



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Логика и теория алгоритмов

Домашнее Задание № 2

Студент: Нгуен Ань Тхы

Группа: ИУ7-И46Б

Москва.
2020

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

Вариант 19: $\neg (\neg(\neg B \vee C) \rightarrow (\neg A \vee C)) \equiv (A \& (B \& \neg C))$

Решение:

Имеем:

определение конъюнкции: $A \& B = \neg(A \rightarrow \neg B)$ (I)

определение дизъюнкции: $A \vee B = \neg A \rightarrow B$ (II)

$\begin{cases} \text{секвенция (3): } \vdash \neg\neg A \rightarrow A \\ \text{секвенция (4): } \vdash A \rightarrow \neg\neg A \end{cases} \Rightarrow \neg\neg A \equiv A$ (III)

$\begin{cases} \text{секвенция (6): } \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \\ \text{секвенция (7): } \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \end{cases} \Rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \equiv (A \rightarrow B)$ (IV)

Левая часть: $\neg (\neg(\neg B \vee C) \rightarrow (\neg A \vee C))$, используем (II) и (III) имеем:

$$\neg (\neg(\neg B \vee C) \rightarrow (\neg A \vee C)) \equiv \neg (\neg(\neg\neg B \rightarrow C) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow C)) \equiv \neg (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Правая часть: $(A \& (B \& \neg C))$, используем (I) и (III) имеем:

$$(A \& (B \& \neg C)) \equiv \neg(A \rightarrow \neg\neg(B \rightarrow \neg\neg C)) \equiv \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Следовательно, исходная формула имеет вид:

$$\neg (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \equiv \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C)), \text{ используем (IV) имеем:}$$

$$\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

Поскольку надо доказать эквивалентность двух формул, то нужно вывести правую часть из левой и левую из правой.

Выводим правую часть из левой:

$$\vdash (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

(1) $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ - гипотеза

(2) A - гипотеза

(3) B - гипотеза

(4) $A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C))$ - секвенция (8) при замене $A := A, B := C$

(5) $\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)$ - MP (2), (4)

(6) $(\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ - секвенция (6) при замене $A := (A \rightarrow C)$, $B := C$

(7) $(A \rightarrow C) \rightarrow C$ - MP (5), (6)

(8) $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow C$ R1, (1), (7)

(9) $(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg \neg(B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow C)$ - секвенция (9)

при замене $A := \neg(B \rightarrow C)$, $B := C$

(10) $(\neg \neg(B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow C$ - MP (8), (9)

(11) $((B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow C$ - R4 шаг (10)

(12) $B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C))$ – секвенция (8) при замене $A := B$, $B := C$

(13) $\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C)$ – MP (3), (12)

(14) $(B \rightarrow C) \rightarrow C$ – R6 шаг (13)

(15) C - MP (11), (14)

Итак $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$, $A, B \vdash C \vdash (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$

выводим левую часть из правой:

$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ - гипотеза

(2) $\neg(B \rightarrow C)$ - гипотеза

(3) $\neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$ - секвенция (5) при замене $A := B$, $B := C$

(4) $(\neg B \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg \neg B)$ - секвенция (7)

при замене $A := \neg B$, $B := B \rightarrow C$

(5) $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg \neg B$ - MP (3), (4)

(6) $\neg\neg B$ - МР (2), (5)

(7) $\neg\neg B \rightarrow B$ - секвенция (3) при замене $A := B$

(8) B - МР (6), (7)

(9) $(A \rightarrow C) \rightarrow R1$ для (1) и (8)

Итак $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), \neg(B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$