6. Dạng song tuyến tính - Dạng toàn phương

6.1 Dạng song tuyến tính

Định nghĩa 6.1.1 Cho X, Y là hai tập hợp. Một ánh xạ f đi từ tập X đến tập Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với duy nhất một phần tử $f(x) \in Y$.

Kí hiệu: $X \xrightarrow{f} Y$ hoặc

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Ta gọi $f(x)$ là ảnh của x.

Ví dụ 6.1.2 Quy tắc

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2) \end{aligned}$$

là một ánh xạ.

Định nghĩa 6.1.3 (Ánh xạ tuyến tính) Cho U, V là hai $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Một ánh xạ $f : U \to V$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau: với mọi $a, b \in U$ và $k \in \mathbb{K}$ ta có

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(ii) $f(ka) = kf(a)$.

Ví dụ 6.1.4 Chứng minh quy tắc sau

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3) \end{aligned}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Giải. Với mọi $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}$, ta có

- $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3$ là duy nhất. Do đó f là một ánh xạ.
- $$\begin{aligned} f(x+y) =& ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), x_3 + y_3) \\ =& ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_3) + (y_1 + y_3), x_3 + y_3) \\ =& (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3) + (y_1 + y_2, y_1 + y_3, y_3) \\ =& f(x) + f(y) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(kx) =& (kx_1 + kx_2, kx_1 + kx_3, kx_3) \\ =& k(x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3) \\ =& kf(x) \end{aligned}$$

Vậy f là một ánh xạ tuyến tính. □

Ví dụ 6.1.5 Chứng minh ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: với $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, cho

$$f(x) = (x_1 + x_2 + 1, x_2)$$

không là một ánh xạ tuyến tính.

Giải. Ta chỉ cần chứng minh f không thỏa một điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính. Xét điều kiện (i) của Định nghĩa 6.1.3. Lấy $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, khi đó

$$f(x+y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + 1, x_2 + y_2).$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= (x_1 + x_2 + 1, x_2) + (y_1 + y_2 + 1, y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + 2, x_2 + y_2) \neq f(x+y). \end{aligned}$$

Như vậy f không là một ánh xạ tuyến tính. □

Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Đặt tập hợp

$$V \times V = \{(x, y) \mid x, y \in V\}.$$

Định nghĩa 6.1.6 Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một dạng song tuyến tính f trên V là một ánh xạ $f: V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa các điều kiện sau đây: với mọi $x, y, z \in V$, và $a \in \mathbb{R}$, ta có

(i) $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$

(ii) $f(ax,y) = af(x,y)$

(iii) $f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z)$

(iv) $f(x,ay) = af(x,y)$

Nếu f là một dạng song tuyến tính và $f(x,y) = f(y,x)$ với mọi $x,y \in V$ thì ta nói f là dạng song tuyến tính đối xứng.

Ví dụ 6.1.7 Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định như sau: với mọi $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Khi đó f là một dạng song tuyến tính đối xứng.

Cho V là không gian vectơ n chiều trên $\mathbb{R}$ và $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V. Giả sử $f: V \times V \to \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính trên V. Lấy $x, y \in V$, ta đặt tọa độ của x và y đối với cơ sở B lần lượt là $(x)_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n); (y)_B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tức là $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$; và $y = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$.

Khi đó

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\Big(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\Big) = \sum_{i=1}^n x_if\Big(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\Big) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_jf(e_i,e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_jf(e_i,e_j) \end{aligned}$$

ta đặt $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Ma trận $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ gọi là ma trận của dạng song tuyến tính f trong cơ sở B hay ma trận liên kết với dạng song tuyến tính f.

Ta chứng minh được rằng f là một dạng song tuyến tính đối xứng khi và chỉ khi

$$f(e_i,e_j) = f(e_j,e_i) \text{ hay } a_{ij} = a_{ji}$$

hay tương đương với A là ma trận đối xứng.

Biểu thức của dạng song tuyến tính có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$f(x,y) = [x_1\ x_2 \cdots x_n]A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Hay $f(x,y) = [x]_B^T A [y]_B$.

Ví dụ 6.1.8 Cho f là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định như sau: với $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, đặt

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Ma trận đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Định lý 6.1.9 Hạng của các ma trận của dạng song tuyến tính đối với các cơ sở khác nhau luôn bằng nhau.

