

## 8. ПОСТРОЕНИЕ РЕАЛИСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

### 8.1. ФАКТОРЫ, УЧИТЫВАЕМЫЕ ПРИ СОЗДАНИИ РЕАЛИСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ОСВЕЩЕНИЯ.

Построение реалистических изображений требует учета не только физических, но и психологических процессов. Свет, представляющий собой электромагнитную энергию, взаимодействуя с окружающей средой, попадает в глаз, где в результате физических и химических реакций вырабатываются электроимпульсы, воспринимаемый человеческим мозгом.

Человеческий глаз – достаточно сложная система. Он воспринимает свет с помощью гибкого хрусталика и фокусирует изображение на сетчатке, в которой имеются рецепторы двух типов: колбочки и палочки. В центре задней полусферы глаза собрано 6-7 млн. колбочек, чувствительных только к сравнительно высоким уровням освещенности, причем каждая из них присоединяется к отдельному нерву. Колбочки позволяют различать мелкие детали. В сетчатке также находится 75-100 млн. палочек, чувствительных к очень низким уровням освещенности. К одному нерву присоединено сразу несколько палочек, поэтому они не способны различать мелкие детали. Следует отметить, что цвет воспринимается только колбочками, т.е. при низкой освещенности, когда колбочки теряют свою чувствительность, предметы кажутся черно-белыми.

Чувствительность глаза к яркости света изменяется по логарифмическому закону. Пределы чувствительности глаза к яркости света чрезвычайно широки, порядка  $10^{10}$ , однако глаз не в состоянии одновременно воспринимать весь этот диапазон. Глаз реагирует на гораздо меньший диапазон значений относительно яркости, распределенный вокруг уровня адаптации к освещенности. Чувствительность к относительной яркости имеет порядок 100-150. Скорость адаптации к яркости неодинакова для различных частей сетчатки, но тем не менее очень высока. Экстремумы диапазона относительной яркости воспринимаются как черный и белый.

Глаз приспособляется к средней яркости наблюдаемой сцены, поэтому область с постоянной яркостью (интенсивностью) на темном фоне кажется ярче или светлее, чем на светлом фоне. Это явление называется одновременным контрастом. Например, яркость уличного фонаря днем и ночью нам представляется различной. Это связано с тем, что днем средняя освещенность сцены выше, чем ночью, уровень контраста ниже, яркость фонаря кажется меньше. Подобное явление существует и для цветов.

Еще одно свойство человеческого глаза, которое необходимо учитывать в машинной графике, состоит в том, что границы областей постоянной интенсивности кажутся более яркими, в результате этого области с постоянной интенсивностью воспринимаются, как имеющие переменную интенсивность. Это явление называется эффектом полос Маха по имени австрийского физика Эрнста Маха, открывшего это явление. Эффект полос Маха наблюдается, когда резко изменяется наклон кривой интенсивности. Если кривая интенсивности вогнута, то в этом месте поверхность кажется светлее, если выпукла – темнее.

Эффект полос Маха особенно хорошо заметен на полутонных поверхностях, заданных многоугольниками. Если интенсивность многоугольников определяется с учетом направления вектора нормали, то на ребрах этих многоугольников интенсивность будет резко меняться. Эффект полос Маха мешает глазу

создавать сглаженное изображение сцены. Увеличивая количество полигональных граней, его можно ослабить, но полностью уничтожить нельзя.

## МОДЕЛИ ОСВЕЩЕНИЯ

### ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ОСВЕЩЕНИЯ

Световая энергия, падающая на поверхность от источника света, может быть поглощена, отражена и пропущена. Количество отраженной, пропущенной и поглощенной энергии зависит от длины световой волн. Поглощенная энергия превращается в тепло. Объект можно увидеть, если он отражает или пропускает свет, если же объект поглощает весь падающий свет, то он будет невидим. Такой объект называют абсолютно черным телом. Цвет поверхности объекта определяется длинами волн поглощаемого излучения.

Свойства отраженного света зависят от строения, направления и формы источника света, а также от ориентации освещаемой поверхности и ее свойств. Свет, отраженный от объекта, может быть диффузным и зеркальным. Диффузное отражение (рис.8.1.1) происходит, когда свет как бы проникает под поверхность объекта, поглощается, а затем вновь испускается. При этом положение наблюдателя не имеет значения, так как диффузно отраженный свет рассеивается равномерно по всем направлениям. Зеркальное отражение происходит от внешней поверхности объекта.

Свет точечного источника отражается от идеального рассеивателя по закону косинусов Ламберта: интенсивность отраженного света пропорциональна косинусу угла между направлением света и нормалью к поверхности, т.е.

$$I = I_{\text{и}} k_{\text{д}} \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (8.1.1)$$

где  $I$  – интенсивность отраженного света;

$I_{\text{и}}$  – интенсивность точечного источника;

$k_{\text{д}}$  – коэффициент диффузного отражения (постоянная величина,  $0 \leq k_{\text{д}} \leq 1$ );

$\theta$  – угол между направлением света и нормалью к поверхности.

Если  $\theta > \pi/2$ , то источник света расположен за объектом. Коэффициент диффузного отражения зависит от материала и длины волны света, но в простых моделях освещения обычно считается постоянным.

Поверхность предметов, изображенных при помощи простой модели освещения с ламбертовым диффузным отражением, выглядит блеклой и матовой. Предполагается, что источник точечный, поэтому объекты, на которые не падает прямой свет, кажутся черными. Однако на объекты реальных сцен падает еще и рассеянный свет, отраженный от окружающей обстановки, например, от стен комнаты. Рассеянному свету соответствует распределенный источник. Поскольку для расчета таких источников требуются большие вычислительные затраты, в машинной графике они заменяются на коэффициент рассеяния – константу, которая входит в формулу в линейной комбинации с членом Ламберта:

$$I = I_{\text{р}} k_{\text{р}} + I_{\text{и}} k_{\text{д}} \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (8.1.2)$$

где  $I_{\text{р}}$  – интенсивность рассеянного света;

$k_{\text{р}}$  – коэффициент диффузного отражения рассеянного света ( $0 \leq k_{\text{р}} \leq 1$ ).

Интенсивность света, естественно, зависит от расстояния  $d$  от объекта до источника света. Это становится ясным, если взять два объекта, одинаково ориентированные относительно источника, но расположенные на разном расстоянии от него. Если найти их интенсивность по данной формуле, то она окажется одинаковой. Это значит, что, когда предметы перекрываются, их невозможно

различить, хотя интенсивность света обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника, и объект, лежащий дальше от него, должен быть темнее.

Если предположить, что источник света находится в бесконечности, то диффузный член модели освещения превратится в ноль. В случае перспективного преобразования сцены в качестве коэффициента пропорциональности для диффузного члена можно взять расстояние  $d$  от центра проекции до объекта. Но если центр проекции лежит близко к объекту, то величина  $1/d^2$  изменяется очень быстро, т.е. у объектов, лежащих примерно на одинаковом расстоянии от источника, разница интенсивностей чрезвычайно велика. Опыт показывает, что большей реалистичности можно добиться при линейной зависимости затухания интенсивности. В этом случае формула для расчета интенсивности будет выглядеть так:

$$I = I_p k_p + \frac{I_o k_o \cos \theta}{d + K} \quad (8.1.3)$$

где  $K$  – произвольная постоянная, подбираемая на основе эксперимента.

Если предполагается, что точка наблюдения находится в бесконечности, то  $d$  определяется положением объекта, ближайшего к точке наблюдения. Это означает, что ближайший объект освещается с полной интенсивностью источника, а более далекие – с уменьшенной. Для цветных поверхностей модель освещения применяется к каждому из трех основных цветов.

Интенсивность зеркально отраженного света (рис.8.1.2) зависит от угла падения, длины волны падающего света и свойств вещества. Зеркальное отражение света является направленным. Угол отражения от идеальной отражающей поверхности (зеркала) равен углу падения, в любом другом положении наблюдатель не видит зеркально отраженный свет. Это означает, что вектор наблюдения  $S$  совпадает с вектором отражения  $R$ , а угол  $\alpha$  равен нулю. Если поверхность не идеальна, то количество света, достигшее наблюдателя, зависит от пространственного распределения зеркально отраженного света. У гладких поверхностей распределение узкое или сфокусированное, у шероховатых – более широкое.

Благодаря зеркальному отражению на блестящих предметах появляются световые блики. Из-за того, что зеркально отраженный свет сфокусирован вдоль вектора отражения, блики при движении наблюдателя тоже перемещаются. Более того, так как свет отражается от внешней поверхности (за исключением металлов и некоторых твердых красителей), то отраженный луч сохраняет свойства падающего. Например, при освещении блестящей синей поверхности белым светом возникают белые, а не синие блики.

Интенсивность зеркально отраженного света зависит от угла падения, длины волны и свойств вещества. В простых моделях освещения для учета зеркальной составляющей отраженного света используют модель Буи-Туонга Фонга, полученную им экспериментальным путем, так как учет всех физических свойств отраженного света весьма затруднителен. Согласно модели Фонга интенсивность зеркальной составляющей отраженного света вычисляется по следующей формуле:

$$I_3 = I_n w(\theta, \lambda) \cos^n \alpha \quad (8.1.4)$$

где  $w(\theta, \lambda)$  – функция отражения, представляющая отношение зеркально отраженного света к падающему и зависящая от угла падения  $\theta$  и длины волны  $\lambda$ ;

$n$  – степень, аппроксимирующая пространственное распределение зеркально отраженного света.

Поскольку  $\cos \alpha \leq 1$ , то с ростом показателя степени  $n$  значение  $\cos^n \alpha$  при  $\alpha \neq 0$  быстро уменьшается, приближаясь к нулю ( $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ ). Таким образом, большие значения  $n$  дают сфокусированные пространственные распределения, характерные для металлов и других хорошо отполированных поверхностей (блестящих поверхностей), а малые – более широкие распределения для неметаллических поверхностей (дерево, бумага).

Коэффициент зеркального отражения зависит от угла падения, однако даже при перпендикулярном падении зеркально отражается только часть света, а остальная часть либо поглощается, либо отражается диффузно. Эти соотношения определяются свойствами вещества и длиной волны. Коэффициент отражения для некоторых неметаллов может составлять единицы процента, а для металлов – более 80%. При падении под скольльзящим углом ( $\theta = 90^\circ$ ) отражается весь падающий свет (коэффициент отражения равен 100%).

