

(Đề gồm có 01 trang)

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + 2(2 + \sqrt{x-1}) = 5x$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 + 2xy + 2x - 2y \\ 2x^2 + y^2 = 10 + 2x - 3y \end{cases}$$
.

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993.3^y + 2021$.

b) Tìm số nguyên dương n để $\frac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Câu 3 (2,0 điểm).

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \right).$$

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O . Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại K , đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại E (E khác A).

a) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.

b) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J . Chứng minh rằng các đường thẳng AK , BC và HJ cùng đi qua một điểm.

c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại P , Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

..... **HẾT**

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh: