4. Không gian Euclid

4.1 Các định nghĩa

Trong chương này, ta luôn xét V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ.

Định nghĩa 4.1.1 Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ. Một tích vô hướng trên V là một ánh xạ $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi $x, y, z \in V; a, b \in \mathbb{R}$ ta luôn có

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(ii) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(iii) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Định nghĩa 4.1.2 Không gian vectơ thực V cùng với tích vô hướng trên V gọi là một không gian vectơ Euclid.

Trong định nghĩa tích vô hướng, tiên đề (ii) phát biểu rằng ánh xạ tích vô hướng tuyến tính theo biến thứ nhất. Tuy nhiên khi kết hợp với tiên đề (i) ta sẽ thấy tích vô hướng tuyến tính theo biến thứ hai

$$\langle x, ay+bz\rangle \overset{(i)}{=} \langle ay+bz, x\rangle \overset{(ii)}{=} \langle ay, x\rangle + \langle bz, x\rangle \overset{(iii)}{=} a\langle y, x\rangle + b\langle z, x\rangle \overset{(i)}{=} a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle.$$

Kết hợp các tiên đề (i), (ii) và (iii), ta có được một hệ thức tổng quát

$$\langle \sum_i a_i x_i, \sum_j b_j y_j\rangle = \sum_i \sum_j a_i b_j \langle x_i, y_j\rangle.$$

Ví dụ 4.1.3 Với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, đặt

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Ta được một tích vô hướng (gọi là tích vô hướng chính tắc) trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ Euclid cùng với tích vô hướng này.

Ví dụ 4.1.4 Cho $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 5x_2y_2.$$

Chứng minh rằng qui tắc đã cho là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.
Giải. Lấy $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có

- $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 = 2y_1x_1 + 5y_2x_2 = \langle y, x\rangle$.
- $\begin{aligned}\langle x + y|z\rangle &= 2(x_1 + y_1)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2 \\ &= (2x_1z_1 + 5x_2z_2) + (2y_1z_1 + 5y_2z_2) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\end{aligned}$
- $\langle ax, y\rangle = 2ax_1y_1 + 5ax_2y_2 = a(2x_1y_1 + 5x_2y_2) = a\langle x, y\rangle$.
- $\langle x, x\rangle = 2x_1^2 + 5x_2^2 \geq 0$
- $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 5x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ và $x_2 = 0$ hay $x = 0$.

Ta được một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$. Khi đó $\mathbb{R}^2$ là một không gian vectơ Euclid cùng với tích vô hướng này.

Ví dụ 4.1.5 Cho $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - 5x_2y_2.$$

Chứng minh rằng qui tắc đã cho không là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 4.1.6 Cho $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, đặt

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Khi đó qui tắc đã cho là một tích vô hướng trên $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Ta gọi đây là tích vô hướng chính tắc.

Ví dụ 4.1.7 Trong $\mathbb{R}_2[x]$ (tập các đa thức hệ số thực có bậc không lớn hơn 2), cho $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Chứng minh rằng

$$\langle p(x), q(x)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}_2[x]$.

Ví dụ 4.1.8 Cho $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$ và V là không gian các hàm số thực liên tục $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ta định nghĩa một ánh xạ từ $V \times V$ đến $\mathbb{R}$ như sau

$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Theo các tính chất cơ bản của tích phân ta chứng minh được ánh xạ vừa định nghĩa bên trên là tích vô hướng. Do đó V là một không gian vectơ Euclid.

Định nghĩa 4.1.9

- Cho V là một không gian vectơ Euclid (với tích vô hướng). Với mỗi $x \in V$ ta định nghĩa độ dài của x là một số thực không âm xác định như sau
$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$
- Nếu $||x|| = 1$ thì ta nói x là vectơ đơn vị.
- Với mỗi $x \in V$, ta có vectơ đơn vị
$$\overline{x} = \frac{1}{||x||}x,$$
đây gọi là sự chuẩn hóa vectơ x.

