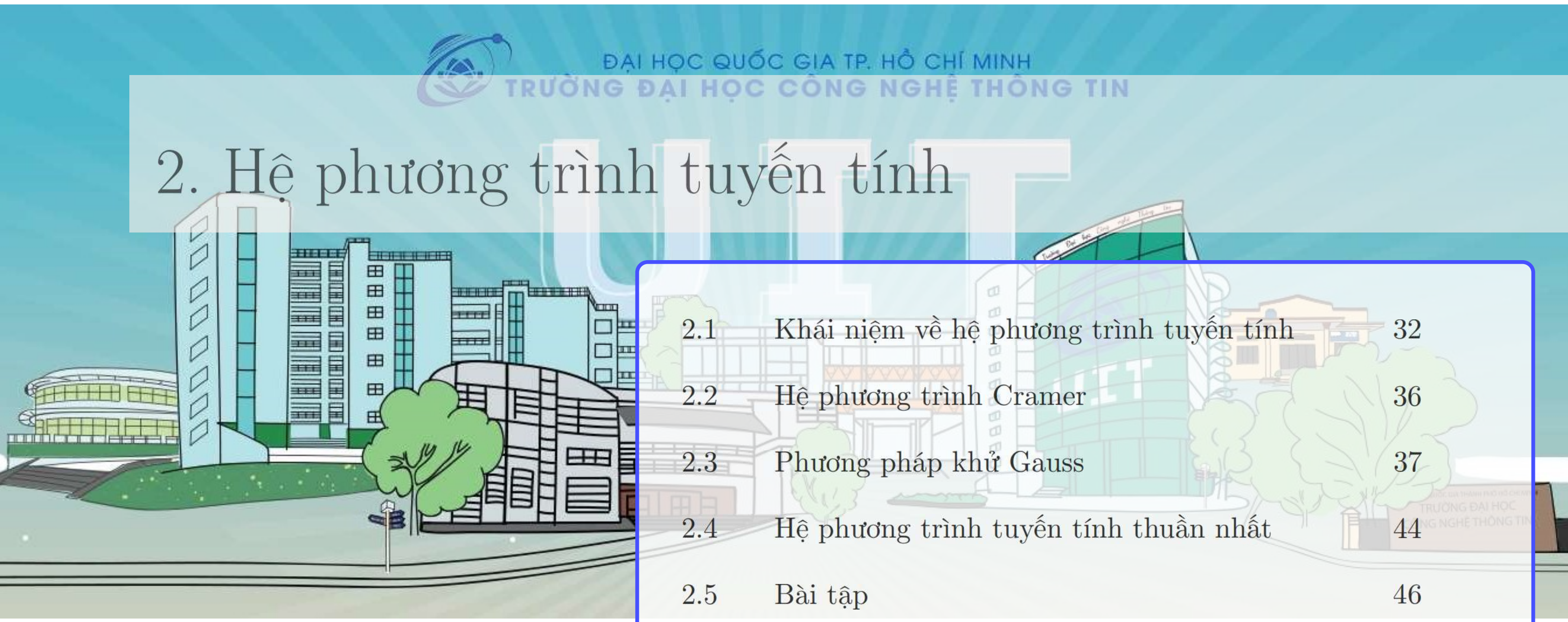

2. Hệ phương trình tuyến tính

2.1 Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

Chúng ta đã từng gặp những phương trình có dạng

$$ax + by = c$$

trong đó a, b, c là các hằng số. Đây là phương trình tuyến tính hai biến số x và y. Tương tự, phương trình có dạng

$$ax + by + cz = d$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số, được gọi là phương trình tuyến tính ba biến số x, y và z. Tổng quát hơn, một phương trình tuyến tính n biến số được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1.1 (Phương trình tuyến tính) Một phương trình tuyến tính n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một phương trình có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ là các số thực.

Chú ý. Trong các phương trình tuyến tính không chứa tích hay căn của các biến số và không có biến số nào liên quan đến các hàm số lượng giác, hàm số mũ hay hàm logarit. Các biến số có trong phương trình chỉ có lũy thừa 1.

Ví dụ 2.1.2 Các phương trình sau là phương trình tuyến tính:
(i) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$.
(ii) $\sqrt{2}x_1 + \sin(\frac{\pi}{5})x_2 + x_3 = 0$.
(iii) $x_1 - \log_3^8 x_3 = \pi^4$.
Các phương trình sau không là phương trình tuyến tính:
(i) $2x^2 + 3x = 5$.

