

Конспект лекций по курсу «Физика» для потока
ИУ7 по теме:
«Электromагнетизм и оптика»

Васильев Николай Сергеевич, Скрипник Фёдор Васильевич

10 ноября 2017 г.

Содержание

1	Электростатика, основные законы	1
1.1	Введение	2
1.2	Закон Кулона	4
1.3	Принцип суперпозиции	4
1.4	Напряжённость поля	6
1.5	Теорема Гаусса в пустоте	7
1.6	Потенциал электрического поля	10
1.6.1	Одно свойство градиента	12
1.6.2	Физический смысл потенциала	12
2	Электростатика	13
2.1	Потенциал	14
2.2	Физический смысл потенциала	16
2.3	Два фундаментальных свойства электростатического поля в пустоте	18
2.3.1	Свойство 1	18
2.3.2	Свойство 2	18
2.4	Потенциальная энергия заряженного тела	19
2.5	Сведения из векторного анализа	20
2.6	Теорема Гаусса-Остроградского	20

2.7	Формулы Грина	20
3	Электростатика, поле в веществе	22
3.1	Формула Гаусса в дифференциальной форме	22
3.2	Уравнение Лапласа и Пуассона. Краевая задача электростатики	23
3.3	Поле, созданное электрическим диполем	25
3.4	Поле в диэлектриках	27
3.5	Связанные диэлектрические заряды	29
4	Электростатика, поле в веществе, энергия электростатического поля	
4.1	Связанные заряды	32
4.2	Теорема Гаусса в диэлектрике	34
4.3	Энергия электростатического поля	35
4.4	Теорема Томсона для электростатического поля	38
5	Постоянный электрический ток	40
5.1	Свойства плотности тока	41
5.2	Основные дифференциальные законы постоянного электрического тока	42
5.3	Дифференциальный закон Ома	43
5.3.1	Дифференциальный закон Ома внутри источника тока	43
5.4	Закон Джоуля-Ленца	43
5.5	Вывод интегрального закона Ома и понятия ЭДС источника тока	44
5.6	Теория Друде-Лоренца электрического тока в металлах . .	46
6	Магнитное поле	49
6.1	Закон Био-Савара-Лапласа	51
6.2	Сведения из векторного анализа	53
6.2.1	Формула 1	53
6.2.2	Формула 2	54
6.3	Теорема Стокса	55
6.3.1	Векторный магнитный потенциал	56

7	Магнитостатика. Поле в веществе	59
7.1	Теорема Стокса в дифференциальной и интегральной формах	59
7.1.1	Выведем формулу Стокса в дифференциальной форме	59
7.1.2	Выведем формулу Стокса в интегральной форме . . .	60
7.2	Поле магнитного диполя	60
7.3	Магнитное поле в веществе	61
7.3.1	Индукция поля в присутствии магнетика	62
7.3.2	Связь между токами намагниченности и вектором намагниченности	
7.4	Теорема Стокса в присутствии магнетиков	64
8	Магнитостатика. Энергия магнитного поля	65
8.1	Два фундаментальных свойства магнитного поля	65
8.2	Энергия магнитостатического поля	66
8.3	Теорема Томпсона для магнитного поля	69
8.3.1	Энергия контура с током	70
9	Закон Электромагнитной Индукции Фарадея	70
9.1	Первый закон Максвелла	71
9.2	Поле в движущемся проводнике	73
9.3	2-й Фундаментальный закон Максвелла	74
9.3.1	Уравнение непрерывности	74
10	Дифференциальные уравнения Максвелла и материальные соотношения	
10.1	Теорема Пойнтинга	80
10.2	Релаксация зарядов в проводниках	83
10.3	Электромагнитная волна	84
11	Электромагнитная волна	87
11.1	Перенос энергии сгустком Хэвисайда	90
11.2	Плоская электромагнитная волна общего вида в идеальной диэлектрической среде	
11.3	Поляризация волн	92

1 Электростатика, основные законы

Данные определения : электростатика, заряд q , электрическая постоянная ϵ_0 , напряжённость поля \vec{E} , электрическая индукция \vec{D} , потенциал электрического поля φ

Основные соотношения :

Закон Кулона: $|\vec{F}| = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

Принцип суперпозиции: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$

Теорема Гаусса в пустоте: $\Phi_D = q$

Независимость работы сил электростатического поля от формы траектории: $A = q(\varphi(M) - \varphi(N))$

1.1 Введение

Все тела обладают фундаментальным свойством занимать объём в пространстве. На это свойство указывал французский философ, математик, механик и физик Рене Декарт (1596-1650 н.э.). Он так же указывал на наличие чёткой границы, которая отделяет тело от всего остального пространства.

Движение тела в пространстве изучается в разделе физики «механика», а движение тепла в нём разделе «термодинамика». Тела так же обладают электрическими и магнитными свойствами эти свойства изучаются в разделе «электродинамика», в этом же разделе изучается очень важный для современного естествознания самостоятельный объект: электромагнитная волна. Процессами излучения, поглощения и распространения электромагнитных волн так же занимается раздел физики под названием «оптика».

В этом курсе будет изложены основы электродинамики. Очень важно отличать два подхода: феноменологический в котором исследователь выделяет основные свойства процесса, основываясь на описании опыта, и атомно-молекулярный, в котором макроскопические свойства тел опре-

деляются через их микроскопические свойства. Ниже будет в основном использоваться феноменологический подход.

Каждое тело состоит из атомов, которые в свою очередь состоят из электронов, протонов и нейтронов. Атомы имеют размеры порядка $\sim 10^{-10}$ м (1 Å), ядро имеет радиус порядка 10^{-15} м (1 Ферми). Опускаясь так далеко по шкале малости размеров мы попадаем в квантовый мир, который существенно отличается от привычного нам. В этом мире отсутствуют привычные нам понятия «положение» и «траектория». Законы, справедливые для микромира, формулируются в разделе физики «Квантовая механика».

Тела могут не только занимать объём, но и взаимодействовать друг с другом. Было установлено, что все взаимодействия в природе могут быть четырёх фундаментальных типов, а все остальные являются производными от них. Эти взаимодействия: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Позже было установлено, что электромагнитное и слабое взаимодействия являются проявлением одного электрослабого взаимодействия. За это открытие двум американским физикам Стівену Вайнбергу и Шелдон Ли Глэшоу и пакистанскому физика Мухаммаду Абдусу Салáму была вручена нобелевская премия по физике в 1979 году. Это стало одним из важнейших достижений конца 20-ого века.

Все тела описываются через их свойства. В прошлом семестре мы познакомились с несколькими из них: масса, положение, объём и др. В этом семестре будет рассмотрено ещё одно свойство тел: **заряд** (обозначается как q или Q). Единица измерения заряда «Кулон», обозначается как Кл. Как и масса, он не определяется и не выводится через другие физические величины, для любого тела заряд либо есть в некотором количестве, либо его нет, т.е. заряд равен нулю. Если заряд тела отличен от нуля, то такое тело часто называют просто «зарядом». Единственно важно, что величина заряда характеризует способность тел участвовать

в электромагнитном взаимодействии.

Мы приступаем к изучению раздела электромагнетизма под названием «Электростатика». **Электростатика** – это наука, которая изучает взаимодействия покоящихся зарядов.

Бессмысленно вводить новое свойство тел, если для него нельзя сформулировать некоторые законы. Так для массы в механике были сформулированы второй и третий законы Ньютона. Фундаментальный для электростатики закон сформулировал в 1785 году французский военный инженер Шарль Огюстен де Кулон.

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой и двух последующих лекциях, если заранее не оговорено, рассматриваются тела в вакууме.

1.2 Закон Кулона

Закон Кулона гласит: «Два электрически заряженных тела действуют друг на друга силами направленными вдоль линии соединяющих эти тела прямо пропорциональны произведению этих зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними». Закон справедлив для материальных точек.

Для вакуума закон записывается следующим образом:

$$|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{BA}| = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Для записи формул в дальнейшем будет использоваться система единиц СИ. В ней справедливо следующее:

$$[Q] = \text{Кл}, K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ где } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

где ϵ_0 – **электрическая постоянная**

Если взаимодействующие тела погружены в некоторую среду, то тогда закон Кулона записывается так:

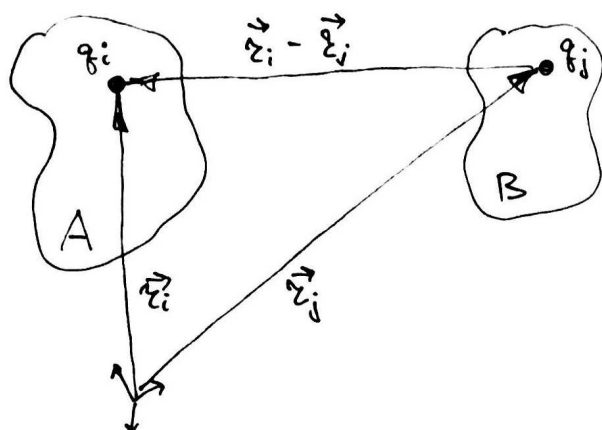
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Последняя формула не является фундаментальной и будет нами выведена в будущих лекциях.

1.3 Принцип суперпозиции

Принцип суперпозиции гласит: «Взаимодействие любых двух выбранных зарядов не зависит от других тел». Сказанное принимается в теории электромагнетизма как фундаментальный принцип и на сегодняшний день не предъявлено достоверных экспериментальных данных, которые позволили бы усомниться в его справедливости.

Справедливость принципа суперпозиции делает возможным приём, который в дальнейшем будет нами многократно использоваться без каких либо ссылок или оговорок. Рассмотрим два протяжённых заряженных тела A и B , нас интересует с какой силой одно тело действует на другое.



Разобьём два тела на бесконечно малые объёмы, т.е. точки. По закону Кулона мы можем рассчитать силу взаимодействия любой пары:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

а из принципа суперпозиции результирующая сила исчерпывается следующей суммой:

$$\vec{F}_{AB} = \sum_j \vec{F}_i = \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}, \quad (1)$$

где $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

Заряд по телу может быть распределён не равномерно. Используется в вычислениях объёмный заряд: $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\right]$, поверхностный заряд: $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right]$, линейный заряд: $\left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right]$ и точечный заряд.

1.4 Напряжённость поля

Заметим одно любопытное свойство электростатического взаимодействия тел. Оно заключается в том, что заряженные тела взаимодействуют на расстоянии, т.е. тела взаимодействуют даже если между ними «ничего нет». В физике это называется «дальнодействием». Однако концепция дальнодействия перестала устраивать потребности теории уже ко второй половине 19-века.

Суть новой идеи состояла в том, что существует некая субстанция: **электрическое поле**, при этом справедливы утверждения: «все точечные заряды создают вокруг себя электрическое поле» и «на все точечные заряды действует электрическое поле, создаваемое другими зарядами». Иначе, все заряженные тела взаимодействуют через электрическое поле и имеет место «близкодействие».

Теперь нужно вспомнить фразу в начале лекции: «Все тела описываются через их свойства». Через какие свойства описать электрическое поле? Такое свойство было найдено в математике и называется оно *векторное поле*. Строго говоря, векторное поле это пара множеств: множество точек пространства и множество векторов, при этом каждой точке соответствует один определённый вектор. Как определить эти вектора? Для этого перепишем сумму в правой части выражения (1):

$$\vec{F}_{AB} = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i)$$

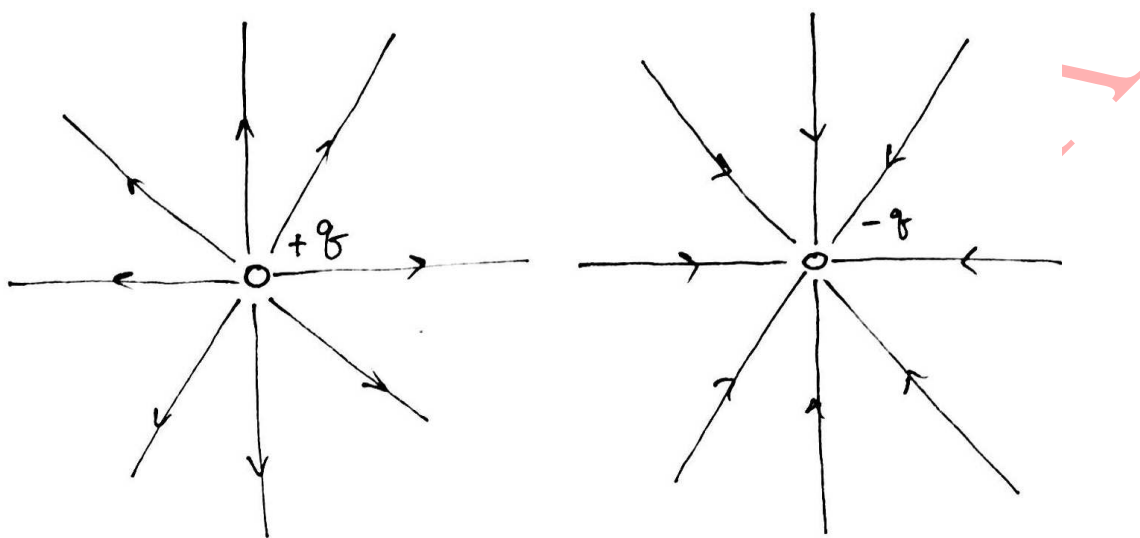
заметим, что введённое обозначение \vec{E} есть вектор, он зависит только от точки, на которую указывает радиус вектор \vec{r} и равен силе, действующей на единичный положительный заряд.

Вектором напряжённости электрического поля тела называется вектор:

$$\vec{E}(\vec{r}_i) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}},$$

Графически интенсивность электрического поля характеризуется **силовыми линиями** – это линии, касательные в каждой точке к векторам напряжённости с указанием направления этих векторов.

Для точечного тела силовые линии выглядят как лучи, при этом для «+» заряда эти лучи выходят из точки, а для «-» заряда сходятся в точку.



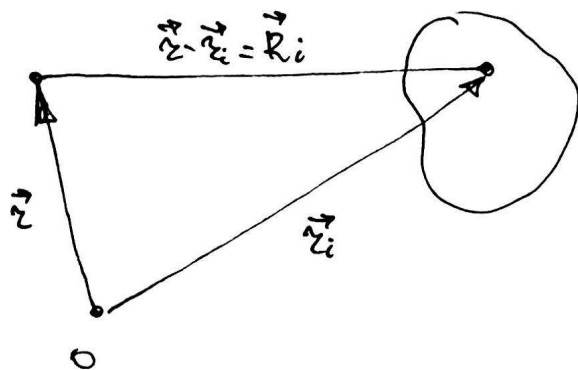
Принцип суперпозиции может быть переформулирован и для электрического поля: «Напряжённость электрического поля, созданного системой зарядов равно векторной сумме напряжённостей электрического поля каждого заряда в отдельности».

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

1.5 Теорема Гаусса в пустоте

Величина напряжённости электрического поля \vec{E} характеризует его в каждой отдельной точке. Дальнейшее изучение электростатики требует от нас определения интегральных соотношений между величиной заряда и создаваемого им полем. Эта связь исчерпывается теоремой, доказанной

1840 году Иоганном Карлом Фридрихом Гауссом.



Выше нами введен вектор напряжённости электрического поля тела по формуле:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) ,$$

Векторное поле напряжённости это не единственное используемое для описания электрического поля векторное поле. Введём новую величину: **вектор электрической индукции** , для пустоты он определяется так:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

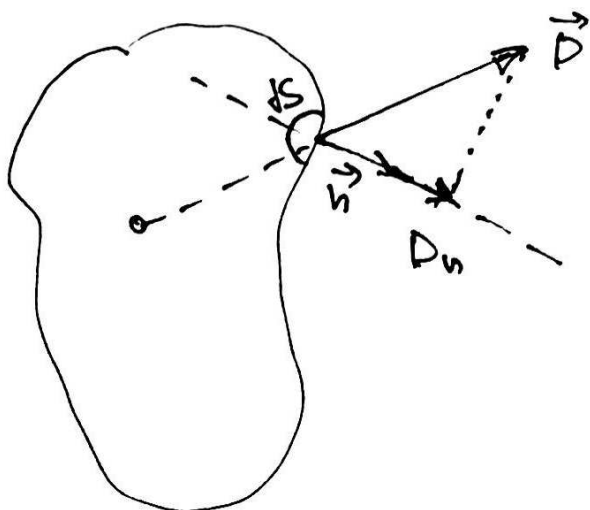
Это разные поля и их физический смысл мы определим позже.

Введём скалярную характеристику любого векторного поля на примере поля электрической индукции \vec{D} . **Элементарным потоком** поля \vec{D} через б.м. площадку dS в направлении нормали \vec{n} называется скалярная величина:

$$d\Phi_D = \mathcal{D}_n dS$$

Полным потоком называется величина, равная интегралу по всей поверхности S :

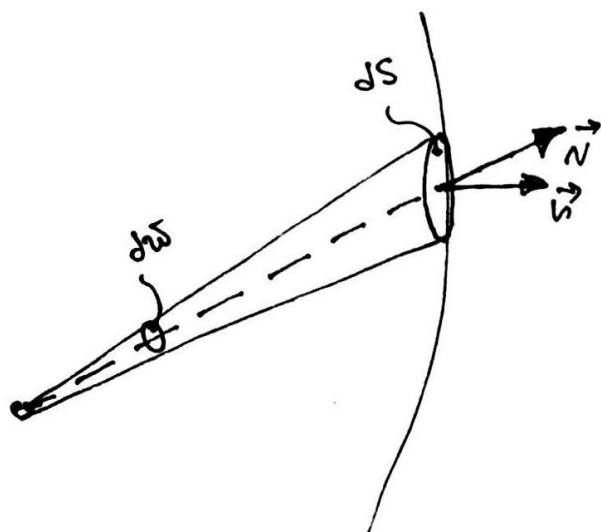
$$\Phi_D = \oint_{\Phi} d\Phi = \oint_S \mathcal{D}_n dS$$



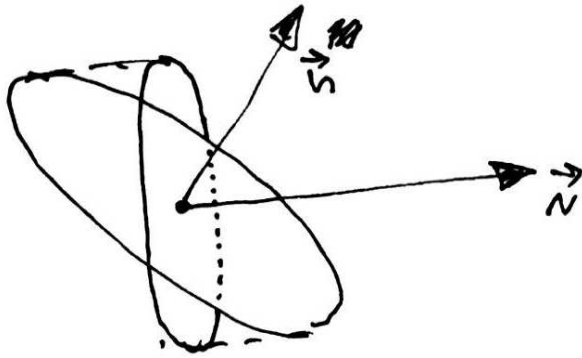
Теорема Гаусса для пустоты : Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность наружу этой поверхности равен суммарному заряду внутри этой поверхности.

Доказательство :

Рассчитаем поток вектора эл. индукции, создаваемого точечным зарядом через произвольную замкнутую поверхность, содержащую этот заряд:



$d\omega$ – телесный угол, измеряется встерадианах



По свойству телесного угла имеем: $d\sigma = (OP)^2 d\omega$

Из стереометрии известно: $d\sigma = dS \cos \theta$

Из введённых определений \vec{D} и \vec{E} для точечного заряда следует:

$$D = \frac{q}{4\pi(OP)^2}$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} d\Phi_D &= \frac{q}{4\pi(OP)^2} \cos \theta dS = \frac{q}{4\pi(OP)^2} d\sigma = \\ &= \frac{q}{4\pi(OP)^2} (OP)^2 d\omega = \frac{q}{4\pi} d\omega \\ \Phi_D &= \oint_{\Phi} d\Phi = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\omega = \frac{q}{4\pi} 4\pi = q \end{aligned}$$

Если внутри поверхности произвольное количество зарядов, то с использованием принципа суперпозиции получим, что:

$$\Phi_D = \Phi_{D1} + \Phi_{D2} + \Phi_{D3} + \dots = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

На этом доказательство закончено.

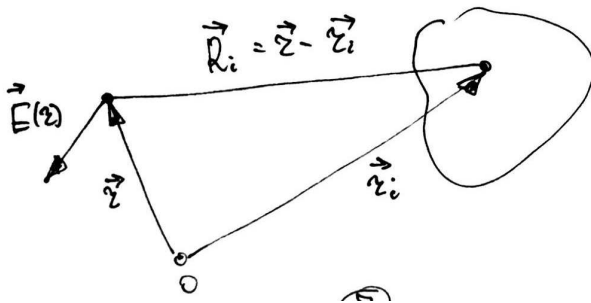
1.6 Потенциал электрического поля

Оказывается, что электрические поля можно описывать не только векторным полем, но и *скалярным полем*. По аналогии скалярное поле это пара множеств: множество точек и множество чисел, при этом каждой точке из первого множества соответствует определённое число из второго множества. Скалярным полем описываются не все поля в физике,

например каждой точке твёрдого тела можно поставить в соответствие температуру (скаляр), а значит можно рассматривать поле температур. В то же время известно, что для потока жидкости такой подход не применим.

