1. Ma trận - Định thức

Chúng ta sẽ tìm hiểu khái niệm ma trận, biết thực hiện các phép toán cộng ma trận, nhân một số với một ma trận, nhân hai ma trận; cách tìm hạng của ma trận và tìm ma trận nghịch đảo. Bên cạnh đó, định thức của một ma trận cũng sẽ được đề cập đến trong chương này.

1.1 Ma trận

Định nghĩa 1.1.1 (Ma trận) Một ma trận cấp $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ trên tập $\mathbb{R}$ là một bảng gồm $m \times n$ số được sắp xếp thành m hàng, n cột theo một thứ tự nhất định. Ma trận A cấp $m \times n$ được viết dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ hay } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hay } A = (a_{ij})_{m\times n}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$; phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j của ma trận A được kí hiệu là a_{ij}

Chú ý: Nếu không nói gì thêm thì ta luôn xét các ma trận trên tập số thực.

Ví dụ 1.1.2 Ta có $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp 2×3; ma trận $B = [2]$ là ma trận cấp 1×1.

Tập các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Định nghĩa 1.1.3 Một ma trận có số hàng bằng số cột (bằng n) được gọi là ma trận vuông cấp n. Tập các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $M_n(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1.1.4 Các ma trận sau là các ma trận vuông

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.5 (Ma trận không) Ma trận không là ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0. Kí hiệu là 0.

Ví dụ 1.1.6 Ta có các ma trận không

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.7 (Ma trận chéo) Ma trận vuông A được gọi là ma trận chéo nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Ví dụ 1.1.8 Các ma trận sau là ma trận chéo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Trong ma trận vuông $A = (a_{ij})$, các số a_{ii} được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo chính của A.

Định nghĩa 1.1.9 (Ma trận đơn vị) Ma trận đơn vị là ma trận vuông mà các phần tử $a_{ii} = 1$, các phần tử còn lại bằng 0, kí hiệu I_n hoặc I

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.1.10 Các ma trận sau là ma trận đơn vị

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.11 Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n.
(i) Ma trận A được gọi là ma trận tam giác trên nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$.
(ii) Ma trận A được gọi là ma trận tam giác dưới nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$.

Ví dụ 1.1.12 Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó A là một ma trận tam giác trên, B là một ma trận tam giác dưới và C là một ma trận chéo.

Nhận xét 1.1.13 Ma trận chéo cũng là ma trận tam giác trên (dưới). Các phần tử trên đường chéo chính a_{ii} của một ma trận chéo có thể bằng 0 hoặc khác 0.

Định nghĩa 1.1.14 (i) Ma trận cột là ma trận chỉ có một cột, tức là các ma trận có dạng

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

(ii) Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng, tức là các ma trận có dạng

$$\begin{bmatrix} a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.15 (Ma trận bằng nhau) Hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cấp $m \times n$, và các vị trí tương ứng cũng bằng nhau $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Định nghĩa 1.1.16 (Ma trận chuyển vị) Ma trận chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ kí hiệu là $A^T = (b_{ij})_{n\times m}$ trong đó

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Ta cũng nói A^T là chuyển vị của ma trận A.

Ví dụ 1.1.17 Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ có ma trận chuyển vị là $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa 1.1.18 (Ma trận đối xứng) Ma trận A được gọi là ma trận đối xứng nếu $A = A^T$, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Ví dụ 1.1.19 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A là đối xứng, ma trận B không là đối xứng.

Định nghĩa 1.1.20 (Cộng hai ma trận) Tổng của hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và ma trận $B = (b_{ij})_{m\times n}$ được xác định như sau

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Ví dụ 1.1.21 Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+5 & 3+8 \\ 2+4 & 4+5 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Chú ý. Tổng của hai ma trận khác cấp không tồn tại.

Định lý 1.1.22 Cho A, B, C là các ma trận cấp $m \times n$. Khi đó

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) $0 + A = A$

Định nghĩa 1.1.23 (Nhân một số với một ma trận) Phép nhân một số c với ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ được xác định như sau

$$cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Ta có thể viết $-A$ thay cho $(-1)A$. Nếu A, B là các ma trận cùng cấp thì $A - B$ được viết thay cho $A + (-1)B$.

Ví dụ 1.1.24 Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Tính $2A, -B, 2A - B$.