(ii) $\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 = 0$.

(iii) $\dfrac{2}{x_1} - x_3 = \pi^4$.

(iv) $x_1 + \cos x_2 + \sin x_3 = 8$

Định nghĩa 2.1.3 (Hệ phương trình tuyến tính) Một hệ phương trình tuyến tính m phương trình n biến số là một tập hợp gồm m phương trình tuyến tính n biến số được cho như sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Các số a_{ij} được gọi là hệ số của x_j; b_i được gọi là các hệ số tự do.

Ví dụ 2.1.4 Hệ 3 phương trình 4 biến số

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Định nghĩa 2.1.5 (Nghiệm) Nghiệm của hệ (2.1) là bộ n số $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ sao cho khi thay $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ thì hai vế của hệ phương trình 2.1 trở thành các đẳng thức. Việc tìm tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính được gọi là giải hệ phương trình tuyến tính đó.

Ví dụ 2.1.6 Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Từ phương trình cuối, ta có $x_3 = 3$. Sau khi thế vào phương trình thứ hai, suy ra $x_2 - 3.(3) = -1$ và do đó $x_2 = 8$. Cuối cùng, từ phương trình thứ nhất, ta được $x_1 + 8 - 3 = 2$ hay $x_1 = -3$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(-3, 8, 3)\}$.

Định nghĩa 2.1.7 (Hệ phương trình tương đương) Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng số biến được gọi là tương đương nếu chúng có các nghiệm giống nhau.

Ví dụ 2.1.8 Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 13 \end{cases}$$

có duy nhất một nghiệm $(-3, 8, 3)$.
Do đó, hai hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - 3x_3 = -1 \\ \phantom{x_1 + x_2 - {}} x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 13 \end{cases}$$

tương đương nhau.

Để đơn giản hóa việc giải các hệ phương trình tuyến tính, ta sẽ dùng một công cụ mới đó là ma trận.

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, ta chỉ biến đổi các hệ số của các biến và các hằng số ở phía bên tay phải để tìm ra nghiệm. Bằng cách sử dụng ma trận, chúng ta có thể ghi lại quá trình biến đổi các hệ số và các hằng số. Ví dụ, các hệ số và các hằng số của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau $\overline{A}$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

Ma trận này được gọi là ma trận bổ sung của hệ phương trình tuyến tính. Chú ý rằng một hệ phương trình tuyến tính $m \times n$ có ma trận bổ sung là $m \times (n+1)$. Ma trận bổ sung mà bỏ đi cột cuối cùng

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận hệ số. Chú ý rằng ta thay 0 vào vị trí các hệ số không có mặt trong hệ phương trình.

Định nghĩa 2.1.9 Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình n biến số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

Ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số của hệ phương trình (2.2) và ma trận

$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ được gọi là ma trận bổ sung (ma trận mở rộng).

Ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận biến số.

Ma trận cột $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số tự do.

Với các kí hiệu bên trên, hệ phương trình tuyến tính (2.2) được viết lại dưới dạng phương trình ma trận như sau

$$AX = B$$

và ta gọi đây là dạng ma trận của hệ 2.1.

Ví dụ 2.1.10 Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

có ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

2.2 Hệ phương trình Cramer

Hệ phương trình Cramer được đặt theo tên của nhà toán học Gabriel Cramer (1704 –1752).

Định nghĩa 2.2.1 (Hệ phương trình Cramer) Hệ phương trình Cramer là hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ trong đó A là ma trận vuông và $\det(A) \neq 0$.

Định lý 2.2.2 (Quy tắc Cramer) Hệ phương trình Cramer luôn có duy nhất một nghiệm xác định bởi

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

trong đó A_i là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ i bằng cột B.

Chứng minh. Đặt I_i là ma trận nhận được từ I bằng cách thay cột thứ i bởi cột X. Khi đó hệ phương trình tương đương với phương trình ma trận

$$AI_i = A_i \text{ và } \det(AI_i) = \det(A_i).$$

Vì $\det(A) \neq 0$ nên $\det(I_i) = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$. Ta tính định thức của ma trận I_i bằng cách khai triển theo cột thứ i, ta được

$$\det(I_i) = x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

và ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2.2.3 Giải hệ phương trình Cramer sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Giải. Ta có ma trận bổ sung của hệ phương trình như sau

$$\overline{A} = [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

và các định thức $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 18$,

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -14,\ |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Khi đó

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = -9, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 7, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -4$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(-9,7,-4)\}$. □

Ví dụ 2.2.4 Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau là một hệ Cramer. Sau đó, hãy tìm nghiệm.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2).$$

Hệ phương trình đã cho là hệ Cramer khi $\det(A) \neq 0$ hay

$$(m-1)^2(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, m \neq -2.$$

Khi đó

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2;\ |A_2| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2;\ |A_3| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2.$$

và

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1}{m+2};\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{m+2};\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{m+2}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2})\}$.

