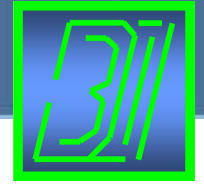




TRƯỜNG ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI



Nguyễn Công Phương

Lý thuyết trường điện từ

Sóng phẳng

Nội dung

- I. Giới thiệu
- II. Giải tích véctor
- III. Luật Coulomb & cường độ điện trường
- IV. Dịch chuyển điện, luật Gauss & divergence
- V. Năng lượng & điện thế
- VI. Dòng điện & vật dẫn
- VII. Điện môi & điện dung
- VIII. Các phương trình Poisson & Laplace
- IX. Từ trường dừng
- X. Lực từ & điện cảm
- XI. Trường biến thiên & hệ phương trình Maxwell
- XII. Sóng phẳng**
- XIII. Phản xạ & tán xạ sóng phẳng
- XIV. Dẫn sóng & bức xạ



Sóng phẳng

1. Lan truyền sóng trong môi trường tự do
2. Lan truyền sóng trong điện môi
3. Định lý Poynting & năng lượng sóng
4. Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt
5. Phân cực sóng

Lan truyền sóng trong môi trường tự do (1)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

Lan truyền sóng trong môi trường tự do (2)

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi) \\ e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \sin \omega t \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow E_x = \text{Re} \left[E(x, y, z) e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = \text{Re} \left[E(x, y, z) e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right]$$

$$E_{xs} = E(x, y, z) e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{E}_s = E_{xs} \mathbf{a}_x$$

$$E_x = \text{Re} \left[E_{xs} e^{j\omega t} \right]$$

VD1 Lan truyền sóng trong môi trường tự do (3)

Tìm biểu thức theo thời gian của trường véctor

$$\mathbf{E}_s = 100 \angle 30^\circ \mathbf{a}_x + 20 \angle -50^\circ \mathbf{a}_y + 40 \angle 210^\circ \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Giả sử $f = 1 \text{ MHz}$

$$\mathbf{E}_s = 100e^{j30^\circ} \mathbf{a}_x + 20e^{-j50^\circ} \mathbf{a}_y + 40e^{j210^\circ} \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{E}_s(t) &= \left(100e^{j30^\circ} \mathbf{a}_x + 20e^{-j50^\circ} \mathbf{a}_y + 40e^{j210^\circ} \mathbf{a}_z \right) e^{j2\pi 10^6 t} \\ &= 100e^{j(2\pi 10^6 t + 30^\circ)} \mathbf{a}_x + 20e^{j(2\pi 10^6 t - 50^\circ)} \mathbf{a}_y + 40e^{j(2\pi 10^6 t + 210^\circ)} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{E}(t) &= 100 \cos(2\pi 10^6 t + 30^\circ) \mathbf{a}_x + \\ &\quad + 20 \cos(2\pi 10^6 t - 50^\circ) \mathbf{a}_y + 40 \cos(2\pi 10^6 t + 210^\circ) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$



Lan truyền sóng trong môi trường tự do (4)

$$E_x = E(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi)] = \underline{-\omega E(x, y, z) \sin(\omega t + \varphi)} \\ \text{Re} [j\omega E_{xs} e^{j\omega t}] &= \text{Re} \left\{ j\omega [E(x, y, z) e^{j\omega t}] e^{j\varphi} \right\} \\ &= \text{Re} [j\omega E(x, y, z) e^{j(\omega t + \varphi)}] \\ &= \text{Re} \left\{ \omega E(x, y, z) j [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \omega E(x, y, z) [j \cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi)] \right\} \\ &= \underline{-\omega E(x, y, z) \sin(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = \text{Re} [j\omega E_{xs} e^{j\omega t}]$$

Lan truyền sóng trong môi trường tự do (5)

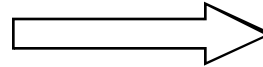
$$E_x = E(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi)$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \text{Re} \left[j\omega E_{xs} e^{j\omega t} \right] \leftrightarrow j\omega E_{xs}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$



$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_s$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}_s$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

Lan truyền sóng trong môi trường tự do (6)

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s \rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla \times (-j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s) = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s \quad \left. \begin{array}{l} \\ \nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_s \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_s \quad \left. \begin{array}{l} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k_0^2 \mathbf{E}_s}$$

$$\downarrow k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \text{ (hệ số sóng)}$$

$$\nabla^2 E_{xs} = -k_0^2 E_{xs}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -k_0^2 E_{xs} \\ \text{Giả sử } E_{xs} \text{ không biến thiên theo } x \text{ hoặc } y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k_0^2 E_{xs}$$

Lan truyền sóng trong môi trường tự do (7)