Giải. $2A = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 2.4 & 2.5 & 2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

$-B = -1.\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

$2A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix}$ □

Định lý 1.1.25 Cho A, B, C là các ma trận cấp $m \times n$ và $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $(a+b)A = aA + bA$

(ii) $a(A+B) = aA + aB$

(iii) $1.A = A$

(iv) $0.A = 0$

(v) $a.0 = 0$

(vi) $a(bA) = (ab)A$

Định nghĩa 1.1.26 (Phép nhân hai ma trận) Tích của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times p}$ là một ma trận cấp $m \times p$, kí hiệu $AB = (c_{ik})_{m\times p}$ trong đó

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Chú ý. Tích hai ma trận AB chỉ thực hiện được khi số cột của A bằng số hàng của B.

Ví dụ 1.1.27 Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 15 & 16 \\ 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$$

Tính AB và BA.

Giải. Đặt $C = AB$ là ma trận cấp 3×2 như sau:

Phần tử c_{11}: lấy các phần tử ở dòng 1 của ma trận A nhân tương ứng với các phần tử của cột 1 của ma trận B, sau đó cộng tất cả lại với nhau.

$$c_{11} = 1.13 + 2.15 + 3.17 + 4.19 = 170$$

Phần tử c_{12}: lấy các phần tử ở dòng 1 của ma trận A nhân tương ứng với các phần tử của cột 2 của ma trận B, sau đó cộng tất cả lại với nhau.

$$c_{12} = 1.14 + 2.16 + 3.18 + 4.20 = 180$$

Tương tự như vậy ta tính được các phần tử còn lại.

Vậy $C = AB = \begin{bmatrix} 170 & 180 \\ 426 & 452 \\ 682 & 724 \end{bmatrix}$

Ma trận BA không tồn tại vì số cột của B là 2 khác số hàng của A là 3. □

Chú ý. Cho hai ma trận A, B. Tích AB hoặc BA có thể không tồn tại.

Định lý 1.1.28 Cho A, B, C là các ma trận và $a \in \mathbb{R}$. Giả sử các phép toán sau thực hiện được. Khi đó

(i) $(AB)C = A(BC)$

(ii) $IA = A$ và $AI = A$ với I là ma trận đơn vị

(iii) $A(B + C) = AB + AC$

(iv) $(A + B)C = AC + BC$

(v) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Chú ý. Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán.

Cho A là một ma trận vuông. Ta viết A^k thay cho $A.A.\dots A$ (k lần). Ta qui ước $A^0 = I$ (ma trận đơn vị).

Ví dụ 1.1.29 Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a. Tính $A^2, (A + B)^2$ và $A^2 + 2AB + B^2$.

b. Đẳng thức $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ đúng hay sai?

Giải. a. Ta có

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 35 \\ 5 & 71 \end{bmatrix}$$

Ta thấy rằng $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$ và

$$A + B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

Do đó $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 208 \\ 39 & 169 \end{bmatrix}$.

Ta có

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 35 \\ 5 & 71 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 42 & 66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 43 & 72 \\ 16 & 27 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 57 & 95 \\ 63 & 164 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b. Từ các tính toán trong a, ta thấy rằng

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Chú ý rằng phép nhân các ma trận không có tính giao hoán, tức là AB nói chung là khác BA. Cụ thể, ta có

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 21 & 33 \end{bmatrix} \text{ và } BA = \begin{bmatrix} -6 & 107 \\ -3 & 38 \end{bmatrix}$$

Do đó

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Ví dụ 1.1.30 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n theo n với $0 \neq n \in \mathbb{N}$.

Giải. Ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

và tổng quát ta có

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \text{ với } n \geq 1.$$

Ta sẽ chứng minh phát biểu trên bằng phương pháp quy nạp. Đầu tiên, ta chứng minh phát biểu trên đúng với $n = 1$. Khi đó

$$A^1 = \begin{bmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Giả sử

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix}$$

với $k \geq 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh phát biểu đúng với $n = k+1$. Sử dụng tính chất lũy thừa ma trận và giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{(k+1)-1} & 2^{(k+1)-1} \\ 2^{(k+1)-1} & 2^{(k+1)-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Như vậy $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$ với mọi $n \geq 1$. □

Định lý 1.1.31 Cho A, B là các ma trận cấp $m \times n$, C là ma trận cấp $n \times p$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó:

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(AC)^T = C^T A^T$

(iii) $(A^T)^T = A$

(iv) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Định nghĩa 1.1.32 Cho đa thức

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

và ma trận vuông A. Khi đó

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I,$$

trong đó I là ma trận đơn vị.

