


Câu 1. (1.5 điểm) Công ty J.D. Power cho biết 60% người mua xe ô tô sử dụng internet để tìm kiếm thông tin và so sánh giá. Giả sử khảo sát 100 người mua ô tô. Tính xác suất có 60 người sử dụng internet để tìm kiếm thông tin và so sánh giá.

 **Đáp án tham khảo:**

Gọi X là số người dùng internet trong 100 người mua ô tô.

Ta có: $X \sim B(n, p)$, $n = 100$, $p = 0,6$

▪ Cách 1: $P(X = 60) = C_{100}^{60} \cdot p^{60} \cdot (1 - p)^{40} = C_{100}^{60} \cdot 0,6^{60} \cdot 0,4^{40} = 0,08122$

▪ Cách 2: $X \sim N(\mu, \sigma)$ với $\mu = nP = 60$, $\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 4,899$

$$\begin{aligned} P(X = 60) &= P(59,5 \leq X \leq 60,5) \\ &= P\left(Z \leq \frac{60,5 - 60}{4,899}\right) - P\left(Z < \frac{59,5 - 60}{4,899}\right) \\ &= \Phi(0,102) - \Phi(-0,102) = 0,5398 - 0,4602 = 0,0796 \end{aligned}$$

▪ Cách 3: $X \sim N(\mu, \sigma)$ với $\mu = nP = 60$, $\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 4,899$

$$P(X = 60) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(60-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0,08143$$


Câu 2. (1.5 điểm) Số lỗi phần cứng X và số lỗi phần mềm Y trong một ngày tại một phòng máy vi tính có phân phối như sau:

$$P(X = 0, Y = 0) = 0,6, \quad P(X = 0, Y = 1) = 0,1,$$

$$P(X = 1, Y = 0) = 0,1, \quad P(X = 1, Y = 1) = 0,2$$

a) X và Y có độc lập nhau hay không? Vì sao?

b) Tính $P(Y = 1|X = 0)$.

 **Đáp án tham khảo:**

a)

X	0	1
P	0,7	0,3

Y	0	1
P	0,7	0,3


Vì $P(X = 0, Y = 0) = 0,6 \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$
nên X và Y không độc lập với nhau.

$$b) P(Y = 1|X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(X = 0)} = \frac{0,1}{0,7} = 0,1429$$

Câu 3. (2 điểm) Cho 2 biến ngẫu nhiên có hàm mật độ đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \text{ khác.} \end{cases}$$

- a) Tìm hàm mật độ thành phần của Y .
b) Tìm hàm mật độ của X trong điều kiện $Y = 0.5$.
c) Tính xác suất $P(0 < X \leq 0.5 | Y = 0.5)$.


 **Đáp án tham khảo:**

$$a) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 \frac{2}{3}(x + 2y) dx = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y & \forall y \in [0, 1] \\ 0 & \forall y \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$b) f_X(x | Y = 0.5) = \frac{f(x, 0.5)}{f_Y(0.5)} = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 1) & \text{nếu } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$c) P(0 < X \leq 0.5 | Y = 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{2}{3}(x + 1) dx = \frac{5}{12}$$

Câu 4. (1.5 điểm) Malcheon Health Clinic tuyên bố rằng thời gian trung bình một bệnh nhân chờ khám không quá 20 phút. Một cuộc khảo sát ngẫu nhiên 15 bệnh nhân cho thấy thời gian chờ khám trung bình là 24.77 phút với độ lệch chuẩn có hiệu chỉnh là 7.26 phút. Giả sử thời gian chờ khám là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Dựa vào dữ liệu khảo sát, hãy kiểm tra tuyên bố của phòng khám đó có đúng không với mức ý nghĩa 0.05.

 **Đáp án tham khảo:**

Sử dụng phương pháp kiểm định giá trị trung bình (trường hợp 3)

$$H_0: \mu = 20, \quad H_1: \mu > 20$$

$$\text{hoặc } H_0: \mu \leq 20, \quad H_1: \mu > 20$$


$$\bar{x} = 24.77, \quad s = 7.26, \quad n = 15, \quad \alpha = 0.05$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{24.77 - 20}{7.26} \cdot \sqrt{15} = 2.5447$$

$$t_{(n-1, \alpha)} = t_{(14, 0.05)} \xrightarrow{\text{tra bảng A5}} t_\alpha = 1.761$$

Vì $t > t_\alpha \Rightarrow$ Bác bỏ H_0 , chấp nhận $H_1 \Rightarrow$ tuyên bố của phòng khám không đúng.

Câu 5. (2.5 điểm) Nếu một đồng xu có hai mặt cân bằng thì khi tung lên, tỉ lệ hiện mặt sấp và mặt ngửa là như nhau (nếu số lần tung đủ lớn). Do đó để kiểm tra một đồng xu có cân bằng hay không, người ta thử tung đồng xu đó 100 lần và thấy có 63 lần hiện mặt ngửa. Với mức ý nghĩa 0.05, có thể kết luận đồng xu đó không cân bằng hay không? Xây dựng khoảng tin cậy cho tỉ lệ xuất hiện mặt ngửa của đồng xu đó với độ tin cậy 95%.

 **Đáp án tham khảo:**

Sử dụng phương pháp kiểm định tỉ lệ và khoảng tin cậy tỉ lệ (ước lượng đối xứng)

$$H_0: p = 0.5, \quad H_1: p \neq 0.5$$

$$k = 63, \quad n = 100, \quad f = \frac{k}{n} = 0.63, \quad \alpha = 0.05$$

$$z = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \cdot \sqrt{n} = \frac{0.63 - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)}} \cdot \sqrt{100} = 2.6$$

$$\phi\left(\frac{z_\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9750 \xrightarrow{\text{tra bảng A4}} z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Vì $|z| > z_{\alpha/2} \Rightarrow$ bác bỏ H_0 , chấp nhận H_1

→ Có thể kết luận đồng xu không cân bằng.

Khoảng tin cậy cho p với $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$


$$\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.63(1-0.63)}{100}} = 0.09463$$

→ Khoảng tin cậy: 0.63 ± 0.0946

Câu 6. (1 điểm) Sau đây là dữ liệu về mã lực X và chiều dài quãng đường đi được Y (đơn vị dặm/gallon) của 12 động cơ:

X	151	220	198	134	213	121	247	162	239	140	253	237
Y	41	35	28	36.6	31.8	42.8	26.6	36.9	27.4	40.6	23.9	27.8

- Tính hệ số tương quan và nhận xét về tính tuyến tính của X và Y .
- Viết phương trình hồi qui tuyến tính của Y theo X . Dự đoán chiều dài quãng đường đi được khi mã lực bằng 350.

 **Đáp án tham khảo:**

a) Hệ số tương quan mẫu: $r = 0.91427 > 0.9 \rightarrow X, Y$ tương quan tuyến tính mạnh.

b) Phương trình hồi qui tuyến tính của Y theo X

$$Y = a + bX = 56.6476 - 0.1215X$$

$$\text{Khi mã lực } X = 350 \text{ thì } Y = 56.6476 - 0.1215 \cdot 350 = 14.1226$$