x)^{n-1} + \ldots + a_ny(x)y = 0$ (1)

где a_1x непрерыв. на промежутке I. Тогда существуют фун-ции $y_1=y_1(x)\ldots y_n=y_n(x)$ который образуют ФСР этого ДУ

Док-во: Пусть K_0 - некая точка на I

Пусть $y_1 = y_1(x) \ldots y_n = y_n(x)$ решения этого ДУ, удовлетворяющие следующим условиям

$y_1(x_0) = 1$ $y_1'(x_0) = y_1''(x_0) = \ldots y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$

$y_2(x_0) = 1$ $y_2'(x_0) = y_2''(x_0) = y_2'''(x_0) \ldots y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$

$y_2(x_0) = 1$ $y_2'(x_0) = y_2''(x_0) = y_2'''(x_0) \ldots y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$

…

$y_n(x_0) = y_n'(x_0) = \ldots y_n^{(n-2)}(x_0) = 0$ $y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$

Согласно теореме о един.решен.лин.ДУ эти решения существуют, они равны. Они лин.-независим., так как

(1 0 0)

(0 1 0) = 1 ≠0

(0 0 1)

Докажем, что они образуют базис пр-ве решений пусть

y = y(x) - решение ДУ (1)

Пусть оно удовл-ряет условию $y(x_0) = C$, $y'(x_0) = C_1 \ldots$

$y'(x_0) = C_2$ $y^{(n-1)}(x_0) = C_n$ (3)

(как линейная комбинация решений), $y^{*}(x)$ так же удовлетворяет начальному условию

$y^{*}(x_0) = C_1 * 1 + C_2 * 0 + \ldots + C_n * 0 = C_1$

$(y^{*}(x_0))' = C_1 * 0 + C_2 * 1 + \ldots + C_3 * 0 + \ldots + C_n * 0 = C_2$

$(y^{*}(x_0))^{(n-1)} = (C_1 * 0) + C_2 * 0 + \ldots + C_{n-1} * 0\ C_n * 1 = C_n \Rightarrow$ (по теорем. о един.решен.лин.ДУ) $y(x) = y^{*}(x)$ $\forall x \in I$ и $y(x) = C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \Rightarrow y_1\ldots y_n$ базис пр-ва решений $\Rightarrow$

$y_1\ldots y_n$ - ФСР ДУ(1)

27.О структуре общего решения лин. однородного ДУ 1-го порядка.

Пусть $y_1 = y_1(x_0)\ldots y_n= y_n(x_0)$ образуют ФСР лин. однородного ДУ n-го порядка

$y^{(n)}+a_1(x)^{n-1} + \ldots + a_ny(x)y = 0$ (1), где $a_1(x) \ldots a_n(x)$ непрерывные на промежутке I, тогда общее решение этого ДУ имеет вид

$y(x_1C_1 \ldots C_n) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$

Док-во: проверим 2 условия из опр общего решения

1)Пусть $C_{10}\ldots C_{n0}$ - фикс. значения $C_1 \ldots C_n$, тогда $C_{10}y_1 + \ldots C_{n0}y_n$ - явл.решением ДУ(1) как линейная комбинация решений

2)Пусть даны начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0 \ldots y^{(n-1)}(x_0) =y_0^{(n-1)}$

Тогда от-но неизвестн. $C_1 \ldots C_n$ имеем СЛАУ

$C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = y_0$

$C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = y_0'$

…

$C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Эта система всегда имеет решение $C_1 = C_{10}\ldots C_n = C_{n0}$, поскольку

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$\forall x \in I$

По теореме 11.1 (об опр. Вронского линейно-независимой системы)

28.**Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.**

Рассмотрим линейное ДУ 2-го порядка.

$y''+ a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ (1), где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ непрерывна на промежутке I

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ решения ДУ(1)

Тогда $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1y_2'-y_2y_1'$ Продифференцируем определитель Вронского

$W'(x) = (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1(-a_1(x)y_2' - a_2(x)y_2) - y_2(-a_1(x)y_1'-a_2(x)y_1) =$

$= -a_1(x)(y_1y_2'-y_2y_1') = -a_1(x)W(x)$

Иными словами для определителя Вронского справедливо равенство:

$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$ Следовательно определитель Вронского удовлетворяет ДУ $y'+a_1(x)y=0$

Этому ДУ удовлетворяет функция $y(x)= C\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$

Если заменить $C = W(x_0)$,

то мы получим $y(x)= W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$. Причем $y(x_0)= W(x_0)$, => $y(x) = W(x)$ $\forall x \in I$, а значит

$W(x)= W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$ формула Остроградского-Лиувилля.