Ví dụ 1.1.33 Cho đa thức $f(x) = x^2 + 3x + 5$ và $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Tính $f(A)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 + 3A + 5I \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 35 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 50 \\ 10 & 38 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ứng dụng vào đồ thị

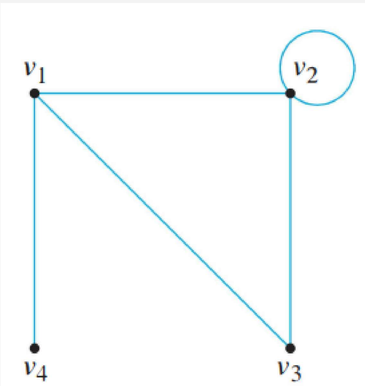
Một đồ thị gồm hữu hạn điểm (gọi là đỉnh) và hữu hạn các cạnh nối hai đỉnh với nhau (không nhất thiết là hai đỉnh khác nhau). Ta nói hai đỉnh là kề nếu chúng là hai đầu mút của một cạnh.

Ta có thể thu thập các thông tin của một đồ thị thông qua một ma trận và sử dụng các tính chất của ma trận để trả lời một số câu hỏi liên quan đến đồ thị. Điều này rất có ích khi ta dùng máy tính để tính toán với các đồ thị lớn.

Định nghĩa 1.1.34 Nếu G là một đồ thị gồm n đỉnh thì ma trận kề là một ma trận A (hoặc $A(G)$) cấp n được xác định bởi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu có một cạnh giữa } i \text{ và } j \\ 0 \text{ trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Ví dụ 1.1.35 Cho đồ thị như hình



có ma trận kề liên kết là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.1.36 Một đường đi trong đồ thị là một dãy các cạnh cho phép ta đi liên tục từ một đỉnh này đến một đỉnh khác. Độ dài của một đường đi là số cạnh trong đường đi đó. Nếu đường đi có k cạnh thì ta gọi nó là k-đường đi (k-path). Một đường đi có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là một chu trình. Một đường đi không đi qua bất kì cạnh nào hai lần được gọi là đường đi đơn.

Chúng ta có thể sử dụng lũy thừa của ma trận kề để cho ta thông tin về độ dài đường đi trong đồ thị. Xét ma trận kề trong Ví dụ 1.1.35, ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Các phần tử trong A^2 cho ta thông tin gì? Ta xem phần tử tại vị trí $(2,3)$. Từ định nghĩa của phép nhân ma trận, ta thấy

$$(A^2)_{23} = a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} + a_{24}a_{43}.$$

Ta thấy rằng $a_{2k}a_{k3} \neq 0$ nếu a_{2k} và a_{k3} đều khác 0, nghĩa là ta có một cạnh giữa đỉnh v_2 và đỉnh v_k và có một cạnh giữa đỉnh v_k và đỉnh v_3. Do đó, ta có một 2-đường đi giữa v_2 và v_3. Theo ví dụ này, ta có $k = 1$ và $k = 2$ và do đó

$$(A^2)_{23} = 1.1 + 1.1 + 1.0 + 0.0 = 2$$

có nghĩa là có hai 2-đường đi giữa đỉnh v_2 và đỉnh v_3. Từ đây,ta có thể tổng quát thành một kết quả như sau.

Mệnh đề 1.1.37 Cho A là một ma trận kề của một đồ thị. Khi đó phần tử ở vị trí (i,j) trong ma trận A^k bằng với số k-đường đi từ đỉnh i đến đỉnh j.

1.2 Định thức

Định nghĩa 1.2.1 (Định thức của ma trận cấp 1, 2 và 3) Cho A là một ma trận vuông. Định thức của ma trận A là một số được kí hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$. Định thức của các ma trận cấp 1, 2 ,3 như sau:

- Nếu $A = [a]$ là ma trận vuông cấp 1 thì định thức của A là $\det(A) = a$.
- Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2 thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3 thì

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.2 Tính các định thức

a. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.2 = -1.$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 3.5.7 - 2.4.9 - 1.6.8 = 0.$

Định nghĩa 1.2.3 (Phần bù đại số) Cho A là ma trận vuông cấp n, ta kí hiệu M_{ik} là ma trận vuông cấp $n-1$ nhận được từ ma trận A bằng cách bỏ hàng thứ i và cột thứ k. Khi đó $A_{ik} = (-1)^{i+k}\det(M_{ik})$ được gọi là phần bù đại số của a_{ik}.