Докажем, что поле заряженного тела однозначно задаётся скалярным полем:

Рассмотрим вектор напряжённости электрического поля внутри и снаружи тела.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$E_x(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} (x - x_i)$$

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_i} \right) = -\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial R_i}{\partial x} = -\frac{1}{R_i^2} \frac{1}{R_i} (x - x_i) = -\frac{x - x_i}{R_i^3}$$

$$E_x(\vec{r}) = -\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \right)$$

Для компонент $E_y(\vec{r})$, $E_z(\vec{r})$ аналогично.

Введём новую величину: скалярный электрический потенциал или просто **потенциал электрического поля**, рассчитываемую по формуле:

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i},$$

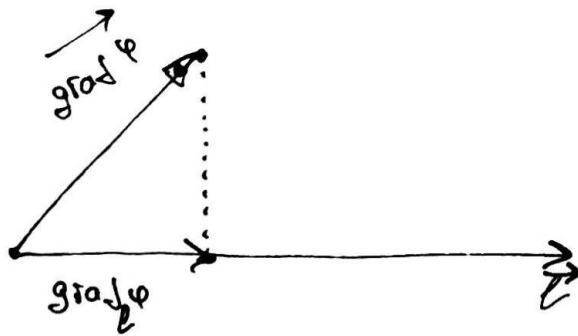
Векторное поле \vec{E} однозначно восстанавливается по скалярному φ :

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = \\ &= - \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) = - \text{grad} \varphi \\ \vec{E}(\vec{r}) &= - \text{grad} \varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

Мы доказали, что потенциала электрического поля однозначно определяет его напряжённость. В то же время напряжённости поля определяет с точностью до константы потенциал.

1.6.1 Одно свойство градиента



$$E_l = - (\text{grad} \varphi)_l = - \frac{\partial \varphi}{\partial l}$$

1.6.2 Физический смысл потенциала

Для того, чтобы определить физический смысл потенциала, рассмотрим некоторое пробное тело с малым зарядом q и будем перемещать это тело в электрическом поле из одной точки N в другую точку M по некоторой траектории, причём перемещать будем квазинепрерывно, т.е. в каждый момент времени внешняя и электрическая силы уравновешены. Такое движение осуществляется бесконечно медленно, но нам некуда торопиться!

По второму закону Ньютона:

$$\vec{F} + \vec{F}_{эл} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_{эл}$$

Тогда:

$$\vec{F}_{эл} = q\vec{E} = -q \text{grad} \varphi$$

$$\vec{F}_{эл} = -q (\text{grad} \varphi)_l = -q \frac{d\varphi}{dl}$$

На любой элементарной траектории внешняя сила будет совершать элементарную работу $\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = F_l dl$, а вся работа:

$$\begin{aligned} A &= \int_{l(N)}^{l(M)} F_l dl = - \int_{l(N)}^{l(M)} F_{эл} dl = \\ &= \int_{l(N)}^{l(M)} q \frac{d\varphi}{dl} dl = q \int_{\varphi(N)}^{\varphi(M)} d\varphi = q (\varphi(M) - \varphi(N)) \end{aligned}$$

Из полученной формулы можно сделать три важных вывода:

- 1) Если траектория замкнута, то $A = 0$ т.к. $N = M$ и тело при движении возвращается в ту же точку
- 2) Т.к. в работу входят только начальная и конечная точки, то работа не зависит от формы траектории, т.е. как бы мы не перемещали тело из N в M работа будет одна и та же
- 3) Если N взять на бесконечности, где поля нет, то наша ф-ла примет вид:

$$A = q\varphi_M$$

Из последней формулы следует физический смысл φ . Потенциал данной точки поля равен работе по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля по любой траектории квазинепрерывным способом. Совершённая работа переходит в изменение потенциальной энергии заряда, т.е.:

$$A = W_M = q\varphi_M$$

2 Электростатика

Новые определения : потенциал электростатического поля, оператор набла ∇ .

Введённые соотношения :

Связь напряжённости и потенциала: $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$

Работа в электростатическом поле: $A = q(\varphi_N - \varphi_M)$

Энергия электростатического поля: $W(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$

1-ая Формула Грина: $\oint_S \varphi \frac{d\psi}{dn} dS = \iiint_V \varphi \nabla^2 \psi dV + \iiint_V (\text{grad}\varphi, \text{grad}\psi) dV$

В этой лекции

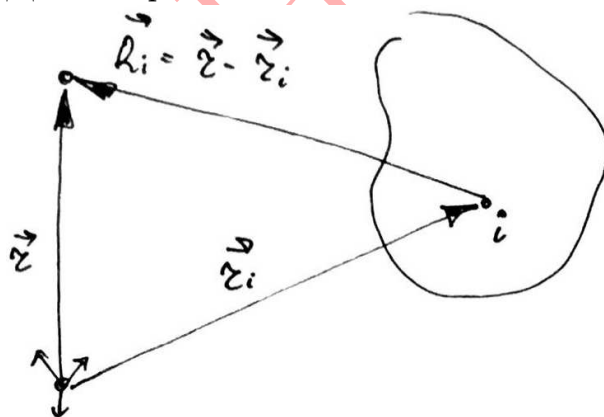
В прошлой лекции была доказана теорема Гаусса в пустоте.

В этой лекции будет подробней рассмотрен потенциал электрического поля. Будут получены дифференциальные соотношения между напряжённостью и потенциалом электростатического поля. Понятие потенциала энергии и потенциальные силы уже знакомы нам из курса «механика». Аналогичные понятия будут использованы при рассмотрении электростатических взаимодействий. Во второй части лекции будут выведены полезные в будущем соотношения из векторного анализа.

2.1 Потенциал

Ниже мы ещё раз введём понятие потенциала электростатического поля и покажем, что векторное поле, описывающее электростатическое поле, восстанавливается по скалярному полю значений потенциала этого поля. Другими словами докажем, что поле создаваемое статическими зарядами потенциальное, о таком поле говорят, что оно «безвихревое».

Дано: заряженное тело с известным распределением зарядов в нём.



Будем использовать декартову систему координат, в ней:

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

можно заметить следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_i} \right) &= -\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial R_i}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{R_i^2} \frac{1}{2R_i} 2(x - x_i) = -\frac{x - x_i}{R_i^3} \end{aligned}$$

тогда, используя представление выше:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= -\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_i} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \right) \end{aligned}$$

введём обозначение:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

– это **потенциал электростатического поля**. Тогда:

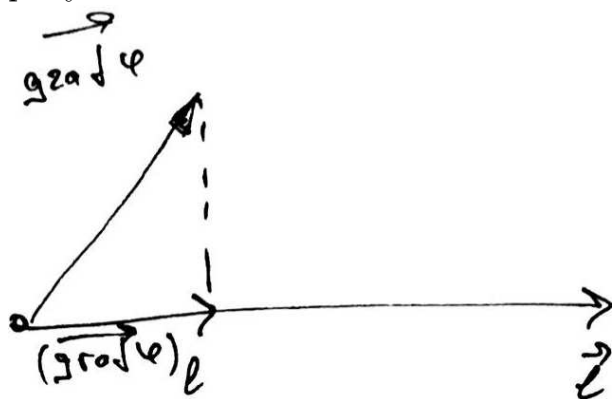
$$E_x(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x}, E_y(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y}, E_z(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad}\varphi}$$

Последняя формула даёт правило в соответствии с которым каждой точке потенциального поля ставится в соответствие вектор, т.е. задано векторное поле. Заметим ещё, что для восстановления векторного поля по потенциалу нам важно не само значение потенциала, а его поведение в окрестности рассматриваемой точки, т.е. значение потенциала определено с точностью до константы.

Градиент – это расширение понятия производной от функции от одного аргумента на функции от трёх аргументов, в нашем случае это три координаты. Так же как и производная градиент характеризует быстроту убывания функции в точке. Однако трёхмерный мир существенно

отличается от одномерного. Если в одномерном случае я мог двигаться к интересующей меня точке либо слева либо справа, то в трёхмерном мире существует бесчисленное множество путей (лучей) по которым я могу к ней приближаться. Однако если этот луч зафиксировать, как на рисунке:



то проекция градиент на этот луч становится привычной нам производной, эту величину называют производной по направлению:

$$(\text{grad} \varphi)_l = \frac{\partial \varphi}{\partial l}$$

2.2 Физический смысл потенциала

Выясним теперь физический смысл потенциала. Рассчитаем работу, совершаемую внешними силами при перемещении заряда q из точки N в точку M по некоторой траектории. При этом перемещать точку будем равновесным способом. Это означает, что в каждой точке пути прикладываемая сила компенсирует силу электростатическую:

$$\vec{F}_{\text{ЭЛ}} + \vec{F} = 0$$

Если мы увеличим или уменьшим силу на б.м. величину, то тело переместится на б.м. расстояние dl , такое движение мы и называем квазиравновесным. Рассчитаем работу внешней силы при таком движении:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}) = -(\vec{F}_{\text{ЭЛ}}, d\vec{l}) = -F_{\text{ЭЛ}} dl$$

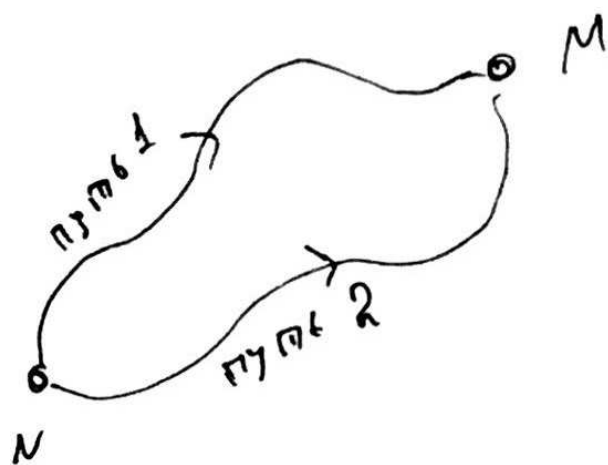
$$\begin{aligned}
 A_{NM} &= - \int_{l(N)}^{l(M)} F_{Эл} dl = q \int_{l(N)}^{l(M)} \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \\
 &= q \int_{\varphi(N)}^{\varphi(M)} d\varphi = q (\varphi(N) - \varphi(M))
 \end{aligned}$$

Значит работа внешней силы по перемещению заряда равновесным способом из т. N в т. M по *любой* траектории равна:

$$A = q (\varphi_N - \varphi_M)$$

Отсюда получаем два важных следствия:

1. Работа по перемещению заряда по любой замкнутой траектории равна нулю, т.к. точки N и M в этом случае совпадают и $A = 0$
2. Работа не зависит от формы или вида траектории:



Физический смысл потенциала следующий. Если начальную точку N взять на бесконечности, где нет электрического поля и $\varphi_{\infty} = 0$, значит тогда:

$$A_M = q \varphi_M$$

Значит: «Потенциал электростатического поля в данной точке равен работе по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля квазиравновесным способом». Т.к. эта работа

не зависит от траектории, то мы можем ввести потенциальную энергию данного электрического заряда, т.е.:

$$W_M = q \varphi_M, \quad \boxed{W(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})}$$

Если перемещать заряд не квазиравновесным способом, то для каждого малого отрезка движения будет выполняться соотношение:

$$\delta A = dK + dW$$

т.е. часть работы идёт на увеличение кинетической энергии, а часть на увеличение потенциальной энергии, в конечно итоге получим для всей траектории движения:

$$A = K + W$$

2.3 Два фундаментальных свойства электростатического поля в пустоте

2.3.1 Свойство 1

Свойство касается замкнутой траектории. Свойство состоит в следующем: «Интеграл от касательной составляющей напряжённостей электрического поля по любой замкнутой траектории равно нулю».

$$\oint_{\gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_{\gamma} E_l dl = 0$$

Существует более общее утверждение о том, что если для какого либо поля выполнено свойство 1, то для такого поля справедливо: $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, т.е. поле потенциально.

2.3.2 Свойство 2

Свойство касается замкнутой поверхности. Свойство состоит в следующем: «Поток вектора электрической индукции через любую замкнутую

поверхность наружу этой поверхности равен полному заряду находящемуся внутри этой поверхности».

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \oint_S D_n dS = Q$$

В этих двух формулах содержится вся информация о свойствах электростатического поля. Любое другое свойство есть следствие этих двух.

2.4 Потенциальная энергия заряженного тела

Рассмотрим заряженное тело с известным распределением заряда в нём. Разобьём тело на N малых частей, заряды которых занумеруем индексом i , тогда:

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i$$

Исходя из принципа суперпозиции любые два тела взаимодействуют между собой по закону Кулона независимо от наличия других малых частей, поэтому, если потенциальная энергия взаимодействия двух малых частей W_{ij} , то полная потенциальная энергия будет равна:

$$W = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} W_{ij}$$

Определим W_{ij} . Рассмотрим два элемента: i, j с зарядами q_i и q_j . Пусть заряд q_i - зафиксирован, а заряд q_j мы переместили из ∞ в точку на расстоянии r_{ij} от первого заряда. При этом затраченная работа равна:

$$A = q_i \varphi(r_{ij})$$

где $\varphi(r_{ij})$ - потенциал, созданный i -ым зарядом в точке расположения j -ого заряда. Этот потенциал равен:

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Тогда затраченная работа равна потенциальной энергии этих двух зарядов:

$$W_{ij} = q_i \varphi(r_{ij}) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Тогда полная потенциальная энергия рассматриваемого тела равна:

$$W = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

2.5 Сведения из векторного анализа

Для удобства записи и компактности последующих формул введём **оператор набла** ∇ при этом сделаем это через следующие три его свойства:

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$(\nabla, \vec{a}) = \text{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$[\nabla, \vec{a}] = \text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

2.6 Теорема Гаусса-Остроградского

Формулировка. Для любого векторного поля, удовлетворяющего условиям непрерывности (дифференцируемости) для любой замкнутой поверхности с внешней нормалью \vec{n} , окружающей объём V справедливо соотношение:

$$\oiint_S a_n dS = \iiint_V \text{div}\vec{a} dV$$

2.7 Формулы Грина

При выводе соотношения для скалярного поля (потенциала) часто пользуются так называемыми формулами Грина, которые связывают операции интегрирования по области, границе области и операцию дифференцирования.

Сперва докажем следующую формулу:

$$\operatorname{div} \varphi \vec{a} = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a})$$

, действительно:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varphi \vec{a} &= \frac{\partial \varphi a_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi a_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi a_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \varphi \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \varphi \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z + \varphi \frac{\partial a_z}{\partial z} = \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}) \end{aligned}$$

Формула доказана.

Теперь рассмотрим две некоторые функции φ и ψ , тогда согласно формуле выше получаем:

$$\operatorname{div} (\varphi, \operatorname{grad} \psi,) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)$$

Запишем полученное выражение через оператор «набла» ∇ . Введём обозначение:

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

тогда:

$$\dots = \varphi \nabla^2 \psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)$$

1-ая формула Грина. Проинтегрируем полученное выше соотношение и применим к формулу Гаусса-Остроградского.

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} \psi \, dV &= \iiint_V \varphi \nabla^2 \psi \, dV + \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) \, dV \\ \iiint_V \operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} \psi \, dV &= \oiint_S \varphi \operatorname{grad}_n \psi \, dS \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\oiint_S \varphi \frac{d\psi}{dn} \, dS = \iiint_V \varphi \nabla^2 \psi \, dV + \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) \, dV}$$

Если в 1-ой формуле Грина принять: $\varphi = \psi$, то:

$$\oiint_S \varphi \frac{d\varphi}{dn} \, dS = \iiint_V \varphi \nabla^2 \varphi \, dV + \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, dV$$

2-ая формула Грина.

Если в 1-ой формуле Грина φ поменять местами с ψ и вычесть одну формулу из другой, то в результате получим:

$$\oiint_S \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) dS = \iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV$$

3 Электростатика, поле в веществе

В первой части этой лекции будет изложена суть подхода к расчёту электростатических полей, создаваемых телами любой формы и в областях любой конфигурацией. Этот подход основан теории дифференциальных уравнений в частных производных. Не будет преувеличением сказать, что вся современная физика состоит из двух задач: формулировка законов в форме дифференциальных уравнений и их решение. В этом семестре мы познакомимся с очень важной системой таких уравнений: уравнениями Максвелла.

На сегодняшний день теория дифференциальных уравнений в частных производных продвинулась далеко вперёд. Существует большое число коммерческих и свободных программных продуктов предназначенных для их решения. Например, проектирование домов, конструирование машин, разработка высокопроизводительных цифровых вычислительных и мультимедийных систем не обходится без решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пример международная корпорация «Mentor Graphics».

3.1 Формула Гаусса в дифференциальной форме

На прошлой лекции была выведена теорему Гаусса в интегральной форме:

$$\oiint_S D_n dS = Q$$

Если заряд не сосредоточен в точке, а распределён по некоторому объёму, то чтобы узнать его величину в области с объёмом V нужно интегрировать плотность заряда:

$$\oiint_S D_n dS = \iiint_V \rho dV$$

Теперь применим к левой части формулу Гаусса-Остроградского:

$$\oiint_S D_N dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} dV, \quad \text{тогда}$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \iiint_V \rho dV$$

Для малого объёма вокруг произвольной точки M :

$$\operatorname{div}_M \vec{D} = \rho_M V$$

Так как точка была взята произвольно, то можно записать в общем виде:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

Это и есть теорема Гаусса в дифференциальной форме.

3.2 Уравнение Лапласа и Пуассона. Краевая задача электростатики

Получим важное следствие из этой теоремы – дифференциальное уравнение для потенциала. В пустоте вектора \vec{D} и \vec{E} связаны просто:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = -\varepsilon_0 \operatorname{grad} \varphi, \quad \text{то}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = -\varepsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi = \rho$$

Следовательно дифференциальное уравнение для электростатического потенциала:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Это и есть **уравнение Пуассона**.

Частным случаем уравнения Пуассона является уравнение Лапласа.

Для тех областей пространства где электрического заряда нет, т.е. $\rho = 0$, получаем:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

Это и есть **уравнение Лапласа**.

Проверим, удовлетворяет ли потенциал поля точечного заряда уравнению Лапласа:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ \nabla\varphi = \text{grad}\varphi &= \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ \nabla^2\varphi &= \text{div grad}\varphi = \text{div}\vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно частную производную:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \dots = \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6}$$

Используя это выражение и то, что остальные производные выражаются аналогично, получим:

$$\nabla^2\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^6} \left(3r^3 - 3r \overbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}^{r^2} \right) = 0$$

Значит, функция потенциала поля создаваемого точечным зарядом является частным решением уравнения Лапласа.

Сколько решений имеют уравнения Лапласа и Пуассона? Их бесконечно много. Более того, справедливо и обратное утверждение: «Любое возможное электростатическое поле, созданное любыми статическими зарядами, является решением уравнения Пуассона».

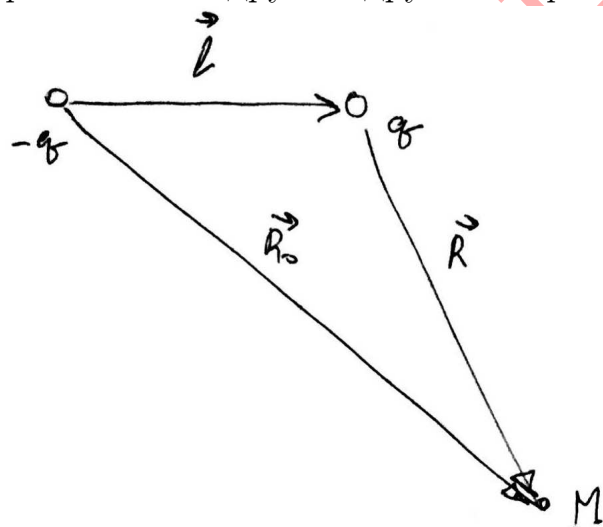
Но уравнение Лапласа одинаково для любого поля в пустоте, а решение получается своё для каждого конкретного случая? Дело в том, что само дифференциальное уравнение в частных производных описывает

слишком широких круг решений, т.е. тех функций которые только «могут» быть полем. Для выяснения вида электростатического потенциала в каждом конкретном случае нужно применить так называемые **граничные условия**. Это дополнительные соотношения, связывающие искомую функцию с известной функцией на границе той области, где ищется решение. Звучит сложно, но мы уже применяли граничные условия когда утверждали, что на бесконечности (границе области) поля нет (функция $\varphi(\infty) = 0$, где ноль тоже функция).

3.3 Поле, созданное электрическим диполем

Ниже будет рассмотрена на первый взгляд искусственная система: *диполь*. Для этой системы мы определим вид потенциала электростатического поля, которое она создаёт. В последствии мы увидим, что с помощью полученных результатов для этой системы возможно описание поля в диэлектрике.

Пусть у нас есть два точечных заряда q и $-q$, которые находятся на расстоянии l друг от друга. Направим вектор \vec{l} от $-q$ до q .



Вектор равный произведению \vec{l} на величину заряда назовём **дипольным моментом**, т.е.:

$$\vec{p} := q\vec{l}$$

Нас будет интересовать поле на расстояниях: $R \gg l$. Рассмотрим сум-

марный потенциал поля:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

т.к.: $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{l}$, то:

$$R^2 = (\vec{R}_0 - \vec{l}, \vec{R}_0 - \vec{l}) = R_0^2 - 2l(\vec{l}, \vec{R}_0) + l^2 \simeq R_0^2 - 2(\vec{l}, \vec{R}_0)$$

$$R^2 = R_0^2 \left(1 - \frac{2(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^2} \right)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0 \sqrt{1 - \frac{2(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^2}}} \simeq \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^2} \right)$$

В последнем равенстве была использовано разложение в ряд тейлора:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2} \right) (1-x)^{-\frac{3}{2}} (-1) \Big|_{x=0} \cdot x + \bar{o}(x)$$

С использованием полученного выражения:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{(\vec{l}, \vec{R}_0)}{R_0^3}$$

Определим выражение для потенциала поля:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{q(\vec{l}, \vec{R}_0)}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}$$

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{R}_0)}{4\pi\epsilon_0 R_0^3}$$

Напряжённость электрического поля можно определить по формуле:

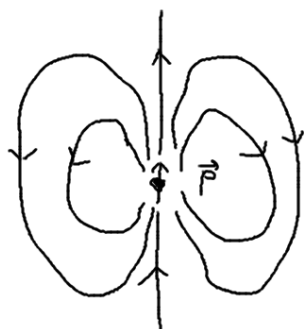
$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^4} \text{grad}r = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

$$\text{grad}((\vec{p}, \vec{r})) = \vec{p}, \quad \text{поэтому}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right)}$$

Теперь мы можем изобразить силовые линии этого поля:



Выше было определено поле, создаваемое двумя близкими точечными зарядами. Имеет место следующий экспериментальный факт: «Все молекулы у которых есть ионная связь являются диполями».

3.4 Поле в диэлектриках

Электроны в веществе бывают двух типов – это так называемые **свободные** электроны, которые свободно перемещаются по объёму тела, как, например, в металлах и полупроводниках. Второй тип – **связанные** электроны, которые могут смещаться только внутри атомов и молекул. Такие электроны имеются в большинстве веществ.

В феноменологическом подходе к электростатике поляризованность диэлектрика описывается полем. Поле **электрической поляризации** – это поле векторов в каждой точке равных объёмной плотности суммарного дипольного момента вещества, т.е.:

$$\vec{P} := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

Заметим, что несмотря на то, что $\Delta V \rightarrow 0$ в этом объёме всегда находится бесконечно много диполей вещества. Вопрос о различии понятий бесконечно малой в математике и физике выводит нас за пределы нашего курса.

Электрическая поляризация может быть спонтанной, т.е. когда существует в диэлектрике без наличия внешнего электрического поля. Будем

обозначать такую поляризацию \vec{P}_0 . В диэлектрике под действием внешнего электрического поля возникает индуцированное поле электрической поляризации, обозначим его за $\vec{P}_{\text{инд}}$.

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_{\text{инд}}$$

Механизм образования поляризации в диэлектриках может быть различен, главное, что чем больше внешнее приложенное поле, тем больше и поле электрической поляризации. Нас интересует более точный вид этой зависимости. Экспериментально установлено, что для достаточно малой величины поля \vec{E} и для широкого диапазона диэлектриков: $\vec{P} \sim \vec{E}$. Теперь если ввести удобный для дальнейших выкладок коэффициент пропорциональности, то получим:

$$\vec{P}_{\text{инд}} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E},$$

где число ε — называется **диэлектрической проницаемостью** среды. Это безразмерная величина.

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_0 + (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

Заметим, что по размерность вектора \vec{P} и \vec{D} совпадают. Определим вектор электрической индукции в веществе по формуле:

$$\vec{D}(\vec{r}) := \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

Видно, что в пустоте это определение и определение, данное в предыдущих лекциях совпадают, т.к. в пустоте, очевидно, $\vec{P} = 0$.

Теперь если применить эмпирическую зависимость \vec{P} от \vec{E} , то получим:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_0 + (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{P}_0 + \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

Если сузить рассматриваемые диэлектрики до «простых», в которых $\vec{P}_0 = 0$, то получим:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}}$$

3.5 Связанные диэлектрические заряды

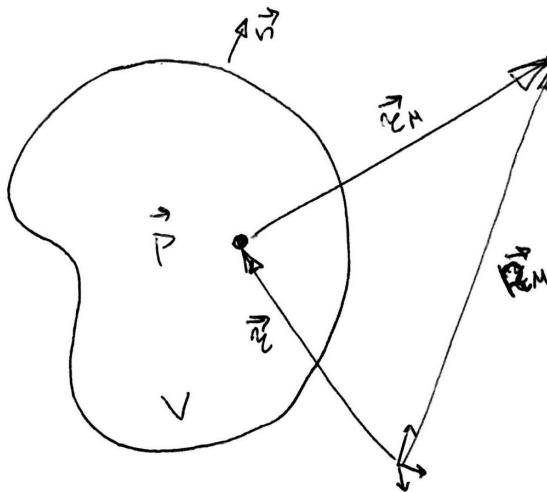
Когда мы говорим об электростатическом поле, то всегда говорим об источниках этого поля. Оказывается, что для поля электрической поляризации тоже можно указать источники, их называют **связанными зарядами**. Для связанных зарядов используется обозначение: $\sigma_{\text{св}}$ для поверхностного заряда и $\rho_{\text{св}}$ для объёмного заряда. По своей сути связанные заряды это тоже заряды, однако возникли они за счёт внутренних микропроцессов реакции диэлектрика на внешнее приложенное поле. Связь между векторами электрической поляризации и связанными зарядами раскрывают следующие две формулы, которые мы докажем:

$$\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div} \vec{P}$$

$$\sigma_{\text{св}} = P_n$$

Где n – внешняя нормаль к диэлектрику.

Рассмотрим диэлектрик с объёмом V , поверхностью S и внешней нормалью \vec{n} .



Определим вклад поля малой части этого тела объёмом ΔV и поляризованностью \vec{P} в общий потенциал электростатического поля. Для этого вспомним найденное выражение для потенциала поля одного диполя:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

Дипольный момент малого объёма по определению \vec{P} будет $\vec{p} = \vec{P}\Delta V$.
В каждая произвольная малая часть создаёт в точке M приращение потенциала:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{P}, \vec{r})}{r^3} dV$$

А суммарный потенциал равен интегралу по всему объёму:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{(\vec{P}, \vec{r})}{r^3} dV$$

При интегрировании точка M остаётся неизменной, а точка, в которую указывает вектор \vec{r} «бежит» по всему объёму тела, тогда:

$$\vec{r}_M = \sqrt{(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2 + (z_M - z)^2}$$

Заметим, что справедливо следующее:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x_M - x}{r^3}, \quad \text{тогда}$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{тогда}$$

$$\frac{(\vec{P}, \vec{r})}{r^3} = \left(\vec{P}, \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right)$$

Вспомним соотношение, выведенное нами на прошлой лекции:

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{div} \vec{a} + (\vec{a}, \text{grad} \varphi) \Rightarrow$$

$$\left(\vec{P}, \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} \Rightarrow$$

$$\iiint_V \frac{(\vec{P}, \vec{r})}{r^3} dV = \underbrace{\iiint_V \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dV}_{\oint_S \frac{P_n}{r} dS} - \iiint_V \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} dV \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{P_n}{r} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\text{div} \vec{P}}{r} dV$$

Если внимательно присмотреться к последнему выражению, то увидим, что если обозначить:

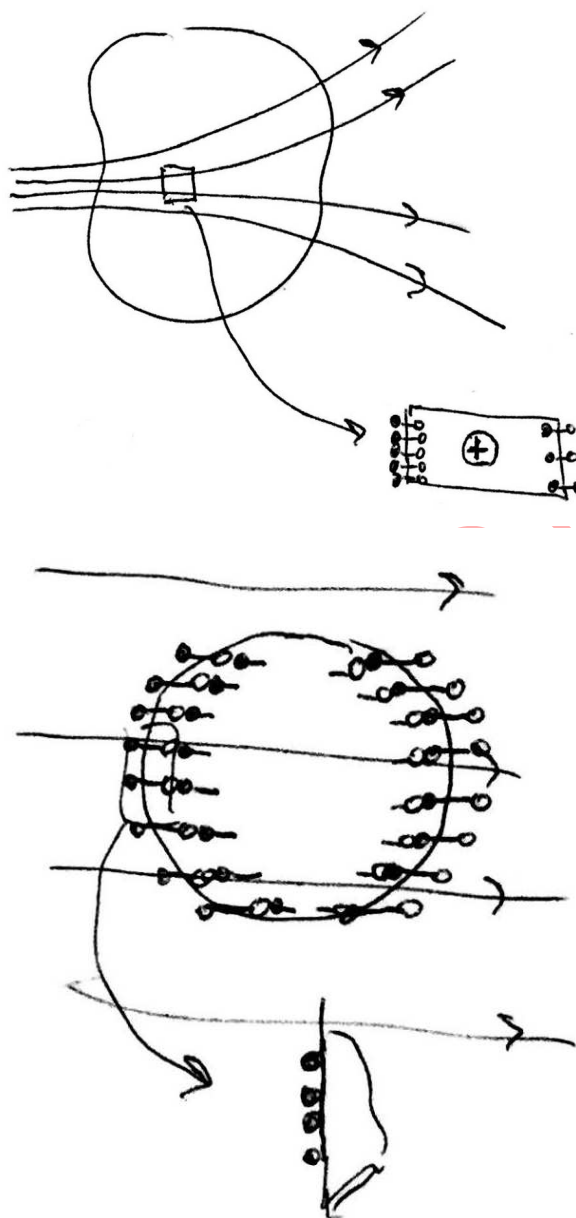
$$\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div} \vec{P}$$

$$\sigma_{\text{св}} = P_n,$$

То получим:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{\text{св}}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{\text{св}}}{r} dV$$

Именно так мы рассчитывали бы потенциал поля, если бы $\rho_{\text{св}}$ и $\sigma_{\text{св}}$ были бы «обычными» зарядами в веществе.



4 Электростатика, поле в веществе, энергия электростатического поля

рекомендованные учебники:

Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для вузов. В 5 кн. – М.: Наука, 1998

Иродов И.Е. Электродинамика. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 352 с

Основные соотношения:

$$\sigma_{\text{св}} = P_n, \quad \rho_{\text{св}} = -\operatorname{div} \vec{P}$$

$$\oiint_S D_n dS = Q$$

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$$

На прошлой лекции были записаны основные законы для электростатического поля поляризации. На этой лекции будет показано как это поле может быть описано с использованием понятия связанного заряда. Будет доказана теорема Гаусса в присутствии диэлектриков. Во второй части лекции будут установлена фундаментальная связь между двумя подходами к расчёту энергии взаимодействия зарядов.

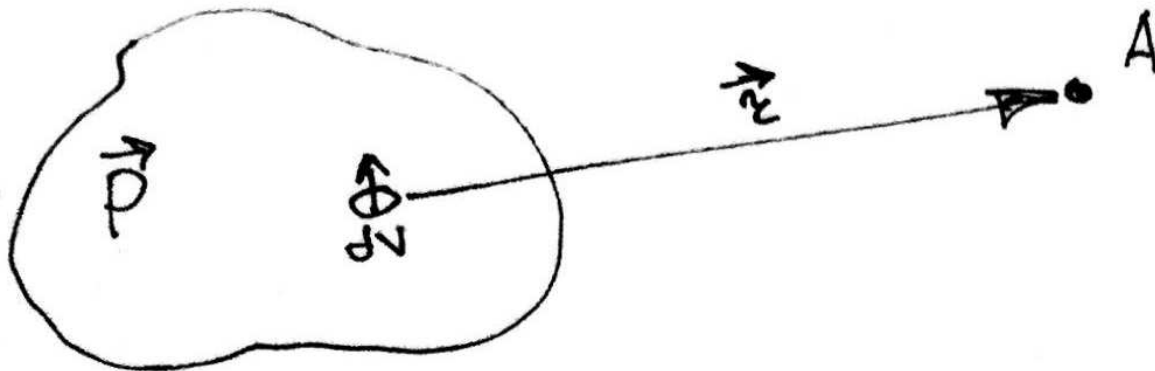
4.1 Связанные заряды

Докажем следующие формулы:

$$\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{св}} = P_n,$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности диэлектрика.

Рассмотрим диэлектрик, объёмной объёмом V и поверхностью S . Пусть диэлектрик поляризован, найдём электрический потенциал, создаваемый им в некоторой точке A .



$$d\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{(\vec{P}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV,$$

где \vec{p} используется как б.м. вектор, тогда:

$$\varphi = \iiint_V \frac{(\vec{P}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV$$

радиус вектор \vec{r} :

$$r = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{x_A - x}{r^3} \Rightarrow \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ тогда}$$

$$\frac{(\vec{P}, \vec{r})}{r^3} = \left(\vec{P}, \text{grad} \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{div} \varphi \vec{a} = \varphi \text{div} \vec{a} + (\text{grad} \varphi, \vec{a}) \Rightarrow$$

$$\left(\vec{P}, \text{grad} \frac{1}{r} \right) = \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div} \vec{P}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\iiint_V \text{div} \frac{\vec{P}}{r} dV - \iiint_V \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} dV \right)$$

$$\iiint_V \text{div} \frac{\vec{P}}{r} dV = \oiint_S \frac{P_n}{r} dS, \text{ тогда}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\oiint_S \frac{P_n}{r} dS - \iiint_V \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} dV \right)$$

Если определить связанные заряды по формулам:

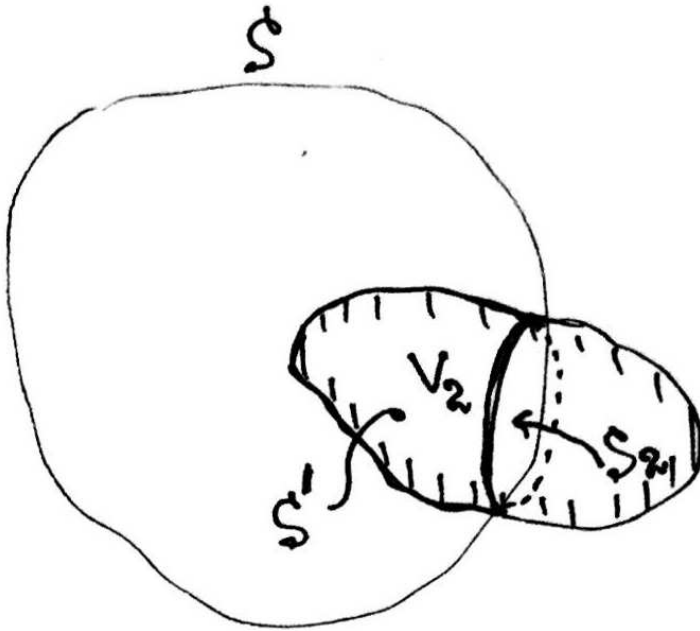
$$\sigma_{\text{св}} = P_n, \text{ и } \rho_{\text{св}} = -\operatorname{div} \vec{P}, \text{ то}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{\text{св}}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{\text{св}}}{r} dV$$

Именно так рассчитывался бы потенциал поля, если $\rho_{\text{св}}$ был бы объёмной плотностью заряда, а $\sigma_{\text{св}}$ поверхностной плотностью заряда. Значит наше введённое определение этих величин правомерно и определяет новых тип заряда **связанный заряд**.

Оказывается, что этот заряд реально существует и можно провести опыт, аналогичный закону кулона, в котором роль обычных зарядов будет выполнять связанные заряды. Однако, есть одно существенное отличие: если разделить в целом нейтральный диэлектрик на две части, то суммарный заряд каждой части будет тоже равен нулю.

4.2 Теорема Гаусса в диэлектрике



Запишем теорему Гаусса в пустоте, но теперь включим в суммарный заряд ещё и связанный заряд:

$$\oint_S d\epsilon_0 E_n S = Q + Q_{\text{св}}$$

Для простоты, не ограничивая общности, будем рассматривать один диэлектрик. Рассчитаем величину связанного заряда, попавшего в внутрь поверхности S :

$$Q_{\text{св}} = \int_{S'} \sigma_{\text{св}} dS + \iiint_{V_2} \rho_{\text{св}} dV = \iint_{S'} P_n dS - \iiint_{V_2} \operatorname{div} \vec{P} dV$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_{V_2} \operatorname{div} \vec{P} dV = \iint_{S'} P_n dS + \iint_{S_2} P_n dS, \text{ тогда}$$

$$Q_{\text{св}} = - \iint_{S_2} P_n dS$$

Нас интересует поверхностный интеграл по всей поверхности S , но на ней $P_n = 0$, $\notin S_2$, значит:

$$Q_{\text{св}} = - \oiint_S P_n dS$$

Теперь подставим полученную формулу для связанного заряда в первоначальную формулу:

$$\oiint_S \varepsilon_0 E_n dS = Q - \oiint_S P_n dS = 0$$

$$\oiint_S \varepsilon_0 E_n + P_n dS \Rightarrow$$

$$\boxed{\oiint_S D_n dS = Q}$$

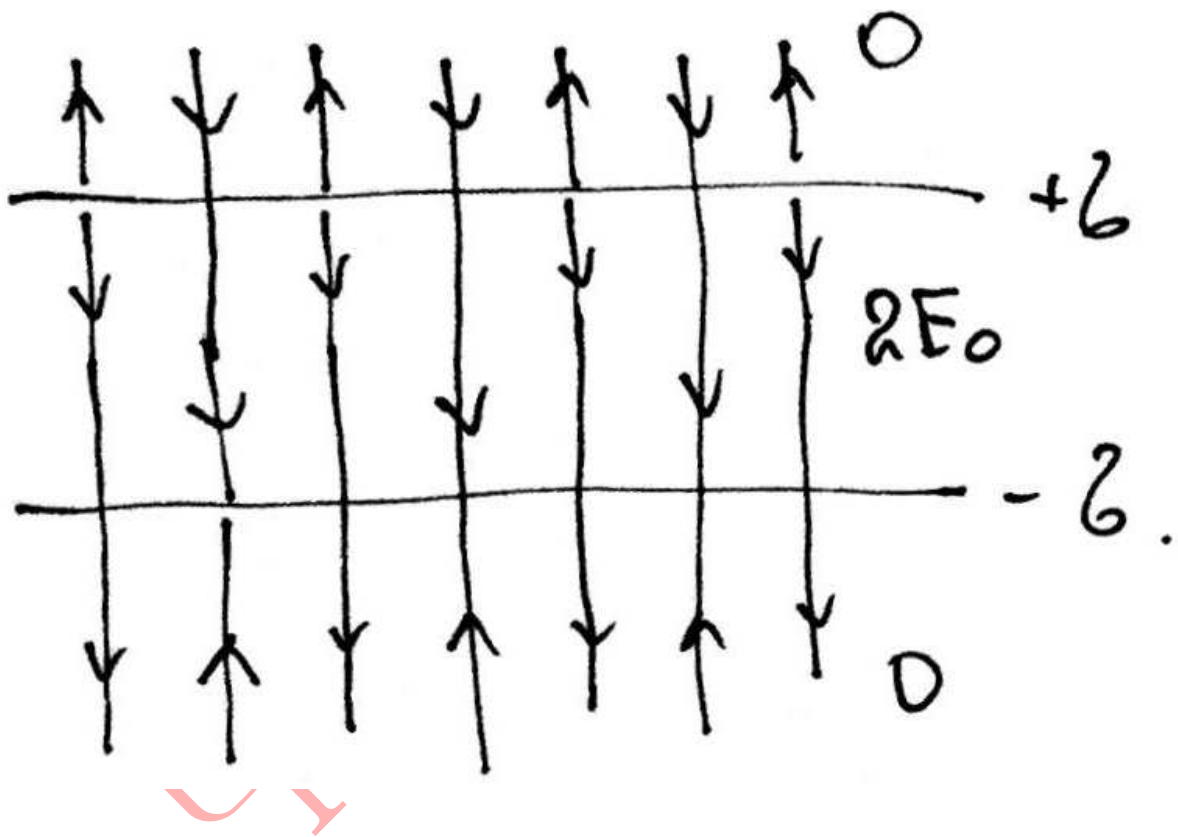
Эта формула и есть содержание теоремы Гаусса для диэлектрика.