Объединяя полученный результат с ранее приведенной формулой, учитывающей рассеянное освещение и диффузное отражение, получим следующую формулу для расчета интенсивности света:

$$I = I_p k_p + \frac{I_u}{d + K} (k_d \cos \theta + w(\theta, \lambda) \cos^n \alpha) \quad (8.1.5)$$

Поскольку функция  $w(\theta, \lambda)$  достаточно сложная, ее заменяют константой  $k_3$ , которая выбирается из эстетических соображений или определяется экспериментально. В итоге получаем

$$I = I_p k_p + \frac{I_u}{d + K} (k_d \cos \theta + k_3 \cos^n \alpha) \quad (8.1.6)$$

В машинной графике эта модель (формула) часто называется функцией закраски и применяется для расчета интенсивности или тона точек объекта или пикселей изображения. Чтобы получить цветное изображение, надо найти функцию закраски для каждого из трех основных цветов. Константа  $k_3$  обычно одинакова для всех трех основных цветов, поскольку цвет зеркально отраженного света определяется цветом падающего.

Если имеется несколько источников света, то интенсивности от отдельных источников суммируются. В этом случае искомая интенсивность рассчитывается по следующей формуле:

$$I = I_p k_p + \sum_{j=1}^m \frac{I_{uj}}{d + K} (k_d \cos \theta_j + k_3 \cos^n \alpha_j) \quad (8.1.7)$$

где  $m$  - количество источников света.

Если известны единичные векторы нормали к освещаемой поверхности и направления на источник, то с использованием формулы скалярного произведения этих векторов можно определить интересующее нас значение косинуса угла:

$$\cos\theta = \frac{nL}{|n||L|} = \hat{n} \hat{L}$$

где  $\hat{n}$  и  $\hat{L}$  – единичные векторы соответственно нормали к поверхности и направления на источник.

Аналогично можно получить

$$\cos\alpha = \frac{RS}{|R||S|} = \hat{R} \hat{S}$$

где  $\hat{R}$  и  $\hat{S}$  – единичные векторы, определяющие направления отраженного луча и наблюдения.

В итоге расчет интенсивности от одного источника света можно вести по следующей формуле:

$$I = I_p k_p + \frac{I_u}{d + K} [k_d (\hat{n} \hat{L}) + k_s (\hat{R} \hat{S})^n] \quad (8.1.8)$$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛИ К ПОВЕРХНОСТИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Нормаль к поверхности отражает ее локальную кривизну, а следовательно, и направление зеркального отражения. Если известно аналитическое описание поверхности, то нормаль вычисляется непосредственно на основе этого описания. Однако для многих поверхностей часто бывает задана только полигональная аппроксимация. Зная уравнение плоскости, проходящей через каждую грань, можно определить вектор нормали.

Во многих алгоритмах удаления невидимых линий и поверхностей используются только ребра или вершины, поэтому для того чтобы использовать модель освещения, необходимо знать приближенное значение нормали на ребрах и в вершинах. Если заданы уравнения плоскостей, проходящих через полигональные грани, то нормаль к их общей вершине равна среднему значению нормалей ко всем многоугольникам, сходящимся в этой вершине. Например, направление нормали в точке  $V_1$  на рис.8.1.3 определяется как

$$N = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \hat{i} + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) \hat{j} + (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \hat{k} \quad (8.1.9)$$

где  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4$  - коэффициенты уравнений плоскостей, проходящих через три многоугольника  $P_1, P_2, P_5$ , окружающие вершину  $V_1$ .

Если требуется найти только направление нормали, то делить результат на количество граней необязательно. Если же уравнения плоскостей не заданы, то нормаль к вершине можно определить, усредняя векторные произведения векторов, построенных на всех ребрах, пересекающихся в вершине. Рассматривая ту же вершину  $V_1$ , найдем направление приближенной нормали:

$$n_{V1} = V_1 V_2 (V_1 V_4 + V_1 V_5 (V_1 V_2 + V_1 V_4 (V_1 V_5 \quad (8.1.10)$$

Отметим, что требуется найти только внешние нормали. Если полученный вектор не нормируется, то его величина зависит от количества и площади конкретных многоугольников, а также от количества и длины конкретных ребер. Заметнее всего проявляется влияние многоугольников с большей площадью и более длинных ребер.

Если нормаль к поверхности используется для определения интенсивности и для изображения объекта или сцены выполняется перспективное преобразование, то нормаль следует вычислять до перспективного преобразования. Иначе направление нормали будет искажено, что приведет к неправильному определению интенсивности, задаваемой моделью освещения.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА ОТРАЖЕНИЯ

Для определения интенсивности освещения, кроме вектора нормали, необходимо определить вектор отраженного света. Рассмотрим методы определения направления этого вектора. Для этого воспользуемся законом отражения, утверждающим, что вектор падающего света, нормаль к поверхности и вектор отраженного света лежат в одной плоскости и в этой плоскости угол падения равен углу отражения (угол, образованный вектором падения и вектором нормали равен углу, образованному вектором отраженного света и нормалью).

В методе определения вектора отраженного света, предложенном Фонгом, предполагается, что свет падает вдоль оси  $z$  (рис.8.1.4). Этот подход удобно использовать, когда в сцене присутствует один точечный источник освещения. Если перенести начало системы координат в точку поверхности, то проекции нормали и вектора отражения на плоскость  $xy$  будут лежать на одной прямой. Поэтому можно записать следующее соотношение:

$$\frac{\hat{R}_x}{\hat{R}_y} = \frac{\hat{n}_x}{\hat{n}_y} \quad (8.1.11)$$

где  $\hat{R}_x$ ,  $\hat{R}_y$ ,  $\hat{n}_x$ ,  $\hat{n}_y$  -  $x$ ,  $y$  составляющие единичных векторов отражения и нормали соответственно.

Обозначив угол между единичным вектором нормали и осью  $z$  через  $\theta$ , получим составляющие вектора нормали по оси  $z$ :

$$\hat{n}_z = \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Аналогично, угол между единичным вектором отражения и осью  $z$  равен  $2\theta$ , поэтому

$$\hat{R}_z = \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2\hat{n}_z^2 - 1$$

Поскольку  $\hat{R}_x^2 + \hat{R}_y^2 + \hat{R}_z^2 = 1$ , то можно записать  $\hat{R}_x^2 + \hat{R}_y^2 = 1 - \hat{R}_z^2 = 1 - (2\hat{n}_z^2 - 1)^2$

В левой части последнего равенства вынесем за скобку  $\hat{R}_y^2$  и получим

$$\hat{R}_y^2 \left( \frac{\hat{R}_x^2}{\hat{R}_y^2} + 1 \right) = 1 - (2\hat{n}_z^2 - 1)^2 \quad (8.1.12.)$$

Для единичного вектора нормали можно записать, что

$$\hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2 + \hat{n}_z^2 = 1 \quad (8.1.13)$$

Возведя (8.1.11.) в квадрат и заменив в (8.1.12) отношение квадратов проекций единичного вектора отражения на отношение квадратов проекций единичного вектора нормали, после преобразований получаем:

$$\hat{R}_y^2 \left( \frac{\hat{R}_x^2}{\hat{R}_y^2} + 1 \right) = \hat{R}_y^2 \left( \frac{\hat{n}_x^2}{\hat{n}_y^2} + 1 \right) = \frac{\hat{R}_y^2}{\hat{n}_y^2} (\hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2) = \frac{\hat{R}_y^2}{\hat{n}_y^2} (1 - \hat{n}_z^2) = 1 - (2\hat{n}_z^2 - 1)^2 \quad (8.1.14)$$

После упрощений в правой части получим

$$\frac{\hat{R}_y^2}{\hat{n}_y^2} (1 - \hat{n}_z^2) = 4\hat{n}_z^2 (1 - \hat{n}_z^2)$$

Отсюда получаем выражение для определения проекции на ось y единичного вектора отражения:

$$\hat{R}_y = 2\hat{n}_y \hat{n}_z \quad (8.1.15)$$

$$\text{Из (8.1.11) получаем } \hat{R}_x = 2\hat{n}_x \hat{n}_z \quad (8.1.16)$$

Когда в сцене имеется несколько источников света, то вдоль оси z может в общем случае падать свет только от одного источника, от остальных источников он будет направлен вдоль другого направления, поэтому рассмотренный способ расчета вектора отражения оказывается неприменимым. Можно, конечно, для каждого источника осуществлять преобразования сцены таким образом, чтобы свет от него падал вдоль оси z, однако в этом случае проще преобразовать сцену таким образом, чтобы вектор нормали был параллелен оси z, а точку поверхности принять за начало координат. Тогда плоскость ху будет являться касательной к поверхности, а х- и у-составляющие единичных векторов падения и отражения будут иметь разные знаки, а z-оставляющие будут равны. Для получения результата в исходной системе координат надо выполнить обратное преобразование. В преобразованной системе координат выполняются следующие равенства (рис.8.1.5):

$$\hat{R}_x = -\hat{L}_x \quad \hat{R}_y = -\hat{L}_y \quad \hat{R}_z = \hat{L}_z \quad (8.1.17)$$

где  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$ ,  $\hat{L}_z$  - проекции на координатные оси единичного вектора падающего света.

В третьем способе определения вектора отражения закон отражения записывается при помощи векторного и скалярного произведения векторов нормали, падающего света и отраженного света. Факт расположения этих трех векторов в одной плоскости выражается с помощью векторного произведения:

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{R} \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ L_x & L_y & L_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ n_x & n_y & n_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix}$$

$$(n_z L_y - n_y L_z)i + (n_x L_z - n_z L_x)j + (n_y L_x - n_x L_y)k = (n_y R_z - n_z R_y)i + (n_z R_x - n_x R_z)j + (n_x R_y - n_y R_x)k$$

Векторные произведения будут равны, если равны их x-, y-, z- составляющие:

$$\begin{aligned} n_z L_y - n_y L_z &= n_y R_z - n_z R_y \\ n_x L_z - n_z L_x &= n_z R_x - n_x R_z \\ n_y L_x - n_x L_y &= n_x R_y - n_y R_x \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

В полученной системе уравнений одно из уравнений является линейно зависимым, поэтому необходимо использовать равенство скалярных произведений тех же векторов, которое выражает равенство углов падения и отражения:

$$Ln = nR \text{ или } n_x L_x + n_y L_y + n_z L_z = n_x R_x + n_y R_y + n_z R_z \quad (8.1.19)$$

Это равенство и является необходимым добавочным условием.