Ví dụ 1.2.4 Cho ma trận cấp 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Phần bù đại số của a_{11} là $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -7.$

Phần bù đại số của a_{12} là $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -1.(-55) = 55.$

Phần bù đại số của a_{14} là $(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -1.17 = -17$

Định nghĩa 1.2.5 (Định thức của ma trận cấp n) Cho A là một ma trận vuông cấp n. Định thức của A được tính bởi công thức sau:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

hay

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

trong đó $1 \le i \le n$.

Việc dùng định nghĩa trên để tính định thức được gọi là tính định thức bằng cách khai triển theo hàng i.

Ví dụ 1.2.6 Tính định thức của ma trận

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Giải. a. Tính định thức của ma trận A bằng cách khai triển theo hàng 1 như sau

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (5.9 - 6.8) - 2(4.9 - 6.7) + 3(4.8 - 5.7) \\ &= -3 - 2.(-6) + 3.(-3) = 0\end{aligned}$$

b. Tính định thức của ma trận B bằng cách khai triển theo hàng 1 như sau

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1.(-7) + 3.55 + 2.(-17) = 124.\end{aligned}$$

Ngoài việc tính định thức bằng cách khai triển theo hàng i, ta có thể tính định thức bằng cách khai triển theo một cột j bất kì nào đó.

Định lý 1.2.7 Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n. Khi đó

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

trong đó $1 \le j \le n$.

Ví dụ 1.2.8 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Giải. Ta thấy cột thứ 3 có nhiều số 0, vì vậy định thức có thể được tính bằng cách khai triển theo cột thứ 3. Khi đó

$$D = 2.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix} = -2.(-20) = 40$$

Việc tính định thức của một ma trận tam giác trên (dưới) khá đơn giản.

Định lý 1.2.9 Nếu A là ma trận tam giác trên thì định thức của A bằng tích các phần tử trên đường chéo chính, tức là

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Ví dụ 1.2.10 Tính định thức của ma trận tam giác trên

$$A = \begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Giải. Áp dụng định lý bên trên, ta có $\det(A) = 2.1.(-3).6 = -36$. □

Định lý 1.2.11 Định thức không thay đổi qua phép chuyển vị, nghĩa là $|A^T| = |A|$.

Ví dụ 1.2.12 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{bmatrix} \text{ và } A^T = \begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

Khi đó $\det A =$ và $\det A^T =$

Vì chuyển vị của một ma trận thực chất là chuyển hàng thành cột nên ta suy ra rằng vai trò của các hàng và các cột là bình đẳng. Mỗi mệnh đề về định thức nếu đã đúng trên hàng thì cũng sẽ đúng trên cột, và ngược lại. Do đó, từ nay về sau ta chỉ phát biểu các tính chất đối với hàng (hiển nhiên cũng đúng đối với cột).

Định lý 1.2.13 Cho A là một ma trận vuông. Khi đó $\det(A) = 0$ nếu một trong các điều sau xảy ra

1. Ma trận A có một hàng (cột) gồm các số 0.
2. Ma trận A có hai hàng (cột) giống nhau.
3. Ma trận A có một hàng (cột) này là bội của một hàng (cột) khác.

Ví dụ 1.2.14 a. Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

vì định thức trên có hàng 1 là hàng gồm các số 0.
b. Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

vì định thức trên có hàng 1 và hàng 3 giống nhau.
c. Định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

vì định thức trên có hàng 2 gấp 2 lần hàng 1.

Định lý 1.2.15 Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp.

1. Nếu B thu được từ ma trận A bằng cách đổi chỗ 2 hàng (hoặc cột) của A cho nhau thì $\det(B) = -\det(A)$.
2. Nếu B thu được từ A bằng cách nhân một hàng (cột) nào đó của A với một số α thì $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Ví dụ 1.2.16 a. Đổi chỗ hai hàng cho nhau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

b. Hàng thứ nhất của ma trận bên trái bằng 3 lần hàng thứ nhất của ma trận bên phải

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Định lý 1.2.17 Cho A là một ma trận vuông cấp n và $c \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\det(cA) = c^n \det(A).$$

Định lý 1.2.18 Nếu định thức có một hàng thứ k có dạng

$$\begin{vmatrix} (1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ua_{k1}+vb_{k1} & ua_{k2}+vb_{k2} & \dots & ua_{kn}+vb_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= u\begin{vmatrix} (1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + v\begin{vmatrix} (1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Định lý 1.2.19 Định thức không đổi nếu ta lấy các phần tử của một hàng nhân với một số rồi cộng với các phần tử tương ứng của một hàng khác.

