SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN – TRƯỜNG ĐH VINH
NĂM HỌC 2021 – 2022

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

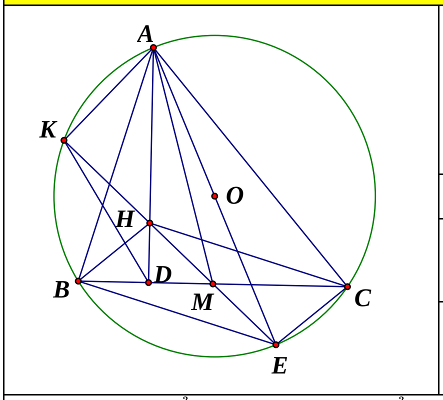
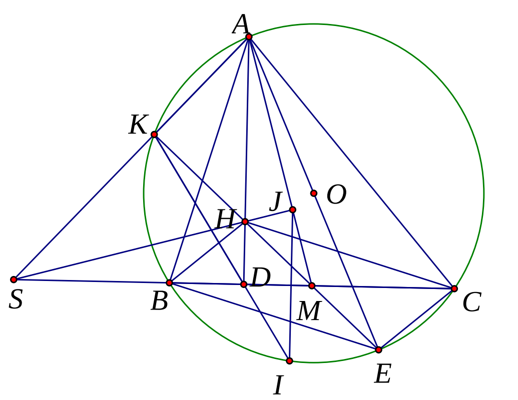
Đáp án gồm 04 trang

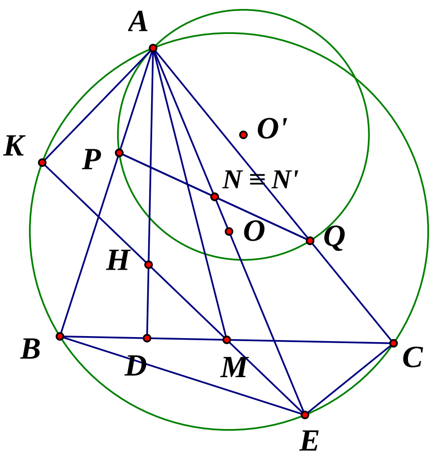
Câu		Nội Dung	Điểm
1	a) 3,0	a) Giải phương trình: $x^2+2\left(2+\sqrt{x-1}\right)=5x$.	
		Điều kiện $x\geq 1$. (*)	0,25
		Ta có $x^2+2\left(2+\sqrt{x-1}\right)=5x \Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)=x-1-2\sqrt{x-1}+1$	0,5
		$\Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{x-1}-1 \\ x-2=1-\sqrt{x-1} \end{array}\right.$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-1}=x-1 & (a) \\ \sqrt{x-1}=3-x & (b) \end{array}\right.$	0,25
		$(a)\Leftrightarrow x-1=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện (*))	0,5
		$(b)\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ x-1=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện (*)) Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;\ 2\}$.	0,5
	b) 3,0	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+y^2=5+2xy+2x-2y \\ 2x^2+y^2=10+2x-3y \end{cases}$.	
		$\begin{cases} 3x^2+y^2=5+2xy+2x-2y \\ 2x^2+y^2=10+2x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+2y^2=10+4xy+4x-4y & (1) \\ 2x^2+y^2=10+2x-3y & (2) \end{cases}$	0,5
		Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được $4x^2+y^2=4xy+2x-y$	0,5
		$\Leftrightarrow (2x-y)^2=2x-y$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=2x-1 \end{array}\right.$	0,25
		Trường hợp 1. $y=2x$ thế vào phương trình (2) ta có $2x^2+4x^2=10+2x-6x \Leftrightarrow 6x^2+4x-10=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{5}{3}$.	0,25
		Với $x=1$ suy ra $y=2$. Với $x=-\dfrac{5}{3}$ suy ra $y=-\dfrac{10}{3}$.	0,25
		Trường hợp 2. $y=2x-1$ thế vào phương trình (2) ta có $2x^2+(2x-1)^2=10+2x-3(2x-1) \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.	0,25
		Với $x=\sqrt{2}$ suy ra $y=2\sqrt{2}-1$. Với $x=-\sqrt{2}$ suy ra $y=-2\sqrt{2}-1$. Vậy hệ có các nghiệm $(x;y)$ là: $(1;2)$, $\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$, $\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}-1\right)$, $\left(-\sqrt{2};-2\sqrt{2}-1\right)$.	0,5

<table>
<tr><td rowspan="13">2</td><td rowspan="6">a)