Рассмотрим, наконец, еще один – четвертый способ определения вектора отражения (рис.8.1.6). Данный способ удобно применять при использовании метода трассировки лучей, так как он позволяет по известным параметрам вектора нормали и вектора падающего света рассчитать вектор отражения, используя аналитические выражения, которые сейчас будут получены. Тем самым мы избежим необходимости решения системы уравнений, как это требуется в предыдущем случае.

Будем считать, что вектор отражения представляет собой линейную комбинацию вектора падающего света и вектора нормали, т.е.

$$\hat{R} = \alpha \hat{L} + \beta \hat{n}$$

Поскольку скалярное произведение единичных векторов численно равно косинусу угла между ними, то можно записать следующие два равенства:

$$(-\hat{L}) \hat{n} = \cos \theta \quad (8.1.20)$$

$$\hat{n} \hat{R} = \cos \theta \quad (8.1.21)$$

Последнее равенство перепишем с учетом исходного выражения, определяющего значение вектора отражения:

$$\hat{n} (\alpha \hat{L} + \beta \hat{n}) = \alpha \hat{L} \hat{n} + \beta \hat{n} \hat{n} = \alpha \hat{L} \hat{n} + \beta = \cos \theta \quad (8.1.22)$$

Из (8.1.20) получаем, что  $\hat{L} \hat{n} = -(-\hat{L}) \hat{n} = -\cos \theta$ . Подставив полученное равенство в (8.1.22), получим выражение, связывающее неизвестные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$-\alpha \cos \theta + \beta = \cos \theta \text{ или } \beta = (1 + \alpha) \cos \theta \quad (8.1.23)$$

Вычислим скалярное произведение единичного вектора отражения самого на себя, которое равно единице:

$$\hat{R} \hat{R} = (\alpha \hat{L} + \beta \hat{n})^2 = \alpha^2 \hat{L} \hat{L} + 2 \alpha \beta \hat{L} \hat{n} + \beta^2 \hat{n} \hat{n} = 1 \text{ или}$$



$$\alpha^2 + 2 \alpha \hat{L} \hat{n} + \beta^2 = 1$$

Подставив в последнее равенство значение  $\beta$  из (8.1.23), получим:

$$\alpha^2 + 2 \alpha (1 + \alpha) \cos\theta (-\cos\theta) + \cos^2\theta (1 + \alpha)^2 = 1$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\alpha^2 (1 - \cos^2\theta) = 1 - \cos^2\theta$$

Отсюда получается значение  $\alpha=1$  (второй корень  $\alpha=-1$  не подходит по физическому смыслу). Подставив в (8.1.22) полученное значение  $\alpha$ , найдем значение  $\beta$ :

$$\beta = 2 \cos\theta = 2(-\hat{L}) \hat{n} = -2 \hat{L} \hat{n}. \quad (8.1.24)$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В более сложных моделях освещения нам придется учитывать пропускающие свойства поверхностей, т.е. прозрачность этих поверхностей, что приводит к наличию преломленного луча. Для получения вектора преломленного луча (рис.8.1.7) воспользуемся законом преломления Снеллиуса, который утверждает, что падающий и преломленный лучи, а также вектор нормали лежат в одной плоскости, а углы падения и преломления связаны следующей формулой:

$$\eta_1 \sin\theta_L = \eta_2 \sin\theta_T \quad (8.1.25)$$

Как и в предыдущем случае, будем считать, что вектор преломления представляет собой линейную комбинацию вектора падающего света и вектора нормали, т.е.

$$\hat{T} = \alpha \hat{L} + \beta \hat{n}$$

Поскольку скалярное произведение единичных векторов численно равно косинусу угла между ними, то можно записать следующие два равенства:

$$(-\hat{L}) \hat{n} = \cos\theta_L \quad (8.1.26)$$

$$\hat{n} (-\hat{T}) = \cos\theta_T \quad (8.1.27)$$

Вычислим скалярное произведение единичного вектора преломления самого на себя, которое равно единице:

$$\hat{T} \hat{T} = (\alpha \hat{L} + \beta \hat{n})^2 = \alpha^2 \hat{L} \hat{L} + 2 \alpha \beta \hat{L} \hat{n} + \beta^2 \hat{n} \hat{n} = 1 \text{ или}$$

$$\alpha^2 + 2 \alpha \beta \hat{L} \hat{n} + \beta^2 = 1$$

Заменив скалярное произведение вектора падающего света на нормаль через (8.1.27), получаем  $\alpha^2 - 2 \alpha \beta \cos\theta_L + \beta^2 = 1$  (8.1.28)

Равенство (8.1.28) перепишем с учетом исходного выражения, определяющего значение вектора преломления:

$$\hat{n} (\alpha \hat{L} + \beta \hat{n}) = \alpha \hat{L} \hat{n} + \beta \hat{n} \hat{n} = \alpha \hat{L} \hat{n} + \beta = \alpha(-\cos\theta_L) + \beta = -\cos\theta_T$$

или  $\cos\theta_T = \alpha \cos\theta_L - \beta$  (8.1.29)

Возведя (8.1.25) в квадрат и произведя замену  $\eta = \eta_1 / \eta_2$ , получим

$$\sin^2\theta_T = \eta^2 \sin^2\theta_L, \text{ после замены синуса на косинус получим}$$

$$1 - \cos^2\theta_T = \eta^2 (1 - \cos^2\theta_L) \text{ или } \cos^2\theta_T = 1 - \eta^2 (1 - \cos^2\theta_L)$$

Возведем теперь в квадрат (8.1.29) и, заменив неизвестное значение косинуса угла преломления на известное значение косинуса угла падения, получим:

$$\alpha^2 \cos^2 \theta_L - 2\alpha \beta \cos \theta_L + \beta^2 = 1 - \eta^2 (1 - \cos^2 \theta_L) \quad (8.1.30)$$

Вычитая из (8.1.28) выражение (8.1.30), получаем

$$\alpha^2 (1 - \cos^2 \theta_L) = \eta^2 (1 - \cos^2 \theta_L)$$

Из последнего уравнения получаем  $\alpha = \eta$  (второй корень  $\alpha = -\eta$  не подходит по физическому смыслу).

Подставив полученное значение  $\alpha$  в (8.1.30), получим уравнение

$$\beta^2 - 2\beta \eta \cos \theta_L + \eta^2 - 1 = 0$$

Решая это уравнение, получим следующие корни, определяющие неизвестное значение коэффициента  $\beta_{1,2} = \eta \cos \theta_L \pm \sqrt{\eta^2 (\cos^2 \theta_L - 1) + 1}$

Из двух возможных значений из физического смысла следует взять меньший корень (отрицательный):

$$\beta = \eta \cos \theta_L - \sqrt{\eta^2 (\cos^2 \theta_L - 1) + 1} \quad (8.1.31).$$

В последнем выражении под знаком квадратного корня может стоять отрицательная величина  $\eta^2 (\cos^2 \theta_L - 1) + 1 < 0$ . Это будет означать полное внутреннее отражение, т.е. отсутствие преломленного луча при переходе из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду.

## 8.2. МЕТОДЫ ЗАКРАСКИ

Часто модель трехмерного объекта представляет собой набор плоских выпуклых граней – многоугольников. После удаления невидимых граней необходимо осуществить закраску оставшихся видимых граней. Существуют три основных способа закраски объектов, заданных полигональными гранями. В порядке возрастания сложности перечислим эти способы: однотонная закраска, закраска, основанная на интерполяции значений интенсивности (закраска Гуро), закраска, основанная на интерполяции векторов нормали (закраска по методу Фонга). При использовании каждого из этих методов может быть использована любая из моделей освещения. При цветной закраске требуется рассматривать не одно уравнение, а три уравнения для каждой из составляющих (красной, зеленой и синей).

### 8.2.1. ОДНОТОННАЯ ЗАКРАСКА

При однотонной закраске вычисляется один уровень интенсивности, который используется для закраски всего многоугольника. При этом предполагается, что:

1. Источник света расположен в бесконечности, поэтому произведение  $\hat{n} \hat{L}$  постоянно на всей полигональной грани.
2. Наблюдатель находится в бесконечности, поэтому произведение  $\hat{n} \hat{S}$  постоянно на всей полигональной грани.
3. Многоугольник представляет реальную моделируемую поверхность, а не является аппроксимацией криволинейной поверхности. Если какое-либо из первых двух предположений оказывается неприемлемым, можно воспользоваться усредненными значениями  $\hat{L} \hat{S}$ , вычисленными, например, в центре многоугольника.

Если одно из первых двух предположений не оправдывается, то можно воспользоваться усреднением векторов  $R$ ,  $S^{\wedge}$ . Последнее предположение чаще не выполняется, но оказывает существенное влияние. Это влияние состоит в том, что каждая из видимых полигональных граней аппроксимированной поверхности хорошо отличима от других, поскольку интенсивность каждой из этих граней отличается от интенсивности соседних граней. Различие в окраске соседних граней хорошо заметно вследствие эффекта полос Маха. Этот эффект является одной из причин слишком резкого перепада интенсивности на всех граничных ребрах, на которых возникает нарушение непрерывности изменения самой величины интенсивности или ее производной.

Действительные и кажущиеся изменения интенсивности вдоль поверхности объясняются латеральным торможением рецепторов глаза, реакция на свет которых подвергается воздействию соседних рецепторов, обратно пропорциональному расстоянию до каждого из рецепторов. Рецепторы, расположенные непосредственно на границе перепада интенсивностей с более яркой ее стороны, подвергаются более сильному раздражению, чем те, которые находятся дальше от границы. Это объясняется тем, что они меньше затормаживаются своими соседями, находящимися с той стороны, которая темнее. Аналогично рецепторы, расположенные непосредственно на границе перепада интенсивности с более темной ее стороны, будут подвергаться меньшему воздействию, чем те, которые находятся в той же темной области, но дальше от границы. Причина здесь в том, что эти рецепторы подвергаются более сильному торможению от своих соседей с яркой стороны границы.

Объекты, закрашенные по методу простой закраски, выглядят как бы покрытыми рыбьей чешуей, т.е. достаточно четко выделяются отдельные грани поверхности. Таким образом, данный метод закраски не позволяет построить достаточно реалистичное изображение.