Ví dụ 1.2.20

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \underset{h_3\to h_3-7h_1}{\overset{h_2\to h_2-4h_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{vmatrix}$$

Nhận xét 1.2.21 Cho A là ma trận vuông và B là ma trận nhận được từ A bằng một trong ba phép biến đổi theo hàng (cột):

- Đổi chỗ hàng i và hàng j;

$$A \overset{h_i\leftrightarrow h_j}{\longrightarrow} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$$

- Nhân một số c vào hàng i;

$$A \overset{h_i\to ch_i}{\longrightarrow} B \Rightarrow \det(B) = c\det(A)$$

- Nhân một số c vào hàng i rồi cộng vào hàng j

$$A \overset{h_j\to h_j=h_jch_i}{\longrightarrow} B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$$

1. Sử dụng các tính chất của định thức để là triệt tiêu các phần tử nằm dưới đường chéo chính của định thức. Khi đó định thức có dạng tam giác trên

2. Định thức bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

Ví dụ 1.2.22 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&2\end{vmatrix}\overset{\substack{h_3\to h_3-h_1\\h_2\to h_2+h_1\\h_4\to h_4+h_1}}{=}\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\2&0&3&-1\\1&0&1&3\\5&0&7&2\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=}-\begin{vmatrix}-1&2&1&0\\0&2&3&-1\\0&1&1&3\\0&5&7&2\end{vmatrix}\overset{\substack{h_2\to h_2-2h_3\\h_4\to h_4-5h_3}}{=}-\begin{vmatrix}-1&2&1&0\\0&0&1&-7\\0&1&1&3\\0&0&2&-13\end{vmatrix}$$

$$\overset{h_2\leftrightarrow h_3}{=}\begin{vmatrix}-1&2&1&0\\0&1&1&3\\0&0&1&-7\\0&0&2&-13\end{vmatrix}\overset{h_4\to h_4-2h_3}{=}\begin{vmatrix}-1&2&1&0\\0&1&1&3\\0&0&1&-7\\0&0&0&1\end{vmatrix}=(-1).1.1.1=-1$$

Định lý 1.2.23 Cho A,B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó

$$\det(AB)=\det(A)\det(B).$$

Ví dụ 1.2.24 Kiểm tra Định lý 1.2.23 với $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix}$.

Giải. Ta có

$$AB=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&10\\5&4\end{bmatrix}$$

và

$$\det(AB)=13.4-5.10=2$$

Vì $\det(A)=-2$ và $\det(B)=-1$ nên

$$\det(A).\det(B)=(-2).(-1)=2=\det(AB).$$

1.3 Hạng của ma trận

Định nghĩa 1.3.1 Cho A là một ma trận cấp $m\times n$. Ma trận được tạo thành từ các phần tử nằm ở giao của k hàng và k cột nào đó của A được gọi là ma trận con cấp k của A. Định thức của ma trận con cấp k của A được gọi là định thức con cấp k của A.

Ví dụ 1.3.2 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận con tạo bởi giao của các phần tử thuộc hàng 1,2 và cột 2,4 là

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận con tạo bởi giao của các phần tử thuộc hàng 1,2,4 và cột 2,3,4 là

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.3.3 Cho ma trận $A \neq 0$ cấp $m \times n$. Hạng của ma trận A chính là cấp cao nhất của định thức con khác không của nó.
Kí hiệu: $\text{rank}A$ hoặc $r(A)$.

Quy ước: Hạng của ma trận 0 là 0.

Nhận xét 1.3.4 Ta có $r(A) = k$ khi và chỉ khi A có ít nhất một định thức con cấp k khác 0 và các định thức con cấp lớn hơn k đều bằng 0.

Để tìm định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận A, không cần xét tất cả các định thức con của nó mà chỉ cần xuất phát từ một định thức con $D_1 \neq 0$ cấp s đã biết, rồi xét các định thức cấp $s+1$ chứa D_1.