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k_0^2 E_{xs}$$
$$\rightarrow E_{xs} = E_{x0} e^{-jk_0 z} \quad \rightarrow \left. \begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{x0} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E'_x(z, t) &= E'_{x0} \cos(\omega t + k_0 z) \end{aligned} \right\}$$
$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} &= 2,998 \cdot 10^8 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \rightarrow k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{x0} \cos[\omega(t - z/c)] \\ E'_x(z, t) &= E'_{x0} \cos[\omega(t + z/c)] \end{aligned} \right.$$

Lan truyền sóng trong môi trường tự do (8)

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{x0} \cos[\omega(t - z/c)] \\ E'_x(z, t) = E'_{x0} \cos[\omega(t + z/c)] \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_s &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s \rightarrow \frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu_0 H_{ys} \\ E_{xs} &= E_{x0} e^{-jk_0 z} \end{aligned} \right\}$$

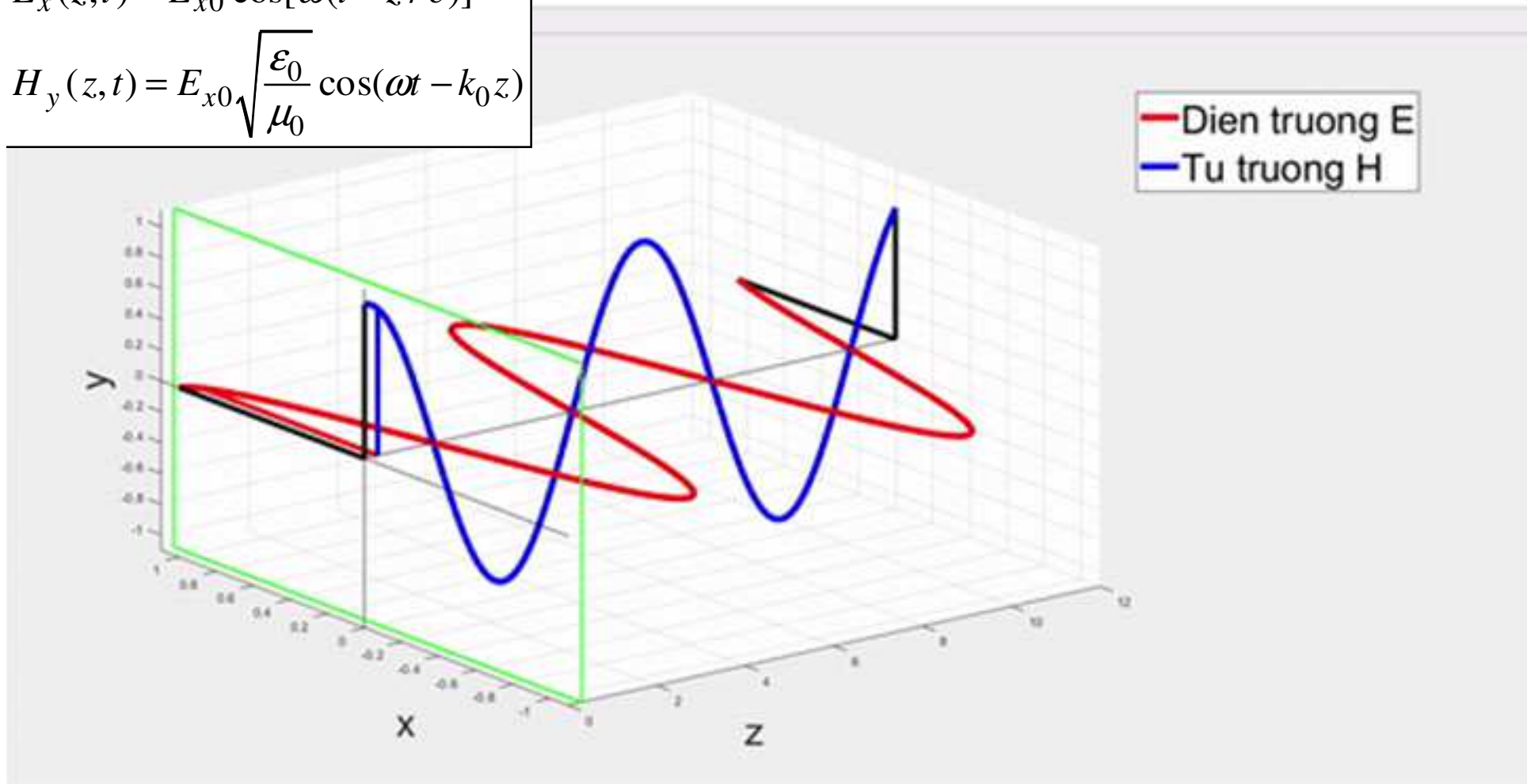
$$\rightarrow H_{ys} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} (-jk_0) E_{x0} e^{-jk_0 z} = E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-jk_0 z}$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow H_y(z, t) &= E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_x(z, t) &= E_{x0} \cos[\omega(t - z/c)] \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Lan truyền sóng trong môi trường tự do (9)

