


Câu 1. (1.5 điểm) Tuổi thọ của một loại chip máy tính là đại lượng ngẫu nhiên X (đơn vị tính là giờ) có phân phối chuẩn, trong đó tuổi thọ trung bình là 120000 giờ và độ lệch chuẩn là $\sigma = 30000$ giờ.

- a) Tính tỷ lệ chip có tuổi thọ trên hơn 140000 giờ.
b) Hãy tính xác suất trong 100 chip loại này có ít nhất 20 chip có tuổi thọ trên 140000 giờ.

 **Đáp án tham khảo:**

- a) Gọi X là tuổi thọ của chip máy tính

Ta có: $X \sim N(\mu, \sigma)$, $\mu = 120000$, $\sigma = 30000$

Tỷ lệ cần tính:

$$\begin{aligned} p &= P(X > 140000) = 1 - P(X \leq 140000) \\ &= 1 - P\left(X \leq \frac{140000 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi(0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514 \end{aligned}$$

- b) Gọi Y là số chip có tuổi thọ trên 140000 (giờ) trong 100 chip.

Ta có: $Y \sim B(n, p)$, $n = 100$, $p = 0.2514$

$$\Rightarrow Y \sim N(\mu', \sigma'), \quad \mu' = np = 25.14, \quad \sigma' = \sqrt{np(1-p)} = 4.338$$


Xác suất cần tính:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 20) &= 1 - P(Y \leq 19) = 1 - P\left(X \leq \frac{19,5 - 25,14}{4,338}\right) \\ &= 1 - \Phi(-1,3) = 1 - 0,0968 = 0,9032 \end{aligned}$$

Câu 2. (1.5 điểm) Cho biến ngẫu nhiên X và Y có phân phối xác suất đồng thời như sau:

$P(x, y)$		x			
		1	2	3	4
y	1	0	0.06	0.06	0.10
	2	0.10	0.10	0.04	0.04
	3	0.40	0.10	0	0

- a) Tính X và Y độc lập nhau hay không? Vì sao?
b) Tính xác suất $P(X + Y \leq 3)$, $P(X > 1|Y = 2)$.

 **Đáp án tham khảo:**

- a) $P(X = 1) = 0 + 0.1 + 0.4 = 0.5$

$$P(Y = 1) = 0 + 0.06 + 0.06 + 0.1 = 0.22$$

Vì $P(X = 1, Y = 1) = 0 \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = 0.65$ nên X, Y không độc lập nhau.

$$b) P(X + Y \leq 3) = P(1,1) + P(1,2) + P(2,1) = 0 + 0.1 + 0.06 = 0.16$$

$$\begin{aligned} P(X > 1 | Y = 2) &= \frac{P(X > 1 \cap Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{P(2,2) + P(3,2) + P(4,2)}{P(1,2) + P(2,2) + P(3,2) + P(4,2)} \\ &= \frac{0.1 + 0.04 + 0.04}{0.1 + 0.1 + 0.04 + 0.04} = \frac{9}{14} = 0.643 \end{aligned}$$


Câu 3. (1.5 điểm) Cho 2 biến ngẫu nhiên X, Y có hàm mật độ đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy & \text{nếu } x \in [0, 2], y \in [1, 3], \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \text{ khác.} \end{cases}$$

a) Tìm C.

b) Tính xác suất $P(X \leq 1 \cap Y > 2)$.

c) Tính xác suất $P(X \leq 1 | Y > 2)$.

 **Đáp án tham khảo:**

$$a) \iint_{R^2} f(x, y) dx dy = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 \int_0^2 Cxy dx dy = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 \left(Cy \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) dy = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 (2Cy) dy = 1 \Leftrightarrow \left(Cy^2 \Big|_1^3 \right) = 1 \Rightarrow C = 0.125 = \frac{1}{8}$$

$$b) P(X \leq 1 \cap Y > 2) = \int_2^3 \int_0^1 \frac{1}{8} xy dx dy = \int_2^3 \left(y \frac{x^2}{16} \Big|_0^1 \right) dy = \frac{5}{32}$$

$$c) P(Y > 2) = \int_2^3 \int_0^2 \frac{1}{8} xy dx dy = \frac{5}{8}$$

$$P(X \leq 1 | Y > 2) = \frac{P(X \leq 1 \cap Y > 2)}{P(Y > 2)} = \frac{\frac{5}{32}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{4}$$

Câu 4. (2 điểm)

a) Khảo sát 500 websites mới đăng ký trên internet người ta phát hiện có 24 website vô danh. Xây dựng khoảng ước lượng cho tỷ lệ website vô danh trong số những website mới với độ tin cậy là 95%.

b) Nếu muốn ước lượng tỷ lệ người trưởng thành Việt Nam biết nhóm máu của mình với độ tin cậy 95% và sai số tối đa 0.02 thì cần khảo sát ít nhất bao nhiêu người?