1,5</td><td colspan="2">Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993.3^y + 2021$.</td></tr>
<tr><td>+) Nếu $y \ge 2 \Rightarrow 1993.3^y + 2021 = 1993.3^y + 2016 + 5 \equiv 5 \pmod 9$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow x^3 \equiv 5 \pmod 9$ điều này mâu thuẫn vì $\forall x \in \mathbb{N}$ thì $x^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>+) Nếu $y = 1 \Rightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>+) Nếu $y = 0 \Rightarrow x^3 = 4014 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4014} \notin \mathbb{N}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy $(x; y) = (20; 1)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="7">b)

1,5</td><td colspan="2">Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.</td></tr>
<tr><td>Giả sử $\dfrac{n-23}{n+89} = \left(\dfrac{q}{p}\right)^2$ trong đó $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$ và $(p, q) = 1$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Khi đó: $\begin{cases} n-23 = kq^2 \\ n+89 = kp^2 \end{cases} \Rightarrow k(p-q)(p+q) = 112 = 2^4.7.1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$. (1)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Trường hợp 1: Trong hai số p, q có 1 số chẵn và một số lẻ $\Rightarrow p+q, p-q$ đều là số lẻ.
Từ (1) suy ra $\begin{cases} p-q = 1 \\ p+q = 7 \\ k = 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ q = 3 \\ k = 16 \end{cases} \Rightarrow n = 167$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Trường hợp 2: Hai số p, q là hai số lẻ . Đặt $p = 2a-1, q = 2b-1 \left(a, b \in \mathbb{N}^*, a > b\right)$.
(1) trở thành $k(a+b-1)(a-b) = 28 = 2^2.7.1$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vì $a-b$ và $a+b-1$ khác tính chẵn lẻ đồng thời $a-b < a+b-1$ nên ta có bảng:
<table>
<tr><td>$a-b$</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$a+b-1$</td><td>2</td><td>4</td><td>14</td><td>28</td><td>7</td><td>7</td></tr>
<tr><td>k</td><td>14</td><td>7</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>n</td><td>37</td><td>86</td><td>361</td><td>752</td><td>73</td><td>32</td></tr>
</table></td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy $n \in \{32; 37; 73; 86; 167; 361; 752\}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="7">3</td><td rowspan="7">2,0</td><td colspan="2">Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \le 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)$.</td></tr>
<tr><td>Ta có $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2(x+y) \ge \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{2(x+y)} \ge \sqrt{x} + \sqrt{y}, \forall x, y \ge 0$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Từ đó ta có: $\sqrt{a+b} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a+b}} = \sqrt{2\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a+2b} + \dfrac{ab}{a+b}\right)} \ge \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a^2+b^2}{2a+2b} = \dfrac{ab}{a+b} \Leftrightarrow a = b$.
Tương tự : $\sqrt{b+c} \ge \sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\dfrac{bc}{b+c}}$ và $\sqrt{c+a} \ge \sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{2c+2a}} + \sqrt{\dfrac{ca}{c+a}}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Do đó $P \ge \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}} + \sqrt{\dfrac{bc}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{ca}{c+a}}$. Đặt $x = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}; y = \sqrt{\dfrac{bc}{b+c}}; z = \sqrt{\dfrac{ca}{c+a}}$.
Khi đó $x > 0, y > 0, z > 0$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :
$\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}\right)(x+y+z)^2 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2y^2z^2}}.\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2 = 27$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Suy ra: $\left(\dfrac{a+b}{ab} + \dfrac{b+c}{bc} + \dfrac{c+a}{ca}\right)\left(\sqrt{\dfrac{ab}{a+b}} + \sqrt{\dfrac{bc}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{ca}{c+a}}\right)^2 \ge 27$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