2.3 Phương pháp khử Gauss

Định lý dưới đây cho ta các phép biến đổi một hệ phương trình tuyến tính thành một phương trình tuyến tính tương đương với nó.

Định lý 2.3.1 Các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ phương trình tuyến tính tương đương:

(i) Đổi chỗ hai phương trình cho nhau, các phương trình khác giữ nguyên.

(ii) Nhân một số khác 0 và một phương trình, các phương trình còn lại giữ nguyên.

(iii) Cộng vào một phương trình một phương trình khác đã nhân với một số, các phương trình còn lại giữ nguyên.

Ta chú ý rằng các phép biến đổi tương đương trên hệ phương trình tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận bổ sung. Hơn nữa, các phép biến đổi tương đương trên hệ phương trình chỉ liên quan đến biến đổi các hệ số. Để giải một hệ phương trình tuyến tính, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang. Phương pháp này được gọi là phương pháp khử Gauss.

Định nghĩa 2.3.2
- Số đầu tiên khác 0 của một hàng (tính từ trái sang) được gọi là phần tử cơ sở của hàng đó.
- Ma trận bậc thang thu gọn là ma trận bậc thang mà các phần tử cơ sở của hàng bằng 1.

Ví dụ 2.3.3 Các ma trận sau là ma trận bậc thang thu gọn

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Định lý 2.3.4 Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n biến số. Giả sử A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận bổ sung. Khi đó

(i.) Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

(ii.) Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ thì hệ phương trình trình đã cho có duy nhất một nghiệm.

(iii.) Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = k < n$ thì hệ phương trình trình đã cho có vô số nghiệm phụ thuộc $n-k$ tham số.

Trong phương pháp khử Gauss, chúng ta sẽ làm việc lần lượt trên từng cột của ma trận bổ sung. Bắt đầu với cột đầu tiên, chúng ta chọn hàng 1 làm hàng bắt đầu. Ta sẽ biến đổi phần tử nằm ở vị trí (1,1) thành 1 (phần tử cơ sở của hàng 1) và nhằm mục tiêu biến đổi các phần tử bên dưới nó bằng 0. Sau khi cột 1 được đơn giản hóa, chúng ta chuyển sang cột 2 bên phải. Sau khi mỗi cột được đơn giản hóa, chúng ta chuyển sang cột kế bên phải. Trong mỗi cột, nếu có thể, chúng ta chọn một phần tử cơ sở nằm ở hàng tiếp theo thấp hơn phần tử cơ sở của hàng trên và biến đổi nó thành 1. Hàng chứa phần tử cơ sở hiện tại được gọi là hàng cơ sở. Các số bên dưới mỗi phần tử cơ sở sẽ được chuyển đổi thành 0 trước khi tiếp tục sang cột tiếp theo. Quá trình chuyển sang các cột kế tiếp được thực hiện cho đến khi chúng ta đến đường gạch đứng hoặc hết hàng để sử dụng làm hàng cơ sở.

Phương pháp khử Gauss. [1] Các bước sau đây tóm tắt một quá trình để giải một hệ phương trình tuyến tính.

1. Viết ma trận bổ sung của hệ phương trình tuyến tính.
2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng để đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang thu gọn.
3. Chuyển ma trận cuối cùng về dạng một hệ phương trình tuyến tính (tương đương với phương trình ban đầu).
4. Sử dụng thay thế lùi để tìm các nghiệm.
5. Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì ta đặt các tham số tương ứng cho các biến có hệ số không phải là phần tử cơ sở.