Định nghĩa 6.1.10 Hạng của dạng song tuyến tính f là hạng của ma trận của nó đối với một sơ sở nào đó và kí hiệu là $\operatorname{rank} f$.

Ví dụ 6.1.11 Cho dạng sọng tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

với $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Biến đổi ma trận A về dạng bậc thang như sau:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó $\operatorname{rank} f = 2$.

Định nghĩa 6.1.12 Dạng song tuyến tính f trên một không gian vectơ n chiều V được gọi là không suy biến (tương ứng, suy biến) nếu $\operatorname{rank} f = n$ (tương ứng, $\operatorname{rank} f < n$).

Ví dụ 6.1.13 Dạng song tuyến tính trong Ví dụ 6.1.11 là suy biến vì $\operatorname{rank} f < 3$.

6.2 Dạng toàn phương

Định nghĩa 6.2.1 Cho $f: V \times V \to \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính đối xứng. Khi đó ánh xạ $q: V \to \mathbb{R}$ xác định bởi $q(x) = f(x,x) \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in V$ được gọi là dạng toàn phương xác định bởi dạng song tuyến tính f.

Ví dụ 6.2.2 Cho $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ và $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó f là dạng song tuyến tính

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Dạng toàn phương của f là $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2.$$

Nếu cho một dạng song tuyến tính đối xứng thì ta có duy nhất một dạng toàn phương tương ứng.

Mệnh đề 6.2.3 Nếu q là dạng toàn phương thì dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng của q là duy nhất xác định bởi

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)].$$

Chứng minh. Giả sử f là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng của q. Với mọi $x, y \in V$, ta có

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) &= f(x, x+y) + f(y, x+y) \\ &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) \\ &= f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y) \end{aligned}$$

Do đó $f(x,y) = \frac{1}{2}[f(x+y, x+y) - f(x,x) - f(y,y)]$ và như thế

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]. \tag{6.2}$$

Từ đó f là xác định duy nhất. □

Ví dụ 6.2.4 Cho dạng toàn phương $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_3.$$

Khi đó dạng song tuyến tính tương ứng của dạng toàn phương q là

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)] \\ &= \frac{1}{2}\Big[(x_1+y_1)^2-2(x_2+y_2)^2+2(x_1+y_1)(x_3+y_3)-(x_1^2-2x_2^2+2x_1x_3) \\ &\qquad -(y_1^2-2y_2^2+2y_1y_3)\Big] \\ &= x_1y_1-2x_2y_2+x_1y_3+x_3y_1. \end{aligned}$$

Cho q là một dạng toàn phương có dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng là f. Khi đó ma trận của f đối với cơ sở B được gọi là ma trận của q đối với cơ sở B. Ta có công thức sau

$$q(x) = [x]_B^T A [x]_B.$$

Ví dụ 6.2.5 Cho dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ như sau

$$q(x) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Khi đó ma trận của q đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 6.2.6 Hạng của dạng toàn phương q là hạng của ma trận của q đối với một cơ sở nào đó, kí hiệu $\mathrm{rank} q$.

Nếu f là dạng song tuyến tính đối xứng tương ứng của dạng toàn phương q thì ta có $0 \le \mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(q) \le n$. Nếu $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(q) = n$ thì ta nói f và q không suy biến. Ngược lại, ta nói chúng suy biến.

6.3 Dạng chính tắc của dạng toàn phương

Định nghĩa 6.3.1 Cho q là một dạng toàn phương trên V. Nếu có một cơ sở B sao cho với mọi $x \in V$ biểu thức của q có dạng

$$q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

trong đó $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x)_B$ thì ta nói q có dạng chính tắc và cơ sở B gọi là cơ sở chính tắc tương ứng với q.

Định lý 6.3.2 (Định lý Lagrange) Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ và q là dạng toàn phương trên V. Khi đó luôn có một cơ sở E là chính tắc tương ứng với q. (tức là q có dạng chính tắc đối với cơ sở E).