Nếu tất cả các định thức con này đều bằng 0 thì D_1 là định thức con có cấp cao nhất khác 0 của A, do đó $r(A) = s$.

Nếu có một định thức $D_2 \neq 0$ cấp $s+1$ thì ta tiếp tục xét các định thức cấp $s+2$ chứa D_2. Cứ như thế cho đến khi tìm được một định thức $D \neq 0$, cấp r mà mọi định thức cấp $r+1$ chứa nó đều bằng 0. Suy ra D là định thức con cấp cao nhất khác 0 của A

Ví dụ 1.3.5 Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Giải. Chọn một định thức con khác 0 bất kì, chẳng hạn

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Ta xét các định thức cấp 3 chứa định thức trên

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

Tiếp theo, xét các định thức con cấp 4 chứa định thức trên. Ta có hai định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy $r(A) = 3$. (vì tất cả các định thức con cấp 4 đều bằng 0)

Ví dụ 1.3.6 Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải. Ta thấy A có định thức con cấp 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

và định thức con cấp 4 của A chính là $\det(A) = 0$. Do đó cấp cao nhất của định thức con khác 0 của A là 3. Vậy $r(A) = 3$.

Mệnh đề 1.3.7 Cho A là một ma trận cấp $m \times n$. Khi đó $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$.

Mệnh đề 1.3.8 Cho A là một ma trận vuông cấp n.

1. Nếu $\det(A) \neq 0$ thì $r(A) = n$.
2. Nếu $\det(A) = 0$ thì $r(A) < n$.

Định lý 1.3.9 Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là

$$r(A) = r(A^T).$$

Định nghĩa 1.3.10 (Ma trận hình thang) Cho A là ma trận cấp $m \times n$ (khác ma trận không). A được gọi là ma trận hình thang nó thỏa các tính chất sau:

1. Các hàng khác 0 luôn luôn ở trên các hàng bằng 0.
2. Trên hai hàng khác 0, hệ số khác 0 đầu tiên (tính từ trái qua phải) của hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa hệ số khác 0 đầu tiên của hàng bên trên.

Ví dụ 1.3.11 Các ma trận sau đây không có dạng hình thang

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ma trận thứ nhất không là ma trận hình thang vì không thỏa điều kiện thứ nhất; ma trận thứ 2 và 3 không thỏa điều kiện thứ hai.

Ví dụ 1.3.12 Các ma trận sau có dạng hình thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa 1.3.13 Ta gọi phép biến đổi sơ cấp trên ma trận là phép biến đổi có một trong các dạng sau:

1. Đổi chỗ hai hàng (cột) cho nhau: $h_i \leftrightarrow h_j (c_i \leftrightarrow c_j)$
2. Nhân vào hàng thứ i (cột i) với số $a \neq 0$: $h_i \to a.h_i (c_i \to a.c_i), a \neq 0$
3. Thay một hàng thứ i bởi tổng của hàng h_i và tích của một số a với một hàng h_j: (thay cột c_i bởi tổng của cột c_i và nhân một số a vào cột c_j): $h_i \to h_i + a.h_j (c_i \to c_i + a.c_j)$

Ta dùng kí hiệu $A \to B$ để chỉ ma trận B nhận được từ A sau hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên A.

Định lý 1.3.14 (i) Hạng của một ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp.
(ii) Mọi ma trận (khác không) đều có thể đưa về dạng hình thang nhờ các phép biến đổi sơ cấp.

Nhận xét 1.3.15 Nếu A là một ma trận hình thang thì hạng của A bằng số hàng khác không của A.

Để tìm hạng của ma trận A, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng (hay cột) để đưa ma trận về dạng hình thang B. Khi đó $r(A) = r(B)$.

Ví dụ 1.3.16 Dùng các phép biến đổi sơ cấp để tính hạng của ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Giải. Trước tiên, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa A về dạng ma trận hình thang.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $r(A) = 2$.

Ví dụ 1.3.17 Tính hạng của ma trận theo tham số m

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & m \end{bmatrix}$$

Giải. (Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng hoặc cột để đưa ma trận đã cho về dang bậc thang) Ta có

$$A \xrightarrow[h_2 \to h_2 - 2h_1]{h_3 \to h_3 - h_1} \begin{bmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 0 & -1-2m & m+2 & 1 \\ 0 & 10-m & -5 & m-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & m+2 & -1-2m \\ 0 & m-2 & -5 & 10-m \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - (m-2)h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & m+2 & -1-2m \\ 0 & 0 & -1-m^2 & 2m^2-4m+8 \end{bmatrix}$$

Nếu $-1-m^2=0$ và $2m^2-4m+8=0$ thì không tồn tại m thỏa yêu cầu. Do đó $r(A)=3$ với mọi m.

