

Câu 1. (1.5 điểm) Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối đồng thời như sau:


$$P(X = 0, Y = 0) = 0.1, \quad P(X = 0, Y = 1) = 0.3, \quad P(X = 0, Y = 2) = 0.2,$$

$$P(X = 1, Y = 0) = 0.1, \quad P(X = 1, Y = 1) = 0.2, \quad P(X = 1, Y = 2) = 0.1.$$

a) Hỏi X, Y có độc lập nhau không? Vì sao?

b) Giả sử $Y > 0$, tính xác suất $X > 0$.

c) Tính $P(Y > X)$.

 **Đáp án tham khảo:**

a)

X	0	1
P	0,6	0,4

Y	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

Vì $P(X = 0, Y = 0) = 0,1 \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12$ nên X, Y không độc lập nhau.

$$b) P(X > 0 | Y > 0) = \frac{P(X > 0, Y > 0)}{P(Y > 0)} = \frac{0,2 + 0,1}{0,3 + 0,2 + 0,2 + 0,1} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375$$


$$c) P(Y > X) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 2) \\ = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6$$

Câu 2. (2 điểm) Cho 2 biến ngẫu nhiên X, Y có hàm mật độ đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} 6xy & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 - 2x, \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \text{ khác} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ thành phần của X .

b) Tính $P(Y < 0.5 | X < 0.5)$.

 **Đáp án tham khảo:**


$$a) f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{2-2x} 6xy dy = 3x(2-2x)^2 & \forall x \in [0, 1] \\ 0 & \forall x \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$b) P(Y < 0.5 | X < 0.5) = \frac{P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)}{P(X < 0.5)}$$

$$= \frac{\int_0^{0.5} \int_0^{0.5} 6xy \, dy \, dx}{\int_0^{0.5} 3x(2-2x)^2 \, dx} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{11}{16}} = \frac{3}{22} = 0,136$$

Câu 3. (2.5 điểm) Sau nhiều phàn nàn về khối lượng ngũ cốc trong hộp ít hơn 16 ounces, công ty sản xuất ngũ cốc Captain Crisp quyết định tiến hành kiểm tra. Họ chọn ngẫu nhiên một mẫu gồm 400 hộp và thấy có 94 hộp có lượng ngũ cốc ít hơn 16 ounce.

- Xây dựng khoảng tin cậy với độ tin cậy 95% cho tỷ lệ hộp ngũ cốc nhẹ hơn 16 ounce (xét trên toàn bộ hộp ngũ cốc do công ty đó sản xuất).
- Với mức ý nghĩa 0.1, có thể kết luận rằng tỷ lệ hộp ngũ cốc nhẹ hơn 16 ounce của công ty đó có trên 20% không?

 **Đáp án tham khảo:**

Gọi p là tỷ lệ hộp ngũ cốc nhẹ hơn 16 ounce

$$n = 400, \quad k = 94, \quad f = \frac{k}{n} = 0.235, \quad 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$a) \phi\left(\frac{z_\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975 \xrightarrow{\text{tra bảng A4}} \frac{z_\alpha}{2} = 1.96$$

$$\varepsilon = \frac{z_\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.235(1-0.235)}{400}} = 0.0416$$

Khoảng tin cậy cho p là: $[0.193; 0.277]$ hoặc 0.235 ± 0.042 .

$$b) H_0: p = 0.2, \quad H_1: p > 0.2, \quad \alpha = 0.1$$


$$z = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \cdot \sqrt{n} = \frac{0.235 - 0.2}{\sqrt{0.2(1-0.2)}} \cdot \sqrt{400} = 1.75$$

$$\phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.9 \xrightarrow{\text{tra bảng A4}} z_\alpha = 1.27$$

Vì $z > z_\alpha \Rightarrow$ bác bỏ H_0 , chấp nhận H_1

Vậy có thể kết luận rằng tỷ lệ hộp ngũ cốc nhẹ hơn 16 ounce của công ty đó có trên 20%.

Câu 4. (1.5 điểm) Các nhà nghiên cứu lo lắng có quá nhiều chlorine trong nước uống. Họ thu thập 25 mẫu nước uống để đo lượng chlorine. Lượng chlorine trung bình của các mẫu là 4.2mg/l với độ lệch chuẩn có hiệu chỉnh của mẫu là 0.6 mg/l. Cục quản lý Thực phẩm và Dược phẩm Hoa Kỳ (FDA) khuyến nghị rằng lượng chlorine trung bình không nên vượt quá 4 mg/l. Các nhà nghiên cứu muốn biết rằng lượng chlorine trung bình trong nước uống có vượt quá giới hạn do FDA đề nghị không. Giả sử lượng chlorine trong nước uống có phân phối chuẩn. Hãy thực hiện kiểm định thích hợp với mức ý nghĩa 0.05.

 **Đáp án tham khảo:**

Gọi μ là lượng chlorine trung bình trong nước uống

$$H_0: \mu = 4, \quad H_1: \mu > 4$$

$$n = 25, \quad s = 0.6, \quad \bar{x} = 4.2, \quad \alpha = 0.05$$


$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{4,2 - 4}{0,6} \cdot \sqrt{25} = \frac{5}{3} = 1,667$$

$$t_{(n-1;\alpha)} = t_{(24;0.05)} \xrightarrow{\text{tra bảng A5}} t_\alpha = 1,711$$

Vì $t < t_\alpha \Rightarrow$ bác bỏ H_1 , chấp nhận H_0

Lượng chlorine trung bình trong nước uống không vượt giới hạn.

Câu 5. (1.5 điểm) Tỷ lệ khách hàng phản hồi tin nhắn của một công ty là 20%. Trong tuần vừa qua, công ty đó gửi tin nhắn cho 400 khách hàng. Hỏi xác suất có hơn 50 khách hàng trong số khách hàng đó phản hồi tin nhắn?

 **Đáp án tham khảo:**

Gọi X là số khách hàng phản hồi tin nhắn trong 400 khách.

Ta có: $X \sim B(n, p)$, $n = 400$, $p = 0.2$

Xấp xỉ về phân phối chuẩn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = np = 80$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 8$


Xác suất cần tính:

$$\begin{aligned} P(50 < X \leq 400) &\approx P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{50.5 - 80}{8}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq -3,6875) = 1 - \phi(-3,6875) = 0,99 \end{aligned}$$

Câu 6. (1 điểm) Sau đây là dữ liệu của hai biến ngẫu nhiên X và Y:

X	100	230	320	500	550	1000	1300	1500	2000	2100	3200	3800
Y	11	34	25	35	40	45	55	65	80	75	125	115

- Tính hệ số tương quan và nhận xét về tính tuyến tính của X và Y (mạnh hay yếu? nghịch biến hay đồng biến?)
- Viết phương trình hồi qui tuyến tính của Y theo X. Dự đoán giá trị của Y khi X = 5000.

 **Đáp án tham khảo:**

a) Hệ số tương quan mẫu: $r = 0,9756 \rightarrow$ X, Y tương quan mạnh và đồng biến.

b) Phương trình hồi qui tuyến tính của Y theo X:

$$Y = a + bX = 19,3414 + 0,02849X$$

Khi X = 5000, thì Y = 161,78