



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

---

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

---

## **Логика и теория алгоритмов**

### **Домашнее Задание № 2**

**Студент: Нгуен Ань Тхы**

**Группа: ИУ7-И46Б**

Москва.  
2020 г.

1. Для булевой функции  $\varphi$ , заданной вектором значений:
  - а) Найти сокращенную ДНФ.
  - б) Найти ядро.
  - в) Получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются минимальными.
  - г) На картах Карно указать ядро и покрытия, соответствующие минимальным ДНФ.

Вариант 19: 1110 0101 1010 0011

**Решение:**

x1	x2	x3	x4	$\varphi$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

**а) Найти сокращенную ДНФ:**

Карта Карно для сокращенной ДНФ:

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K1 = x_0x_0 = \bar{x}_2\bar{x}_4$$

$$K2 = 000x = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$K3 = 0x01 = \bar{x}_1\bar{x}_3x_4$$

$$K4 = 01x1 = \bar{x}_1x_2x_4$$

$$K5 = x111 = x_2x_3x_4$$

$$K6 = 111x = x_1x_2x_3$$

$$K7 = 1x10 = x_1x_3\bar{x}_4$$

Сокращенная ДНФ:

$$K1 \vee K2 \vee K3 \vee K4 \vee K5 \vee K6 \vee K7$$

$$= \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4$$

**б) Найти ядро:**

На карте Карно элементарные конъюнкции  $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$  и  $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$  покрыта только этой импликантой.

$$\Rightarrow \text{Ядро: } K1 = x_0x_0 = \bar{x}_2\bar{x}_4$$

**в) Получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются минимальными:**

$$(K2 \vee K3)(K3 \vee K4)(K4 \vee K5)(K5 \vee K6)(K6 \vee K7)$$

$$= (K2K3 \vee K2K4 \vee K3 \vee K3K4)(K4K5 \vee K4K6 \vee K5 \vee K5K6)(K6 \vee K7)$$

$$= (K3 \vee K2K4)(K5 \vee K4K6)(K6 \vee K7)$$

$$= (K3K5 \vee K3K4K6 \vee K2K4K5 \vee K2K4K6)(K6 \vee K7)$$

$$= K3K5K6 \vee K3K4K6 \vee K2K4K5K6 \vee K2K4K6 \vee K3K5K7 \vee K3K4K6K7 \vee$$

$$K2K4K5K7 \vee K2K4K6K7$$

$$= K3K5K6 \vee K3K4K6 \vee K2K4K6 \vee K3K5K7 \vee K2K4K5K7$$

Получаем 5 типковых ДНФ:

$$1) K1K3K5K6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$$

$$2) K1K3K4K6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$$

$$3) K1K2K4K6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$$

$$4) K1K3K5K7 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4$$

$$5) K1K2K4K5K7 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4$$

Первые четыре ДНФ являются минимальными

**г) На картах Карно указать ядро и покрытия, соответствующие минимальным ДНФ:**

$$1) K1K3K5K6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$2) K1K3K4K6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$3) K1K2K4K6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$4) K1K3K5K7 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4$$

$x_1x_2 \backslash x_3x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Diagram showing Karnaugh map with groupings: K1 (blue), K4 (orange), K5 (blue), K7 (yellow).

2. Даны функции  $f$  и  $w$ :

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3)) \sim (x_1 \sim \bar{x}_3), w = 1111100$$

а) Вычислить таблицу значений функций  $f$ .

б) Найти минимальные ДНФ функций  $f$  и  $w$ .

в) Выяснить полноту системы  $\{f, w\}$ . Если система не полна, дополнить систему функцией  $g$  до полной системы.

г) Из функциональных элементов, реализующих функции полной системы

$\{f, w\}$  или  $\{f, w, g\}$ , построить функциональные элементы, реализующие базовые функции ( $\vee, \wedge, -, 0, 1$ ).