 **Đáp án tham khảo:** (Sử dụng khoảng tin cậy cho tỷ lệ - ước lượng đối xứng)

$$a) n = 500, \quad k = 24, \quad f = \frac{k}{n} = 0.048, \quad 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$\phi\left(\frac{z_\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \xrightarrow{\text{tra bảng A4}} \frac{z_\alpha}{2} = 1,96$$

$$\varepsilon = \frac{z_\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,048 \cdot (1 - 0,048)}{500}} = 0,0187$$

Khoảng ước lượng: $[0,048 \pm 0,0187]$ hoặc $[0,0293; 0,0667]$

$$b) \varepsilon = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{4} - \left(f - \frac{1}{2}\right)^2}{n}} \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{1,96}{2\sqrt{n}} \quad \forall f$$

Chọn n sao cho $\frac{1,96}{2\sqrt{n}} \leq \underbrace{0,02}_{\varepsilon_{\max}}$ để $\varepsilon \leq 0,02 \quad \forall f$


$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{\frac{z_\alpha}{2}}{2\varepsilon_{\max}}\right)^2 = \left(\frac{1,96}{2 \cdot 0,02}\right)^2 = 2401$$

Vậy cần khảo sát ít nhất 2401 người để đạt được sai số như yêu cầu đề bài.

Câu 5. (2.5 điểm)

a) Tổ chức bảo vệ môi trường của Mỹ (EPA) quan tâm chất lượng nước uống phục vụ trên các chuyến bay. Họ kiểm tra ngẫu nhiên 112 chuyến bay và phát hiện có 14 chuyến bay phục vụ nước uống bị nhiễm khuẩn trên mức cho phép. Để biết có thể đưa ra kết luận rằng có trên 10% chuyến bay có nước bị nhiễm khuẩn hay không, họ có thể dùng bài toán kiểm định giả thiết. Hãy phát biểu giả thiết H_0 , và đối thiết H_1 của bài toán đó?

b) Sở cứu hỏa Scottsdale đặt mục tiêu là phản hồi những cuộc gọi cứu hỏa trong thời gian trung bình 4 phút. Thời gian phản hồi có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 1 phút. Một mẫu khảo sát gồm 18 cuộc gọi cứu hỏa với thời gian phản hồi trung bình là 4 phút 30 giây có chỉ ra rằng sở cứu hỏa đó không đạt được mục tiêu ở mức ý nghĩa $\alpha = 0.01$ không?

 **Đáp án tham khảo:**

Sử dụng kiểm định giá trị trung bình (trường hợp 1)

a) $H_0: p = 0.1, \quad H_1: p > 0.1$

b) $H_0: \mu = 4, \quad H_1: \mu > 4$

$\bar{x} = 4.5, \quad n = 18, \quad \alpha = 0.01, \quad \sigma = 1$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{4.5 - 4}{1} \sqrt{18} = 2,1213$$

$$\phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = 0,99 \xrightarrow{\text{tra bảng A4}} z_\alpha = 2,325$$

Vì $z < z_\alpha \Rightarrow$ chấp nhận H_0 , bác bỏ H_1

Vậy có thể kết luận sở cứu hỏa đó đạt được mục tiêu ở mức ý nghĩa là 0.01.


Câu 6. (1 điểm) Sau đây là dữ liệu về tốc độ vi xử lý (Microprocessor Speed) và công suất tiêu tán năng lượng (Power dissipation) của các loại chip

Chip	Microprocessor Speed (MHz)	Power Dissipation (watts)
1989 Intel 80486	20	3
1993 pentium	100	10
1997 Pentium II	233	35
1998 Intel Celeron	300	20
1999 Pentium III	600	42
1999 AMD Athlon	600	50
2000 Pentium 4	1300	51
2004 Celeron D	2100	73
2004 Pentium 4	3800	115
2005 Pentium D	3200	130
2007 AMD Phenom	2300	95
2008 Intel Core 2	3200	136
2009 Intel Core i7	2900	95
2009 AMD Phenom II	3200	125

Nguồn: <http://en.wikipedia.org> và New Scientist, 208, no. 2780 (October 2, 2010), p. 41.

a) Tính hệ số tương quan và đánh giá về tính tuyến tính (mạnh hay yếu) của mối liên hệ phụ thuộc giữa X và Y . Viết phương trình hồi qui tuyến tính của công suất tiêu tán năng lượng theo tốc độ vi xử lý.

b) Dự đoán về công suất tiêu tán năng lượng nếu tốc độ vi xử lý là 3500 MHz?

 **Đáp án tham khảo:**

a) Hệ số tương quan mẫu: $r = 0,962 > 0,9 \rightarrow X, Y$ tương quan tuyến tính mạnh.
Phương trình hồi qui tuyến tính của công suất tiêu tán năng lượng (Y) theo tốc độ vi xử lý (X) là:

$$Y = a + bX = 15,73 + 0,0319X$$

b) Khi tốc độ vi xử lý $X = 3500$ MHz thì công suất $Y = 127,38$.

c)