С целью получения более качественного изображения (более реалистичного) применяют методы сглаженного закрашивания, позволяющие устранить дискретность модели.

#### 8.2.2. ЗАКРАСКА МЕТОДОМ ГУРО

Линейное, или пропорциональное закрашивание, предполагает изменение освещенности в пределах каждого многоугольника, благодаря этому получается более реалистичное изображение. Яркость и цветовая насыщенность элементов каждого многоугольника плавно меняются в интервале между значениями, вычисленными в вершинах многоугольника. При этом поверхности воспроизводимых объектов приобретают идеальную сюрреалистическую гладкость, как будто наблюдатель видит их при непрямом освещении.

Более реалистичное изображение получается в случае, когда яркость и цветовая насыщенность плавно меняются не только от вершины к вершине, но и вдоль ребер, а также в пределах сканирующей строки (рис.8.2.1) Этот метод назван по имени разработчика методом Гуро.

Процесс закраски по методу Гуро осуществляется в четыре этапа. На первом этапе вычисляются нормали к поверхности. На втором этапе определяются нормали в вершинах путем усреднения нормалей по всем полигональным граням, которым принадлежит рассматриваемая вершина. (Если предполагается, что ребро видимо, то определяются две нормали в вершинах – по одной с каждой стороны ребра, путем отдельного усреднения нормалей к многоугольникам

с каждой стороны ребра). На третьем этапе, используя нормали в вершинах и применяя определенную модель освещения, вычисляют значения интенсивностей в вершинах многоугольника. На четвертом этапе осуществляется закрашка многоугольника с использованием билинейной интерполяции интенсивностей. Сначала вычисляются значения интенсивностей вдоль каждого ребра (первая линейная интерполяция), а затем вычисляются значения интенсивностей вдоль сканирующей строки между ребрами многоугольника (вторая линейная интерполяция).

Расчетные формулы будут выглядеть следующим образом:

Если  $I_B$ ,  $I_C$ ,  $I_A$ ,  $I_D$  – интенсивности, вычисленные в вершинах многоугольника, то интенсивности  $I_P$ ,  $I_Q$  в точках  $P$  и  $Q$ , расположенных на ребрах многоугольника, будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_P &= (1-t) I_B + t I_C & 0 \leq t \leq 1 \\ \text{где } t &= BP/BC \\ I_Q &= (1-u) I_A + u I_D & 0 \leq u \leq 1 \\ \text{где } u &= AQ/AD \\ I_R &= (1-v) I_P + v I_Q & 0 \leq v \leq 1 \\ \text{где } v &= PR/PQ \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

С целью сокращения количества выполняемых операций интенсивность вдоль сканирующей строки можно вычислять инкрементально:

для двух пикселей, лежащих в пределах одной строки можно записать

$$\begin{aligned} I_{R1} &= (1-v_1) I_P + v_1 I_Q \\ I_{R2} &= (1-v_2) I_P + v_2 I_Q \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

Вычитая из второго выражения первое, можно получить:

$$I_{R2} - I_{R1} = I_Q(v_2 - v_1) + I_P(v_1 - v_2) = I_{R1} + (I_Q - I_P)(v_2 - v_1) = I_{R1} + \Delta I \Delta v \quad (8.2.3)$$

По сравнению с однотонной закрашкой качество изображения при применении закрашки по методу Гуро улучшается, однако заметным остается проявление полос Маха. Это происходит потому, что применяемый метод интерполяции обеспечивает лишь непрерывность значений интенсивности вдоль границ многоугольников, но не обеспечивает непрерывности изменения интенсивности.

При применении закрашки по методу Гуро возникает еще одна проблема (рис.8.2.2). При вычислении усредненных нормалей к соседним многоугольникам можно получить одинаково ориентированные нормали. Это приведет к тому, что одинаковыми будут и интенсивности. Поверхность будет выглядеть плоской. Для изображения плавного перехода необходимы дополнительные многоугольники (рис.8.2.4). Если же требуется сохранить резкие складки, то для предотвращения сглаживания требуется выборочное усреднение нормалей к поверхностям (рис.8.2.3).

Закраска Гуро лучше всего выглядит в сочетании с простой моделью освещения с диффузным отражением, так как форма бликов сильно зависит от выбора многоугольников, представляющих объект или поверхность.

### 8.3.3. ЗАКРАСКА МЕТОДОМ ФОНГА

Закраска по методу Фонга позволяет улучшить качество получаемого изображения и решить ряд проблем, возникающих при использовании метода Гуро. Однако закрашка Фонга требует больших вычислительных затрат. В отличие от метода Гуро при закрашке по методу Фонга интерполируется не значение интен-

сивности, а значение нормали. При этом также используется билинейная интерполяция. Сначала вычисляются нормали к поверхностям, затем на основе этих нормалей вычисляются значения нормалей в вершинах многоугольников. Далее выполняется аппроксимация нормалей вдоль ребер многоугольника. Полученные значения нормалей используются для вычисления нормалей в каждом пикселе очередной сканирующей строки.

По аналогии с предыдущим разделом получим следующие расчетные формулы:

если  $n_B$ ,  $n_C$ ,  $n_A$ ,  $n_D$  – нормали, вычисленные в вершинах многоугольника, то нормали  $n_P$ ,  $n_Q$  в точках P и Q, расположенных на ребрах многоугольника, будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} n_P &= (1-t) n_B + t n_C & 0 \leq t \leq 1 \\ \text{где } t &= BP/BC \\ n_Q &= (1-u) n_A + u n_D & 0 \leq u \leq 1 \\ \text{где } u &= AQ/AD \\ n_R &= (1-v) n_P + v n_Q & 0 \leq v \leq 1 \\ \text{где } v &= PR/PQ \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

С целью сокращения количества выполняемых операций интенсивность вдоль сканирующей строки можно вычислять инкрементально:

для двух пикселей, лежащих в пределах одной строки можно записать

$$\begin{aligned} n_{R1} &= (1-v_1) n_P + v_1 n_Q \\ n_{R2} &= (1-v_2) n_P + v_2 n_Q \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Вычитая из второго выражения первое, можно получить:

$$n_{R2} - n_{R1} = n_Q(v_2 - v_1) + n_P(v_1 - v_2) = n_{R1} + (n_Q - n_P)(v_2 - v_1) = n_{R1} + \Delta n \Delta v \quad (8.2.6)$$

Значение нормали, вычисленное описанным способом, используется для вычисления интенсивности пиксела.

Закраска по методу Фонга достигается лучшая локальная аппроксимация кривизны поверхности и, следовательно, получается более реалистическое изображение, в частности, правдоподобнее выглядят зеркальные блики

Метод Фонга устраняет многие недостатки метода Гуро, но не все, т.к. также основан на линейной интерполяции. В местах разрыва первой производной интенсивности также заметен эффект полос Маха, хотя он проявляется в меньшей степени, чем у метода Гуро. Этот эффект может в большей степени проявляться при изображении сфер. Оба метода закраски могут приводить к ошибкам при изображении невыпуклых многоугольников.

Первая сканирующая строка использует значения нормалей или интенсивностей, рассчитанных в вершинах A, B, D, а вторая строка, лежащая ниже вершины C, использует значение нормали (интенсивности) также и этой вершины. Это приводит к нарушению непрерывности закраски.

### 8.3. Глобальная модель освещения с трассировкой лучей

Модель является расширением локальной модели распространения света. Основана на том факте, что из множества лучей, испускаемых источником, на формирование изображения влияют лишь те лучи, которые попадают в объектив аппарата или на сетчатку глаза человека. Свет достигает наблюдателя, если он отражается от поверхности, преломляется или проходит через нее. Из каждой точки источника света исходит бесконечное количество лучей, причём боль-

шинство их никогда не достигает точки зрения. На рисунке 8.4.1 показан ход лучей в сцене, состоящей из нескольких зеркально отражающих объектов

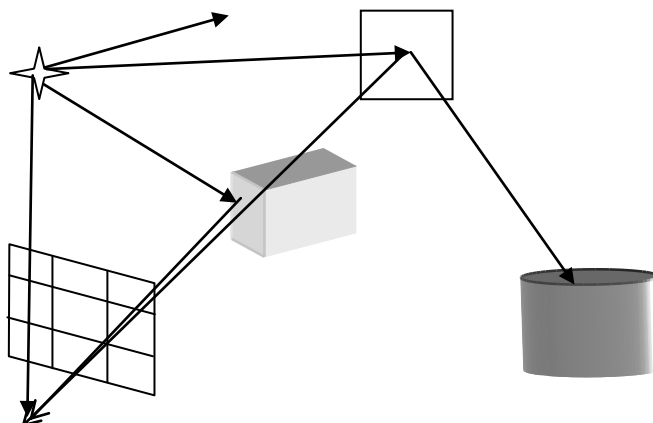
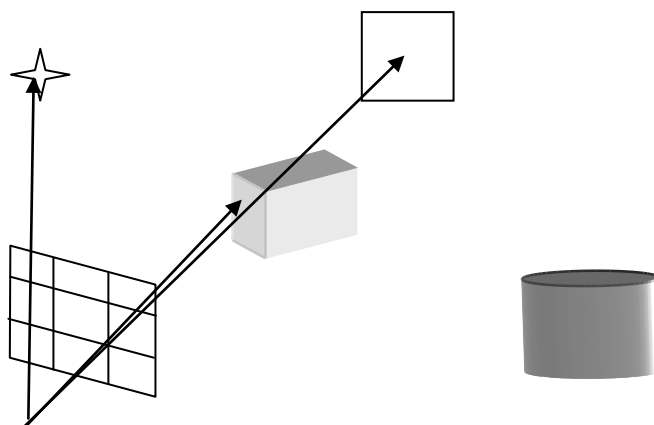


Рис. 8.4.1. Ход лучей, испускаемых источником.

Большая часть лучей не попадает на сетчатку или в камеру, поэтому не влияют на формирование изображения. Если изменить ход лучей на противоположный, то в создании изображения примут участие только те лучи, которые



“испускает” центр проецирования с учётом рамки отсечения в картинной плоскости (рис. 8.4.2). Эти лучи называют приведёнными.

Рис. 8.4.2. Приведение лучей.