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos[\omega(t - z/c)]$$

$$H_y(z, t) = E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - k_0 z)$$



VD2 Lan truyền sóng trong môi trường tự do (10)

Cho $\mathbf{H} = H_m \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x$ trong môi trường tự do, tìm \mathbf{E} ?

Cách 1

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial z} H_m \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow -\beta H_m \sin(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = -\int \frac{\beta}{\epsilon_0} H_m \sin(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y = \boxed{\frac{\beta}{\epsilon_0 \omega} H_m \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y}$$

VD2 Lan truyền sóng trong môi trường tự do (11)

Cho $\mathbf{H} = H_m \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x$ trong môi trường tự do, tìm \mathbf{E} ?

Cách 2

$$\mathbf{E} = \frac{\beta}{\epsilon_0 \omega} H_m \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_s = H_m e^{j\beta z} \mathbf{a}_x = H_{xs} \mathbf{a}_x$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_s$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial H_{ys}}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_{ys}}{\partial x} - \frac{\partial H_{xs}}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_s$$

$$\rightarrow j\beta H_m e^{j\beta z} \mathbf{a}_y = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_s$$

$$\rightarrow \mathbf{E}_s = \frac{\beta H_m}{\epsilon_0 \omega} e^{j\beta z} \mathbf{a}_y$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \text{Re} \left[\mathbf{E}_s e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\frac{\beta H_m}{\epsilon_0 \omega} e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_y \right] = \frac{\beta H_m}{\epsilon_0 \omega} \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$$

VD3 Lan truyền sóng trong môi trường tự do (12)

Cho một sóng phẳng có $\mathbf{E} = 100\cos(\omega t + 6z)\mathbf{a}_x$ V/m trong môi trường tự do. Tìm tần số góc, bước sóng, & \mathbf{H} ?

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - k_0 z), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega = k_0 c = 6 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,8 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{\omega / 2\pi} = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{6} = 1,047 \text{ m}$$

$$\mathbf{E}_s = 100e^{j6z}\mathbf{a}_x = E_{xs}\mathbf{a}_x$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s \rightarrow \frac{\partial E_{xs}}{\partial z}\mathbf{a}_y = j600e^{j6z}\mathbf{a}_y = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s$$

$$\rightarrow \mathbf{H}_s = \frac{j600e^{j6z}}{-j\omega\mu_0}\mathbf{a}_y = -\frac{600e^{j6z}}{(1,8 \cdot 10^9)(4\pi \cdot 10^{-7})}\mathbf{a}_y = -0,2653e^{j6z}\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H} = \text{Re}[\mathbf{H}_s e^{j\omega t}] = \text{Re}[-0,2653e^{j(1,8 \cdot 10^8 t + 6z)}\mathbf{a}_y] = -0,2653\cos(1,8 \cdot 10^8 t + 6z)\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

Sóng phẳng

1. Lan truyền sóng trong môi trường tự do
- 2. Lan truyền sóng trong điện môi**
3. Định lý Poynting & năng lượng sóng
4. Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt
5. Phân cực sóng



Lan truyền sóng trong điện môi (1)

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k_0^2 \mathbf{E}_s \rightarrow \nabla^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \mathbf{E}_s$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \approx 120\pi \, \Omega$$

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k^2 E_{xs}$$

$$jk = \alpha + j\beta$$

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-jkz} = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$\rightarrow E_x = \text{Re} \left[E_{xs} e^{j\omega t} \right] = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

Lan truyền sóng trong điện môi (2)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon_0(\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r) \\ k &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_0\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow k = \omega\sqrt{\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'')} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}}$$

$$\mu = \mu' - j\mu'' = \mu_0(\mu'_r - j\mu''_r)$$

$$\alpha = \text{Re}[jk] = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1 \right)^{1/2}$$

$$\beta = \text{Im}[jk] = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1 \right)^{1/2}$$

Lan truyền sóng trong điện môi (3)

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \rightarrow v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\beta \lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \rightarrow H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \text{Re}[jk] &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} \\ \beta = \text{Im}[jk] &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1 \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\epsilon''=0} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon'} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \\ v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \\ \lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{f \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \end{cases}$$

Lan truyền sóng trong điện môi (4)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \frac{E_x}{H_y} &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \end{cases}$$