4.3 Энергия электростатического поля

Рассмотрим конденсатор и на этом примере определим энергию электростатического поля, которое создаётся им. **Конденсатор** – это такая система проводников ёмкость которых не зависит от наличия других тел.

Для уединённого проводника **ёмкость** это величина, равная отношению заряда к потенциалу этого проводника. **Ёмкость конденсатора** – это величина, равная отношению заряда к разности потенциалов его пластин. В случае плоского конденсатора, состоящего из параллельных проводящих пластин, создаваемое им поле есть только между пластинами, а вне их оно равно нулю. Между пластинами напряжённость поля рассчитывается по формуле:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

Теперь рассчитаем силу, действующую на одну из пластин. Т.к. пластина сама на себя не действует (а вернее внутренние силы скомпенсированы), то в расчёт берётся только поле созданное другой пластиной, оно равно:

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{E}{2}, \text{ тогда:}$$

$$F_i = \sigma dS \frac{E}{2}, \text{ и суммарная сила равна:}$$

$$F = \frac{E}{2} \sigma S = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S}$$

Пусть одна из пластин передвинулась на малое расстояние, рассчитаем совершённую при этом б.м. работу:

$$\delta A = F dl = \frac{Q}{2\epsilon_0 \epsilon S} dl$$

$$A_{12} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} \Delta l$$

Работа перешла на изменение внутренней энергии электрического поля между обкладками конденсатора:

$$A_{12} = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} (l_2 - l_1)$$

Тогда энергия электростатического поля в конденсаторе равна:

$$W = \frac{Q^2 l}{2\epsilon_0 \epsilon S}, \text{ или}$$

$$W = \frac{Q^2 \cdot \overbrace{S l}^V}{2\epsilon_0 \epsilon S^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0 \epsilon} V = \frac{\overbrace{(\epsilon_0 \epsilon E)^2}^{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \Rightarrow}}{2\epsilon_0 \epsilon} V \Rightarrow$$

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V,$$

т.к. электростатическое поле внутри конденсатора однородное, то его объёмная плотность энергии может быть рассчитана по формуле:

$$\boxed{\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}}$$

Если поле неоднородное, то в каждой б. м. области оно по прежнему однородное. Суммарная энергия такого поля может быть рассчитано по формуле:

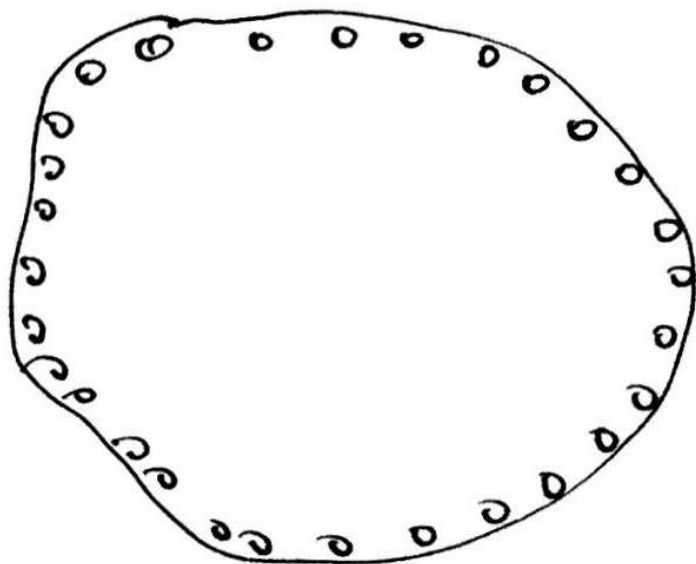
$$W = \iiint_V \omega dV = \iiint_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV$$

4.4 Теорема Томсона для электростатического поля

Содержание теоремы составляет следующее утверждение:

«Энергия системы зарядов равна энергии ими созданного электростатического поля.»

Докажем это утверждение для уединённого заряженного проводника.



Пусть величина его заряда равна Q . Известно, что заряд такого проводника распределён по поверхности, а потенциал внутри одинаков. Разобьём проводник на малые части и рассчитаем суммарную энергию их взаимодействия:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_j q_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \dots \end{aligned}$$

Т.к. имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} &= \varphi(r_j), \text{ то:} \\ \dots &= \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi(r_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi = \frac{1}{2} \varphi \sum_j q_j = \frac{1}{2} Q \varphi \end{aligned}$$

Энергия заряженного проводника:

$$W = \frac{1}{2} Q \varphi$$

Перепишем это соотношение в другом виде:

$$dQ = \sigma dS, \Rightarrow W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \varphi dS$$

Напряжённость поля вблизи поверхности проводника равно: $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, тогда:

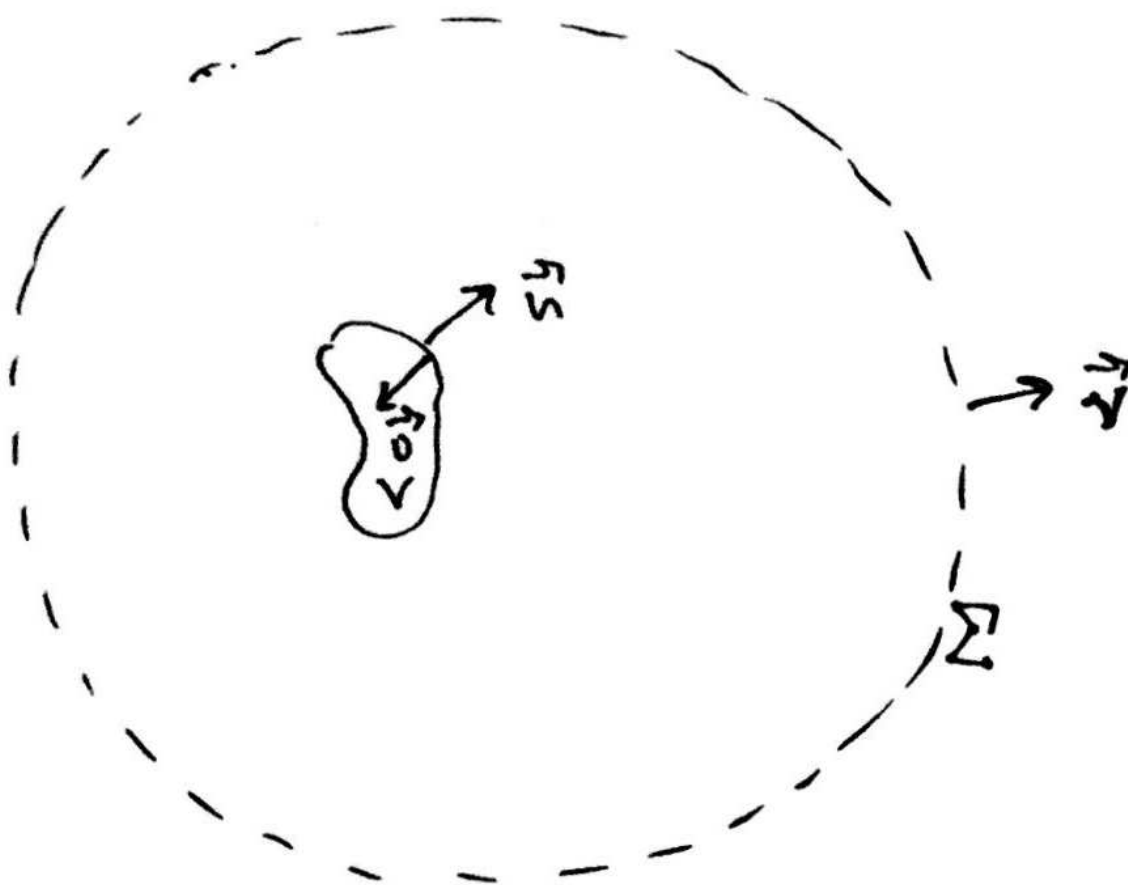
$$W = \frac{1}{2} \iint_S \varepsilon_0 E_n \varphi dS, \quad E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

$$W = -\frac{1}{2} \iint_S \varepsilon_0 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -\frac{\varepsilon_0}{2} \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

Рассмотрим поле вне проводника. Нам понадобится 1-ая формула Грина:

$$\operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \varphi) = \varphi \nabla^2 \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2$$

Поле занимает всё бесконечное пространство, кроме объёма самого проводника.



$$\iint_{S+\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = \iiint_{\tilde{V}} \varphi \nabla^2 \varphi dV = \iiint_{\tilde{V}} (\text{grad} \varphi)^2 dV$$

Часть поверхностного интеграла слева по Σ стремится к нулю с увеличением размера поверхности, т.к. поле на бесконечности равно нулю. Первый интеграл справа равен нулю, т.к. φ удовлетворяет уравнению Лапласа: $\nabla^2 \varphi = 0$. В итоге имеем:

$$\iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = \iiint_{\tilde{V}} (\text{grad} \varphi)^2 dV$$

т.к. $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, то:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint_{\tilde{V}} (\text{grad} \varphi)^2 dV \Rightarrow$$

$$W = \iiint_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \iiint_{V_\infty} \omega dV$$

Величина $\omega dV = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$ – энергия электрического поля в объёме dV . Тем самым Томпсон указал связь между двумя взглядами на электростатическое взаимодействие: теорию дальнего действия в теорию ближнего действия.

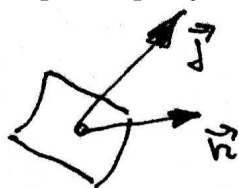
5 Постоянный электрический ток

Электрическим током называется направленное движение электрических зарядов. Мы будем рассматривать постоянный электрический ток, т.е. ток, который не меняется с течением времени. Важной характеристикой тока является:

Сила тока – это количество положительного заряда, пересекающего сечение проводника в единицу времени.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad [I] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}$$

Сила тока может быть как положительной, так и отрицательной величиной, в зависимости от того, как выбрано направление. Величина, которая характеризует движение зарядов в сечении называется плотность тока.



Рассмотрим б.м. площадку dS и определим количество заряда, которое проходит через эту площадку в единицу времени.

$$dq = j_n dS dt$$

Коэффициент пропорциональности j_n будет различным в зависимости от ориентации площадки относительно направления движения зарядов. Если сориентировать площадку перпендикулярно их движению, то величина пройденного заряда dq станет максимальной. **плотность тока** \vec{j} – это вектор, длина которого равна отношению заряда к площадке, расположенной перпендикулярно движению зарядов, в единицу времени.

$$[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$$

Плотность тока и ток связаны соотношением:

$$I = \iint_s j_n ds$$

5.1 Свойства плотности тока

Если электрический заряд при своём движении внутри проводника не может накапливаться в любой его части, то этот факт можно записать следующим способом:

$$\oiint_S j_n dS = 0$$

Сказанное справедливо для постоянного электрического тока. Применив формулу Остроградского-Гаусса получим:

$$\oiint_S j_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV$$

Если рассмотреть б.м. объём, то:

$$\iiint_{dV} \operatorname{div} \vec{j} dV = \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

1-ое свойство : Дивергенция плотности тока в любой точке проводника равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

2-ое свойство : Так как ток не выходит наружу проводника, то нормальная составляющая плотности тока в любой точке поверхности равна нулю:

$$j_n|_S$$

5.2 Основные дифференциальные законы постоянного электрического тока

Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из источника тока и проводника. Источником тока может быть гальвометр, а проводником медный провод. Если мы замкнём источник тока этим проводником, то по нему будет течь ток, который почти сразу можно считать постоянным. Причиной движения зарядов будет электрическое поле, без которого заряды останутся почти сразу. Источник тока устроен так, что он забирает заряды с одной стороны и помещает их на другую. Это электрическое поле отличается от электростатического, однако оно по прежнему потенциальное:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

где φ – потенциал в данной точке проводника.

В отличие от электростатического поля здесь:

$$\oint_L E_L dl = 0$$

Кроме того, в отличие от электростатического поля здесь $\varphi \neq \text{const}$ в любой точке, а меняется от одного края проводника к другому краю. При этом ток течёт от большего потенциала к меньшему.

5.3 Дифференциальный закон Ома

Экспериментально установлено, что для широкого диапазона напряжённостей электрического поля, плотность тока пропорциональна напряжённости электрического поля:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}^{(\text{э})},$$

где λ – **удельная проводимость**, а $\vec{E}^{(\text{э})}$ – напряжённость электрического поля. Часто вводится другая величина: $\rho = \frac{1}{\lambda}$ – **удельное сопротивление**.

$$[\lambda] = \frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}, [\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$$

5.3.1 Дифференциальный закон Ома внутри источника тока

Введём $\vec{E}^{(\text{ст})}$ – это поле сторонних сил неэлектрического происхождения (например в батарейках она химическая), которая отнесёна к величине пробного заряда. Тогда закон Ома можно записать так:

$$\vec{j} = \lambda \left(\vec{E}^{(\text{э})} + \vec{E}^{(\text{ст})} \right)$$

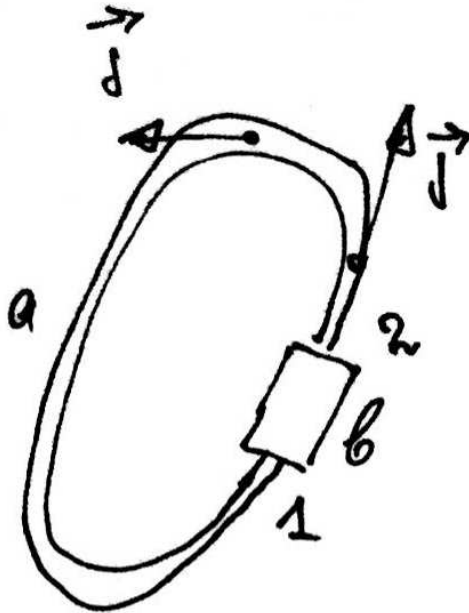
5.4 Закон Джоуля-Ленца

В любом элементе провода за время dt выделяется тепло: $q dV dt = \frac{j^2}{\lambda}$. Тогда в некотором объёме проводника выделяется тепло:

$$P dt = \iiint_V \frac{j^2}{\lambda} dt dV$$

5.5 Вывод интегрального закона Ома и понятия ЭДС источника тока

Источник тока вместе с проводником образуют замкнутый контур.



В каждой точке проводника (2a1) по закону Ома имеем:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}^{(\text{э})},$$

а в точках источника тока (1b2):

$$\vec{j} = \lambda \left(\vec{E}^{(\text{э})} + \vec{E}^{(\text{ст})} \right)$$

Обозначим за \vec{l} – вектор нормали к поперечному сечению проводника. В каждой точке сечения можно записать:

$$j_l = \lambda E_l^{(\text{э})}, \quad j_l = \lambda \left(E_l^{(\text{э})} + E_l^{(\text{ст})} \right)$$

Учтём два факта, касающихся тока в этой системе:

1. Сечение провода может меняться, однако величина:

$$J = j_l S = \text{const}$$

2. Поле потенциальное, т.е.:

$$\oint_L E_l^{(\text{э})} dl = 0$$

Рассмотрим циркуляцию по контуру по частям, внутри проводника:

$$\begin{aligned} \int_{2a1} E_l^{(\text{э})} dl &= \int_{2a1} \frac{j_l}{\lambda} dl = \int_{2a1} \frac{j_l S}{\lambda S} dl = \\ &= J \int_{2a1} \frac{1}{\lambda S} dl \end{aligned}$$

и внутри источника тока:

$$\int_{1b2} \left(E_l^{(\text{э})} + E_l^{(\text{ср})} \right) dl = \int_{1b2} \frac{j_l}{\lambda} dl = J \int_{1b2} \frac{1}{\lambda S} dl$$

В итоге, циркуляция равна:

$$\begin{aligned} \oint_L E_l dl &= \underbrace{\int_{2a1} E_l^{(\text{э})} dl + \int_{1b2} E_l^{(\text{э})} dl}_{=0} + \int_{1b2} E_l^{(\text{ср})} dl = \\ &= I \int_{2a1} \frac{1}{\lambda S} dl + I \int_{1b2} \frac{1}{\lambda S} dl \end{aligned}$$

Назовём $\int_{1b2} E_l^{(\text{ср})} dl = \mathcal{E}$ – **электродвижущей силой** источника тока.

Величину $\int_{2a1} \frac{1}{\lambda S} dl = R$ – **сопротивлением внешней цепи**. Величину

$\int_{1b2} \frac{1}{\lambda S} dl = r$ – **сопротивлением источника тока**. В результате получим

Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I(R + r) = \mathcal{E}$$

Если цепь разомкнута, то тока нет, поэтому:

$$\begin{aligned} j &= 0 = \lambda \left(E^{(\text{э})} + E^{(\text{ср})} \right) \\ E^{(\text{э})} &= -E^{(\text{ср})} \end{aligned}$$

Проинтегрируем левую и правую части по участку 1b2:

$$\begin{aligned} \int_{1b2} E^{(\text{э})} dl &= \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{1b2} E^{(\text{ср})} dl \\ \varphi_2 - \varphi_1 &= \mathcal{E} \end{aligned}$$

т.е. разность потенциалов на клеммах источника разомкнутого источника равна ЭДС источника тока.

5.6 Теория Друде-Лоренца электрического тока в металлах

Элементарная частица «электрон» был открыт в Дж. Томсоном в 1896 г. Пауль Друде Карл Людвиг, основываясь на результатах Томпсона и теории Лоренца создал свою модель электрического тока в проводниках. Если внешнего поля нет, то электроны движутся хаотически, такое движение ещё называют тепловым движением, т.к. обусловлено ненулевой температурой. Скорость электронов при тепловом движении при комнатной температуре составляет величину порядка $10^5 \text{ м/с} = 100 \text{ км/с}$. Это огромная скорость, однако при этом электроны между собой практически не сталкиваются, а сталкиваются с узлами кристаллической кристаллической решётки.

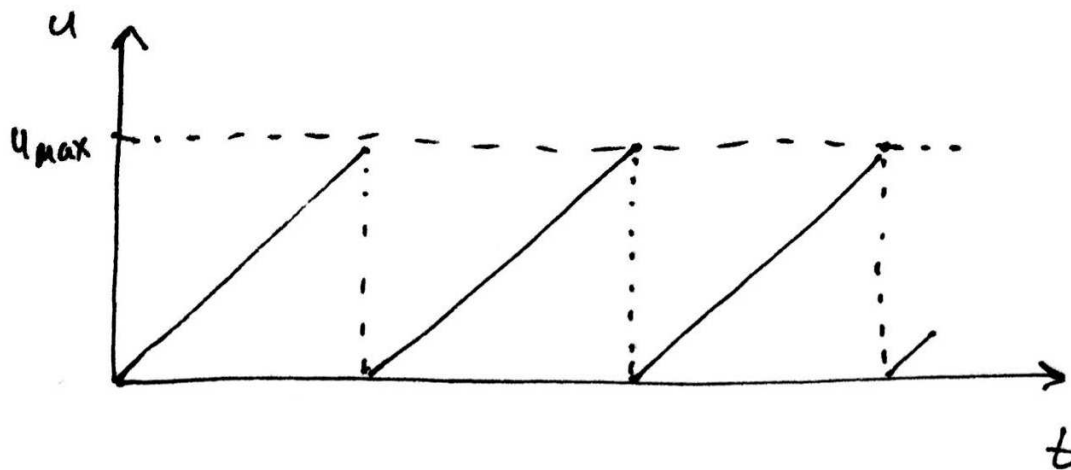
Введём **длину свободного пробега** l – это среднее расстояние между двумя столкновениями электрона с решёткой. Так же введём **время свободного пробега** τ – это среднее время между двумя соседними столкновениями электрона.

При наличии внешнего электрического поля электроны получают дополнительную составляющую скорости по направлению действия внешней силы. Эту скорость называют **дрейфовой**. Величина этой скорости очень мала $\approx 1 \text{ мм/с}$.