**а) Вычислить таблицу значений функций  $f$ :**

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3)) \sim (x_1 \sim \bar{x}_3)$$

$$(1) = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \quad (2) = \bar{x}_2 \sim x_3$$

$$(3) = (x_1 \sim \bar{x}_3)$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	(1)	(2)	(3)	(4)=(1) $\rightarrow$ (2)	$f = (4) \sim (3)$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1

**б) Найти минимальные ДНФ функций  $f$  и  $w$ :**

Карта Карно для функции  $f$ :

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	1	1

минимальные ДНФ функций  $f$ :  $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$

Карта Карно для функции  $w$ :

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	0	0

минимальные ДНФ функций  $w$ :  $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

**в) Выяснить полноту системы  $\{f, w\}$ . Если система не полна, дополнить систему функцией  $g$  до полной системы:**

$x_1$	$x_3$	$x_4$	$f$	$w$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

1. Сохранение 0:

$$f(0, 0, 0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$$

$$w(0, 0, 0) = 1 \Rightarrow w \notin T_0$$

## 2. Сохранение 1:

$$f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \in T_1$$

$$w(1, 1, 1) = 0 \Rightarrow w \notin T_1$$

## 3. Самодейственность:

$$f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \notin S$$

$$w(0, 1, 0) = w(1, 0, 1) = 1 \Rightarrow w \notin S$$

## 4. Монотонность:

$$T. \kappa(0, 0, 0) < (0, 1, 0) \text{ но } f(0, 0, 0) > f(0, 1, 0) \Rightarrow f \notin M$$

$$T. \kappa(0, 0, 0) < (1, 1, 0) \text{ но } w(0, 0, 0) > w(1, 1, 0) \Rightarrow f \notin M$$

## 5. Линейность функции :

Общий вид полинома Жегалкина для функции трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	0	$a_2 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$
0	1	1	0	$a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	1	$a_1 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	0	$a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	1	$a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{23} \oplus a_{13} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{123} = 0$

Полином Жегалкина функции  $f$ :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus 1 \Rightarrow f \notin L$$

$$w(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$w(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	1	$a_2 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$
0	1	1	1	$a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	1	$a_1 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	1	$a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_{13} = 0$
1	1	0	0	$a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	0	$a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{23} \oplus a_{13} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{123} = 0$

$$w(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus 1 \Rightarrow w f \notin L$$

Критериальная таблица:

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$f$	-	+	-	-	-
$w$	-	-	-	-	-

Система  $\{f, w\}$  является функционально полным классом.

г) Из функциональных элементов, реализующих функции полной системы  $\{f, w\}$  или  $\{f, w, g\}$ , построить функциональные элементы, реализующие базовые функции ( $\vee, \wedge, -, 0, 1$ ):

1) Отрицание:

$$w \notin T_0 \text{ и } w \notin T_1 \text{ т.к. } w(0, 0, 0) = 1 \text{ и } w(1, 1, 1) = 0$$

$$w(x, x, x) = \bar{x}$$

2) Константа 1:

$$f \notin T_0 \text{ и } f \in T_1 \text{ т.к. } f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1$$

$$f(x, x, x) = 1$$

3) Константа 0:

$$\overline{f(x, x, x)} = w(f(x, x, x), f(x, x, x), f(x, x, x)) \equiv 0$$



Проверка:

$$w(f(0, 0, 0), f(0, 0, 0), f(0, 0, 0)) = w(1, 1, 1) = 0$$

$$w(f(1, 1, 1), f(1, 1, 1), f(1, 1, 1)) = w(1, 1, 1) = 0$$

4) Построение дизъюнкции:

Для построения дизъюнкции из функции  $f = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$  зафиксируем переменную  $x_2 = 1$ , и обозначим  $x_1 \rightarrow x, x_3 \rightarrow y$ .

$$\text{Тогда } f(x, 1, y) = \bar{1}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{1} \vee 1x = x$$

$$\text{Выражение для дизъюнкции: } d(x, y) = f(x, 1, y) = f(x, f(x, x, x), y) = x$$

Проверка:

$$d(0, 0) = f(0, f(0, 0, 0), 0) = f(0, 1, 0) = 0$$

$$d(0, 1) = f(0, f(0, 0, 0), 1) = f(0, 1, 1) = 0$$

$$d(1, 0) = f(1, f(1, 1, 1), 0) = f(1, 1, 0) = 1$$

$$d(1, 1) = f(1, f(1, 1, 1), 1) = f(1, 1, 1) = 1$$