Chứng minh. Gọi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở bất kì của V. Với mọi $x \in V$, ta có $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Khi đó biểu thức của q đối với cơ sở B có dạng là

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j. \tag{6.3}$$

Ta sẽ lần lượt đổi cơ sở sao cho q có dạng chính tắc. Vì mỗi phép biến đổi cơ sở là một phép biến đổi của các tọa độ của các vectơ và ngược lại, nên ta có thể viết các công thức biến đổi tọa độ thay cho công thức đổi cơ sở.

Ta phân biệt hai trường hợp của dạng (6.3). Trường hợp tất cả các $a_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và trường hợp có ít nhất một $a_{ii} \neq 0$.

Trường hợp thứ nhất: Nếu tất cả $a_{ii} = 0$ nhưng có ít nhất $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$ thì thực hiện phép đổi tọa độ $x_i = x'_i - x'_j; x_j = x'_i + x'_j$ và $x_k = x'_k$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ và $k \neq i, j$. Khi đó số hạng $a_{ij}x_i x_j$ sẽ trở thành

$$a_{ij}x_i x_j = a_{ij}(x'_i - x'_j)(x'_i + x'_j) = a_{ij}x'^2_i - a_{ij}x'^2_j$$

Như vậy, ta đã chuyển sang trường hợp thứ hai.

Trường hợp thứ hai: Xét dạng (6.3) có ít nhất một $a_{ii} \neq 0$ nào đó, giả sử $a_{11} \neq 0$. Sau khi nhóm các số hạng có chứa x_1, ta có thể viết q dưới dạng

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11}(x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_1 x_j) + q'_2(x_2, \ldots, x_n) \\ &= a_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j)^2 + q_2(x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Đặt $y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j; y_2 = x_2; \ldots, y_n = x_n$. Lúc đó $q(x)$ trở thành

$$q(x) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a'_{ij}y_i y_j.$$

Nếu trong biểu thức $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a'_{ij}y_i y_j$ có ít nhất một trong các hệ số của bình phương của các tọa độ $y_2, \ldots, y_n$ khác 0, có thể giả sử hệ số của y_2^2 khác 0 thì ta lại có thể áp dụng phương pháp như trên và thu được

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a'_{ij}y_iy_j = a'_{22}z_2^2 + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} a''_{ij}z_iz_j.$$

Nếu đặt thêm $y_1 = z_1$ thì ta được một phép biến đổi tọa độ $y_1,\ldots,y_n$ sang tọa độ $z_1,\ldots,z_n$ sao cho q có dạng

$$q(x) = a_{11}z_1^2 + a'_{22}z_2^2 + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n} a''_{ij}z_iz_j.$$

Tiếp tục quá trình như trên, sau hữu hạn bước, ta sẽ đưa được q về dạng chính tắc

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} k_iu_i^2.$$

Như vậy, ta có một phép đổi tọa độ từ $(x_1,\ldots,x_n)$ sang tọa độ $(u_1,\ldots,u_n)$ sao cho q có dạng chính tắc. Từ đây, suy ra có một cơ sở của V sao cho dạng toàn phương q có dạng chính tắc đối với cơ sở đó. □

Ví dụ 6.3.3 Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định như sau: Với $x = (x_1, x_2, x_3)$ đặt

$$q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

Tìm dạng chính tắc và cơ sở chính tắc tương ứng với q.
Giải. Với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, tọa độ của x đối với cơ sở chính tắc E là $(x)_E = (x_1, x_2, x_3)$. Dạng toàn phương bên trên không có bình phương nào. Ta làm xuất hiện bình phương bằng cách đổi biến số như sau

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} q(x) = &\ 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + 2(y_1 - y_2)y_3 - 6(y_1 + y_2)y_3 \\ = &\ 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3 \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} q(x) = &\ 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3 \\ = &\ 2y_1^2 - 4y_1y_3 + 2y_3^2 - 2y_2^2 - 8y_2y_3 - 2y_3^2 \\ = &\ 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 - 8y_2y_3 - 8y_3^2 + 8y_3^2 - 2y_3^2 \\ = &\ 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 + 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 6y_3^2 \\ = &\ 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 + 2y_3)^2 + 6y_3^2 \end{aligned}$$

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} t_1 = y_1 - y_3 \\ t_2 = y_2 + 2y_3 \\ t_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = t_1 + t_3 \\ y_2 = t_2 - 2t_3 \\ y_3 = t_3 \end{cases}$$