Ví dụ 4.1.10 Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc. Nếu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Định lý 4.1.11 Cho V là một không gian vectơ Euclid. Khi đó với mọi $x, y \in V$ và với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có

(i) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(ii) $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$

(iii) (Bất đẳng thức Cauchy - Schwart) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$

(iv) (Bất đẳng thức tam giác) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Chứng minh. Chứng minh xem như bài tập. □

Định nghĩa 4.1.12 Cho V là một không gian Euclid và $x, y \in V$. Khi đó góc giữa x và y được xác định bởi

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||.||y||}$$

4.2 Trực giao

Định nghĩa 4.2.1
- Cho V là một không gian vectơ Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vectơ x trực giao với vectơ y, kí hiệu $x \perp y$, nếu $\langle x, y\rangle = 0$.
- Một tập con S khác rỗng của V được gọi là tập con trực giao nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.
- Một tập con trực giao S của V được gọi là trực chuẩn nếu $||x|| = 1$ với mọi $x \in S$.

Quy ước: Tập gồm một vectơ luôn được xem là trực giao.

Ví dụ 4.2.2 Trong $\mathbb{R}^2$ với tích vô hướng chính tắc, các vectơ $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$ là trực giao khi và chỉ khi $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Ví dụ 4.2.3 Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là một tập con trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$.

Định lý 4.2.4 Trong không gian vectơ Euclid, mọi tập con trực giao không chứa vectơ không đều độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Cho $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ là một tập con trực giao của V không chứa vectơ không. Giả sử rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0.$$

Khi đó

$$\lambda_i ||x_i||^2 = \lambda_i \langle x_i | x_i\rangle = \sum_{k=1}^{k} \lambda_k \langle x_k | x_i\rangle = \langle \sum_{k=1}^{k} \lambda_k x_k | x_i\rangle = \langle 0 | x_i\rangle = 0.$$

Do đó $\lambda_i = 0$ vì $x_i \neq 0$. Vậy S độc lập tuyến tính. □

Định lý 4.2.5 Cho V là một không gian Euclid n chiều. Khi đó, mọi tập con trực giao gồm n vectơ khác vectơ không đều là một cơ sở của V.

Định nghĩa 4.2.6 (Cơ sở trực chuẩn) Một cơ sở trực chuẩn của một không gian vectơ Euclid là một tập con trực chuẩn và là cơ sở.

Nếu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở trực giao thì $\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \cdots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn, gọi là trực chuẩn hóa cơ sở trực giao đã cho.

Từ một hệ có nhiều hơn 1 vectơ, ta có thể xây dựng nên tập trực giao, quá trình đó được gọi là trực giao hóa một hệ vectơ (hay còn gọi là phương pháp Gram-Schmidt).

Định lý 4.2.7 Cho $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một hệ các vectơ của không gian Euclid V. Khi đó ta xây dựng được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ như sau:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \\
v_i &= u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k
\end{aligned}$$

Ví dụ 4.2.8 Trong $\mathbb{R}^3$, trực giao hóa hệ vectơ

$$u_1 = (1,1,1,), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0).$$

Giải: Ta có
$v_1 = u_1 = (1,1,1)$;
$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$;
$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$.
Ta có một tập trực giao của $\mathbb{R}^3$ là

$$B = \left\{(1,1,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)\right\}.$$

Ví dụ 4.2.9 Trong $P_2[x]$ với tích vô hướng $\int_0^1 p(x)q(x)dx$, trực giao hóa hệ các vectơ $\{g(x) = 1 + x, h(x) = 2 - x + x^2\}$.

Nhận xét 4.2.10 Từ một tập $\{u_1, \ldots, u_n\}$ bất kì của một không gian vector, sau khi trực giao hóa, ta được một tập $\{v_1, \ldots, v_n\}$ trực giao. Tiếp theo, ta đặt $z_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$

và ta được một tập trực chuẩn $\{z_1, \ldots, z_n\}$.

Ví dụ 4.2.11 Hãy trực chuẩn hóa hệ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ trong $\mathbb{R}^3$ với

$$u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,1,1), u_3 = (1,2,1).$$

4.3 Bài tập

Bài tập 4.1 Ánh xạ $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 2y_2)$$

có là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$ không?

Bài tập 4.2 Trong không gian vectơ $P_n[x]$ (tập các đa thức có bậc không quá n), Chứng minh rằng quy tắc

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

là một tích vô hướng trên $P_n[x]$.