Дрейфовая скорость на несколько порядков меньше тепловой, из этого Друде сделал следующее предположение: «после каждого столкновения приобретённая в результате действия электрической силы скорость теряется». Обозначим эту скорость через u . По 2-ому закону Ньютона:

$$ma = eE, \quad a = \frac{eE}{m}$$

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE\tau}{m}$$



В векторной форме:

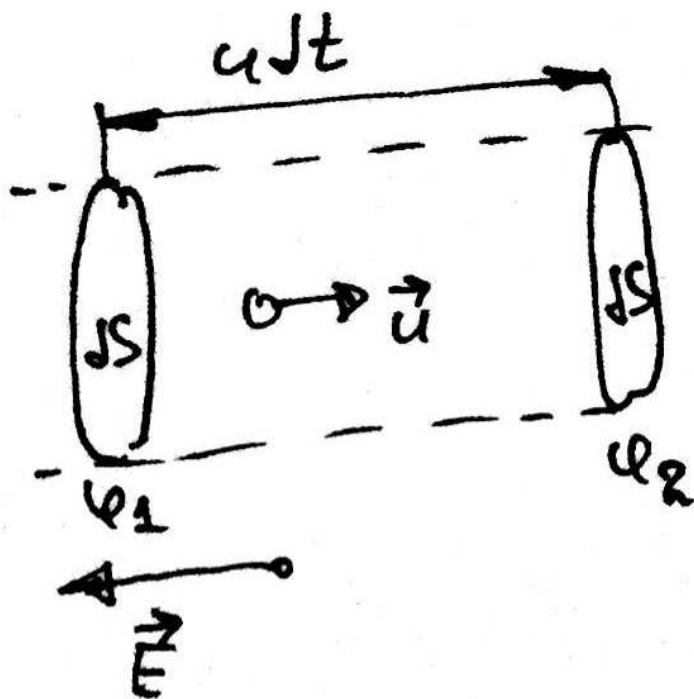
$$\vec{u} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E},$$

знак минус поставлен, т.к. сила, действующая на электрон направлена против вектора поля \vec{E} . С учётом вида функции $u(t)$ введём среднюю дрейфовую скорость электронов:

$$u = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{a\tau}{2} = \frac{e\tau}{2m}E$$

т.е. считаем, что электроны движутся равномерно против направления внешнего электрического поля.

Определим плотность тока. Рассмотрим площадку S внутри проводника и рассчитаем заряд, который за время dt пересечёт эту площадку.



Количество электронов, прошедших через площадку равно числу электронов в цилиндре:

$$dN = n dV = nSu dt$$

тогда искомый заряд:

$$dq = enSu dt$$

По определению плотности тока:

$$j dS dt = dq = enSu dt$$

$$\boxed{j = enu}$$

И в векторной форме:

$$\vec{j} = -en\vec{u}$$

Используя найденное среднее значения дрейфовой скорости запишем следующее:

$$j = enu = en \frac{e\tau}{2m} E = \frac{ne^2\tau}{2m} E$$

Если сравнить полученное соотношение с законом Ома в дифференциальной форме, то получится, что коэффициент при E равен удельной

проводимости:

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}$$
$$\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{ne^2\tau}$$

Результаты теории Друде можно применить для вывода закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. При каждом столкновении электрон теряет энергию $\frac{mu_{\max}^2}{2}$. Эта энергия переходит в кинетическую энергию кристаллической решётки, т.е. в тепло. В объёме dV содержится $n dV$ электронов, а число столкновений в них: $\nu = \frac{dt}{\tau}$, тогда:

$$q dV dt = \frac{mu_{\max}^2}{2} \cdot n dV \cdot \frac{dt}{\tau} =$$
$$\frac{ma^2\tau^2 n}{2} \frac{dV}{\tau} dt \Rightarrow$$
$$q = \frac{m\tau ne^2 E^2}{2m^2} = \frac{ne^2\tau}{2m} E^2$$

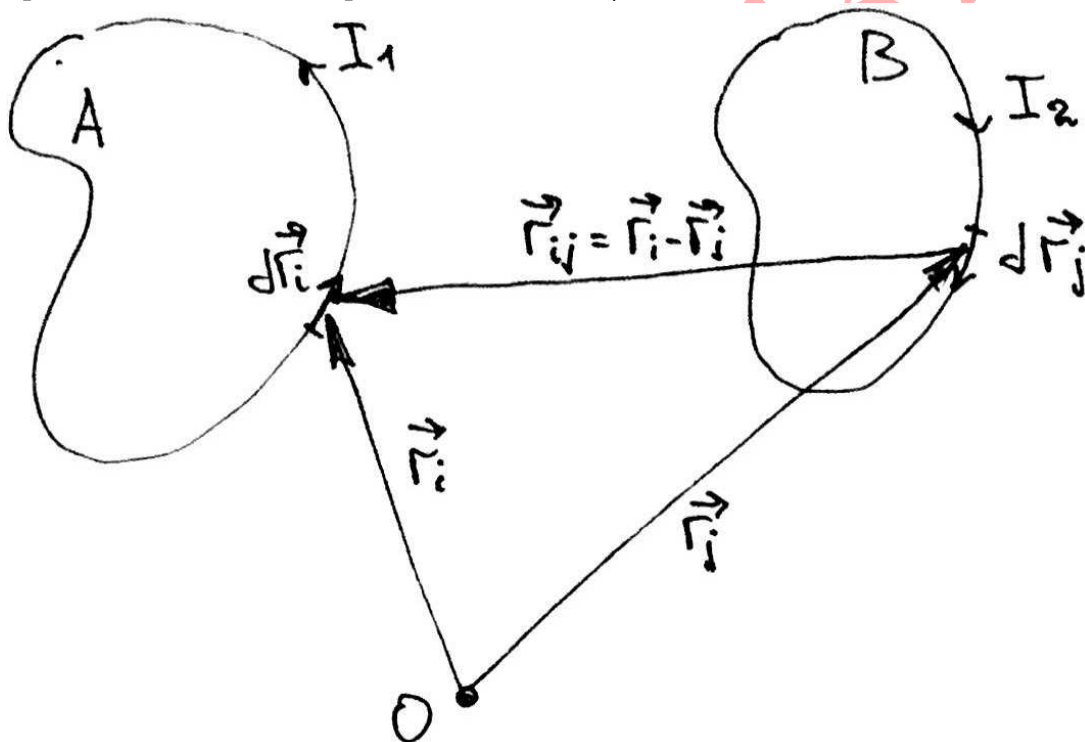
В итоге закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме примет вид:

$$q = \lambda E^2$$

6 Магнитное поле

В предыдущих лекциях было изучено электростатическое поле и тела, которые его создают. С этой лекции мы приступаем к изучению нового явления – **магнетизма**. Так же как и для электричества для магнетизма изучается с использованием понятия **магнитного поля**. Магнитное поле создают токи и магнитная поляризация вещества. Магнитная поляризация может быть **спонтанной** и **индуцированной**. К веществам со спонтанной поляризацией относятся все известные магниты. Начнём изучение магнитных сил с системы, состоящей из двух проводников по которым течёт постоянный электрический ток. Эта система в

дальнейшем будет играть ту же роль, что и кулоновское взаимодействие. Если по двум проводам пустить электрический ток, то эти провода начнут взаимодействовать друг с другом. Наша ближайшая цель – определить закон в соответствии с которым происходит это взаимодействие. Из эксперимента установлено, что сила взаимодействия проводников с током пропорциональна произведению сил токов в каждом из них, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и сложным образом зависит от их ориентации. Первым кому удалось правильно сформулировать точный закон был французский физик, математик и естествоиспытатель Андре-Мари Ампер. Закон Ампера был получен в результате анализа проводимых им экспериментов. Итак, пусть имеется два проводника по которым течёт ток I_1 , I_2 . Проводники находятся в однородной среде с магнитной проницаемостью μ .



Тогда сила с которой проводник B действует на проводник A может быть определена по формуле:

$$\vec{F}_{AB} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \sum_{i,j} \frac{[\Delta\vec{r}_i, [\Delta\vec{r}_j, \vec{r}_i - \vec{r}_j]]}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$$

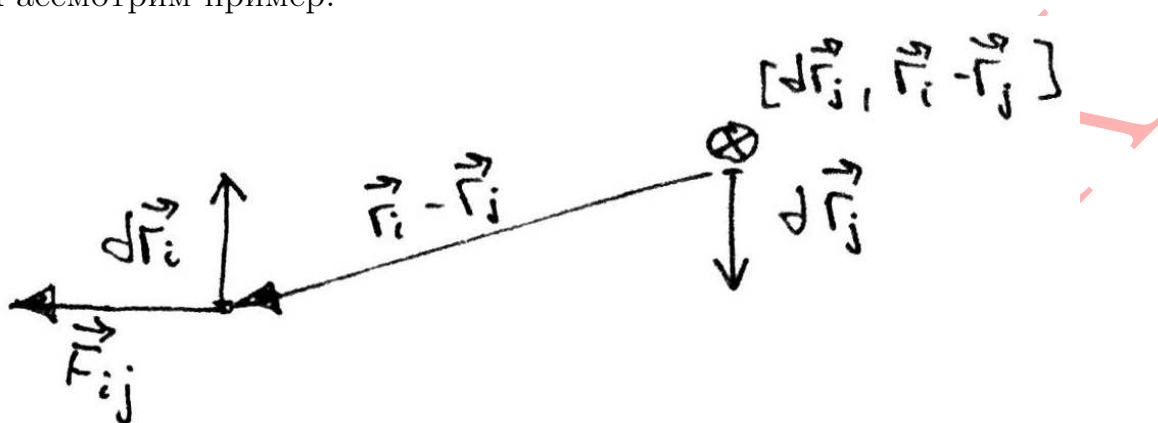
Где μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M}$, вектора $\Delta\vec{r}_i$, $\Delta\vec{r}_j$ –

направлены по касательной к кривой в сторону тока. При этом: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Закон Ампера, сформулирован нами выше через суммы большого числа отрезков малой длины. Можно было бы этот закон сформулировать через силу взаимодействия j -ого элемента с током на i -ый:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{[\Delta\vec{r}_i, [\Delta\vec{r}_j, \vec{r}_i - \vec{r}_j]]}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$$

Рассмотрим пример:



6.1 Закон Био-Савара-Лапласа

Сила магнитного взаимодействия проводников с током, рассмотренная выше – сила далекодействующая. Можно рассматривать магнитные взаимодействия с позиции близкодействия, если определить магнитное поле. **Магнитное поле** будет нами определено, если определить вектор в каждой точке пространства, который бы его характеризовал. Такими векторами в дальнейшем будут:

Напряжённость магнитного поля :

$$\vec{H}(\vec{r}) = I \sum_j \frac{[\Delta\vec{r}_j, \vec{r} - \vec{r}_j]}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

Индукция магнитного поля :

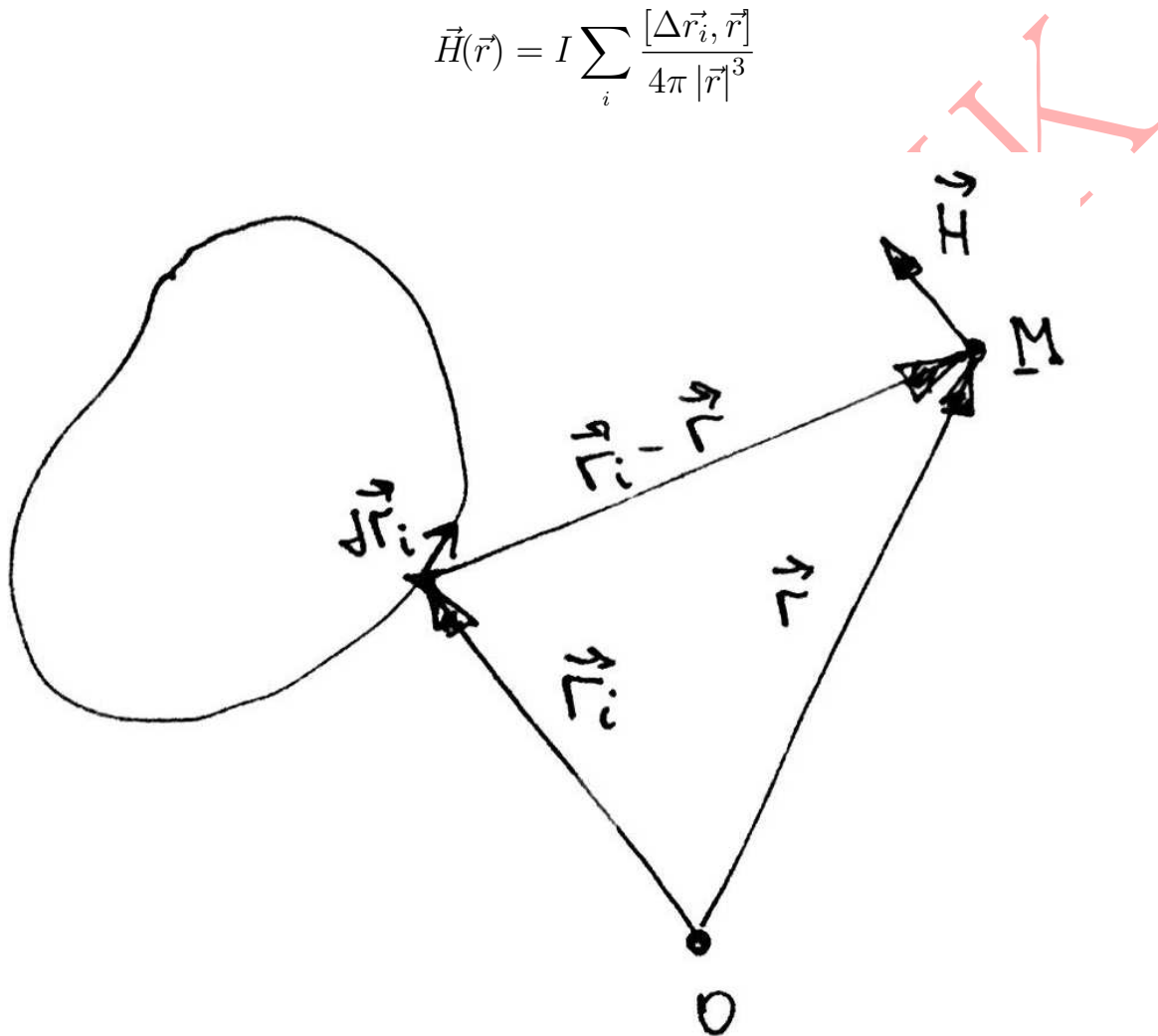
$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu\mu_0 \vec{H}(\vec{r})$$

Через вновь введённые величины сила взаимодействия проводников может быть записана в следующем виде:

$$\vec{F}_{AB} = I_1 \sum_i [\Delta \vec{r}_i, \vec{B}(\vec{r}_i)]$$

Закон, с помощью которого выражается вектор напряжённости поля \vec{H} по известной форме провода и величине тока в нём, носит название **закон Био-Савара-Лапласа** :

$$\vec{H}(\vec{r}) = I \sum_i \frac{[\Delta \vec{r}_i, \vec{r}]}{4\pi |\vec{r}|^3}$$



Этот закон был установлен экспериментально в 1820 году Био и Саваром, а сформулирован в общем виде Лапласом.

Для индукции аналогичное соотношение примет вид:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \sum_i \frac{[\Delta \vec{r}_i, \vec{r} - \vec{r}_i]}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

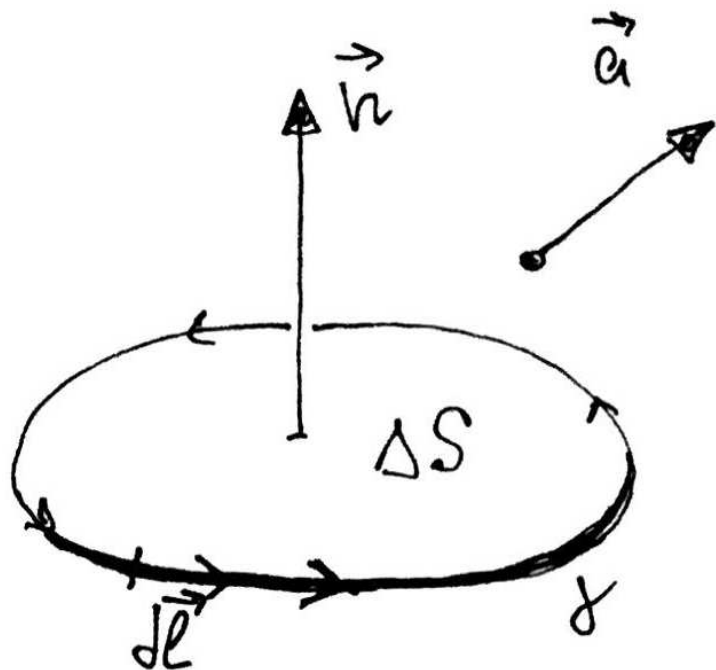
С использованием закона Био-Савара-Лапласса закон Ампера может быть переписан в виде:

$$\vec{F} = I \sum_i [\Delta \vec{r}_i, \vec{B}_i]$$

где $\vec{B}_i = \vec{B}(\vec{r}_i)$

6.2 Сведения из векторного анализа

Рассмотрим некоторое векторное поле \vec{a} , поверхность с площадью ΔS и нормаль к этой поверхности в произвольной её точке \vec{n}



Ротор – это вектор, проекция которого на любое направление \vec{n} равна пределу:

$$\text{rot} \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S}$$

6.2.1 Формула 1

$$\boxed{\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \varphi, \vec{a}]}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\varphi \vec{a}) &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi a_x & \varphi a_y & \varphi a_z \end{pmatrix} = \\
&= \vec{i} \left(\frac{\partial \varphi a_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi a_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial \varphi a_z}{\partial x} - \frac{\partial \varphi a_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \varphi a_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi a_x}{\partial y} \right) = \\
&= \vec{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} a_z + \varphi \frac{\partial a_z}{\partial y} - a_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} a_z + \varphi \frac{\partial a_z}{\partial x} - a_x \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \\
&\quad + \vec{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} a_y + \varphi \frac{\partial a_y}{\partial x} - a_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \\
&= \varphi \vec{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \varphi \vec{j} \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \varphi \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) + \\
&\quad + \vec{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} a_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_y \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} a_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_x \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} a_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_x \right) = \\
&= \varphi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \varphi, \vec{a}]
\end{aligned}$$

6.2.2 Формула 2

$$\boxed{\text{rot rot} \vec{a} = -\nabla^2 \vec{a} + \text{grad div} \vec{a}}$$

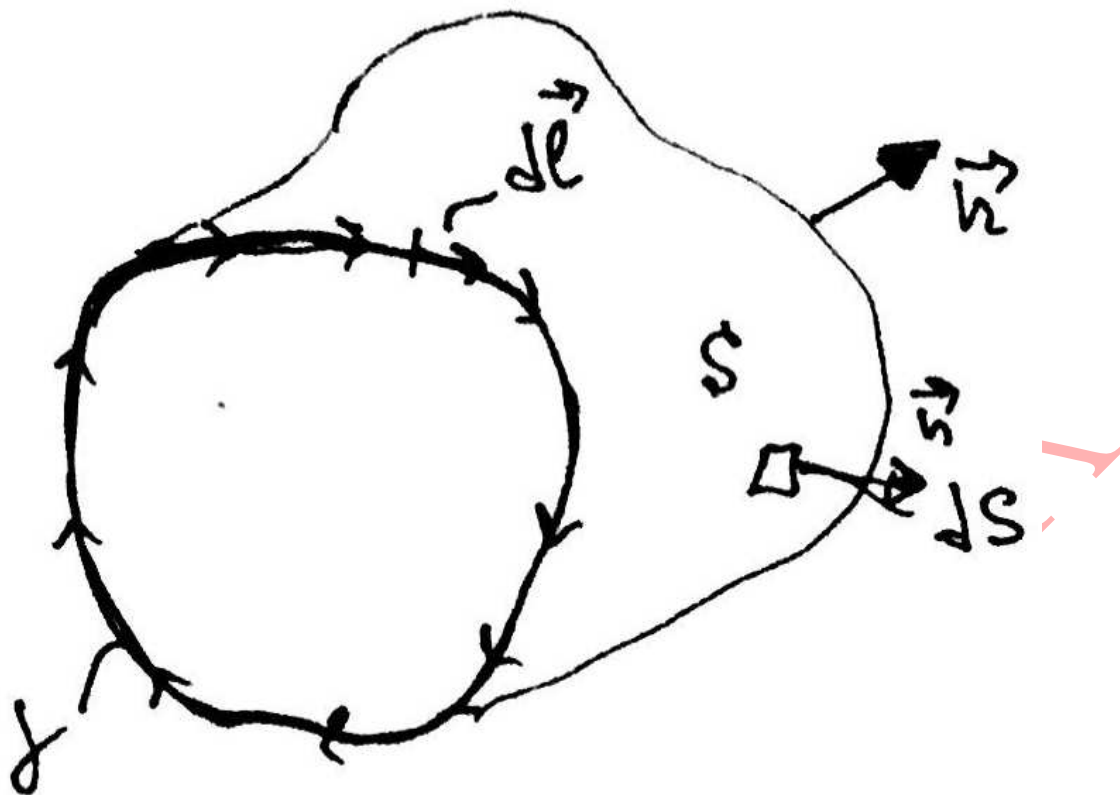
$$\begin{aligned}
\text{rot} \vec{a} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \\
\text{rot rot} \vec{a} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} & \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \\
&\text{rot rot} \vec{a} = -\nabla^2 \vec{a} + \text{grad div} \vec{a}
\end{aligned}$$

Где использовались тождества:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{a} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \\
\text{grad div} \vec{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

6.3 Теорема Стокса

Рассмотрим некоторый контур, на который «натянута» поверхность.