При реализации метода рассматриваются лучи, проходящие через элементарные площади картинной плоскости (чаще пиксели). Приведённый луч может либо попадать на поверхность какого – либо объекта (в том числе и источника света), либо уходить в бесконечность. Пикселям, через которые проходят такие лучи, присваивают цвет заднего плана. Для тех, приведённых лучей, которые попали на поверхность, можно вычислить цвет пересечения с объектом (если поверхность непрозрачная), используя, например, модель Гуро или Фонга. Однако, чаще поступают по-другому.

Процессы, которые необходимы для трассировки (моделирование объектов, проецирование и определение видимых поверхностей), - это отдельные стадии конвейера обработки информации в графической системе, выполняемые в ином

порядке. При выполнении тонирования при трассировке задаётся последовательность пикселей, а не последовательность пикселей. При трассировке сначала определяют, освещена ли точка пересечения луча с поверхностью светом от какого – либо источника. Для этого вычисляются закрашивающие или зондирующие лучи, исходящие из данной поверхности в сторону каждого источника света. Если зондирующий луч попадает на какую – либо поверхность, то свет от соответствующего источника не достигает этой поверхности и она остаётся в тени. Поэтому вычислений по поводу освещения данной поверхности данным источником проводить не надо. Если все объекты непрозрачные и отражения от других поверхностей не рассматриваются, то получается сцена, сформированная по модели Фонга плюс тени.

Можно предположить наличие зеркального отражения. Тогда можно проследить путь зондирующего луча после отражения от промежуточных поверхностей до тех пор, пока он не уйдёт в бесконечность или не попадёт в источник.

Метод даёт особенно хорошие результаты при формировании сцен, в которых много отражающих и преломляющих поверхностей.

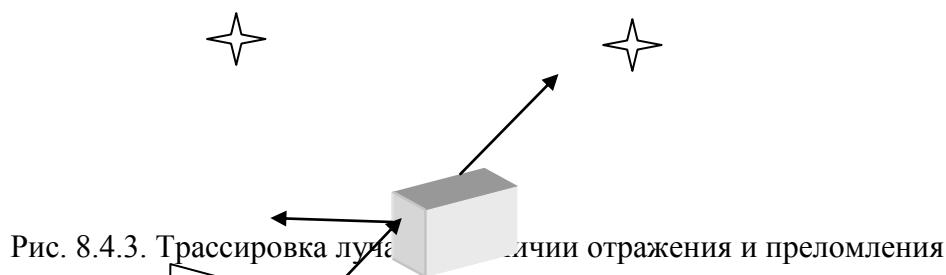


Рис. 8.4.3. Трассировка луча с учетом отражения и преломления

Прослеживая путь луча, который после столкновения с поверхностью частично отражается, частично диффузно рассеивается, а остальная энергия луча идёт на зеркальное отражение и преломление. Если источник света видим из точки пересечения, то сначала вычисляют вклад этого источника в освещённость рассматриваемой точки, используя модель отражения. Затем трассируемый луч разделяют на две составляющие: одна приводится к направлению идеального отражения, другая – к направлению идеального преломления. Эти две составляющие в дальнейшем будут анализироваться как и начальные приведённые лучи. При столкновении такого вторичного луча с поверхностью могут возникнуть новые вторичные лучи. Диффузное рассеяние света может учитываться в алгоритме трассировки, одна-

ко задача при этом невероятно усложняется, поэтому имеет смысл учитывать только зеркальное отражение.

Трассировку организуют как рекурсивную процедуру, которая сама себя вызывает, как только выясняется, что анализируемый луч отражается или преломляется. Значительная часть вычислений приходится на определение пересечений луча с объектами сцены, поэтому метод медленно работает в сценах с криволинейными объектами. Поэтому большинство систем, в которых используется метод, работает исключительно с плоскими или квадратичными поверхностями.

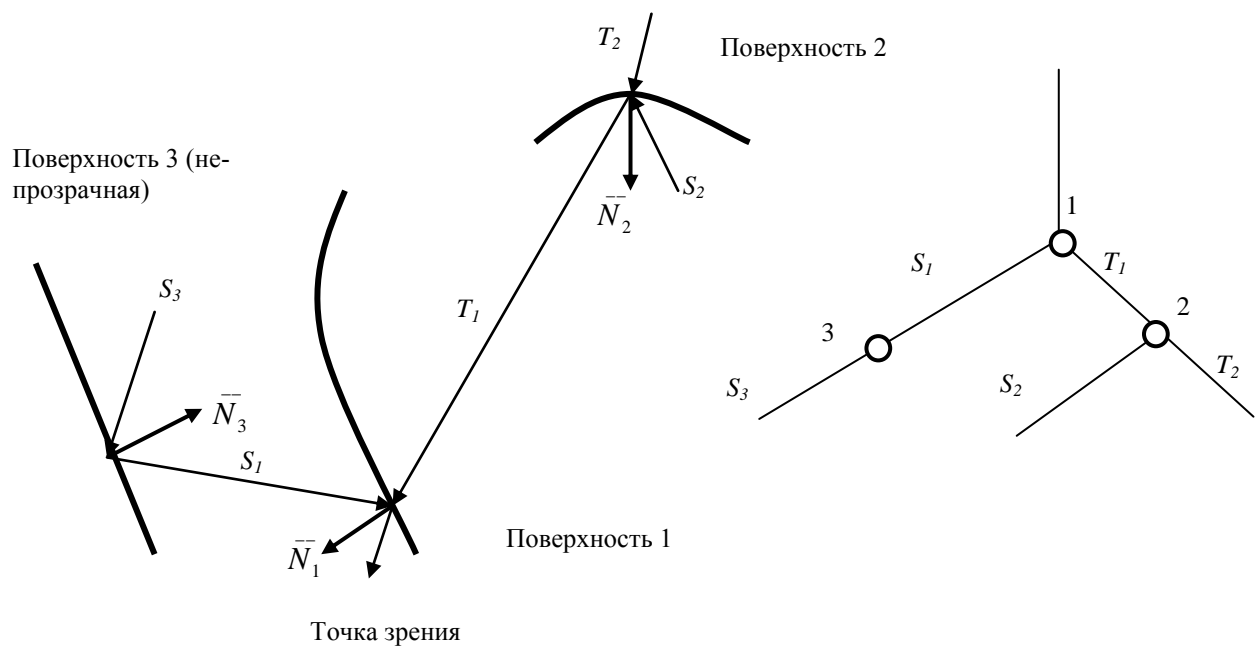


Рис 8.4.4. Дерево, построенное в результате трассировки одного луча в направлении наблюдателя.

На рис. 8.4.4 приведено дерево, построенное в результате трассировки одного луча в обратном направлении. Здесь  $S_i$  - световой луч, падающий на поверхность  $i$  под таким углом, что луч зеркально отражается и уходит от поверхности как часть выходящего луча.  $T_i$  представляет собой световой луч, падаю-



щий на поверхность  $i$  так, что он пропускается и покидает поверхность. Узел соответствует поверхности. После того, как дерево построено, в каждом из его концевых узлов вычисляются значения интенсивности, которые затем используются для вычисления интенсивностей родительских узлов до тех пор, пока не будет достигнут корневой узел дерева.

Расчет интенсивности освещения при использовании глобальной модели освещения ведется в соответствии со следующим выражением:

$$I = I_p k_p + k_d \sum_i I_{ui} (\hat{n} \hat{L}_{ui}) + k_z \sum_i I_{ui} (\hat{S} \hat{R}_i)^n + k_z I_z + k_{пр} I_{пр}$$

где  $k_p, k_d, k_z$  – коэффициенты рассеянного, диффузного и зеркального отражения,

$k_{пр}$  – коэффициент пропускания,

$I_p$  – интенсивность рассеянного света,

$I_{ui}$  – интенсивность  $i$ -го источника света,

$I_z$  – интенсивность зеркально отраженного от других поверхностей света, падающего в точку рассматриваемой поверхности и отраженного в направлении наблюдателя,

$I_{пр}$  – интенсивность света, падающего по направлению преломленного луча,

$L_{ui}$  – направление на  $i$ -ый источник света,

$S$  – вектор наблюдения,

$R_i$  – вектор отражения для луча, падающего от  $i$ -го источника,

$n$  – степень пространственного распределения для зеркального отражения.

Таким образом, в отличие от простой модели освещения, глобальная модель дополнительно учитывает зеркальное отражение от других поверхностей, попадающее в рассматриваемую точку, а также преломление, т.е. интенсивность, приносимую преломленным лучом. Кроме того, в расчетах надо учитывать ослабление пропущенного и зеркально отраженного света с расстоянием

между точками пересечения. В более сложных моделях производится учет зависимости диффузного и глобального зеркального отражения, а также зависимость коэффициента пропускания от свойств вещества и длины волны.

Если дисплей имеет разрешение  $M*N$ , то трассируется по меньшей мере  $(M+1)*(N+1)$  лучей (если отслеживать лучи, проходящие в углах пиксела, для устранения лестничного эффекта). Каждый луч необходимо проверить на пересечение с каждым объектом сцены. Процесс можно ускорить, если использовать трёхмерные прямоугольные оболочки. После проверки пересечения с оболочкой определяется пересечение с объектом. Затем определяются свойства поверхности для решения вопроса о том, надо ли расщеплять луч. Трассирование лучей пригодно для параллельной обработки, так как лучи могут обрабатываться независимо друг от друга.

Программа 3D MAX предоставляет возможность реализовывать трассировку выборочно, применительно только к тем объектам сцены, на которые нанесен трассируемый материал. Метод трассировки реализован в 3D MAX в двух видах: как трассируемый материал и как трассируемая карта текстуры. И материал, и карта текстуры реализуются одним и тем же алгоритмом и имеют общие параметры. Следует иметь в виду, что трассировка лучей не всегда правильно работает в окнах ортогографических проекций. Для визуализации трассируемого материала следует использовать окно перспективной проекции или окно камеры.

#### 8.4. Алгоритм трассировки лучей.

Основная идея этого метода заключается в том, что наблюдатель видит объект благодаря световым лучам, испускаемым некоторым источником, которые падают на объект. Свет дос-

тигает наблюдателя, если он отражается от поверхности, преломляется или проходит через нее. Алгоритм не учитывает специфику обрабатываемого объекта.