Bài tập 4.3 Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và vết của A kí hiệu là $\mathtt{trace}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Chứng minh rằng qui tắc xác định bởi

$$\langle A, B \rangle = \mathtt{trace}B^t A$$

là một tích vô hướng trên $M_n(\mathbb{R})$.

Bài tập 4.4 Cho V là một không gian vectơ Euclid thực và $x, y \in V$. Chứng minh rằng
a. $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y \rangle$.
b. $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

Bài tập 4.5 Cho V là một không gian vectơ Euclid thực và $x, y \in V$ thỏa $||x+y|| = ||x|| + ||y||$. Chứng minh rằng $||ax+by|| = a||x|| + b||y||$ với mọi $0 \le a, b \in \mathbb{R}$.

Bài tập 4.6 Cho V là một không gian vectơ Euclid thực và $x, y \in V$ thỏa $||x|| = ||y||$. Chứng minh rằng $\langle x+y, x-y \rangle = 0$.

Bài tập 4.7 Trong không gian vectơ Euclid $\mathbb{R}_2[x]$ với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Hãy tìm $a \in \mathbb{R}$ sao cho tập $\{x, x^2 - a\}$ là trực giao.

Bài tập 4.8 Trong $\mathbb{R}^3$, trực chuẩn hóa cơ sở $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

Bài tập 4.9 Giả sử $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của một $\mathbb{R}$-không gian vectơ Euclid V. Giả sử $v \in V$ có tọa độ đối với cơ sở B là

$$(v)_B = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Chứng minh rằng
a. $v_i = \langle v, e_i\rangle$ với mọi $1 \le i \le n$;
b. $\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^n$.

Bài tập 4.10 Trong không gian vectơ Euclid $\mathbb{R}[x]$ với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

xác định cơ sở trực chuẩn của các không gian sinh bởi

a. $\{x, x^2\}$;

b. $\{1, 2x - 1, 12x^2\}$.

5. Trị riêng - Vector riêng - Chéo hóa ma trận

5.1 Giá trị riêng, vectơ riêng

Định nghĩa 5.1.1 Cho A là ma trận vuông cấp n với hệ số thuộc $\mathbb{K}$. Một phần tử $\lambda \in \mathbb{K}$ gọi là giá trị riêng của A nếu như tồn tại ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$ thuộc $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ sao cho

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Mỗi ma trận khác không $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ thỏa mãn (5.1) được gọi là vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ.

Từ (5.1) ta có

$$[A - \lambda I]X = 0 \tag{5.2}$$

Định lý 5.1.2 Phần tử $\lambda \in \mathbb{K}$ là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$.

Chứng minh. Phần tử λ là một giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi hệ phương trình 5.2 có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Định nghĩa 5.1.3 Cho A là một ma trận vuông. Khi đó $\det(A-\lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A và kí hiệu là $P_A(\lambda)$.

Định nghĩa 5.1.4 Cho A là một ma trận vuông cấp n và λ là một giá trị riêng của A. Tập

$$V(\lambda)=\{X\in M_{n\times 1}(K)\,|\,AX=\lambda X\}=\{v\in M_{n\times 1}(K)\,|\,(A-\lambda I)X=0\}$$

được gọi là không gian con riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ.

Mệnh đề 5.1.5 Tập $V(\lambda)$ là một K-không gian vectơ con của $M_{n\times 1}(K)$.

Ví dụ 5.1.6 Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A trên tập số thực $\mathbb{R}$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Giải:

- Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^3+3\lambda+2.$$

- Tìm giá trị riêng: Nghiệm của phương trình $-\lambda^3+3\lambda+2=0$ là $\lambda=-1$ hoặc $\lambda=2$. Ta có hai giá trị riêng $\lambda=-1,\lambda=2$.

- Tìm các vectơ riêng.

  * Với $\lambda=-1$, ta giải hệ phương trình

$$[A-(-1)I]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[h_3\to -h_1+h_3]{h_2\to -h_1+h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

  Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số

$$\begin{cases}x_1=-a-b\\x_2=a\\x_3=b\end{cases}$$

Ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ ta có các vectơ riêng $\begin{bmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{bmatrix}$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và a, b không đồng thời bằng 0.