Ví dụ 1.3.18 Tính hạng của ma trận theo tham số m

$$A=\begin{bmatrix} m & m & -6 & 1 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 1 & -6 & m \end{bmatrix}$$

Nhận xét: Trong trường hợp tham số m nằm ở vị trí a_{11}, ta dùng các phép phép đổi sơ cấp để biến đổi về một ma trận không có tham số ở vị trí a_{11}. Cụ thể trong bài này, ta sẽ đổi chỗ hàng 1 và hàng 3.
Giải. Ta có

$$A \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & m \\ 2 & -1 & m & 5 \\ m & m & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \to (-m)h_1+h_3]{h_2 \to (-2)h_1+h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & m \\ 0 & -3 & m+12 & 5-2m \\ 0 & 0 & 6m-6 & 1-m^2 \end{bmatrix}$$

- Nếu $6m-6=0$ và $1-m^2=0$ thì $m=1$. Khi đó ma trận bậc thang tương ứng với A là
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & -3 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
do đó $r(A)=2$.

- Nếu $6m-6\neq 0$ hay $m\neq 1$ thì $r(A)=3$.

1.4 Ma trận khả nghịch

Định nghĩa 1.4.1 (Ma trận nghịch đảo)

- Cho A là ma trận vuông cấp n. Ma trận A được gọi là khả nghịch nếu có ma trận vuông B cấp n sao cho $A.B=B.A=I$ (I là ma trận đơn vị).

- Ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A, kí hiệu $B=A^{-1}$.

- Những ma trận vuông khả nghịch được gọi là ma trận không suy biến. Ngược lại, ta gọi là ma trận suy biến.

Ví dụ 1.4.2 Ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ vì

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Định lý 1.4.3 Ma trận nghịch đảo của một ma trận, nếu tồn tại, là duy nhất.

Định lý 1.4.4 Cho A, B là các ma trận vuông khả nghịch. Khi đó

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

(iii) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ với k là một số tự nhiên nào đó,

(iv) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ với $c \neq 0$.

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A có cấp lớn hơn 2, ta làm như sau:

1. Viết kề A ma trận đơn vị I_n.

2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa ma trận A thành ma trận đơn vị.

3. Khi đó ta có ma trận bên cạnh ma trận I_n là ma trận nghịch đảo của A.

Chú ý. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi ta có thể đưa ma trận A thành ma trận đơn vị bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng.

Ví dụ 1.4.5 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. Ta lập ma trận cấp 3×6 và thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa A về ma trận đơn vị.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{h_1 \to h_1 + h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2 \to h_2 + 2h_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_2 \to h_2 - 2h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 - 2h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -6 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to \frac{1}{3}h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & -2 & 5/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_1 \to h_1 - h_3]{h_2 \to h_2 + h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7/3 & 3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & -2 & 5/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_1 \to h_1 - 2h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & -2 & 5/3 \end{array}\right]$$

Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ -4/3 & -2 & 5/3 \end{bmatrix}$. □

Ví dụ 1.4.6 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải. Ta lập ma trận cấp 3×6 và thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để đưa A về ma trận đơn vị.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to -3h_1 + h_3]{h_2 \to -3h_1 + h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to -h_2 + h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ma trận bên trái có một hàng không. Do đó, ta không thể đưa ma trận A về ma trận đơn vị. Như vậy, không tồn tại A^{-1}. □

Định nghĩa 1.4.7 (Ma trận phụ hợp) Cho ma trận vuông A cấp n khả nghịch và A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}. Khi đó ma trận

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận phụ hợp của A.