Ví dụ 2.3.5 Cho các ma trận bổ sung, hãy tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tương ứng:

a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$ b. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right]$ c. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Giải. a. Từ ma trận ta có nghiệm $x_3 = \dfrac{-6}{-3} = 2, x_2 = 4, x_1 = 6$. Hệ phương trình có duy nhất một nghiệm là $\{(6, 4, 2)\}$.
b. Ma trận bổ sung có dạng bậc thang và $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. Do đó, hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm và phụ thuộc 1 tham số (số biến trừ $r(A)$). Đặt $x_3 = t$ (hệ số của x_3 không phải là phần tử cơ sở), ta tính được

$$x_4 = -2, x_2 = 4 + t, x_1 = 6 - x_2 = 2 - t.$$

Vì thế, nghiệm của hệ phương trình là $\{(2 - t, 4 + t, t, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
c. Từ ma trận bổ sung, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

[1] Gauss (1777-1855) được xem là một trong ba nhà toán học vĩ đại nhất, cùng với Archimedes và Newton. Khi 11 tuổi, ông đã chứng minh được $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỉ. Khi 18 tuổi, ông có thể dựng được một đa giác đều 17 cạnh bằng compa và thước không có chia vạch.

Vì $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc 1 tham số (số biến trừ $r(A)$). Đặt $x_3 = a, x_4 = b$ (các biến có hệ số không phải là phần tử cơ sở), khi đó

$$x_2 = 4 + 2a; x_1 = 6 + x_2 + x_4 = 10 + 2a + b.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(10 + 2a + b, 4 + 2a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. □

Ví dụ 2.3.6 Tìm ma trận bổ sung và giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

Giải. Ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -1 \end{array}\right]$$

Thực hiện các phép biến đổi trên hàng để đưa ma trận về dạng bậc thang

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vì $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc 2 tham số (số biến trừ $r(A)$). Đặt $x_3 = a, x_4 = b$ (các biến có hệ số không phải là phần tử cơ sở), khi đó

$$x_1 = 1 - 5x_4 + 3x_3 - 2x_2 = 7 - 13b + 7a \text{ và } x_2 = -3 + 4x_4 - 2x_3 = -3 + 4b - 2a$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(7 + 7a - 13b, -3 - 2a + 4b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. □

Ví dụ 2.3.7 Tìm nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Từ ma trận cuối, ta thấy
$$r(A) = 2 < 3 = r(\overline{A}).$$
Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □

Ví dụ 2.3.8 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung của hệ phương trình như sau

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 5h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 7 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - 3h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right]$$

Theo Định lí 2.3.4, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -5 \\ -2x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(-9, 7, 4)\}$. □

Ví dụ 2.3.9 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -11 \\ 4x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

Giải. Ta có ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

Trong trường hợp hệ số đầu tiên của cột 1 không bằng 1, ta sẽ dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để chuyển nó thành 1. Cụ thể, ta có thể biến đổi như sau:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{h_1 \to \frac{1}{3}h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_3 - 4h_1]{h_2 \to h_2 + 2h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2 \to \frac{1}{2}h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - 6h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ta thấy $r(A) = r(\overline{A}) = 2$, do đó hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm và phụ thuộc 2 tham số (số biến trừ $r(A)$). Các tham số được đặt cho các biến có hệ số không phải là phần tử cơ sở (đặt $x_4 = a, x_2 = b$). Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Đặt $x_4 = a, x_2 = b$, khi đó

$$x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}a$$

và

$$x_1 = 4 - x_4 + 2x_2 = 4 - a + 2b.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(4 - a + 2b, b, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}a, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ví dụ 2.3.10 Tìm các số A, B thỏa mãn

$$\frac{3x+1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

Giải. Biến đổi vế phải

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A - B}{x^2+2x-3}$$

Đồng nhất hệ số, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 3A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Như vậy $\dfrac{3x+1}{x^2+2x-3} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+3}$.

Ví dụ 2.3.11 Tìm đa thức bậc hai $p(x) = ax^2 + bx + c$ biết

$$p(0) = 1, p(-1) = 4, p(2) = 1.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= p(0) = a.0 + b.0 + c \\ 4 &= p(-1) = a.(-1)^2 + b(-1) + c \\ 1 &= p(2) = a.2^2 + b.2 + c \end{aligned}$$

hay hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $p(x) = x^2 - 2x + 1$.

Ví dụ 2.3.12 Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + 2y + m^2 z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \\ x + 3y + 9z = 3 \end{cases}$$

Giải. Xét ma trận bổ sung của hệ phương trình

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m^2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 - m^2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 - m^2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m^2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 - m^2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 - m^2 & 1 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình có nghiệm khi $r(A) = r(\overline{A})$. Do đó $r(A) = 3$ hay $m^2 - 4 \neq 0$. Như vậy $m \neq \pm 2$.

