ĐỀ ÔN TẬP SỐ 1

Câu 1: ***(3 điểm)*** a. Tìm ma trận X thỏa

$$2X\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 9 & 4\\ 2 & 0 & 11\end{bmatrix}.$$

b. Ma trận X^tX có khả nghịch không?

c. Tìm m sao cho $\mathrm{rank}(X^tX - mI) = 2$.

Câu 2: ***(2 điểm)*** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0\\ -x_1 + (m-3)x_2 - 3x_3 + 7x_4 = m \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b. Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Câu 3: ***(2 điểm)*** Cho $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Chứng minh rằng T là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

Câu 4: ***(1 điểm)*** Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn A, B và $A + B$ là các ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng $A^{-1} + B^{-1}$ khả nghịch và tìm $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$.

Câu 5: ***(2 điểm)*** Cho các hàm số $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_i = |x - i|.$$

a. Chứng minh rằng $\{f_1, f_2, f_3\}$ độc lập tuyến tính.

b. Chứng minh rằng $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 2

Câu 1: ***(3 điểm)*** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

a. Tính $A + BB^T$.

b. Tìm m để $\operatorname{rank}(A) < 3$.

c. Tìm tất cả các ma trận $X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ thỏa $AX = B$.

Câu 2: ***(2 điểm)*** Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + mx_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 3 \end{cases}$$

Câu 3: ***(2 điểm)*** Cho $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Chứng minh rằng T là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

Câu 4: ***(1 điểm)*** Cho $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ và $B = XAX^T$.

Tính $X^T B^{2023} X$.

Câu 5: ***(2 điểm)*** Cho các hàm số

$$f_1 = e^x;\, f_2 = e^{2x};\, f_3 = e^{kx}.$$

a. Chứng minh rằng $\{f_1, f_2, f_3\}$ độc lập tuyến tính khi $k = 3$.

b. Tìm k để $\{f_1, f_2, f_3\}$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 3

Câu 1: ***(3 điểm)*** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a. Tính $\det(A - xI)$ trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3 và $x \in \mathbb{R}$.

b. Tìm x để $\operatorname{rank}(A - xI) < 3$.

c. Tìm tất cả các ma trận $X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ thỏa $(A - 5I)X = X$.

Câu 2: ***(2 điểm)*** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính A^n theo n.

Câu 3: ***(2 điểm)*** Cho $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + c = b + d \right\}$. Chứng minh rằng T là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$.

Câu 4: ***(1 điểm)*** Tìm m sao cho các vectơ sau độc lập tuyến tính

$$f_1 = m+x+x^2+x^3; f_2 = 1+mx+x^2+x^3; f_3 = 1+x+mx^2+x^3; f_4 = 1+x+x^2+mx^3.$$

Câu 5: ***(1 điểm)*** Cho A là một ma trận vuông thỏa mãn

$$AB + 2022A + 2023B = 0.$$

Chứng minh rằng $AB = BA$.

Câu 6: ***(1 điểm)*** Trong $\mathbb{R}$-không gian vectơ $P_6[x]$, cho các đa thức

$$f_i = (x-1)^i (x+1)^{6-i}, i = 0, 1, \ldots, 6.$$

Chứng minh rằng $\{f_0, f_1, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ độc lập tuyến tính.

ĐỀ ÔN TẬP SỐ 4

Câu 1: ***(3 điểm)*** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & m \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

a. Tính $\det(A + B^T)$.

b. Tìm m để $\operatorname{rank}(A) = 3$.

c. Tìm tất cả các ma trận X thỏa $XA = B$.

Câu 2: ***(2 điểm)*** Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - x_4 = m \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = m^2 + 1 \end{cases}$$

Câu 3: ***(2 điểm)*** Cho $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & 2b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Chứng minh rằng W là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ con của $M_2(\mathbb{R})$.

Câu 4: ***(1 điểm)*** Cho A, B là các ma trận vuông thỏa mãn $A^{2023} = 0, AB = A + B$. Chứng minh rằng $\det B = 0$.

Câu 5: ***(1 điểm)*** Tìm m sao cho các vectơ sau độc lập tuyến tính

$$f_1 = 1 + x + 2x^3; f_2 = 2 - x + 3x^2 - x^3; f_3 = m + x + mx^3; f_4 = mx - 2x^3.$$

Câu 6: ***(1 điểm)*** Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$