Используется подход, в котором отслеживаются (трассируются) лучи в обратном направлении, т.е. от наблюдателя к объекту. Алгоритм работает в **пространстве изображения**, наблюдатель находится в бесконечности на положительной полуоси  $Z$ . В более простом варианте перспективное преобразование не учитывается. Лучи, идущие от наблюдателя, параллельны в этом случае оси  $Z$ . Необходимо проследить траекторию луча для того, чтобы определить объекты сцены, с которыми этот луч пересекается, вычислить глубину пересечения с каждым объектом для каждого пикселя (лучей будет столько, сколько пикселей на экране). Из всех объектов, с которыми пересекается луч, видимым для данного пикселя будет тот, пересечение с которым имеет наибольшую глубину (максимальное значение координаты  $Z$ ). Данный пиксель можно закрасить цветом объекта с этой максимальной глубиной. Если наблюдатель не находится в бесконечности, алгоритм усложняется несущественно. Задача сводится к построению одноточечной центральной проекции. Центральным пунктом алгоритма является процедура определения пересечений луча с поверхностью объекта. В сцену можно включать любые объекты, для которых реализуется процедура построения пересечений: плоские многоугольники, многогранники, тела, ограниченные квадратичными или другими поверхностями. Эффективность данной процедуры оказывает самое большое влияние на эффективность всего алгоритма.

Алгоритм трассировки лучей можно записать следующим образом.

1. Подготовка исходных данных. Создание списка объектов со следующей информацией:

- тип объекта; характеристика ограничивающей поверхности; атрибуты объекта (цвет, интенсивность);
- параметры сферической оболочки (координаты ее центра и радиус);
- признак необходимости выполнения теста с прямоугольной оболочкой,
- параметры прямоугольной оболочки  $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max}$ .

2. Выполнение следующих действий для каждого трассируемого луча:

- выполнение теста со сферической оболочкой для каждого объекта сцены в исходной системе координат. Занесение объекта в список активных объектов при пересечении луча с оболочкой;

Для исключения поиска пересечений в алгоритме предлагается искать пересечение луча с объемлющей оболочкой объекта. Если луч не пересекает оболочку, то он не пересекает и сам объект. В качестве оболочек удобнее всего использовать сферу или прямоугольный параллелепипед. Использование сферы может оказаться неэффективным, так как объем описанной сферы может существенно превышать объем объекта. Однако тест со сферической оболочкой чрезвычайно прост: достаточно определить расстояние от центра сферы до луча. При использовании параметрического представления прямой, проходящей через точки  $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$  и  $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$  получим

$$\begin{aligned} P(t) &= P_1 + (P_2 - P_1)t, \quad \text{или:} \\ x &= x_1 + (x_2 - x_1)t = x_1 + at, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t = y_1 + bt, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t = z_1 + ct. \end{aligned}$$

Если центр сферы лежит в точке с координатами  $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ , то квадрат расстояния до прямой равен:

$$d^2 = (X_1 + at - X_0)^2 + (Y_1 + bt - Y_0)^2 + (Z_1 + ct - Z_0)^2.$$

Значение параметра  $t$ , при котором это расстояние минимально, находится из условия

$$\begin{aligned} \frac{dd^2(t)}{dt} &= 0, \\ 2a(X_1 - X_0 + at) + 2b(Y_1 - Y_0 + bt) + 2c(Z_1 - Z_0 + ct) &= 0, \\ t &= \frac{a(X_1 - X_0) + b(Y_1 - Y_0) + c(Z_1 - Z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Если  $d^2 > R^2$ , где  $R$  - радиус сферической оболочки, то луч не пересекает оболочку. Тест с прямоугольной оболочкой в трехмерном пространстве требует проверки пересечения луча как минимум с тремя бесконечными плоскостями, ограничивающими прямоугольную оболочку. Точки пересечения могут оказаться за пределами граней параллелепипеда, поэтому необходимо дополнительно проверить попадание точки пересечения внутрь параллелепипеда или за его пределы. Поэтому тест со сферической оболочкой работает быстрее. Упростить вычисление пересечений луча с объектом и осуществить сортировку по глубине можно путем совмещения луча с осью  $Z$ . Для этого используются перенос и повороты вокруг координатных осей. В ре-

зультате пересечение луча с оболочкой будет выполнено, если знаки максимальных и минимальных координат оболочки противоположны.

- закраска пикселя фоновым цветом при пустом списке активных объектов и переход к следующему лучу;

- проведение преобразования для совмещения луча с осью  $Z$ .

3. Выполнение следующих операций для каждого объекта из списка активных объектов:

- преобразование прямоугольной оболочки в новую систему координат и выполнение теста на пересечение луча с этой оболочкой (при наличии признака проведения теста);

Плоскость, проходящая через точки  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $P_j = (x_j, y_j, z_j)$  и  $P_k = (x_k, y_k, z_k)$ . Точки  $P_i, P_j, P_k$  не коллинеарные и удовлетворяют уравнению  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

Прямая, проходящая через точки  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  может быть представлена уравнением

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma},$$

где:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Тогда:

1. Если  $A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0$ , то прямая параллельна плоскости.

2. Если  $A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0$  и  $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0$ , то прямая лежит в плоскости. В остальных случаях имеется точка пересечения:

$$x_i = x_1 - t \cos \alpha,$$

$$y_i = y_1 - t \cos \beta,$$

$$z_i = z_1 - t \cos \gamma,$$

$$\text{где: } t = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma}.$$

После этого нужно определить попадание точки пересечения в параллелепипед.

Поверхность второго порядка в декартовой системе координат описывается уравнением

$$P(x, y, z) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + B_1 xy + B_2 yz + B_3 xz + C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0,$$

После выполнения преобразований для совмещения луча с осью Z возможные пересечения луча с поверхностью будут иметь место при  $x = y = 0$ . Поэтому координаты точек пересечения можно определить следующим образом:

$$A'_3 z^3 + C'_3 + D' = 0,$$

$$z = \frac{-C'_3 \pm \sqrt{C'^2_3 - 4A'_3 D'}}{2A'_3}.$$

Коэффициенты со штрихом означают коэффициенты общего уравнения поверхности после преобразования. Если подкоренное выражение в приведённом выше соотношении отрицательно, то луч не пересекает поверхности. Для нахождения точки пересечения в исходной системе координат необходимо выполнить обратное преобразование. Если после нахождения пересечения с бесконечной поверхностью требуется попадание точки внутрь ограничивающей поверхности, то эту проверку можно произвести на двухмерной проекции фигуры.

- переход к следующему объекту в отсутствие пересечения;
- преобразование объекта к новой системе координат и вычисление координат пересечения с лучом при наличии пересечения;
- занесение точки пересечения в список пересечений; изображение пикселя фоновым цветом в отсутствие пересечений;
- определение  $Z_{\max}$  для найденных точек пересечения;
- вычисление обратного преобразования;
- определение точки пересечения в исходной системе координат с использованием обратного преобразования;
- закраска пикселя с учетом атрибутов пересеченного объекта и модели освещенности.

Алгоритм упрощается, если не учитывается ориентация поверхности в пространстве и ее свойства. В этом случае не обязательно определять точку пересечения в исходной системе координат и выполнять преобразование.

Эффективность алгоритма можно повысить, если ввести кроме оболочек для каждого объекта оболочки для групп объектов и даже для всех объектов сцен. Если луч не пересекает оболочку всей сцены, то пиксель, соответствующий этому лучу, может быть сразу изображен фоновым цветом. Если луч пересекается с оболочкой сцены, то исследуются пересечения его с оболочками для каждой группы объектов. При пересечении луча с некоторой оболочкой алгоритм рекурсивно повторяется до тех пор, пока не будут рассмотрены все объекты. Другая модификация алгоритма, повышающая его эффективность, состоит в том, что точки пересечения не ищутся сразу для каждого объекта, с которым пересекается луч. Предварительно список объектов, с которым пересекается луч, упорядочивается по приоритету глубины. После этого определяются точки пересечения только с потенциально видимыми объектами (их число обычно намного меньше общего числа объектов в списке пересеченных лучом). Необходимость поиска пересечения луча не обязательно с самым приоритетным объектом объясняется тем, что точка пересечения конкретного луча с объектом будет не всегда видимой.

## **8.5 Учет фактуры поверхности и теней при создании реалистических изображений**

### **ФАКТУРА**

Под фактурой, или текстурой, в компьютерной графике понимается детализация строения поверхности. Как правило, рассматривают два вида детализации. В первом случае на гладкую поверхность объекта наносят заданный рисунок (узор). В этом случае поверхность остается гладкой. Во втором случае ставится задача создания неровностей на поверхности, т.е. создания шероховатой поверхности. Рассмотрим возможные подходы к решению этих двух задач.

Существующие способы моделирования текстуры можно подразделить на два основных класса: проективные текстуры и процедурные текстуры. В первом случае задается в некоторой (обычно двумерной) системе координат рисунок, подлежащий нанесению на трехмерную поверхность. Тогда для наложения заданного рисунка на поверхность необходимо найти функцию отображения или, другими словами, произвести преобразование координат. Например, пусть в прямоугольной системе координат  $(X, Y)$  задан простейший рисунок, представляющий собой клетку, т.е. совокупность горизонтальных и вертикальных отрезков, отстоящих друг от друга на некоторое расстояние.

Поверхность задана в другой системе координат  $(\theta, \varphi)$ . В качестве трехмерной поверхности рассмотрим участок сферической поверхности единичного радиуса. Угол  $\theta$  измеряется в плоскости  $XOZ$  от оси  $Z$  в направлении против часовой

стрелки (т.е. направлен к оси X), угол  $\varphi$  образуется координатной осью Y и радиус-вектором, соединяющим начало координат с произвольной точкой поверхности, он измеряется в направлении от оси Y по часовой стрелке. Для нанесения рисунка на поверхность необходимо найти функцию отображения одного пространства в другое, т.е.  $\theta=F(X,Y)$  и  $\varphi=G(X,Y)$  или  $X=V((\theta,\varphi))$  и  $Y=W(\theta,\varphi)$ . В первом случае для точек плоского рисунка находим соответствующие им координаты точек на поверхности, во втором случае для точек поверхности находим соответствующие им точки на плоскости и анализируем, принадлежит ли полученная точка рисунку или нет. Если принадлежит, то исходную точку поверхности закрашиваем, в противном случае – нет.