Dạng chính tắc của dạng toàn phương là

$$q(x) = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2$$

với phép biến đổi

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 + 3t_3 \\ x_2 = t_1 + t_2 - t_3 \\ x_3 = t_3 \end{cases}.$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

là công thức đổi tọa độ, trong đó ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở chính tắc tương ứng với q là $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Do đó cơ sở chính tắc tương ứng với q là

$$C = \{(1,1,0),(-1,1,0),(3,-1,1)\}.$$

Chú ý: Dạng chính tắc có thể khác nhau do ta dùng các phép đổi biến số khác nhau.

Cho một dạng toàn phương q trên $\mathbb{R}^n$ và A là ma trận q của đối với cơ sở chính tắc B. Khi đó $q(x) = [x]_B^T A[x]_B$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Vì A là một ma trận đối xứng nên tồn tại một ma trận trực giao S sao cho $S^T AS = D$ là ma trận chéo. Đặt C là một cơ sở sao cho S là ma trận chuyển từ cơ sở B sang C. Ta chứng minh được rằng nếu B là một cơ sở trực chuẩn và S là một ma trận trực giao thì C là một cơ sở trực chuẩn. Khi đó $[x]_B = S[x]_C$ và

$$q(x) = [x]_B^T A[x]_B = (S[x]_C)^T A(S[x]_C) = [x]_C^T (S^T AS)[x]_C = [x]_C^T D[x]_C.$$

Hơn nữa, nếu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A và $[x]_C = [y_1, \ldots, y_n]^T$ thì

$$q(x) = [x]_C^T D[x]_C = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Định lý 6.3.4 Cho q là một dạng toàn phương trên một không gian vectơ Euclid $\mathbb{R}^n$. Khi đó tồn tại một cơ sở trực chuẩn là cơ sở chính tắc tương ứng với q.

Việc tìm một cơ sở trực chuẩn là cơ sở chính tắc tương ứng với dạng toàn phương q được gọi là đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao (hay phương pháp biến đổi trực giao).

Ví dụ 6.3.5 Cho một dạng toàn phương q trên $\mathbb{R}^3$ xác định như sau

$$q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Tìm dạng chính tắc của q bằng phương pháp chéo hóa trực giao.
Giải: Ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở chính tắc E là

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 9)^2.$$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 9$ và $\lambda_2 = 0$.
Với $\lambda_1 = 9$, giải phương trình $(A - 9I)X = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x_1 = -a - \frac{1}{2}b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}$$

Nghiệm cơ bản $u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$.
Với $\lambda_2 = 0$, giải phương trình $(A - 0I)X = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x_1 = 2c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$$

Nghiệm cơ bản $u_3 = (2, 2, 1)$.

Trực giao tập u_1, u_2, u_3 :

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (-\frac{1}{2}, 0, 1) - \frac{1/2}{2}(-1,1,0) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1) \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = u_3
\end{aligned}$$

Chuẩn hóa v_1, v_2, v_3, ta được

$$w_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), w_2 = (-\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}), w_3 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

Khi đó cơ sở trực chuẩn là cơ sở chính tắc tương ứng với q là $\{w_1, w_2, w_3\}$ và dạng chính tắc của q là

$$q = 9y_1^2 + 9y_2^2.$$

6.4 Phân loại các dạng toàn phương và luật quán tính

Định nghĩa 6.4.1 Cho dạng toàn phương q trên không gian vectơ V.

- Nếu $q(x) > 0$ với mọi $x \neq \theta$ thì q gọi là dạng xác định dương.
- Nếu $q(x) \geq 0$ với mọi $x \in V$ và tồn tại $x \neq \theta$ sao cho $q(x) = 0$ thì q được gọi là dạng nửa xác định dương (không âm).
- Nếu $q(x) < 0$ với mọi $x \neq \theta$ thì q được gọi là dạng xác định âm.
- Nếu $q(x) \leq 0$ với mọi $x \in V$ và tồn tại $x \neq \theta$ sao cho $q(x) = 0$ thì q được gọi là dạng nửa xác định âm (không dương).
- Nếu tồn tại $x, y \in V$ sao cho $q(x) > 0$ và $q(y) < 0$ thì q được gọi là dạng không xác định dấu.