Ví dụ 2.3.13 Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

Giải. Biến đổi ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 5 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 1 & 7 & -4 & 11 & m\\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 0 & 5 & 3\\ 1 & 7 & -4 & 11 & m\\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 - h_1\\ h_4 \to h_4 - 4h_1}]{h_2 \to h_2 - 3h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3\\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2 \to -\frac{1}{3}h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & \frac{7}{3} & 1\\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - 5h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & \frac{7}{3} & 1\\ 0 & 0 & 2 & -\frac{14}{3} & m-7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

- Nếu $m \neq 7$ thì $r(A) = 3 < 4 = r(\overline{A})$. Khi đó hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 7$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$. Khi đó hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc 1 tham số. Đặt $x_4 = a$, khi đó

$$x_3 = \frac{7}{3}a; x_2 = 1 + x_3 - \frac{7}{3}x_4 = 1; x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -\frac{5}{3}a.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\{(-\frac{5}{3}a, 1, \frac{7}{3}a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

2.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 2.4.1 Hệ phương trình tuyến tính n biến số được gọi là tuyến tính thuần nhất nếu nó có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\ \qquad\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Ví dụ 2.4.2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Bộ n-số $(0, 0, \ldots, 0)$ luôn là nghiệm của hệ phương trình (2.3) và nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

Ta thấy rằng một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất hoặc có nghiệm tầm thường hoặc có vô số nghiệm. Nếu ta tìm được một nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất thì hệ phương trình này có vô số nghiệm.

Nhận xét 2.4.3

1. $r(A) = r(\overline{A})$
2. Nếu $r(A) = n$ thì hệ phương trình có duy nhất một nghiệm (nghiệm tầm thường)
3. Nếu $r(A) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm, phụ thuộc $n - k$ tham số.

Giả sử $n - k$ tham số này là $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$. Lần lượt cho:

- $t_1 = 1, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm kí hiệu X_1
- $t_1 = 0, t_2 = 1, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm kí hiệu X_2
- ...
- $t_1 = 0, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 1$, tìm được 1 nghiệm kí hiệu X_{n-k}

Khi đó $X_1, X_2, \ldots, X_{n-k}$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất.

Ví dụ 2.4.4 Tìm nghiệm và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải: Ta xét ma trận bổ sung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ta thấy $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc vào 2 tham số.

Đặt $x_3 = t_1; x_4 = t_2$, suy ra

$$x_2 = 4x_4 - 2x_3 = 4t_2 - 2t_1$$
$$x_1 = -5x_4 + 3x_3 - 2x_2 = -13t_2 + 7t_1$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là

$$\{(-13t_2 + 7t_1, 4t_2 - 2t_1, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Cho $t_1 = 1, t_2 = 0$ ta được 1 nghiệm cơ bản là $X_1 = (7, -2, 1, 0)$.
Cho $t_1 = 0, t_2 = 1$ ta được 1 nghiệm cơ bản là $X_2 = (-13, 4, 0, 1)$.
Vậy hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình là $(7, -2, 1, 0), (-13, 4, 0, 1)$.

2.5 Bài tập

Bài tập 2.1 Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 8x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 15x_4 = -9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -17 \\ 8x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 47 \\ -5x_1 + 9x_2 - 13x_3 + 3x_4 = -44 \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -25 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5 \\ -6x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -11 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 - 5x_3 + 16x_4 - 2x_5 = -53 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 9x_4 + x_5 = 29 \\ -4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 33 \end{cases}$

Bài tập 2.2 Tìm các đa thức bậc ba $p(x)$ biết

$$p(1) = 2, p(-1) = -4, p(2) = 8, p(-2) = -28.$$

Bài tập 2.3 Tìm một hàm số bậc 3 có đồ thị đi qua các điểm $(-3, 120), (-2, 51), (3, -24), (4, -69)$.

Bài tập 2.4 Cho a, b là các số thực và cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + 2y + 3z = b \\ 3x + 3y + 4z = a + b \end{cases}$$

a. Tìm tất cả các giá trị của a, b để hệ phương trình trên có nghiệm. Khi đó, hãy tìm các nghiệm của hệ trên theo a, b.
b. Tìm a, b để hệ phương trình có duy nhất một nghiệm.

Bài tập 2.5 Giải và biện luận nghiệm của hệ phương trình

a. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = m \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2m \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = m \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2m+1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

Bài tập 2.6 Tìm nghiệm và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình

a. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_2 + 6x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

Bài tập 2.7 Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường. Khi đó hãy tìm nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_1 + mx_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$