В простейшем случае можно считать, что функция отображения является линейной, т.е.  $\theta=AX+B$ ,  $\varphi=CY+D$ , где коэффициенты A, B, C, D подлежат определению. Для нахождения коэффициентов воспользуемся известными соотношениями между координатами угловых точек в двумерной и трехмерной системах координат. Получим:

$$X=0, Y=0 \text{ при } \theta=0, \quad \varphi=\pi/2$$

$$X=1, Y=0 \text{ при } \theta=\pi/2, \quad \varphi=\pi/2$$

$$X=0, Y=1 \text{ при } \theta=0, \quad \varphi=\pi/4$$

$$X=1, Y=1 \text{ при } \theta=\pi/2, \quad \varphi=\pi/4$$

Из приведенных соотношений получаем  $0=0+B$ ,  $B=0$ ;  $\pi/2=A$ ;  $\pi/2=0+D$ ,  $D=\pi/2$ ,  $\pi/4=C+\pi/2$ ,  $C=-\pi/4$ . В итоге можно записать  $\theta=\pi/2 \cdot X$ ,  $\varphi=-\pi/4 \cdot Y+\pi/2$ . Обратное преобразование будет иметь вид:  $X=\theta/(\pi/2)$ ,  $Y=(\pi/2-\varphi)/(\pi/4)$ .

Нанесение рисунка на поверхность объекта можно рассматривать как детализацию цветом. Одним из способов ее реализации может являться введение многоугольников детализации. Многоугольники детализации можно использовать, например, для выделения таких особенностей, как двери, окна, надписи. Многоугольники детализации поверхности лежат в одной плоскости с основными многоугольниками, но помечаются в структуре данных так, чтобы алгоритм удаления невидимых поверхностей мог присвоить им более высокие приоритеты, чем основным многоугольникам. Однако при выполнении тонкой и сложной детализации ее моделирование с помощью многоугольников становится затруднительным. Другой подход, предложенный Кэтмулом, Блинном, Ньюэллом, состоит в отображении оцифрованной фотографии на поверхность. Идея метода состоит в отображении массива узора на трехмерную поверхность, при этом значения из массива узора используются для масштабирования диффузной составляющей интенсивности света. Один пиксел на экране может покрывать несколько элементов узора. Для устранения лестничного эффекта следует учитывать все затрагивающие пиксел элементы. Для этого определяются четыре точки в массиве узора, которые отображаются в четыре вершины пиксела на экране. Точки в массиве узора соединяются, и образуется четырехугольник. Значения попадающих в него элементов взвешиваются с учетом доли каждого элемента, содержащегося в многоугольнике, и суммируются.

Проективным текстурам присущи определенные недостатки. Во-первых, для хранения используемых изображений требуется достаточно большой объем памяти. Во-вторых, они не обладают гибкостью, а, в-третьих, возможны большие сложности при подборе способа проектирования при нанесении рисунка на объекты сложной формы. На практике используют ограниченное количество вариантов проектирования: плоское (параллельное проектирование), цилиндрическое и сферическое.



Во втором случае необходимо найти функцию  $C(X,Y,Z)$ , определяющую для каждой точки поверхности цвет таким образом, чтобы он соответствовал цвету моделируемого материала (наносимого рисунка). Такие текстуры называют процедурными. Такой подход не требует больших затрат памяти и хорошо работает с поверхностями любой сложности. Но поскольку используемая функция зависит от большого количества параметров, то возникают сложности в подборе этой функции, с другой стороны, изменение этих параметров позволяет легко изменять свойства текстуры.

Моделирование неровностей на отображаемой в сцене поверхности также возможно несколькими способами. В первом случае можно оцифровать фотографию нерегулярной фактуры и отобразить ее на поверхность. Однако при этом неровности будут восприниматься как нарисованные на гладкой поверхности, т.е. изображение будет не полностью реалистичным. Это связано с тем, что в векторе нормали к реальной шероховатой поверхности, а следовательно, в направлении вектора отражения, есть небольшая случайная составляющая. Этот факт и лег в основу способа моделирования неровностей на отображаемой поверхности.

Пусть  $Q(X,Y)$  – уравнение поверхности, т.е. функция  $Q$  позволяет для каждой точки поверхности определить ее третью координату  $Z$ . В произвольной точке поверхности частные производные по направлениям  $X,Y$  лежат в плоскости, касательной к поверхности в этой точке. Нормаль в точке поверхности может определяться векторным произведением этих производных  $Q'_x, Q'_y$ :

$$N = Q'_x \otimes Q'_y \quad (8.6.1)$$

Для создания шероховатой поверхности можно создать новую поверхность путем внесения возмущения в направлении нормали в точках поверхности.

Пусть  $P(X,Y)$  – функция возмущения, тогда радиус-вектор точки на новой поверхности будет определяться из (8.6.2):

$$Q_n(X,Y) = Q(X,Y) + P(X,Y) N / |N| \quad (8.6.2)$$

Нормаль к новой возмущенной поверхности будет иметь вид:

$$N_n = Q'_{nx} \otimes Q'_{ny} \quad (8.6.3)$$

Частные производные  $Q'_{nx}, Q'_{ny}$  вычисляются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} Q'_{nx} &= Q'_x + P'_x(X,Y) N / |N| + P(X,Y) (N / |N|)'_x \\ Q'_{ny} &= Q'_y + P'_y(X,Y) N / |N| + P(X,Y) (N / |N|)'_y \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

Последними слагаемыми можно пренебречь, так как функция возмущения  $P(X,Y)$  - очень маленькая величина. Поэтому (8.6.4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} Q'_{nx} &= Q'_x + P'_x(X,Y) N / |N| \\ Q'_{ny} &= Q'_y + P'_y(X,Y) N / |N| \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

Теперь можно записать выражение для вычисления нормали к возмущенной поверхности:

$$\begin{aligned} N_n &= Q'_{nx} \otimes Q'_{ny} + P'_y(X,Y) (Q'_x \otimes N / |N|) + P'_x(X,Y) (N / |N| \otimes Q'_y) + \\ &+ P'_x(X,Y) P'_y(X,Y) (N \otimes N / |N|^2) \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Учитывая, что в (8.6.6) первое слагаемое представляет собой нормаль к исходной поверхности, а последнее слагаемое равно нулю как векторное произведение коллинеарных векторов, окончательно получим:

$$N_n = N + P'_y(X,Y) (Q'_x \otimes N / |N|) + P'_x(X,Y) (N / |N| \otimes Q'_y) \quad (8.6.7)$$

В (8.6.7) два последних слагаемых, приведенные к единичной длине, представляют собой возмущение нормали к поверхности и создают требуемый эффект в модели освещения. В качестве функции возмущения  $P$  можно выбирать любую функцию, имеющую частные производные. Например, для дерева можно использовать следующую функцию

$$Q(X,Y)=C_1+(C_2-C_1)f(\sqrt{x^2+y^2}),$$

где  $C_1, C_2$  – некоторые цвета, соответствующие светлым и темным кольцам структуры дерева;

$f(t)$  – некоторая неотрицательная периодическая функция, например  $a(1+\sin t)$ .

Вид функции был подобран, исходя из того, что дерево имеет симметричную цилиндрическую структуру, направленную, например, вдоль оси  $OZ$ . Однако использование приведенной функции позволит получить симметричное и слишком правильное изображение. На самом деле деревьев с такой структурой не существует, так как всегда присутствуют случайные искажения.

Для моделирования искажений вводится шумовая функция  $R(X,Y,Z)$ , которая должна удовлетворять следующим требованиям: 1) она должна быть непрерывной; 2) принимать значения из интервала  $[0,1]$ ; 3) вести себя аналогично равномерно распределенной случайной величине.

Одним из способов задания такой функции является задание случайных значений в узлах некоторой регулярной сетки (в точках  $i,j,k$ , принадлежащих множеству целых чисел) и последующей интерполяции на все остальные точки. Для отыскания значения функции в произвольной точке сначала надо определить параллелепипед, содержащий данную точку внутри себя, затем, используя значения функции в вершинах параллелепипеда и проводя интерполяцию, найти значений функции в исходной точке. Для использования целочисленной решетки может быть предложено следующее задание функции:

$$R(X,Y,Z)=\sum_{i=|x|}^{|x|+1}\sum_{j=|y|}^{|y|+1}\sum_{k=|z|}^{|z|+1}w(|x-i|)w(|y-j|)w(|z-k|)A_{ijk}$$

$W(t)$  – одномерная весовая функция, в простейшем случае  $w(t)=t, t \in [0,1]$ .

Использование приведенной трилинейной интерполяции дает не очень хорошие результаты, так как на границе параллелепипеда происходит разрыв первых производных, т.е. функция не является гладкой. Для достижения гладкости на функцию следует наложить условие  $W'(0)=W'(1)=0$ . Простейшим вариантом функции, удовлетворяющей этому условию, является многочлен Эрмита:  $W(t)=3t^2-2t^3, t \in [0,1]$ .

Если функция возмущения не описывается аналитически, ее можно задать двумерной таблицей цветов. Промежуточные значения вычисляются билинейной интерполяцией табличных величин, а производные вычисляются методом конечных разностей.

Эффект шероховатости зависит от масштаба изображаемого объекта. Если размер объекта увеличивается в два раза, то величина вектора нормали возрастает в четыре раза, а его возмущения – в два раза. Это приводит к тому, что увеличенное изображение объекта кажется более гладким. Масштаб фактуры на перспективном изображении не зависит от перемещения объекта в пространстве по направлению к наблюдателю или от него.

Одним из современных способов моделирования деталей поверхности является использование фрактальных поверхностей. Фрактальная поверхность состоит из случайно заданных полигональных или биполиномиальных поверхно-

стей. С помощью фракталов можно хорошо описывать рельефы местности, береговые линии, ветви деревьев, русла рек, хлопья снега.

Под фракталом понимается отображение двух- или трехмерной хаотической структуры, полученной в результате рекурсивного процесса генерации. При этом каждая часть фрактала также является фракталом и в результате рекурсивного просчета может быть воссоздана с любой необходимой степенью детализации.



Б.Мандельброт, заложивший математические основы теории фракталов, определял термин фрактал как разбивающий на части. Согласно математическому определению фрактал – любое геометрическое множество, в котором измерение Хаусдорфа-Бесиковича превосходит геометрическое измерение. Под геометрическим измерением множества (D) понимается размерность пространства, в котором оно изображается (в случае точки  $D=0$ , для линии  $D=1$ , для плоской фигуры  $D=2$ , для фигуры в трехмерном пространстве  $D=3$ ).