Ví dụ 6.4.2 Cho q là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$.

1. Nếu $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$ thì q là xác định dương.
2. Nếu $q(x) = x_1^2 + 4x_3^2$ thì q là nửa xác định dương vì $q(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^3$ và tồn tại $x = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $q(x) = 0$.
3. Nếu $q(x) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ thì q là xác định âm.

4. Nếu $q(x) = -x_1^2 - 3x_2^2$ thì q là nửa xác định âm vì $q(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^3$ và tồn tại $x = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $q(x) = 0$.

5. Nếu $q(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2$ thì q là không xác định dấu vì tồn tại $x = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $q(x) > 0$ và $y = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $q(y) < 0$.

Trong các ví dụ trên, ta thấy rằng nếu $q(x)$ có dạng chính tắc thì ta dễ dàng xác định được dạng toàn phương của nó. Đối với một dạng toàn phương bất kì, ta có thể dùng phương pháp chéo hóa trực giao để đưa nó về dạng chính tắc. Khi đó, ta thấy rằng các dạng toàn phương có thể được phân loại dựa vào các giá trị riêng của ma trận liên kết với nó.

Định lý 6.4.3 Cho q là một dạng toàn phương và A là ma trận của q đối với một cơ sở nào đó. Khi đó

(i) q là xác định dương khi và chỉ khi các giá trị riêng của A là dương.

(ii) q là nửa xác định dương khi và chỉ khi các giá trị riêng của A là không âm và tồn tại ít nhất một giá trị riêng bằng 0.

(iii) q là xác định âm khi và chỉ khi các giá trị riêng của A là âm.

(iv) q là nửa xác định âm khi và chỉ khi các giá trị riêng của A là không dương và tồn tại ít nhất một giá trị riêng bằng 0.

(v) q là không xác định dấu khi và chỉ khi các giá trị riêng của A có cả số âm và số dương.

Ví dụ 6.4.4 Phân loại dạng toàn phương sau

$$q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2xz.$$

Ta thấy ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Các giá trị riêng của A là $1, 4$. Do đó dạng toàn phương này xác định dương.

Một dạng toàn phương có thể đưa về dạng chính tắc bằng nhiều cách khác nhau. Tuy nhiên, người ta chứng minh được định lí sau đây gọi là luật quán tính của dạng toàn phương.

Định lý 6.4.5 (Luật quán tính) Số hệ số dương và số hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương là bằng nhau, chỉ khác nhau về cách sắp xếp.

Trong dạng chính tắc của q, ta kí hiệu

- $r(q)$ là số các hệ số khác 0
- $s(q)$ là số các hệ số dương
- $t(q)$ là số các hệ số âm
- Cặp (s,t) được gọi là chỉ số quán tính của q
- $s-t$ được gọi là chỉ số của q.

Ví dụ 6.4.6 Xác định chỉ số quán tính của dạng toàn phương

$$q(v) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2xz.$$

Giải. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

$$\begin{aligned} q(v) &= 3x^2 - 2x(y+z) + 3y^2 + 3z^2 - 2yz. \\ &= 3(x - \frac{1}{3}(y+z))^2 + \frac{8}{3}(y - \frac{1}{2}z)^2 + 2z^2 \end{aligned}$$

Khi đó:

- Số hệ số dương: 3
- Số hệ số âm: 0
- Chỉ số quán tính: (3,0)
- Chỉ số của q : 3

6.5 Bài tập

Bài tập 6.1 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - 4x_3)$$

Chứng minh f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài tập 6.2 Cho dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^2$ xác định như sau: Với mọi $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$f(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2.$$

a. Tìm dạng toàn phương tương ứng của f.
b. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc.

Bài tập 6.3 Dùng phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc và tìm cơ sở chính tắc tương ứng của q.
a. $q(x) = 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2x_3$.
b. $q(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.
c. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Bài tập 6.4 Dùng phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc và tìm cơ sở chính tắc tương ứng của q.
a. $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
b. $q(x) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.
c. $q(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Bài tập 6.5 Tìm m để dạng toàn phương sau xác định âm

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - x_2^2 - mx_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$