Entry test: Deep Learning course

Tong Thi Van Anh

October 2022

1 Problem 1: Algebra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1.1 Tính $(A + B), (A - B), (A^T B)$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+4 & 2+2 & 3+1 \\ 5+5 & 1+5 & 1+1 \\ 3+1 & 2+2 & 1+1 \\ 1+1 & 1+2 & 1+4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 10 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-4 & 2-2 & 3-1 \\ 5-5 & 1-5 & 1-1 \\ 3-1 & 2-2 & 1-1 \\ 1-1 & 1-2 & 1-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^TB = \begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & 1\\2 & 1 & 2 & 1\\3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\5 & 5 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\cdot4+5\cdot5+3\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot2+5\cdot5+3\cdot2+1\cdot2 & 1\cdot1+5\cdot1+3\cdot1+1\cdot4\\2\cdot4+1\cdot5+2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot5+2\cdot2+1\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+1\cdot4\\3\cdot4+1\cdot5+1\cdot1+1\cdot1 & 3\cdot2+1\cdot5+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}33 & 35 & 13\\16 & 15 & 9\\19 & 15 & 9\end{bmatrix}$$

1.2 Tính $rank(A^TB)$

Ma trận A^TB là một ma trận vuông 3x3, để tính hạng của ma trận này, ta tính định thức của ma trận. Định thức cấp 3 của ma trận là:

$$\begin{aligned}det(A^TB) &= \begin{vmatrix}33 & 35 & 13\\16 & 15 & 9\\19 & 15 & 9\end{vmatrix}\\
&= 33\begin{vmatrix}15 & 9\\15 & 9\end{vmatrix} - 35\begin{vmatrix}16 & 9\\19 & 9\end{vmatrix} + 13\begin{vmatrix}16 & 15\\19 & 15\end{vmatrix}\\
&= 33(15\cdot9 - 15\cdot9) - 35(16\cdot9 - 19\cdot9) + 13(16\cdot15 - 19\cdot15)\\
&= 0 - 35\cdot9(-3) + 13\cdot15(-3)\\
&= 360\end{aligned}$$

Vì định thức cấp 3 $det(A^TB) \neq 0$ nên ta được $rank(A^TB) = 3$.

1.3 Tìm eigenvalue, eigenvector của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 3 & 1\\-3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Gọi $\lambda \in \mathbb{R}$ là eigenvalue và u là eigenvector của ma trận A, ta có: $Au = \lambda u$. Trước tiên, ta giải phương trình đặc trưng của ma trận A:

$$\begin{aligned}det(A-\lambda I) &= \begin{bmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\1 & 3-\lambda & 1\\-3 & 1 & -1-\lambda\end{bmatrix}\\
&= (1-\lambda)\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\1 & -1-\lambda\end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix}1 & 1\\-3 & -1-\lambda\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1 & 3-\lambda\\-3 & 1\end{bmatrix}\\
&= -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1) + (\lambda-1) + (-1-\lambda) + 3 - 1 + 3(\lambda-3)\\
&= -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1) + 3\lambda - 9\\
&= -(\lambda-3)(\lambda^2-1-3)\\
&= -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+2)\end{aligned}$$

Ta được: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.

Với $\lambda_1 = 3$, eigenvector tương ứng là $u_1 = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - 3I)u_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ -3x + y - 4z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \tag{1}$$

$\Rightarrow$ Eigenvector ứng với $\lambda_1 = 3$ có dạng $u_1 = (-1, 1, 1)a, a \neq 0$.

Với $\lambda_2 = 2$, eigenvector tương ứng là $u_2 = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - 2I)u_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -3x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$\Rightarrow$ Eigenvector ứng với $\lambda_2 = 2$ có dạng $u_2 = (1, 0, -1)b, b \neq 0$.

Với $\lambda_3 = -2$, eigenvector tương ứng là $u_3 = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$(A + 2I)u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 4x \end{cases} \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Eigenvector ứng với $\lambda_3 = -2$ có dạng $u_3 = (1, -1, 4)c, c \neq 0$.

Như vậy, ta tìm được 3 eigenvalues của ma trận A là 3, 2, -2 với eigenvectors tương ứng là $(-1, 1, 1)a, (1, 0, -1)b$, và $(1, -1, 4)c$, trong đó $a, b, c \neq 0$.

2 Problem 2: Probability

Dây chuyền lắp ráp nhận được các sản phẩm do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 60% sản phẩm, máy thứ hai cung cấp 40% sản phẩm. Khoảng 90% sản phẩm do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% sản phẩm do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất?

Trả lời:
Gọi M = {1, 2} là biến máy sản xuất, ứng với máy thứ nhất và máy thứ hai.
Gọi Q = {1, 0} là biến chất lượng, thể hiện máy Đạt chuẩn hay Không đạt chuẩn.
Theo bài ra ta có:

$$P(M = 1) = 0.6$$

$$P(M = 2) = 0.4$$

$$P(Q = 1|M = 1) = 0.9$$

$$P(Q = 1|M = 2) = 0.85$$

Áp dụng **Baye's Rule**, ta có:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất là:

$$\begin{aligned}
P(M=1|Q=1) &= \frac{P(Q=1|M=1).P(M=1)}{P(Q=1)} \\
&= \frac{P(Q=1|M=1).P(M=1)}{P(Q=1,M=1)+P(Q=1,M=2)} \\
&= \frac{P(Q=1|M=1).P(M=1)}{P(Q=1|M=1).P(M=1)+P(Q=1|M=2).P(M=2)} \\
&= \frac{0.9*0.6}{0.9*0.6+0.85*0.4} \\
&= 0.614
\end{aligned}$$

Như vậy, xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất là 0.614