Рассматриваемая поверхность не обязана быть плоской, как и контур не обязан лежать в одной плоскости. На контуре γ зададим направление обхода так, чтобы вектора нормали к внешней части поверхности и направление обхода контура согласовывались с «правилом буравчика». Ещё один способ запомнить это правило следующее: если смотреть обход контура с конца вектора нормали \vec{n} , то он будет виден против часовой стрелки.

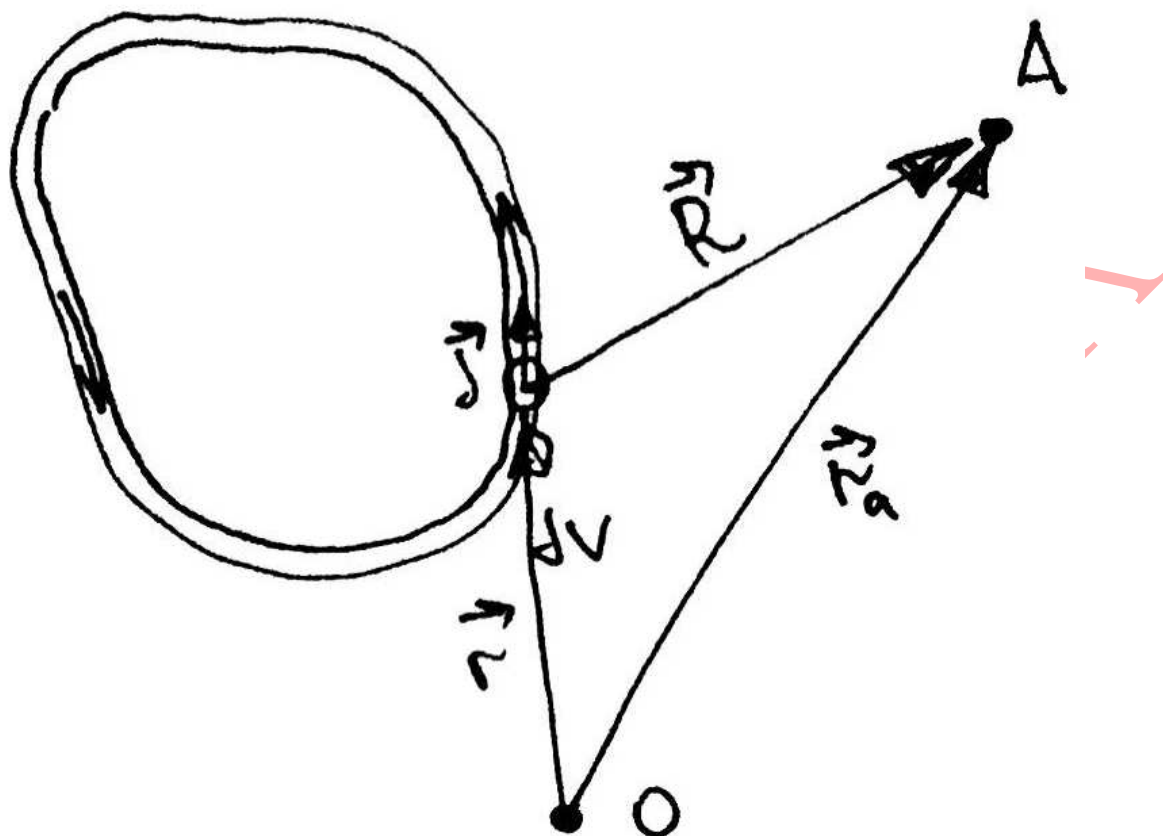
Справедлива следующая теорема: циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность опирающуюся на этот контур.

$$\oint_{\gamma} a_i dl = \iint_S (\text{rot} \vec{a})_n dS$$

6.3.1 Векторный магнитный потенциал

Ранее были введены силовые характеристики поля: \vec{H} , \vec{B} . Теперь определим новое понятие: векторный потенциал магнитного поля.

Рассмотрим индукцию магнитного поля, которая создаётся некоторым проводником с током:



$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_i \frac{[\Delta \vec{l}_i, \vec{R}_i]}{R_i^3}$$

Для вектора плотности тока \vec{j} можно записать следующее:

$$I \Delta \vec{l} = j S \Delta \vec{l} = \vec{j} S \Delta l \Rightarrow I d\vec{l} = \vec{j} dV$$

Запишем с учётом полученного выражения суммарный вектор через объёмный интеграл:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV$$

Упростим это выражение с учётом следующего:

$$R = \sqrt{(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + (z_a - z)^2}$$

Начальная точка: (x, y, z) вектора «бегает» по контуру с током, а конечная: (x_a, y_a, z_a) указывает на точку A , которая тоже может двигаться. Обозначим за $\text{grad}_a \dots$ градиент по переменным x_a, y_a, z_a , тогда:

$$\text{grad}_a \frac{1}{R} = -\text{grad} \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \left[\vec{j}, \text{grad}_a \frac{1}{R} \right] dV = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \left[\text{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j} \right] dV$$

Воспользуемся теперь формулой 1 из векторного анализа:

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} + [\text{grad} \varphi, \vec{a}] \Rightarrow$$

$$\left[\text{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j} \right] = \text{rot}_a \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) - \frac{1}{R} \text{rot}_a \vec{j}$$

Заметим следующее: т.к. ток в контуре не зависит от координат x_a, y_a, z_a , т.е. от координат наблюдения, то $\text{rot}_a \vec{j} = 0$ и поэтому:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \text{rot}_a \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV = \text{rot}_a \left(\frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{R} dV \right)$$

Заметим, что индекс a у ротора во втором выражении опущен, т.к. интегрирование осуществляется по переменным x, y, z , а значит останутся только переменные x_a, y_a, z_a . Величина:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{R} dV$$

называется **векторный потенциал магнитного поля**. С учётом этой величины перепишем выражение для поля \vec{B} :

$$\boxed{\vec{B} = \text{rot} \vec{A}}$$

Докажем одно важное свойство векторного потенциала магнитного поля:

$$\boxed{\text{div} \vec{A} = 0}$$

Для доказательства нам понадобятся следующие факты относительно постоянного тока:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad j_n = 0$$

Тогда:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}_a \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV$$

Используем формулу из векторного анализа:

$$\operatorname{div} \varphi \vec{a} = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a})$$

Тогда:

$$\operatorname{div}_a \frac{\vec{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div}_a \vec{j} + \left(\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j} \right) = \left(\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j} \right)$$

Величина $\frac{1}{R}$ зависит и от своего начала и от конца, поэтому:

$$\left(\operatorname{grad}_a \frac{1}{R}, \vec{j} \right) = - \left(\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j} \right)$$

Тогда:

$$\operatorname{div}_a \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = - \left(\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j} \right)$$

С другой стороны:

$$\operatorname{div} \varphi \vec{a} = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a})$$

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div} \vec{j} = \left(\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j} \right)$$

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}}{R} = \frac{1}{R} \operatorname{div} \vec{j} - \operatorname{div}_a \frac{\vec{j}}{R}$$

Т.к. по свойству постоянного тока: $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, то:

$$\operatorname{div}_a \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = - \operatorname{div} \left(\frac{\vec{j}}{R} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}_a \frac{\vec{j}}{R} dV = - \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div} \frac{\vec{j}}{R} dV = \dots$$

Используем теорему остроградского-Гаусса:

$$\dots = - \frac{\mu}{4\pi} \oint_S \frac{j_n}{R} dS = 0$$

т.к. $j_n = 0$ всюду на поверхности S . В итоге получим: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

7 Магнитостатика. Поле в веществе

7.1 Теорема Стокса в дифференциальной и интегральной формах

Мы получили, что:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{R} dV$$

7.1.1 Выведем формулу Стокса в дифференциальной форме

Используем:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Тогда:

$$\mu_0 \vec{H} = \text{rot} \vec{A}$$

Возьмём rot от левой и правой частей:

$$\mu_0 \text{rot} \vec{H} = \text{rot} \text{rot} \vec{A}$$

Используем соотношение, полученное ранее для $\text{rot} \text{rot} \vec{a}$:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \text{grad} \text{div} \vec{A}$$

На прошлой лекции было показано, что всегда: $\text{div} \vec{A} = 0$, тогда:

$$\mu_0 \text{rot} \vec{H} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (1)$$

Дальнейший вывод формулы Стокса основан на следующей аналогии, которую можно проверить непосредственно. Для электростатического поля было выведено следующие две формулы:

$$\nabla^2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi = \iiint_V \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R} dV$$

Заметим следующее: если в формулах для \vec{A} рассматривать только одну компоненту вектора, то получим:

$$A_x = \mu_0 \iiint_V \frac{j_x}{4\pi R} dV$$

Формальной заменой: $\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mu_0 j_x$ получим:

$$\nabla^2 A_x = -\mu j_x$$

Теперь, если “собрать” вектор \vec{A} из его координат, то получим:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Если воспользоваться формулой (1), то получим:

$$\boxed{\text{rot} \vec{H} = \vec{j}}$$

Эта и есть **формула Стокса в дифференциальной форме**.

7.1.2 Выведем формулу Стокса в интегральной форме

Из векторного анализа известна теорема Стокса:

$$\iint_S (\text{rot} \vec{a})_n dS = \oint_{\gamma} a_l dl$$

Найдём циркуляцию вектора \vec{H} по контуру γ :

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \iint_S (\text{rot} \vec{a})_n dS = \iint_S j_n dS = I$$

т.е.:

$$\boxed{\oint_{\gamma} H_l dl = I}$$

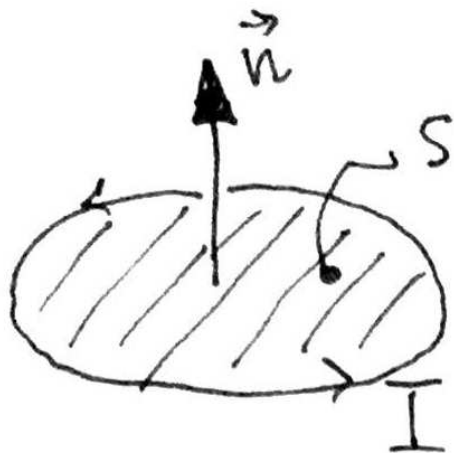
7.2 Поле магнитного диполя

Магнитный диполь – это плоский контур, по которому протекает электрический ток, размеры которого много меньше расстояния до точ-

ки, в которой мы рассматриваем поле. **Магнитный момент** – это величина:

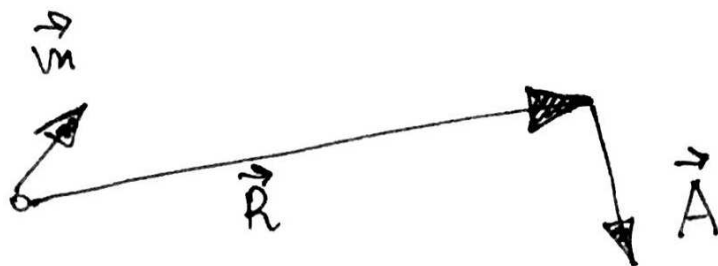
$$\vec{m} = IS\vec{n},$$

где \vec{n} - нормаль к поверхности, натянутой на плоский контур, нормаль к которому связана с током по правилу правого винта.



Векторный магнитный потенциал магнитного диполя равен (без доказательства):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{m}, \vec{R}]}{R^3}$$



По вектору \vec{A} можно найти индукцию:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \text{rot} \vec{A}$$

7.3 Магнитное поле в веществе

Электроны, вращающиеся по замкнутым орбитам есть диполь.

Есть атомы с нулевым и ненулевым суммарным магнитным моментом.

При попадании во внешнее магнитное поле атомы-диполи выстраиваются, создавая магнитное поле внутри и снаружи вещества, этот процесс

называют **поляризацией** .

Введём вектор **намагниченности** :

$$\vec{M}dV = \sum_i \vec{m}_i$$

Магнитное поле может быть спонтанным и индуцированным:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_{\text{инд}}$$

Экспериментально определено, что:

$$\vec{M} = (\mu - 1) \vec{H},$$

где μ – **магнитная проницаемость среды** .

Диамагнетики – $\mu < 1$. **Парамагнетики** – $\mu > 1$. **Ферромагнетики**

– $\mu \gg 1$. При этом записывая $\mu \sim 1$ означает, что $\mu - 1 \approx 10^{-4} \dots 10^{-6}$

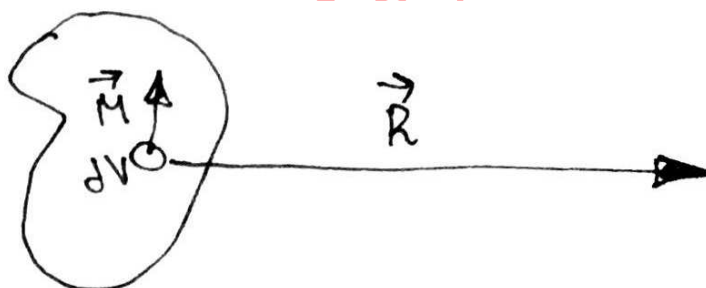
Для диа- и парамагнетиков можно записать (экспериментальный факт):

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

тогда:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

7.3.1 Индукция поля в присутствии магнетика



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{I}{r} dl + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3} dV$$

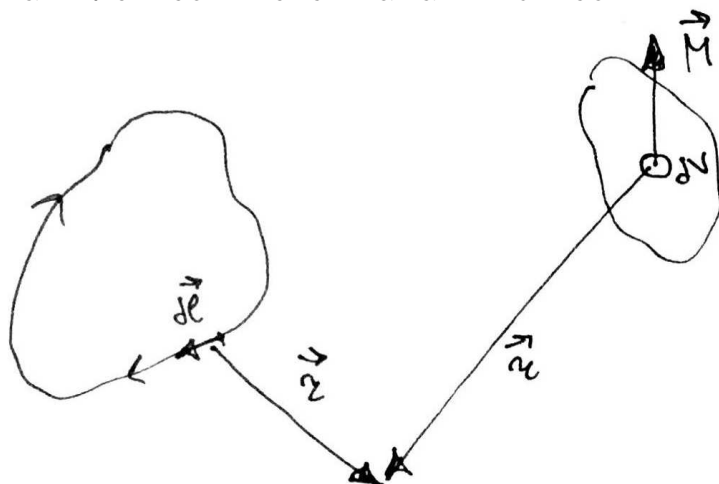
$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

7.3.2 Связь между токами намагниченности и вектором намагниченности

Докажем следующие соотношения:

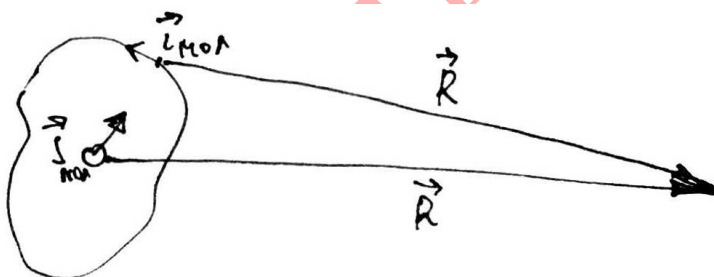
$$\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot} \vec{M}, \quad \vec{i}_{\text{мол}} = [\vec{M}, \vec{n}],$$

где $\vec{j}_{\text{мол}}$ – объёмная плотность токов намагниченности, $\vec{i}_{\text{мол}}$ – поверхностная плотность токов намагниченности.



Зная поле магнитного диполя и определение \vec{M} можем записать:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{M}, \vec{R}]}{R^3} dV$$



Теперь то же самое мы хотим записать через объёмные и поверхностные токи:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}_{\text{мол}}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{i}_{\text{мол}}}{R} dS$$

Для доказательства этой формулы используем известную формулу век-

торного анализа:

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{a} \, dV = \oiint_S [\vec{n}, \vec{a}] \, dS \quad (\text{BA1})$$

её можно доказать через формулу О.-Г.

Заметим следующее:

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \operatorname{grad} \frac{1}{R},$$

$$\text{где } R = \sqrt{(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + (z_a - z)^2}$$

$$\left[\vec{M}, \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right] = - \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{M} \right]$$

используя известное соотношение: $\operatorname{rot} \varphi \vec{a} = \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}]$, получим:

$$\left[\vec{M}, \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right] = - \operatorname{rot} \frac{\vec{M}}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{rot} \vec{M}$$

С учётом этого можно записать:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{M}, \vec{R}]}{R^3} \, dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{R} \operatorname{rot} \vec{M} \, dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot} \frac{\vec{M}}{R} \, dV$$

Используя (BA1) получим:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{rot} \vec{M}}{R} \, dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S [\vec{n}, \vec{M}] \, dS$$

Сравнивая с формулой токов получим:

$$\boxed{\vec{j}_{\text{мол}} = \operatorname{rot} \vec{M}}, \quad \boxed{\vec{i}_{\text{мол}} = [\vec{M}, \vec{n}]}$$

7.4 Теорема Стокса в присутствии магнетиков

рис. 6.

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_L dB_l l = I + I_{\text{мол}}$$

$$\boxed{\oint_{\gamma} H_l \, dl = I}$$

8 Магнитостатика. Энергия магнитного поля

8.1 Два фундаментальных свойства магнитного поля

Свойство 1 : Теорема Стокса. Для любого замкнутого контура циркуляция вектора напряжённости магнитного поля равна сумме токов, протекающих через поверхность, охватывающую этот контур, при этом направление обхода и направление токов связаны правилом правого винта.

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \sum_i I_i$$

В дифференциальной форме это соотношение имеет вид.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

Это свойство справедливо для магнитостатического поля.

Свойство 2 : дивергенция индукции магнитного поля в любой точке равна нулю.

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Докажем это тождество.

Неформально это можно показать так.

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \text{rot} \vec{A} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}])$$

Так как векторное произведение это вектор, перпендикулярный к каждому из слагаемых, то $[\vec{\nabla}, \vec{A}]$ перпендикулярно и $\vec{\nabla}$, в то же время известно, что скалярное произведение любых перпендикулярных векторов равно нулю.

Но обозначение $\vec{\nabla}$ – это не есть вектор в привычном смысле, более строгое доказательство следующее:

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= (\vec{\nabla}, \operatorname{rot} \vec{A}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

Что и требовалось доказать.

Получим это свойство в интегральной форме. Возьмём некоторый объём и проинтегрируем по нему полученное выражение: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = 0$$

По формуле Остроградского-Гаусса получим:

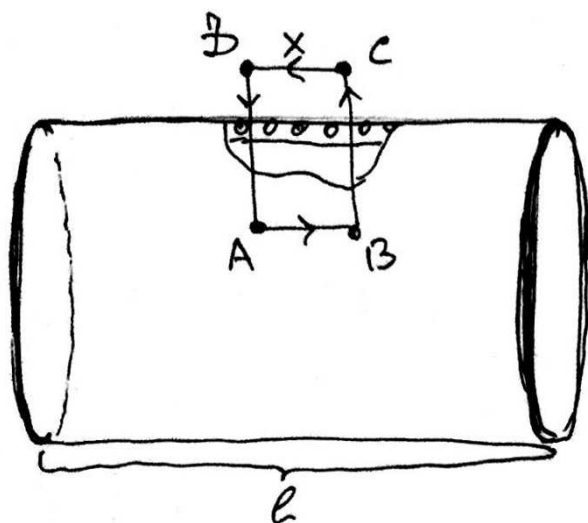
$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = \oint_S B_n \, dS = 0$$

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Свойство 2 справедливо не только для магнитостатических полей, но и для магнитных полей в общем случае.