29.**Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.**

Рассмотрим линейное однородное ДУ 2-го порядка: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y=0$ (4)

Пусть известно, что $y_1 = \varphi(x)$ – решение этого ДУ. Тогда решение можно искать

в виде $y = \varphi(x)\cdot z$, где z-новая неизвестная функция имеет

$$\begin{cases} y = \varphi z \\ y' = \varphi' z + \varphi z' \\ y'' = \varphi'' z + \varphi' z' + \varphi' z' + \varphi z'' = \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z'' \end{cases}$$

Подставим это выражение в ДУ (4). Получим:

$z(\varphi''+ a_1(x)\varphi' + a_2(x)\varphi) + z'(2\varphi' + a_1(x)\varphi) + z''\varphi = 0$

$z'(2\varphi' + a_1(x)\varphi) + z''\varphi = 0$ – это ДУ не содержит явно z и заменой z'=t можно понизить его порядок. Имеем:

$$\begin{cases} t(2\varphi' + a_1(x)\varphi) + t'\varphi = 0 \\ t = z' \end{cases}$$

Другой способ понижения порядка заключается в использовании формулы Остроградского-Лиувилля.

Пусть как и прежде $y_1=\varphi(x)$ – решение ДУ(4).

Тогда для $y_2=y_2(x)$ имеет

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & y_2(x) \\ \varphi'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

Если начальное условие не дано, то можно то можно использовать следующую формулу

$\begin{vmatrix} \varphi(x) & y_2(x) \\ \varphi'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^{\int a_1(x)dx}$, где $\int a_1(x)dx$ – новая первообразная функция $a_1(x)$ на I

31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим линейное ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами: $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ (1)

Ему соответствует характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ (2)

Уравнение (2) имеет один вещественный корень кратности 2. Обозначим его λ_0 . В этом случае решениями ДУ (1) будут функции $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ и $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$.

То, что $y_1(x)$ решение ДУ (1) говорит утверждение 12.1.

Докажем, что y_2 - решение ДУ (1), λ_0 - корень уравнения (2) кратности 2 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \\ 2\lambda_0 + a_1 = 0 \end{cases}$$

$y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ $y_2' = e^{\lambda_0 x}(1+\lambda_0 x)$ $y_2'' = e^{\lambda_0 x}(\lambda_0 + \lambda_0 + \lambda_0^2 x) = e^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + \lambda_0^2 x)$

Представим y_2, y_2', y_2'' в ДУ(1), имеем:

$e^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + \lambda_0^2 x) + a_1 e^{\lambda_0 x}(1+\lambda_0 x) + a_2 xe^{\lambda_0 x} = e^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + a_1 + x(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2)) = e^{\lambda_0 x}(0+x*0) \Rightarrow y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ - решение ДУ(1).

Докажем, что y_1 и y_2 линейно независимые:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & xe^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x}(1+\lambda_0 x) \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_0 & 1+\lambda_0 x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0$$

$\Rightarrow y_1$ и y_2 линейно независимые $\Rightarrow$ они образуют ФСР $\Rightarrow$ общее решение в этом случае имеет вид $y(x, C_1, C_2) = C_1e^{2\lambda 0x} + C_2\, xe^{\lambda_0 x}$

32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Уравнение (2) имеет пару комплексно-сопряженных корней $\lambda = a\pm ib$, тогда согласно следствию из утверждения 12.2: $y_1 = e^{ax}\cos bx$, $y_2 = e^{ax}\sin bx$ - решение ДУ(1). Докажем их линейную независимость:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx & ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx \end{vmatrix} =$$

$= e^{2ax}(b*\cos^2 bx + a*\cos bx*\sin bx - a*\cos bx*\sin bx + b*\sin^2 x)$

$= e^{2ax} * b \neq 0$

$\Rightarrow y_1$ и y_2 - ФСР ДУ(1) $\Rightarrow$ общее решение в этом случае имеет вид $y(x, C_1, C_2) = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx$