* Với $\lambda = 2$, ta giải hệ phương trình

$$[A - 2.I]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 \to 2h_1 + h_3]{h_2 \to -h_1 + h_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_2 + h_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 = c \\ x_2 = x_3 = c \\ x_3 = c \end{cases}$$

Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ ta có các vectơ riêng $\begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}$ với $c \in \mathbb{R}$ và $c \neq 0$.

5.2 Chéo hóa ma trận

Định nghĩa 5.2.1 (Ma trận đồng dạng) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Ta nói A đồng dạng với B nếu tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ = B$ (hay $A = QBQ^{-1}$).

Định lý 5.2.2 Nếu A, B là các ma trận vuông đồng dạng thì chúng có cùng đa thức đặc trưng.

Chứng minh. Nếu $B = Q^{-1}AQ$ thì

$$B - \lambda I = Q^{-1}AQ - \lambda I = Q^{-1}AQ - \lambda Q^{-1}Q = Q^{-1}(A - \lambda I)Q.$$

Khi đó $\det(B-\lambda I) = \det(Q^{-1})\det(A-\lambda I)\det(Q)$. Vì $\det(Q^{-1})\det(Q) = \det(Q^{-1}Q) = \det(I) = 1$ nên $\det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$. □

Định nghĩa 5.2.3 Một ma trận vuông A gọi là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo, tức là tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ = D$ là một ma trận chéo.

Định lý 5.2.4 Một ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng của A và các cột của ma trận Q là các vectơ riêng của ma trận A.

Chứng minh. Đầu tiên, xét ma trận Q có các cột là các vectơ $V_1,\ldots,V_n$ và D là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính là $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Khi đó

$$AQ = A[V_1\ V_2\ \ldots V_n] = [AV_1\ AV_2\ \ldots AV_n]. \tag{5.3}$$

Mặt khác

$$QD = Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix} = [\lambda V_1\ \lambda_2 V_2\ \ldots \lambda_n V_n]. \tag{5.4}$$

Giả sử A chéo hóa được và $A = QDQ^{-1}$. Nhân vào bên phải hai vế với ma trận Q, ta được $AQ = QD$. Suy ra

$$[AV_1\ AV_2\ \ldots AV_n] = [\lambda V_1\ \lambda_2 V_2\ \ldots \lambda_n V_n]. \tag{5.5}$$

Cho các cột tương ứng của 5.5 bằng nhau, ta thấy

$$AV_1 = \lambda_1 V_1, AV_2 = \lambda_2 V_2, \ldots, AV_n = \lambda_n V_n. \tag{5.6}$$

Vì Q khả nghịch nên các cột của Q độc lập tuyến tính. Do đó các cột này đều khác cột không. Từ 5.6 suy ra $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ là các giá trị riêng và $V_1,V_2,\ldots,V_n$ là các vectơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng.

Ngược lại, giả sử A có n vectơ riêng $V_1,V_2,\ldots,V_n$ độc lập tuyến tính. Xây dựng các cột của ma trận Q từ n vectơ này và dùng các giá trị riêng tương ứng $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ xây dựng nên ma trận chéo D. Từ các đẳng thức 5.3 và 5.5, ta có $AQ = QD$. Vì các vectơ riêng độc lập tuyến tính nên các cột của Q là độc lập tuyến tính. Do đó Q khả nghịch và như vậy $Q^{-1}AQ = D$ là một ma trận chéo hay A chéo hóa được. □

Ví dụ 5.2.5 Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Chứng minh rằng A chéo hóa được nhưng B không chéo hóa được.
Giải. Tìm các giá trị riêng của A : Đa thức đặc trưng

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)..$$

Các nghiệm của đa thức đặc trưng là $\lambda_1 = -1$ hoặc $\lambda_2 = 2$. Do đó, các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 2$.
Tìm các vectơ riêng của A: Giải các hệ phương trình $[A - \lambda I]X = 0$.
Với $\lambda_1 = -1$, ta giải hệ phương trình

$$[A - (-1)I]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số $\begin{cases} x_1 = -a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}$

Nghiệm cơ bản của hệ phương trình này là $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Với $\lambda = 2$, ta giải hệ phương trình

$$[A - 2.I]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số $\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 = c \\ x_2 = x_3 = c \\ x_3 = c \end{cases}$

Nghiệm cơ bản của hệ phương trình này là $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vì các vectơ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ độc lập tuyến tính nên ma trận A chéo hóa được.