8.2 Энергия магнитостатического поля

Найдём энергию магнитного поля, для этого рассмотрим катушку длиной l и радиусом r , $r \ll l$, число витков N . Пусть мы погрузили катушку в среду с магнитной проницаемостью μ и перевели в сверхпроводящее состояние. По катушке пустили ток I . Так как в диаметрально противоположных концах катушки ток течёт в противоположные стороны, то вся катушка стремится расшириться за счёт магнитного взаимодействия. Предположим что так же катушка может беспрепятственно расширяться. Важно, чтобы длина катушки была много больше радиуса: $r \ll l$, таким образом краевым эффектом можно пренебречь.

Пусть сперва радиус катушки не меняется, определим поле, которое она создаёт:

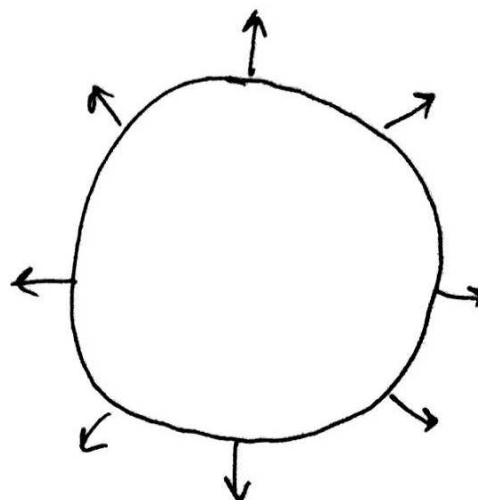
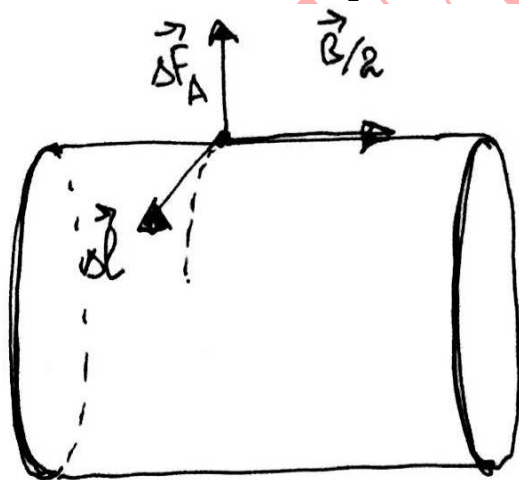


Внутри создаётся однородное магнитное поле, а снаружи его нет. Применив теорему о циркуляции по контуру γ получим:

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \int_{AB} \overbrace{H_l}^{H \cos 0} dl + \int_{BC} \overbrace{H_l}^{H \cos \frac{\pi}{2}} dl + \int_{CD} \overbrace{H_l}^{=0} dl + \int_{DA} \overbrace{H_l}^{H \cos \frac{\pi}{2}} dl = Hx = nxI$$

$$\boxed{H = nI} \quad B = \mu\mu_0 nI$$

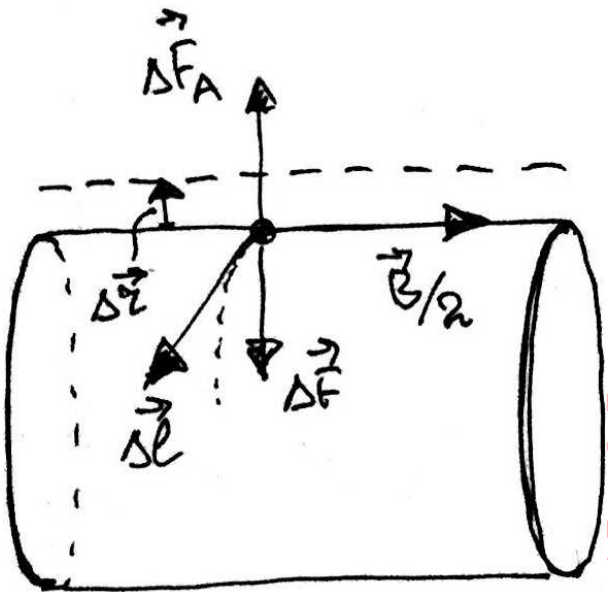
Внутри соленоида поле равно B , а снаружи нулю, нас интересует среднее значение поля, которое воздействует на выделенный элемент провода в катушке, оно равно $\frac{B}{2}$. На элемент с током $I dl$ действует сила Ампера:



$$d\vec{F}_A = I \left(d\vec{l}, \vec{B}/2 \right)$$

Расширению катушки препятствовала внешняя механическая сила. Пусть теперь катушка расширилась, при этом её радиус увеличился от r_1 до r_2 . Пусть так же расширение осуществлялось квазиравновесным способом, т.е. внешняя сила всюду была равна силе магнитного взаимодействия. На малом перемещении Δr на элементе с током внешними силами была произведена следующая работа:

$$(\Delta \vec{F}, \Delta \vec{f}) = -\Delta F \Delta r = -\Delta F_A \Delta r$$



Элементарная работа по расширению всей катушки будет равна:

$$\delta A = -I \frac{B}{2} dr \int_0^{2\pi r N} dl = -I \frac{B}{2} N 2\pi r dr = -\pi I B N r dr = -\mu \mu_0 \pi n^2 l I^2 r dr$$

Введём обозначение: $\alpha = \mu \mu_0 n^2 l \pi$, тогда:

$$\delta A = -\alpha I^2 r dr$$

Для дальнейшего потребуется одно свойство контуров в сверхпроводящем состоянии. А именно, поток через сверхпроводящий контур остаётся неизменным:

$$\Phi = \iint_S B_n dS = \text{const}$$

Рассчитаем поток Φ для нашего случая:

$$\Phi = B\pi r^2 N = n l \pi r^2 \mu \mu_0 n I = \pi \mu \mu_0 n^2 l I r^2 = \alpha I r^2 = \text{const}$$

Т.е. при изменении радиуса меняется ток, а поток остаётся неизменным.

С учётом этого можно записать:

$$I = \frac{\Phi}{\alpha r^2}$$

Возвращаясь к расчёту элементарной работы:

$$\begin{aligned} \delta A &= -\alpha I^2 r dr = -\alpha \frac{\Phi^2}{\alpha^2 r^4} r dr = -\frac{\Phi^2}{\alpha r^3} dr \\ A_{12} &= -\frac{\Phi^2}{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^3} dr = \frac{\Phi}{2\alpha} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = \frac{\Phi^2}{2\alpha r_2^2} - \frac{\Phi^2}{2\alpha r_1^2} \end{aligned}$$

Эта работа перешла в изменение магнитного поля катушки! Т.к. r_1 и r_2 были выбраны произвольно, то значит для энергии магнитного поля катушки можно записать:

$$W = \frac{\Phi^2}{2\alpha r^2} = \frac{\alpha^2 I^2 r^4}{2\alpha r^2} = \frac{\alpha I^2 r^2}{2} = \frac{\pi \mu \mu_0 n^2 l I^2 r^2}{2} = V \frac{\mu \mu_0 n^2 I^2}{2}$$

Используем выражение, полученное ранее для соленоида: $H = nI$

$$\begin{aligned} W &= V \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \\ \omega &= \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}, \end{aligned}$$

где ω – объёмная плотность энергии магнитного поля. Для неоднородного поля энергия может быть найдена интегрированием:

$$W = \iiint_V \omega dV = \iiint_V \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} dV$$

8.3 Теорема Томпсона для магнитного поля

Если рассмотреть поле в пустоте где $\mu = 1$, в которой протекают токи \vec{j} и \vec{i} , то энергия такого поля может быть вычислена двумя способами:

$$W = \iiint_{V+V_0} \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{j}, \vec{A}) dV + \frac{1}{2} \iint_S (\vec{i}, \vec{A}) dS$$

где \vec{A} – векторный потенциал магнитного поля, его можно определить из выражения:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{R} dV + \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{i}}{R} dS$$

Эта теорема здесь приводится без доказательства, но в дальнейшем она будет часто использоваться.

8.3.1 Энергия контура с током

Дано: замкнутый виток с током. Используя теорему Томпсона запишем:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{j}, \vec{A}) dV \underset{dV=Sdl, (\vec{j}, \vec{A})=jA_l}{=} = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} jSA_l dl = \frac{I}{2} \oint_{\gamma} A_l dl$$

Теорема Стокса

$$\oint_{\gamma} A_l dl = \iint_S (\text{rot} \vec{A})_n dS \underset{\vec{B}=\text{rot} \vec{A}}{=} \iint_S B_n dS$$

$$W = \frac{1}{2} I \Phi$$

$$A \sim I \Rightarrow B \sim I \text{ и } \Phi \sim I$$

Тогда:

$$\Phi = LI$$

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

L – индуктивность контура, измеряется в Генри: $[L] = \text{Гн}$

9 Закон Электромагнитной Индукции Фарадея

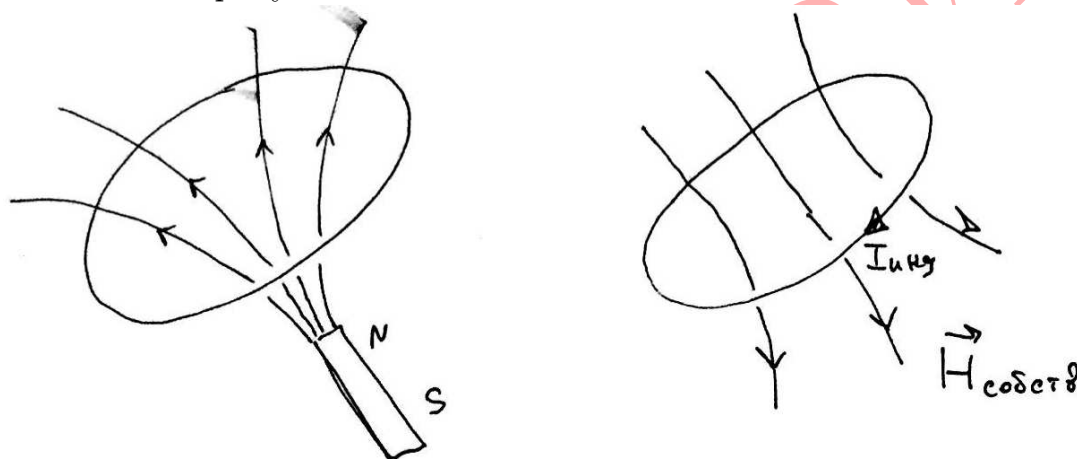
Закон, о котором идёт речь ниже был открыт Майклом Фарадеем в 1831 году. Рассмотрим контур (замкнутый или не замкнутый), который нахо-

дится в переменном магнитном поле. Тогда справедливо следующее:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad \Psi = \iint_S B_n dS, \quad (2)$$

где S – площадь поверхности, натянутой на контур, а \mathcal{E} – ЭДС индукции. На самом деле в контуре нет отдельной ЭДС, однако указанная формула говорит нам, о том какой величины нужно использовать источник напряжения, например химического типа, чтобы ток в контуре тёк эквивалентным образом.

Рассмотрим теперь замкнутый контур с суммарным сопротивлением R . Используем постоянный магнит, чтобы создавать переменное магнитное поле, для этого будем приближать или отдалять его от контура, как показано на рисунке.



При этом в контуре возникнет ток, который можно рассчитать с помощью закона Фарадея:

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}$$

В каком направлении при этом будет течь ток? Для этого существует правило Ленца: «Индукционный ток в контуре течёт в таком направлении, что стремится уменьшить изменение внешнего магнитного потока».

9.1 Первый закон Максвелла

Суть 1 закона Максвелла состоит в связи между вихревым электрическим полем и переменным магнитным.

Сначала сравним электрическое поле, возникающее в процессе электромагнитной индукции и поле создаваемое сторонними силами в проводнике. Для поля сторонних сил известно:

$$\mathcal{E} = \oint_L E^{(\text{ст})} dl = 0$$

В то время как для поля сил ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = \oint_L E^{(\text{инд})} dl = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S B_n dS \neq 0$$

Максвелл предположил, что поле $E^{(\text{инд})}$, вызывающее ток в контуре, существует за пределами контура и вне его зависимости. В свою очередь рамку можно считать только индикатором его присутствия.

Обобщая сделанное рассуждение можно сформулировать, что постоянное магнитное поле может существовать без сопутствующего ему электрическому, а вот переменное магнитное поле – нет.

Теперь видно, что сам контур может быть лишь воображаемым, однако даже для воображаемого контура можно записать:

$$\oint_L E_l dl = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S B_n dS \right)$$

Это соотношение является фундаментальным законом природы и называется **Первым Фундаментальным Законом Электродинамики**.

Перейдём от интегральной формы к дифференциальной. По теореме Стокса имеем:

$$\begin{aligned} \oint_L E_l dl &= \iint_S (\text{rot} \vec{E})_n dS \\ \iint_S (\text{rot} \vec{E})_n dS &= -\frac{d}{dt} \iint_S B_n dS \end{aligned}$$

$$\iint_S (\text{rot} \vec{E})_n dS = - \iint_S \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} \right)_n dS$$

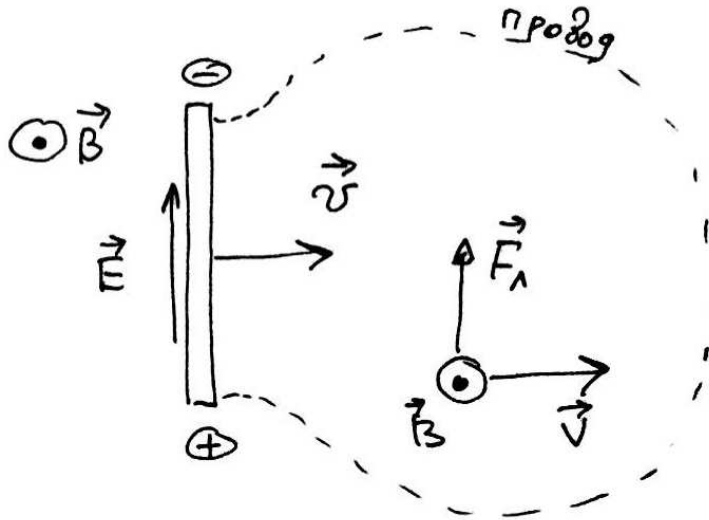
$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

С учётом ЭДС индукции плотность тока в дифференциальном законе Ома можно записать:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E}^{\text{ст}} + \vec{E}_0 + \vec{E}^{\text{инд}})$$

9.2 Поле в движущемся проводнике

Рассмотрим случай возникновения ЭДС индукции в случае движущегося проводника и постоянного магнитного поля. Рассмотрим простой пример: прямой проводник длины l , который движется со скоростью \vec{v} перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с индукцией \vec{B} .



На каждый свободный электрон действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = -e [\vec{v}, \vec{B}]$$

под действием этой силы электроны будут стремиться к верхнему концу проводника. Так как проводник в целом нейтральный, то на нижней его части будет скапливаться эквивалентный положительный заряд. При этом возникнет электрическое поле. Это поле будет действовать на

свободные электроны, препятствуя их движению вверх. В некоторый момент времени возникнет равновесие. Рассмотрим это состояние подробнее, приравняв электрическую силу и силу Лоренца получим соотношение:

$$\vec{F}_{эл} = -e\vec{E}' = -e[\vec{v}, \vec{B}]$$

Разность потенциалов на концах проводника:

$$U = EL = VLB$$

Если теперь замкнуть концы проводом, то по цепи начнёт течь ток:

$$\mathcal{E} = BVl = B \frac{dx}{dt} l = B \frac{d}{dt} S = \frac{d}{dt} (BS) = \frac{d}{dt} \Psi$$

Для плотности тока в этом случае можно записать:

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E}^{ст} + \vec{E}_0 + [\vec{v}, \vec{B}] \right)$$

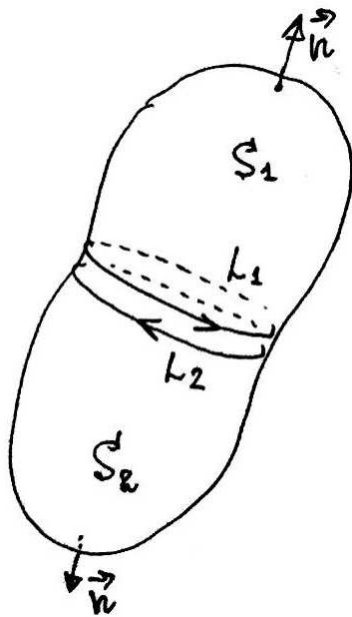
В этом случае возникновение ЭДС вызвано движением проводника в постоянном магнитном поле.

9.3 2-й Фундаментальный закон Максвелла

Сформулировав первый свой закон Максвелл предположил, что переменное электрическое поле приводит к возникновению вихревого магнитного поля в всей области пространства где есть электрическое поле. Он исходил из теоремы Стокса, которую была доказана ранее и которая справедлива только в магнитостатике.

9.3.1 Уравнение непрерывности

Рассмотрим замкнутую поверхность и разобьём её на две части. Рассмотрим эти два контура противоположного направления. Запишем теорему Стокса для этих двух контуров.



$$\oint_{L_1} H_l dl = \iint_{S_1} j_n dS$$

$$\oint_{L_2} H_l dl = \iint_{S_2} j_n dS$$

Если их сложить, то получим:

$$\oint_{L_1} H_l dl + \oint_{L_2} H_l dl = \iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS$$

Т.к. $\oint_{L_2} H_l dl = - \oint_{L_1} H_l dl$, то левая часть равна нулю и:

$$\iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS = \oint_S j_n dS = 0$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S j_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Полученное выражение верно для стационарных токов, но в общем случае это не так. Дело в том, что внутри поверхности есть заряд, если ток

втекает в эту поверхность, то он увеличивается и наоборот.

$$\oiint_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt}$$

Применим следующее: $Q = \iiint_V \rho dV$, тогда:

$$\oiint_S j_n dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, получим:

$$\oiint_S j_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}}$$

Это уравнение носит название **Уравнение непрерывности в дифференциальной форме**, а уравнение:

$$\boxed{\oiint_S j_n dS = -\frac{dQ}{dt}}$$

носит название **Уравнение непрерывности в интегральной форме**

Вернёмся к рассуждению Максвелла.

Заряд в уравнении непрерывности можно выразить из теоремы Гаусса (она справедлива для любого поля)

$$\oiint_S D_n dS = Q$$

$$\oiint_S j_n dS = -\frac{d}{dt} \iint_S D_n dS$$

Тогда теорему Стокса можно записать в другом виде:

$$\iint_{S_1} j_n dS + \iint_{S_2} j_n dS = -\iint_{S_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS - \iint_{S_2} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

$$\iint_{S_1} j_n dS = - \iint_{S_1} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \oint_{L_1} H_l dl$$

$$\iint_{S_2} j_n dS = - \iint_{S_2} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS + \oint_{L_2} H_l dl$$

Тогда **2-й Фундаментальный закон Электродинамики** гласит, что для любого замкнутого неподвижного контура и поверхности, ограниченной этим контуром справедливо равенство:

$$\oint_L H_l dl = \iint_S j_n dS + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

Иначе:

$$\oint_L H_l dl = I + \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

Слагаемое $\iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$ – называется **током смещения**. Если постоянного тока нет, то:

$$\oint_L H_l dl = \iint_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS$$

Изменение потока вектора электрической индукции $\iint_S D_n dS$ через поверхность S приводит к возникновению вихревого магнитного поля.

10 Дифференциальные уравнения Максвелла и материальные соотношения

На прошлой лекции были записаны два фундаментальных закона электродинамики и уравнение непрерывности. Если посмотреть на эти соотношения, то мы увидим, что они связывают 5 векторов: \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} , \vec{j} и один скаляр: ρ . У каждого вектора есть три проекции на оси координат. Итого, для полного определения электромагнитных явлений в природе требуется записать $5 \times 3 + 1 = 16$ уравнений. Два фундаментальных закона электродинамики и уравнение непрерывности позволяют записать

только $2 \times 3 + 1 = 7$ из них. Добавим сюда **материальные соотношения** :

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

которые добавляют к нашей системе оставшиеся 9 уравнений. Таким образом система может быть решена, однако для её разрешимости выжно выяснить не являются ли эти уравнения зависимыми друг от друга. Кроме того, возникает вопрос: можно ли дополнить эту систему уравнений, например, добавить теоремы Гаусса для векторов D и B ? Оказывается в отношении двух последних уравнений справедлива следующее утверждение: Формулы Гаусса для векторов D и B могут быть получены из двух фундаментальных законов электродинамики.