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

Частное решение ЛНДУ n-го порядка с постоянным коэффициентами $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = b(x)$ (1), где $a_1, \dots, a_n \in IR$, $b(x)$ - квазимногочлен, может быть получено методом неопределенных коэффициентов. Для каждого слагаемого вида $e^{\alpha x}(P_{m1}(x)\cos\beta x + Q_{m2}(x)\sin\beta x)$ (2) частное решение ДУ $L[y] = e^{\alpha x}(P_{m1}(x)\cos\beta x + Q_{m2}(x)\sin\beta x)$ ищется в виде $y_2 = e^{\alpha x}x^k(R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x)$, где k=0, если $\alpha = ib$ не является корнем параметрического уравнения $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ и k - кратность этого корня в противном случае, R_m, S_m - многочлены с неопределенными коэффициентами одной и той же степени $m = \max(m_1, m_2)$

После того, как для каждого слагаемого вида (2) в правой части ДУ(1), найдены частные решения, можно получить частное решение ДУ(1), воспользовавшись теоремой 12.2 (о наложении частных решений)

Теорема 12.2

Пусть $y_1(x)$ - решение ДУ $L[y] = b_1(x)$, пусть $y_2(x)$ - решение ДУ $L[y] = b_2(x)$, где $L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$, где $a_1(x) \dots, a_n(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$ непрерывны на промежутке I

Тогда $y(x) = y_1(x)+y_2(x)$ - решение ДУ $L[y] = b_1(x)+b_2(x)$

Док-во:

Дано: $L[y_1] = b_1(x)$, $L[y_2] = b_2(x)$

Имеем $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = b_1(x) + b_2(x)$

34. **Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного ДУ 2-го порядка…**

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – ФСР ДУ $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Тогда решение соотв. линейного неоднородного ДУ $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ (3) будем искать в виде $y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$, где $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ удов. системе: $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = b(x) \end{cases}$

$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \Rightarrow y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2'$ $y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' = b(x) + C_1y_1'' + C_2y_2''$. Подставим эти представления в ДУ (3), получим: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a_1(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + {}+a_2(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = b(x) + C_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + C_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + +a_2(x)y_2) = b(x) + C_1(0) + C_2(0) \Rightarrow y = C_1y_1 + C_2y_2$ – решение ДУ (3)

35. **ДУ n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Задача Коши для такого уравнения. Сведение этого ДУ к нормальной системе ДУ.**

ДУ n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, которое можно записать в виде $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ (1). Задача Коши для ДУ (1) называется система: $\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ Сведение:

Пусть $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$. Положим $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, … $y_n = y^{(n-1)}$. Имеем:

$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y, \dots y_n) \end{cases}$ Нормальную систему из n ДУ.

36. **Задача Коши для норм. сист. ду и т.Коши о ∃ и ! решения этой задачи. Метод сведения НСДУ к ду высшего порядка.**

Норм сист ду (НСДУ) имеет вид $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ (1), где $(i=1,\dots,n)$. Задача Коши ставится так: Имеется точка $(x_0, y_0, \dots, y_n) \epsilon G$. Требуется найти реш-е сист (1), удовлетв нач усл: $y_i(x_0) = y_{i0}$, $(i=1,\dots,n)$

Теорема. Пусть в сист (1) все функции в правой части опр, непрер и имеют непрер частные производные по перем-ым $y_1, \dots, y_n$ в некоторой области G пр-ва перем-х $x, y_1, \dots, y_n$. Тогда для ∀точки $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \epsilon G$ ∃реш-е сист (1), удовл-ее нач усл $y_i(x_0) = y_{i0}$, $(i=1,\dots,n)$. ∀2 реш-я сист (1), удовлетв одним нач усл, совпадают всюду, где определены.

∀ ду n-го пор-ка, разрешенное отн-но старшей производной, можно свести к норм сист, состоящей из n ду. При некоторых усл-ях верно обратное.

Утв-е. Пусть в норм сист $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$ из первого ду можно выразить $y_2 = g(x, y_1, y'_1)$ или из 2-го ду $y_1 = g(x, y_2, y'_2)$. Тогда эту сист ду можно свести к одному ду 2-го пор-ка.