Đối với ma trận B, ta cũng tiến hành tương tự. Ta thấy B có cùng đa thức đặc trưng với A do đó nó có cùng các giá trị riêng.

Với $\lambda_1 = -1$, hệ phương trình

$$[B + I]X = 0$$

có vô số nghiệm và phụ thuộc một tham số $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Nghiệm cơ bản của hệ phương trình này là $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Với $\lambda_2 = 2$, hệ phương trình

$$[B - 2I]X = 0$$

có vô số nghiệm và phụ thuộc một tham số $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = 9t \end{cases}$

Nghiệm cơ bản của hệ phương trình này là $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Vì B không có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính nên B không chéo hóa được.

Định lý 5.2.6 Nếu $V_1, V_2, \ldots, V_r$ là các vectơ riêng tương ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ của ma trận vuông A thì $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ là một tập độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Xem như bài tập. □

Định lý 5.2.7 Nếu ma trận vuông A cấp n có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Chứng minh. Xem như bài tập. □

Định lý 5.2.8 Cho A là ma trận vuông cấp n có các giá trị riêng phân biệt là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$. Với $k = 1, \ldots, t$, đặt B_i là cơ sở của không gian con riêng tương ứng với giá trị riêng λ_k và

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_t.$$

Khi đó B độc lập tuyến tính trong $M_{n\times 1}(K)$. Từ đó suy ra, A chéo hóa được khi và chỉ khi B có đủ n vectơ.

Chứng minh. Giả sử các cơ sở $B_1 = \{U_1, U_2, \ldots, U_q\}, B_2 = \{V_1, V_2, \ldots, V_r\}, \ldots, B_t = \{W_1, W_2, \ldots, W_s\}$. Để chứng minh B độc lập tuyến tính, ta xét

$$a_1U_1 + a_2U_2 + \ldots + a_qU_q + b_1V_1 + b_2V_2 + \ldots + b_rV_r + \ldots + c_1W_1 + c_2W_2 + \ldots + c_sW_s = 0.$$

Đặt $a_1U_1+a_2U_2+\ldots+a_qU_q = x_1, b_1V_1+b_2V_2+\ldots+b_rV_r = x_2, \ldots, c_1W_1+c_2W_2+\ldots+c_sW_s = x_t$. Khi đó các vectơ $X_1, X_2, \ldots, X_t$ lần lượt là các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$. Vì các giá trị riêng này đều phân biệt nên theo Định lí 5.2.6 $X_1, X_2, \ldots, X_t$ độc lập tuyến tính. Do đó

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_t = 0.$$

Điều này suy ra $a_1U_1 + a_2U_2 + \ldots + a_qU_q = x_1 = 0$. Vì $\{U_1, \ldots, U_q\}$ là cơ sở của B_1 nên chúng độc lập tuyến tính và do đó $a_1 = a_2 = \ldots = a_q = 0$. Tương tự như vậy, ta cũng có $b_1 = b_2 = \ldots = b_r = \ldots = c_1 = c_2 = \ldots = c_s = 0$. Vậy B là một tập độc lập tuyến tính. Như vậy, theo Định lí 5.2.4 ma trận A chéo hóa được. □

5.3 Chéo hóa ma trận đối xứng

Định nghĩa 5.3.1 Một ma trận vuông A được gọi là trực giao nếu $A^{-1} = A^T$.

Ví dụ 5.3.2 Ma trận $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao.

Định lý 5.3.3 Cho A là một ma trận vuông cấp n. Các điều sau là tương đương:

(i) A là ma trận trực giao.

(ii) A^T là ma trận trực giao.

(iii) Các vectơ cột của A là một hệ trực chuẩn

(iv) Các vectơ hàng của A là một hệ trực chuẩn

Mệnh đề 5.3.4 Cho A là một ma trận đối xứng. Khi đó mọi giá trị riêng của A đều là số thực.