Докажем это утверждение. Запишем фундаментальные законы электродинамики:

$$\oint_{\gamma} E_l dl = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S B_n dS \right)$$

$$\oint_{\gamma} H_l dl = \iint_S j_n dS + \frac{d}{dt} \left(\iint_S D_n dS \right)$$

$$\oiint_S D_n dS = \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S B_n dS = 0$$

Эти 4 уравнения называются **уравнения Максвелла** . Требуется получить из первых двух уравнений следующие третье и четвёртое:

Перейдём далее к дифференциальной форме записи уравнений Максвелла:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \text{div}\vec{D} = \rho$$

Если из первых двух уравнений получится выразить вторые два, то зависимость соответствующих интегральных соотношений будет очевидной. Применим оператор div к первому уравнению, получим:

$$\text{div rot } \vec{E} = -\text{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Прямой проверкой доказываем, что $\text{div rot } \vec{a} = 0$ для любого \vec{a} . Тогда, используя перестановку знаков дифференцирования получим:

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{B}) = 0 \\ \Rightarrow \text{div } \vec{B} &= \text{const} \end{aligned}$$

Т.е. если величина $\text{div } \vec{B}$ равна константе, то она равна ей в любой другой момент времени. Если принят эту константу за 0, то получим:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Применим оператор div к второму уравнению, получим:

$$\text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D})$$

Левая часть опять тождественно равна нулю, тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) + \text{div } \vec{j} = 0$$

Используя уравнение непрерывности: $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) - \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D} - \rho) &= 0 \\ \text{div } \vec{D} - \rho &= \text{const} \end{aligned}$$

Где, используя аналогичные рассуждения принимая константу равной нулю получим:

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Следовательно, наше утверждение доказано.

Итак, имеем следующую систему дифференциальных и обычных уравнений:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{j} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}$$

Относительно переменных:

$$\begin{aligned}&E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \\&D_x, D_y, D_z, B_x, B_y, B_z, \\&j_x, j_y, j_z, \rho\end{aligned}$$

Современные компьютеры отлично справляются с такой задачей численно!

Сразу сделаем оговорку, что указанная система справедлива для немагнитной среды, т.е. среды с отсутствующей спонтанной намагниченностью; так же в среде отсутствует спонтанная поляризованность, а так же нет сторонних ЭДС источников и при условии, что выполняется: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

10.1 Теорема Пойнтинга

Соотношение, показывающее как изменяется энергия электромагнитного поля внутри некоторого объёма носит название **Теорема Пойнтинга**. Выведем это соотношение и за одно введём новый вектор, **Вектор Пойнтинга**, который играет в этой теореме первоочередную роль.

Рассмотрим однородную анизотропную среду в отсутствии внешнего источника тока, спонтанная поляризованность и намагниченность так же равны нулю. Тогда можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \mu\mu_0 \vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}\end{aligned}$$

Подставив последние два уравнения в первые два, получим:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Умножив первое уравнение слева и справа скалярно на \vec{H} , а второе на \vec{E} , получим:

$$\begin{aligned}(\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) &= -\mu\mu_0 \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \\ (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) &= (\vec{j}, \vec{E}) + \varepsilon\varepsilon_0 \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Теперь вычтем из первого второе уравнение, получим:

$$(\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) - (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) = -(\vec{j}, \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \right)$$

Воспользуемся формулой из векторного анализа:

$$(\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) - (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}]$$

Тогда получим:

$$\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -(\vec{j}, \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \right)$$

Выражение в скобках слева есть сумма плотностей энергии магнитного и электрических полей. Будем считать, что для произвольного электромагнитного поля плотность энергии будет складываться из электрической и магнитной составляющих: $\omega = \omega_{\text{э}} + \omega_{\text{м}}$. Выражение (\vec{j}, \vec{E}) есть мощность джоулева тепла, выделяемого в единице объёма в единицу времени. Если так же вспомнить, что: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, то:

$$(\vec{j}, \vec{E}) = \sigma E^2 = q,$$

где за q обозначено тепло, выделяемое в единице объёма в единицу времени.

Вектор Пойнтинга – это вектор, определяемый следующим образом:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

С учётом сделанных обозначений можно записать:

$$-\frac{\partial \omega}{\partial t} = q + \text{div} \vec{S}$$

Это соотношение и есть содержание теоремы Пойнтинга, записанное в дифференциальной форме.

Получим теперь соотношение в интегральной форме. Рассмотрим объём V , ограниченный поверхностью S . Проинтегрируем по объёму полученное уравнение:

$$-\iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV = \iiint_V q dV + \iiint_V \text{div} \vec{S} dV$$

$$\iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\iiint_V \omega dV \right)}_W = \frac{dW}{dt}$$

$$\iiint_V q dV = P = \frac{\delta Q}{dt},$$

где P – мощность тепла Q , выделяемого в объёме V .

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} dV = \oiint_S \mathcal{S}_n dS$$

Последнее соотношение – это поток вектора $\vec{\mathcal{S}}$ наружу поверхности S . В итоге можно записать:

$$\boxed{-\frac{dW}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} + \oiint_S \mathcal{S}_n dS}$$

С учётом последнего выражение теореме Пойнтинга можно сформулировать следующим образом: Убыль энергии электромагнитного поля в объёме V за единицу времени равно мощности джоулева тепла, выделяемого в этом объёме, и потоку энергии электромагнитного поля наружу из этого объёма за единицу времени. Т.е. физический смысл $\vec{\mathcal{S}}$ – плотность потока энергии электромагнитного поля.

Поток вектора Пойнтинга равен убыли энергии в некотором объёме, но что же переносит эту энергию? Энергию переносит электромагнитная волна! Для того, чтобы в этом убедиться, нужно показать, что носителями энергии не могут быть электроны.

10.2 Релаксация зарядов в проводниках

Для того, чтобы в этом удостовериться рассмотрим проводник внутри которого в момент времени $t = 0$ в объёме V_0 находится заряд Q_0 . Пусть вне проводника среда диэлектрическая и непроводящая $\sigma = 0$. Теперь рассмотрим произвольный объём V , ограниченный поверхностью S и запишем для него уравнение непрерывности:

$$-\frac{dQ}{dt} = \oiint_S j_n dS$$

Ток возникает за счёт того, что заряд создаёт внутри проводника электрическое поле, которое создаёт электрический ток.

$$j_n = \sigma E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} D_n$$

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \oint_S D_n dS$$

Используя формулу Гаусса: $\oint_S D_n dS = Q$ для правой части получим:

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} Q$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dt$$

Интегрируя получим:

$$Q = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t}$$

Время релаксации τ – это время, за которое заряд уменьшится в e раз. Получается для нашей системы: $\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$. Оценим значение этого параметра для реальных проводников. Для $\sigma \sim 10^7 \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$, $\varepsilon \sim 1$, $\varepsilon_0 = 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$, тогда $\tau \sim 10^{-18}..10^{-19}\text{с}$. За столь малое время заряд успевает как говорят релаксировать. Чем хуже вещество проводит электричество, т.е. при $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \rightarrow \infty$, т.е. заряд никуда не движется.

Получается, что характер движения зарядов в проводящих телах имеет характер “разбегания”.

10.3 Электромагнитная волна

Покажем, что переносчиком энергии электромагнитного поля является электромагнитная волна. Рассмотрим однородную, изотропную, непроводящую и электрически нейтральную среду, например вакуум, и запишем уравнение Максвелла в ней:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \text{div}\vec{D} = \rho$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

Используя материальные соотношения получим:

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Продифференцируем второе соотношение:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \dots$$

и, заметив что правая часть выражается через второе уравнение, получим:

$$\dots = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \text{rot} \left(-\frac{1}{\mu \mu_0} \text{rot} \vec{E} \right) = -\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \text{rot rot} \vec{E}$$

Используем формулу из векторного анализа:

$$\text{rot rot} \vec{a} = -\nabla^2 \vec{a} + \text{grad div} \vec{a}$$

Из нейтральности среды и теоремы Гаусса сделаем вывод, что: $\text{div} \vec{E} = 0$, тогда:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \nabla^2 \vec{E}$$

Получившееся уравнение есть не что иное, как уравнение бегущей волны, оно было рассмотрено в курсе механики и в общем виде записывается так:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

где v – скорость бегущей волны. Сравнивая это уравнение с получившимся, делаем вывод о скорости распространении электромагнитной волны:

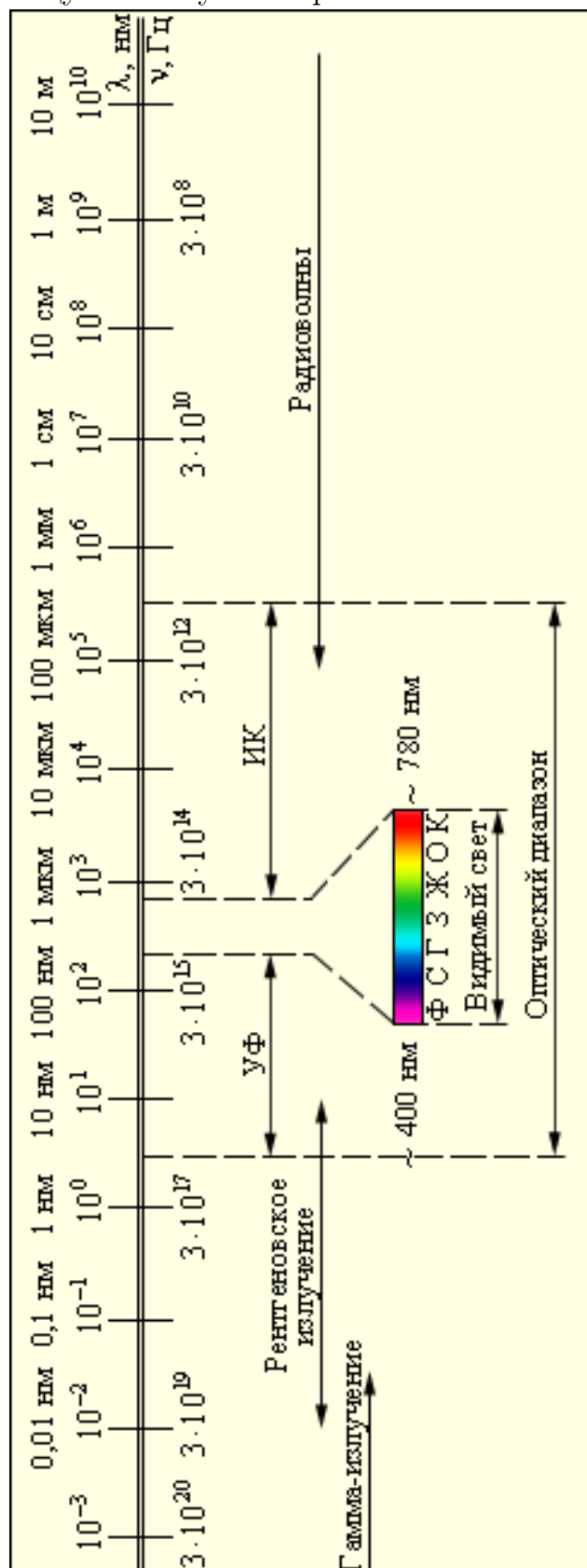
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}$$

Для вакуума $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, а для среды с параметрами: $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ получим:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Выводы. Электромагнитные волны, которые являются частным решением первых двух уравнений Максвелла, являются переносчиками энергии электромагнитного поля. Скорость их распространения равна c , а сами волны могут иметь плоскую, сферическую или цилиндрическую форму

фронтальной поверхности. В дальнейшем основное наше внимание будет сконцентрировано на плоских волнах. В дополнение рассмотрим следующую шкалу электромагнитных волн:



11 Электромагнитная волна

На прошлой лекции с помощью преобразований было показано, что волновое уравнение может быть получено из уравнений Максвелла. Решения волнового уравнения известны: это волны. Так был сделан вывод, о том, что может существовать объект, названный электромагнитной волной. Магнитная и электрическая компоненты удовлетворяют электромагнитной волны уравнениям Максвелла, т.е. являются его частными решениями.

Будем рассматривать распространение электромагнитных волн в изотропных и непроводящих средах. В них уравнения записываются в наиболее простом виде. Если среда проводящая, то в каждом малом объёме волны за некоторое время выделяется джоулево тепло, а значит сама волна теряет часть энергии, т.е. затухает.

Рассмотрим объект, состоящий из области, образованной двумя бесконечными плоскостями, которые находятся друг от друга на некотором расстоянии. Внутри этой области в каждой точке вектора напряжённости электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей постоянны по модулю. Пусть этот объект движется вправо со скоростью \vec{v} перпендикулярно ограничивающей поверхности. Вектора \vec{v} , \vec{E} , \vec{H} образуют правую тройку векторов. Правую поверхность будем называть передним фронтом, а левую задним фронтом.

рис. 1.

Несмотря на искусственность описанного объекта, он тоже, как и гармоническая волна, является частным решением уравнений Максвелла, т.е. может существовать в физическом мире. Этот объект называют **сгустком Хэвисайда**, в дальнейшем он нам понадобится для описания свойств гармонической электромагнитной волны.

Перейдём к изучению свойств сгустка Хэвисайда. Будем рассматривать сгусток Хэвисайда в системе координат с осью Ox , направленной вдоль

направления движения, а вектора \vec{E} и \vec{H} соответственно вдоль оси Oy и Oz .

Сперва выясним, какие ограничения накладывают фундаментальные законы электромагнетизма на параметры сгустка Хэвисайда: $\vec{v}, \vec{E}, \vec{H}$.

рис. 2.

Рассмотрим контур $\alpha = \mathcal{ABCD}$ и применим к нему первый фундаментальный закон электромагнетизма:

$$\oint_{\alpha} E_l dl = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S B_n dS \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_S B_n dS \right) = -\mu\mu_0 H L_{\mathcal{AB}} \frac{dL_{\mathcal{BM}}}{dt} =$$

$$= -\mu\mu_0 H v L_{\mathcal{AB}}$$

Где за v обозначена скорость движения правого фронта сгустка.

$$EL_{\mathcal{AB}} = +\mu\mu_0 H v L_{\mathcal{AB}}$$

В итоге:

$$E = \mu\mu_0 H v$$

Рассмотрим контур $\beta = \mathcal{EFGH}$ и применим к нему первый фундаментальный закон электромагнетизма, аналогично, получим:

$$\oint_{\beta} E_l dl = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S B_n dS \right)$$

$$\iint_S B_n dS = -\mu\mu_0 H L_{\mathcal{GH}} L_{\mathcal{GP}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_S B_n dS \right) = -\mu\mu_0 H L_{\mathcal{GH}} \frac{dL_{\mathcal{GP}}}{dt} =$$

$$= -\mu\mu_0 H v_1 L_{\mathcal{GH}}$$

Где за v_1 обозначена скорость движения левого фронта сгустка.

$$-EL_{\mathcal{GH}} = -\mu\mu_0 H v_1 \mathcal{GH}$$

В итоге:

$$E = \mu\mu_0 H v_1$$

Сравнивая эту формулу и формулу, полученную для правого сгустка, видим, что выполняется: $v_1 = v$. Это означает, что левый и правый фронты двигаются с одинаковой скоростью, а значит сам сгусток не “расползается” в пространстве и может существовать сколь угодно долго. Это справедливо для любой изотропной и непроводящей среды.

рис. 3.

Применим к сгустку Хэвисайда второй фундаментальный закон электродинамики, но на этот раз будем рассматривать контур $\gamma = \mathcal{IJKL}$.

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} H_l dl &= \frac{d}{dt} \left(\iint_S D_n dS \right) \\ HL_{\mathcal{IJ}} &= \frac{d}{dt} \left(\iint_S D_n dS \right) = \frac{d}{dt} (\varepsilon\varepsilon_0 EL_{\mathcal{IJ}} L_{\mathcal{JK}}) = \\ &= \varepsilon\varepsilon_0 EL_{\mathcal{IJ}} \frac{dL_{\mathcal{JK}}}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 Ev L_{\mathcal{IJ}} \\ HL_{\mathcal{IJ}} &= \varepsilon\varepsilon_0 Ev L_{\mathcal{JK}} \\ H &= \varepsilon\varepsilon_0 Ev \end{aligned}$$

Запишем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} E = \mu\mu_0 H v \\ H = \varepsilon\varepsilon_0 E v \end{cases}$$

Видим, что:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}}$$

Это выражение было получено в прошлой лекции для гармонической электромагнитной волны. Значит сгусток Хэвисайда движется с той же скоростью. Из системы так же видно, что:

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H}$$

Это важное соотношение справедливо для электромагнитной волны и часто используется в прикладных и теоретических задачах.

11.1 Перенос энергии сгустком Хэвисайда

Сперва выясним как выразится плотность энергии ω электромагнитного поля внутри сгустка Хэвисайда. Известно, что:

$$\omega_{\text{э}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad \omega_{\text{м}} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

Теперь применим выведенное соотношение, связывающее E и H :

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2$$

$$\omega = \omega_{\text{э}} + \omega_{\text{м}} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2$$

Теперь выясним как связана энергия, переносимая сгустком Хэвисайда с вектором Пойнтинга. Пусть сгусток движется вправо, как показано на рис. 4. Выделим внутри сгустка неподвижную плоскую поверхность dS . При движении сгустка за время dt через эту поверхность пройдёт некоторое количество электромагнитной энергии.

рис. 4.

Вычислим величину этой энергии:

$$\omega dV = \omega dS v dt = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 v dS dt$$

С другой стороны увеличение энергии в объёме можно выразить через теорему Пойнтинга:

$$\omega dV = S_n dS dt,$$

где S_n проекция вектора Пойнтинга на нормаль к поверхности. Приравняв правые части, получим выражение:

$$\begin{aligned} S_n &= \varepsilon\varepsilon_0 E^2 v = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \\ &= \underbrace{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E}_{\sqrt{\mu\mu_0} H} \cdot \frac{E}{\sqrt{\mu\mu_0}} = EH \end{aligned}$$

Т.е. в то же время $E \perp H$, то:

$$\Rightarrow \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

Значит мощность потока электромагнитной энергии сгустка Хэвисайда совпадает с вектором Пойнтинга.

11.2 Плоская электромагнитная волна общего вида в идеальной диэлектрической изотропной среде

Т.к. сгусток Хэвисайда не меняет формы и величины E и H , то если вдоль оси Ox будет распространяться два сгустка со своими значениями E и H , то они не будут мешать друг другу. Более того, если мы приложим второй сгусток вплотную с первым, то этот объект тоже будет являться частным решением уравнений Максвелла. Возьмём бесконечно тонкие сгустки с некоторыми модулями и направлениями пары E и H и замостим ими всё пространство. Мы получим электромагнитную волну, заметим, что в общем случае не гармоническую, однако она по-прежнему будет удовлетворять уравнениям Максвелла. Если получилось так, что все направления векторов \vec{E} и соответственно векторов \vec{H} совпали по направлению во всех сгустках, то такая волна называется **плоско поляризованной**. Можно представить общий случай, когда направления векторов \vec{E} и соответственно векторов \vec{H} непрерывно поворачиваются вокруг оси Ox на малый произвольный угол при переходе к следующему сгустку. Такая волна будет плоской и неполяризованной.

Другим частным случаем будет плоская гармоническая волна, для её получения достаточно в плоско поляризованной волне менять значение модуля E по закону синуса или косинуса. Как мы выяснили на этой лекции, соответствующее изменение модуля H получится автоматически.

11.3 Поляризация волн

Волны называют **поляризованными** в общем смысле, когда плоскость векторов \vec{E} и \vec{H} меняются по некоторому известному закону. В частности если плоскости не меняются (это тоже зависимость, хоть и тривиальная), то такая волна называется плоско поляризованной. Другой частный случай, когда вектор \vec{E} вращается эллипсу или окружности, то это **циркулярно поляризованная волна**. Пусть циркулярно поляризованная волна движется на нас, то как видно из рис.5 возможны два случая.

рис. 5.

Вращение может осуществляться по часовой стрелке (по правому кругу) и против часовой стрелки (по левому кругу).