		$\Rightarrow P^2 \ge \left(\sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{bc}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{ca}{c+a}}\right)^2 \ge \dfrac{27}{2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}=\dfrac{27abc}{2(ab+bc+ca)}$.	0,25
		Từ giả thiết ta có $ab+bc+ca\le 3abc \Leftrightarrow \dfrac{abc}{ab+bc+ca}\ge\dfrac{1}{3}$.	0,25
		Suy ra $P^2\ge\dfrac{9}{2}\Rightarrow P\ge\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} ab+bc+ca=3abc \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$. Vậy $\min P=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $a=b=c=1$.	0,25
4		Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). a) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD=HK.HM$. b) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm. c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng AN luôn đi qua một điểm cố định.	
	a) **3,0**		
		a) Ta có $ACE=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EC\perp AC$. Mà H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow BH\perp AC$. Từ đó suy ra $EC\,//\,BH$.	0,5
		Tương tự $HC\,//\,BE$	0,5
		Xét tứ giác $BHCE$ có $EC\,//\,BH$ và $HC\,//\,BE$ nên tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.	0,5
		Mà M là trung điểm của BC nên ba điểm H, M, E thẳng hàng.	0,25
		Lại có ba điểm M, K, H thẳng hàng. Từ đó suy ra ba điểm K,H,E thẳng hàng.	0,25
		Ta có $AKE=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AKM=90^\circ$.	0,25
		Xét ΔAKH và ΔMDH có: $AKM=MDH\ (=90^\circ)$; $KHA=DHM$ (hai góc đối đỉnh).	0,25
		$\Rightarrow \Delta AKH \backsim \Delta MDH\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{HA}{HM}=\dfrac{HK}{HD}\Rightarrow HA.HD=HK.HM$.	0,5
	b) **2,5**		
		Kéo dài AK cắt đường thẳng BC tại S, ΔSAM có hai đường cao AD và MK cắt nhau tại H $\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác SAM.	0,25
		Xét tam giác ΔHDM và ΔSDA có $ADS=HDM=90^\circ$ và $DMH=DAS$ (cùng phụ với ASM).	0,25
		$\Rightarrow \Delta HDM \backsim \Delta SDA\ (g.g)$.	0,25
		$\Rightarrow \dfrac{HD}{DM}=\dfrac{DS}{AD}$. (1)	0,25
		Tương tự H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow \Delta BDH \backsim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BD}{HD}=\dfrac{AD}{CD}$. (2)	0,25

		Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{HD}{DM}.\dfrac{BD}{HD}=\dfrac{DS}{AD}.\dfrac{AD}{CD}\Rightarrow \dfrac{BD}{DM}=\dfrac{DS}{CD}\Rightarrow BD.CD=DM.DS$ (3)	0,25
		Mà $\Delta BDK \backsim \Delta IDC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{ID}=\dfrac{DK}{DC}\Rightarrow BD.CD=DI.DK$ (4)	0,25
		Từ (3) và (4) $\Rightarrow DI.DK=DM.DS$ nên $SKMI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow SMI=SKI$. Mà $AKDM$ là tứ giác nội tiếp (do $AKM=ADM=90°$) $\Rightarrow SKI=DMA$. Từ đó suy ra $SMI=DMA$.	0,25
		Xét ΔMIJ có $SMI=DMA$ và $IJ\perp BC \Rightarrow BC$ là đường trung trực của IJ.	0,25
		$\Rightarrow SJM=SIM=90°$ (vì $SKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $SIM=180°-SKM$ $=180°-90°=90°$) $\Rightarrow SJ\perp AM$. Mà H là trực tâm $\Delta SAM \Rightarrow SH\perp AM$. Từ đó suy ra ba điểm S, H, J thẳng hàng. Vậy các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.	0,25
	c)	 Gọi N' là giao điểm của PQ và AE. Xét $\Delta AQN'$ và ΔBEM có: $QAN'=EBM$; $AQN'=KAP=BEM$	0,25
		$\Rightarrow \Delta AQN' \backsim \Delta BEM\ (g.g)\Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'}=\dfrac{BM}{EM}$ (5)	0,25
		Do $QAN'=EBM$; $AQN'=KAP=BEM$ nên theo tính chất góc ngoài của $\Delta AQN'$ và ΔBEM ta có $EMC=PN'A$.	0,25
		Mà $PAN'=ECM$ nên $\Delta ECM \backsim \Delta PAN'\ (g.g)$	0,25
	1,5	$\Rightarrow \dfrac{CM}{EM}=\dfrac{AN'}{PN'}$. (6)	0,25
		Từ (5) và (6) và kết hợp $BM=CM \Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'}=\dfrac{AN'}{PN'}\Rightarrow QN'=PN'\Rightarrow N\equiv N'$. Vậy AN luôn đi qua một điểm cố định O.	0,25
5		Cho 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.	
		Ta có $2022=2.3.337$ và $2, 3, 337$ là các số nguyên tố.	0,25
		Trong 676 số nguyên tố khác nhau có ít nhất 673 số khác các số $2, 3, 337$.	0,5
	2,0	Một số nguyên tố (khác 3) khi chia 3 dư 1 hoặc dư 2. Trong 673 số nói trên, theo nguyên lý Dirichlet thì có ít nhất 337 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Chọn 337 số này.	0,5
		Trong 337 số này theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 số khi chia cho 337 có cùng số dư (*vì một số nguyên tố khi chia cho* 337 *thì có số dư từ* 1 *đến* 336).	0,25
		Chọn hai số này, dễ thấy hiệu của chúng chia hết cho 2.	0,25
		Vậy nên hiệu của hai số đã chọn chia hết cho 2022.	0,25
		TỔNG	**20,0**