Chứng minh. Giả sử $\lambda \in \mathbb{C}$ là một nghiệm phức của đa thức đặc trưng của A. Ta cần chứng minh $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta xét hệ phương trình (trên tập số phức $\mathbb{C}$) $(A - \lambda I)x = 0$ (x là ma trận cột) có ít nhất một nghiệm không tầm thường $x = z$ (ma trận cột với các phần tử là số phức). Như vậy ta có $z \neq 0$ và $Az = \lambda z$, tức là $\overline{z}^t Az = \lambda \overline{z}^t z$. Lấy chuyển vị và phức liên hợp của cả hai vế (chú ý rằng $A^t = A = \overline{A}$) ta được $\overline{z}^t Az = \overline{\lambda}\overline{z}^t z$. Vậy $\lambda \overline{z}^t z = \overline{\lambda}\overline{z}^t z$ mà $\overline{z}^t z > 0$ nên $\lambda = \overline{\lambda}$ tức λ là số thực. □

Định lý 5.3.5 Nếu A là một ma trận đối xứng thì A có một một ma trận trực giao Q có các cột là các vectơ riêng của A sao cho $Q^T AQ$ là một ma trận chéo.

Định nghĩa 5.3.6 Ma trận vuông A cấp n gọi là chéo hóa trực giao được nếu tồn tại ma trận trực giao Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là ma trận chéo.

Ví dụ 5.3.7 Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải: Phương trình đặc trưng

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$.

- Với $\lambda = 5$, ta giải hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

Chọn một vectơ riêng là $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (cho $c = 1$), trực chuẩn hóa ta được:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

- Với $\lambda = -1$, ta giải hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ta chọn 2 vectơ riêng độc lập là $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (cho $c_1 = 1, c_2 = 0$) và $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (cho $c_1 = 0, c_2 = 1$). Trực giao hóa hai vectơ này

$$f_2 = v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trực chuẩn hóa f_2, f_3 ta được

$$e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Ta có ma trận trực giao

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

và

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.4 Bài tập

Bài tập 5.1 Hãy tìm các giá trị riêng, vectơ của A và ma trận S (nếu có) sao cho $S^{-1}AS$ là ma trận chéo.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Bài tập 5.2 Tìm một ma trận vuông A có vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 4$ là $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ và vectơ riêng ứng với $\lambda_2 = -1$ là $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bài tập 5.3 * Cho $A \in M_n(K)$ và $\lambda \in K$ là một giá trị riêng của A. Khi đó, ta có các điều sau:
a. Với mỗi số nguyên dương k, λ^k là một giá trị riêng của A^k.
b. Nếu A khả nghịch thì $\dfrac{1}{\lambda}$ là giá trị riêng của A^{-1}.
c. Nếu $q(x) \in K[x]$ thì $q(\lambda)$ là giá trị riêng của $q(A)$.

Bài tập 5.4 Cho $A \in M_n(K)$ và λ là một giá trị riêng của A. Chứng minh rằng $V(\lambda)$ là một không gian vectơ con của K^n.

Bài tập 5.5 Cho A là ma trận chéo hóa được và khả nghịch. Chứng minh rằng A^{-1} cũng chéo hóa được.

Bài tập 5.6 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
a. Tìm ma trận Q sao cho $Q^{-1}AQ = D$ là một ma trận chéo.
b. Chứng minh rằng $A^k = QD^kQ^{-1}$ với mọi số tự nhiên k.
c.Tính A^{100}.

Bài tập 5.7 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.
a. Tìm ma trận Q sao cho $Q^{-1}AQ = D$ là một ma trận chéo.
b. Cho k là một số tự nhiên, tính A^k.

Bài tập 5.8 Chứng minh rằng A và A^T có cùng đa thức đặc trưng.

Bài tập 5.9 Cho A là ma trận thỏa

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a. Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của A.
b. Ma trận A có khả nghịch không?
c. Ma trận A có chéo hóa được không?

Bài tập 5.10 * Cho A là ma trận thực vuông cấp n. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A. Chứng minh $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

Bài tập 5.11 Giải sử $\lambda^2 = 2\lambda$ với mọi giá trị riêng λ của ma trận chéo hóa được A. Chứng minh rằng $A^2 = 2A$.

Bài tập 5.12 * Cho $x_0 = 4$ và $y_0 = 1$. Giả sử các dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}$ thỏa

$$\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{cases}$$

với mọi $n \geq 1$. Xác định x_n và y_n theo n.

Bài tập 5.13 * Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_n = 3x_{n-1} - 4x_{n-2} + 2x_{n-3}.$$

Xác định x_n theo n.