


Câu 1. (2 điểm) Một thành phố A có 30% người theo đảng Cộng hòa, 50% theo đảng Dân chủ, và những người còn lại không theo đảng nào. Chọn ngẫu nhiên một người và xét 2 biến ngẫu nhiên X, Y được định nghĩa như sau:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{người đó thuộc đảng Cộng hòa} \\ 0 & \text{người đó không thuộc đảng Cộng hòa} \end{cases}$$
$$Y = \begin{cases} 1 & \text{người đó thuộc đảng Dân chủ} \\ 0 & \text{người đó không thuộc đảng Dân chủ} \end{cases}$$

Tìm phân phối xác suất đồng thời của X và Y . Tính xác suất $P(X = 1|Y = 0)$.

 **Đáp án tham khảo:**

Ta có:

(X, Y)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
P	0.2	0.3	0.5	0

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6$$


Câu 2. (3 điểm) Cho (X, Y) là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y & \forall 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \forall (x, y) \text{ khác} \end{cases}$$

a. Tính $P(X + Y \geq 1)$.

b. Tính $P\left(X \geq \frac{1}{2} \mid X + Y \geq 1\right)$.

c. Tính giá trị trung bình của X trong điều kiện $Y = \frac{1}{2}$.

 **Đáp án tham khảo:**

a. $P(X + Y \geq 1) = \int_0^1 \int_{1-y}^1 (6x^2y) dx dy = \frac{9}{10}$

b. $P\left(X \geq \frac{1}{2} \mid X + Y \geq 1\right)$


$$= \frac{P\left(X \geq \frac{1}{2} \cap \{X + Y \geq 1\}\right)}{P(X + Y \geq 1)} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{1-x}^1 (6x^2y) dy dx}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{33}{40}}{\frac{9}{10}} = 0.91667$$

c. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 6x^2y dx = y \left(2x^3 \Big|_0^1\right) = 2y$

$$f_{x|Y=\frac{1}{2}}(x) = \frac{f\left(x, y = \frac{1}{2}\right)}{f_Y\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{6x^{2.1}}{2}}{f_Y\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3x^2}{1} = 3x^2$$

$$\bar{E}\left(X\left|Y = \frac{1}{2}\right.\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{x|Y=\frac{1}{2}}(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{4}$$

Câu 3. (2 điểm) Khảo sát ngẫu nhiên 178 phiên giao dịch của một loại cổ phiếu thì thấy có 112 phiên cổ phiếu này tăng giá. Có ý kiến cho rằng tỉ lệ phiên giao dịch tăng giá của loại cổ phiếu này trên 60%. Hãy tính giá trị kiểm định và cho nhận xét về ý kiến trên với mức ý nghĩa 5%.

 **Đáp án tham khảo:**

(Sử dụng phương pháp kiểm định tỉ lệ)

$$H_0: p = 0.6, \quad H_1: p > 0.6$$

$$k = 112, \quad n = 178, \quad f = \frac{k}{n} = \frac{56}{89}, \quad \alpha = 5\% = 0.05$$


$$z = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \cdot \sqrt{n} = \frac{\frac{56}{89} - 0.6}{\sqrt{0.6(1 - 0.6)}} \cdot \sqrt{178} = 0.7956$$

$$\phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95 \xrightarrow{\text{tra bảng A4}} z_\alpha = 1.645$$

Vì $z_\alpha > z \Rightarrow$ chấp nhận H_0

Vậy ý kiến cho rằng tỉ lệ phiên giao dịch tăng giá của loại cổ phiếu này trên 60% là không đúng.

Câu 4. (2 điểm) Để kiểm tra tuổi thọ của bóng đèn do nhà máy M sản xuất, người ta khảo sát ngẫu nhiên 256 bóng đèn thì thấy tuổi thọ trung bình là 1642,5 (giờ) với độ lệch chuẩn có hiệu chỉnh là 226,8281 (giờ). Hãy ước lượng tuổi thọ trung bình của bóng đèn do nhà máy M sản xuất với độ tin cậy 95%.

 **Đáp án tham khảo:**

Sử dụng phương pháp ước lượng khoảng tin cậy cho giá trị trung bình (trường hợp 2, ước lượng đối xứng)

$$n = 256, \quad \bar{x} = 1642.5, \quad s = 226.8281, \quad 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$\phi\left(\frac{z_\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9750 \xrightarrow{\text{tra bảng A4}} \frac{z_\alpha}{2} = 1.96$$

$$\text{Khoảng tin cậy: } \varepsilon = \frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{226.8281}{\sqrt{256}} = 27.786$$

$$\text{Khoảng ước lượng: } [\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon] = [1614.714; 1670.286]$$

Câu 5. (1 điểm) Xét 2 biến ngẫu nhiên Y, Z có số liệu như sau:

Y	16	19	22	21	19	19	26	21	22	25
Z	7	10	25	13	12	15	33	23	19	27

Tính hệ số tương quan và viết phương trình hồi qui tuyến tính của Y theo Z.



Đáp án tham khảo:

Hệ số tương quan mẫu: $r = 0,9233 > 0,9 \rightarrow X, Y$ tương quan tuyến tính mạnh.

Phương trình hồi qui tuyến tính của Y theo Z:

$$Y = a + bZ = 14,9672 - 0,3279Z$$