Док-во. Пусть из 1-го ду $y_2 = g(x, y_1, y'_1)$. Продефф-ем это р-во:

$$y_2' = \frac{\delta g(x, y_1, y_1')}{\delta x} + \frac{\delta g(x, y_1, y_1')}{\delta y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\delta g(x, y_1, y_1')}{\delta y'_1} \cdot \frac{dy'_1}{dx} = \frac{\delta g}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y_1}y_1' + \frac{\delta g}{\delta y_1'}y_1''$$

Мы знаем, что $y_2 = f_2(x, y_1, y_2) = f(x, y_1, g(x, y_1, y'_1))$.

Окончательно имеем ду 2-го порядка отн-но неизв. функции y : $\frac{\delta g}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y_1}y_1' + \frac{\delta g}{\delta y_1'}y_1'' = f(x, y_1, g(x, y_1, y_1'))$

Этот метод наз-ся методом исключения.

37. **Первый интеграл норм системы. Методы нахождения.**

Пусть дана нормальная система ду (НСДУ) $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ (1), где $(i=1,\dots,n)$(1), где f_i определены на некоторой области C_1 пр-ва перем $x, y_1, \dots, y_n$- Функция $\Phi(x, y_1, \dots, y_n)$,$(\Phi: C_1 \to \mathfrak{R})$ называется первым интегралом системы (1), если для ∀решения этой сист $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$, определенного на некотором промежутке ***I***, $\Phi(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = C = const$

1. Метод инт. комб. Интегрируемой комбинацией системы (1) назыв ду, являющееся следствием этой системы и легко интегрирующееся. Пример: Дана система: $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_1$. Складывая уравнения системы, получаем: $(y_1 + y_2)' = y_1 + y_2$, т.е. $y_1 + y_2 = C1e^x$. Вычитая из первого уравнения второе, находим еще одну интегрируемую комбинацию: $(y_1 - y_2)' = -(y_1 - y_2)$, т.е. $y_1 - y_2 = C2e^{-x}$. Общее решение сист: $y_1 = ½(C1e^x + C2e^{-x})$, $y_2 = ½(C1e^x - C2e^{-x})$.

2. Использование симметрической формы. Пусть имеется НСДУ (1). Если переписать ее в виде $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ и выразить dx, мы получим симметрическую форму сист (1)

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)}$$

Для нахождения первых

$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx$ В декарт.

$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\, dt$ В парам.

$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^B r^2(\varphi)\, d\varphi$ В полярн.

$V = \int_a^b S(x)\, dx$ По 'S' попереч. сеч.

$V_{ox} = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx$ Под граф. вокруг X

$V_{ox} = \pi\int_a^b |f_1^2(x) - f_2^2(x)|\, dx$ (аналог)

$V_{oy} = \pi\int_c^d g^2(y)\, dy$ Слева от граф. вокруг Y

$V_{oy} = \pi\int_c^d |g_1^2(y) - g_2^2(y)|\, dy$ (аналог)

$V_{oy} = 2\pi\int_a^b x|f(x)|\, dx$ Под граф. вокруг Y

$V_{oy} = 2\pi\int_a^b x|f_1(x) - f_2(x)|\, dx$ (аналог)

$V_{op} = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\, d\varphi$ В полярн.

$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$ В декарт.

$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$ В парам.

$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$ В полярн.

$Q_x = 2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$ В декарт. X

$Q_y = 2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$ В декарт. Y

$Q_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$ В парам. X

$Q_y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$ В парам Y

$Q_\varphi = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$ В полярн.

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
5. $\int \cos x dx = \sin x + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$
10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + c$
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c \\ -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a} + c \end{cases}$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + c \\ -\arccos\frac{x}{a} + c \end{cases}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$
17. $\int shxdx = chx + c$
18. $\int chxdx = shx + c$
19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$
20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$

Константа $y = C$. $(C)' = 0$ **Степенная функция** $y = x^p$. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$	**Показательная функция** $y = a^x$. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ В частности, при a=e имеем $y = e^x$ $(e^x)' = e^x$
Логарифмическая функция. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ В частности, при a=e имеем $y = \ln x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	**Тригонометрические функции.** $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Обратные тригонометрические функции. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	**Гиперболические функции.** $(shx)' = chx$ $(chx)' = shx$ $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$ $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$