Định lý 1.4.8 Cho ma trận vuông A cấp n khả nghịch. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A.$$

Ví dụ 1.4.9 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. Ta có $|A| = 3 \neq 0$ do đó A là ma trận khả nghịch. Các phần bù đại số của các phần tử như sau:

$$A_{11} = 3, A_{12} = 2, A_{13} = -4, A_{21} = 3, A_{22} = 3, A_{23} = -6, A_{31} = -3, A_{32} = -1, A_{33} = 5.$$

Vậy $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$. □

Định lý 1.4.10 Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là một ma trận khả nghịch. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.4.11 Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có $\det(A) = 1.5 - 2.3 = -1 \neq 0$, do đó ma trận A khả nghịch. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 1.4.12 Cho A, B là các ma trận khả nghịch. Khi đó

1. $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$
2. $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$
3. $AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$
4. $AX + kC = D \Leftrightarrow X = A^{-1}(D - kC)$

Ví dụ 1.4.13 Tìm ma trận X sao cho thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải. Phương trình có dạng $AX = B$. Vì $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ nên $X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.4.14 Tìm ma trận X sao cho thỏa mãn

$$X\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải. Phương trình có dạng $XA = B$. Vì $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ nên không thể áp dụng $X = BA^{-1}$. Vì ma trận B là ma trận vuông cấp 2 nên X là ma trận vuông cấp 2. Đặt $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, khi đó

$$XA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 2c & -6a - 4b \\ 3c + 2d & -6c - 4d \end{bmatrix}$$

Do đó theo đề bài

$$\begin{bmatrix} 3a + 2b & -6a - 4b \\ 3c + 2d & -6c - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} 3a+2b=-1 \\ -6a-4b=2 \\ 3c+2d=1 \\ -6c-4d=3 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ ba và thứ tư, ta thấy không tồn tại c, d thỏa yêu cầu. Do đó, không tồn tại ma trận X.

1.5 Bài tập

Bài tập 1.1 Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Tìm các ma trận sau (nếu có)

a. AB b. BA c. $A(B+C)$ d. $AB+AC$ e. $2B-C$ f. $A(kB))$

Bài tập 1.2 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

a. Tính $f(A)$.

b. Tính $(A-5I)(A-I)$.

Bài tập 1.3 Tính A^n với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

a. $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$

Bài tập 1.4 Tìm tất cả các ma trận X cấp 2 thỏa mãn $AX = XA$ trong đó ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài tập 1.5 Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm các ma trận sau (nếu có)

a. $(AB)^T$ b. $B^T A^T$ c. $(A^T + B)^T$ d. $A + B^T$ e. $(C^2)^T$ f. $(C^T)^2$

Bài tập 1.6 Vết của một ma trận vuông A ($\mathtt{trace}(A)$) là tổng của các phần tử trên đường chéo.

a. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng

i. $\text{trace}(A+B) = \text{trace}(A) + \text{trace}(B)$

ii. $\text{trace}(kB) = k\text{trace}(A)$ với $k \in \mathbb{R}$

iii. $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$

b. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn $\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$. Khi đó $A = B$ đúng hay sai? Vì sao?

Bài tập 1.7 Một ma trận vuông A được gọi là lũy đẳng nếu $A^2 = A$ (điều này suy ra $A^n = A$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$).
a. Tìm một ma trận vuông cấp 2 lũy đẳng (khác ma trận 0 và ma trận đơn vị).
b. Chứng minh rằng ma trận sau là lũy đẳng

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Cho A là một ma trận lũy đẳng. Chứng minh rằng $I - A$ cũng là một ma trận lũy đẳng.

Bài tập 1.8 Tính các định thức

a. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & 0 \\ x & 0 & z \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

Bài tập 1.9 Cho A, B là các ma trận cấp 3 thỏa mãn $\det(A) = 4$ và $\det(B) = -5$. Tính $\det(-2AB), \det(A^3B^3), \det(A^TB^2)$

Bài tập 1.10 Cho $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$. Tính $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$.

Bài tập 1.11 Tính các định thức cấp n sau:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$

Bài tập 1.12 Cho định thức cấp $n \geq 3$ như sau

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

a. Tính D_4, D_5.
b. Chứng minh rằng $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$ với mọi $n \geq 5$.
c. Tính D_n theo n.

Bài tập 1.13 Tính hạng ma trận

a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập 1.14 Biện luận hạng của các ma trận theo $a \in \mathbb{R}$

a. $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Bài tập 1.15 Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Bài tập 1.16 Tìm ma trận X sao cho

a. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b. $X.\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 17 & -20 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Bài tập 1.17 Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5-m \\ m+1 & 1 & 3 \\ 3 & m-1 & 3 \end{bmatrix}$

a. Tìm tất cả các giá trị của m để A khả nghịch.
b. Cho $m = -1$, tìm A^{-1}.