Измерение Хаусдорфа-Бесиковича (H), или фрактальное измерение, для множества точек вычисляется по формуле:

$$H = \log G / \log A,$$

где A – коэффициент увеличения множества точек;

G – показатель роста множества точек.

Например, для отрезка при увеличении его в два раза ( $A=2$ ) получим объект, который больше исходного также ровно в два раза  $G=2$ :  $H = \log 2 / \log 2 = 1 = D$ , т.е.  $H=D$  и отрезок не является фракталом. Для квадрата увеличение стороны в два раза увеличивает его площадь в четыре раза, т.е.  $H = \log 4 / \log 2 = 2$ ,  $D=2$ ,  $D=H$ . Если же рассмотреть геометрическую форму, получаемую рекурсивной заменой начального отрезка  на новую фигуру  (каждый из четырех новых отрезков имеет длину первоначального отрезка), то получим фрактал. Действительно, длина фигуры увеличилась в три раза, а размер контура увеличился в четыре раза, т.е.  $H = \log 4 / \log 3 = 1,26 > D$  ( $D=1$ ).

Для получения полигональной фрактальной поверхности исходный многоугольник рекурсивно подразбивают на фрагменты. Для этого случайным образом смещают центр и середины сторон многоугольника, причем исходный и получаемый многоугольники могут быть не плоскими.

Преимуществом фрактальных поверхностей является возможность получения любого уровня детализации путем многократного разбиения с произвольным коэффициентом вложенности. Объем вычислений можно регулировать, учитывая положение наблюдателя: при небольшом расстоянии поверхности от наблюдателя ее надо изображать с большей степенью детализации, при удалении наблюдателя поверхность можно изображать с меньшим уровнем подробностей.

## ТЕНИ

Тени следует учитывать в сцене только в том случае, если положение наблюдателя не совпадает с положением источника света, только в этом случае они будут видимы. Если же положение наблюдателя совпадает с положением источника, то теней не будет. С другой стороны, важно понимать, что положение теней не зависит от положения наблюдателя, поэтому тени достаточно создать (рассчитать) один раз. Наличие теней в сцене в значительной степени повышает реалистичность изображения, кроме того, тени играют существенную роль в моделировании различных процессов. Например, в строительстве учет теней позволит выбрать более удачный вариант застройки, поскольку заранее можно

будет определить участки улицы, строения, которые окажутся в тени и изменить еще на стадии проектирования проект застройки. В космической технике учет теней позволяет правильно рассчитать количество падающей солнечной энергии, что важно при проектировании систем жизнеобеспечения (выбор систем обогрева и кондиционирования воздуха).

Тень состоит из двух частей: полутени и полной тени. Полная тень – это центральная, темная, резко очерченная часть, полутень – окружающая ее более светлая часть. В машинной графике с целью упрощения расчетов обычно используются точечные источники света, создающие только полную тень. При наличии нескольких источников света можно считать, что в полной тени находятся те участки сцены, на которые не попадает свет ни от одного источника света, в полутени – участки, на которые попадает свет не от всех источников света. Распределенные источники света конечного размера создают как тень, так и полутень: в полной тени свет отсутствует, а полутень освещается частью распределенного источника. Для сокращения вычислительных затрат часто рассматривают только полную тень, образуемую точечным источником света.

При построении теней следует руководствоваться следующим фактом: поверхности, видимые как из положения наблюдателя, так и из точки расположения источника света, не лежат в тени; поверхности, видимые из точки расположения наблюдателя, но невидимые из точки расположения источника света, находятся в тени. Поскольку в алгоритмах удаления невидимых поверхностей определяются и изображаются поверхности, видимые наблюдателем, то те же самые алгоритмы можно использовать для определения поверхностей, видимых из точки расположения источника света, т.е. не лежащих в тени, соответственно, поверхности, не видимые из точки расположения источника, будут находиться в тени. Такой подход правомочен при использовании точечных источников, при наличии распределенных источников необходимо еще учитывать полутени.

Сложность выполняемых вычислений зависит от положения источника света. Проще всего определять положение теней при нахождении источника света в бесконечности, в этом случае используется ортогональное проецирование. Если источник расположен на конечном расстоянии, но вне поля зрения наблюдателя, то необходимо использовать перспективную проекцию. Наиболее трудный случай возникает при нахождении источника света в поле зрения наблюдателя: пространство сцены приходится делить на участки и определять тень для каждого участка.

При построении теней следует иметь в виду, что тени возникают в силу двух обстоятельств: 1) сам объект препятствует попаданию света на некоторые собственные грани; 2) объект препятствует попаданию света на другие объекты сцены. Первый вид теней называют собственными тенями, для их определения следует воспользоваться алгоритмом удаления нелицевых граней (например, первым этапом алгоритма Робертса). Второй вид теней называют проекционными тенями, для их построения надо найти проекции всех нелицевых граней на объекты сцены. Центр проекции в этом случае совпадает с положением источника. Точки пересечения проецируемой грани со всеми плоскостями других объектов сцены образуют многоугольники, которые отмечаются в качестве теневых. Для сокращения количества таких многоугольников можно проецировать не отдельные грани, а контур каждого объекта.

Учет теней и фактуры в наиболее полном виде возможен при построении сцены с использованием алгоритма трассировки лучей в сочетании с глобаль-

ной моделью освещения. Построение теней в сочетании с удалением невидимых поверхностей требует дополнительных усилий и использования дополнительных структур данных.

Например, алгоритм, использующий Z-буфер, следует для учета теней модифицировать следующим образом. 1) Сначала строится сцена для положения наблюдателя, совмещенного с положением источника света. Вычисленные значения глубины (координата Z) хранятся в дополнительном теневом Z-буфере, при этом значения интенсивности не учитываются. 2) Строится сцена для истинного положения наблюдателя. При обработке каждого многоугольника его глубина в каждом пикселе сравнивается с глубиной в Z-буфере наблюдателя. Если поверхность видима, то значения координат  $(X, Y, Z)$  из вида наблюдателя преобразуются в значения  $(X_{ii}, Y_{ii}, Z_{ii})$  на виде из источника. Для проверки видимости точки с глубиной  $Z_{ii}$  из положения источника оно сравнивается со значением теневого Z-буфера при  $X_{ii}, Y_{ii}$ . Если точка видима и для теневого Z-буфера, то она отображается в буфер кадра в точке  $(X, Y)$  без изменений. Если точка невидима для теневого Z-буфера, то она находится в тени и должна изображаться с учетом выбранной модели освещения с учетом тени, значение в Z-буфере наблюдателя в этом случае заменяется на  $Z_{ii}$ .

Учет теней можно произвести также и в алгоритме Вейлера-Азертонна удаления невидимых поверхностей. В этом случае сначала определяются освещенные, т.е. видимые из положения источника света многоугольники. Освещенные многоугольники отмечаются и преобразуются к исходной ориентации, где они связываются со своими прототипами в качестве многоугольников детализации поверхности (каждому многоугольнику сцены присваивается свой номер). В дальнейшем при разбиении многоугольника на части они будут сохранять номер исходного многоугольника. При этом каждый кусок освещенной грани связывается с соответствующим исходным многоугольником или любой его частью. На втором шаге работы алгоритма многоугольники обрабатываются для истинного положения наблюдателя. Если оказывается, что некоторая часть видимого многоугольника не освещается источником света, то интенсивность рассчитывается с учетом затенения.

При наличии нескольких источников необходимо создавать несколько наборов освещенных граней. Для исключения ложных теней сцену следует рассматривать только в пределах видимого или отсекающего объема, определенного положением источника. В противном случае область вне этого объема окажется затененной, и наблюдатель увидит ложные тени. Это ограничение требует также, чтобы источник не находился в пределах сцены, так как в этом случае не существует перспективного преобразования с центром в источнике, которое охватывало бы всю сцену.

Учет теней возможен также и в алгоритмах построчного сканирования удаления невидимых поверхностей. На первом этапе для каждого многоугольника сцены и каждого источника света определяются самозатененные многоугольники и проекционные тени. Полученные данные записываются в виде двоичной матрицы: строкам соответствуют многоугольники, отбрасывающие тень, столбцам – затеняемые многоугольники. Единица в матрице означает, что многоугольник может отбрасывать тень, ноль – не может. Единица, стоящая на главной диагонали, соответствует многоугольнику в собственной тени. Для сцены из  $N$  многоугольников возможны  $N(N-1)$  проекционных теней, поэтому актуальной является задача нахождения эффективного способа получения матрицы.

Для этого можно, например, провести преобразование, совмещающее вектор падающего света с осью Z, и использовать габаритные тесты.

На втором этапе работы алгоритма производится обработка сцены для истинного положения наблюдателя. При этом процесс сканирования также предполагает выполнение двух шагов. На первом шаге определяются видимые отрезки для рассматриваемого интервала. На втором шаге с помощью списка теневых многоугольников определяется, падает ли тень от многоугольника на отрезок видимого многоугольника. На этом этапе руководствуются следующими правилами: 1)если нет ни одного теневого многоугольника, то видимый отрезок изображается; 2)если для отрезка видимого многоугольника имеются теневые многоугольники, но они не пересекают и не покрывают данный интервал, то видимый отрезок изображается; 3)если интервал полностью покрывается одним или несколькими теневыми многоугольниками, то интенсивность изображаемого видимого отрезка определяется с учетом интенсивностей самого многоугольника и теневых многоугольников; 4)если один или несколько теневых многоугольников частично покрывают интервал, то он разбивается в местах пересечения с ребрами теневых многоугольников, затем алгоритм рекурсивно применяется к каждому из подынтервалов до тех пор, пока интервал не будет изображен.

В общем случае интенсивность видимого отрезка зависит от интенсивности теневого многоугольника (многоугольники являются прозрачными), в простейшем случае можно считать, что они являются непрозрачными, и тень будет абсолютно черной. Интенсивность тени в общем случае зависит от интенсивности источника и от расстояния между затененной гранью и гранью, отбрасывающей тень. Это определяется ограниченным размером источника и тем, что на затененную поверхность падает рассеянный свет. Для учета этого эффекта можно считать интенсивность тени пропорциональной интенсивности источника, при наложении нескольких теней складывать их интенсивности, в более сложном случае следует считать интенсивность тени пропорциональной интенсивности источника и расстоянию между поверхностью, на которую падает тень, и поверхностью, отбрасывающей тень.