Lan truyền sóng trong điện môi (5)

VD1

Tính hệ số suy giảm của sóng 2,5 GHz trong môi trường nước,
 $\varepsilon'_r = 78$, $\varepsilon''_r = 7$, $\mu_r = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right)^{1/2} \\ \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} &= k_0 \sqrt{\mu_r \varepsilon'_r} \\ k_0 &= \omega / c \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{78}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{7}{78} \right)^2} - 1 \right)^{1/2} = 21 \text{ Np/m} \rightarrow \frac{1}{\alpha} \approx 4,8 \text{ cm}$$

Lan truyền sóng trong điện môi (6)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_s &= j\omega \varepsilon \mathbf{E}_s \\ \varepsilon &= \varepsilon' - j\varepsilon'' \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \nabla \times \mathbf{H}_s &= j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\mathbf{E}_s = \omega\varepsilon''\mathbf{E}_s + j\omega\varepsilon'\mathbf{E}_s \\ \nabla \times \mathbf{H}_s &= \mathbf{J}_s + j\omega\varepsilon\mathbf{E}_s \\ \rightarrow \nabla \times \mathbf{H}_s &= (\sigma + j\omega\varepsilon')\mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{\sigma s} + \mathbf{J}_{ds} \end{aligned} \right\}$$

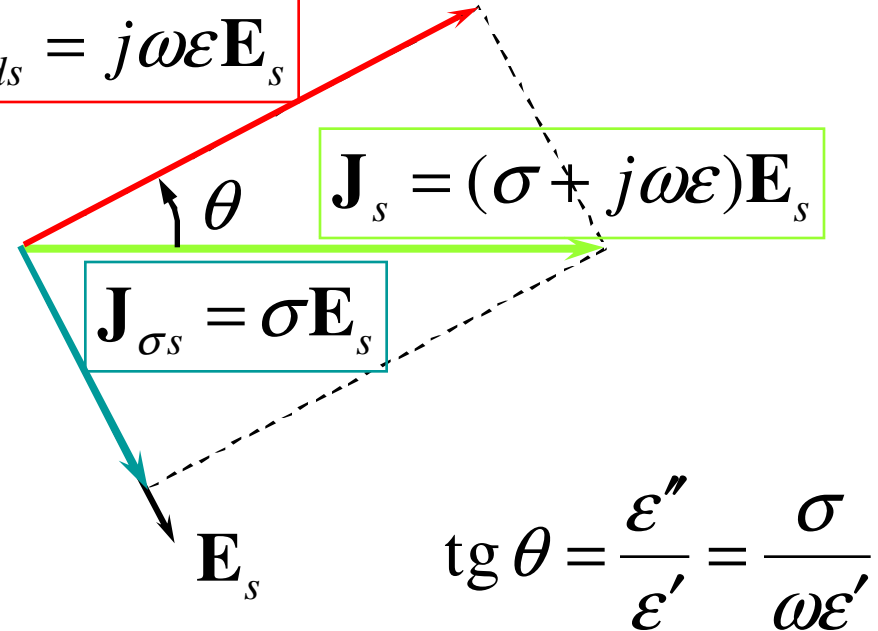
$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{J}_{\sigma s} &= \sigma \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{J}_{ds} = j\omega\varepsilon'\mathbf{E}_s \\ \varepsilon'' &= \frac{\sigma}{\omega} \end{aligned} \right.$$

Lan truyền sóng trong điện môi (7)

$$\mathbf{J}_{ds} = j\omega\epsilon\mathbf{E}_s$$

$$\mathbf{J}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s$$

$$\mathbf{J}_{\sigma s} = \sigma\mathbf{E}_s$$



$$\tan \theta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}}$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} \rightarrow \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'}$$

$$\mathbf{J}_{\sigma s} = \sigma\mathbf{E}_s, \quad \mathbf{J}_{ds} = j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s \rightarrow \frac{J_{\sigma s}}{J_{ds}} = \frac{\epsilon''}{j\epsilon'} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon'}$$

Lan truyền sóng trong điện môi (8)

Chất điện môi tốt: $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \ll 1$

Môi trường dẫn điện: $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$

$$\rightarrow jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \sqrt{1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}} \left\{ \begin{array}{l} (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \\ \rightarrow jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}\right)^2 + \dots \right] = \alpha + j\beta \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{Re}[jk] \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left(-j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon'} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \\ \beta = \text{Im}[jk] \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}\right)^2 \right] \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lan truyền sóng trong điện môi (9)

$$\begin{cases} \alpha \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \\ \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2\right] \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j\epsilon''}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \frac{1}{\sqrt{1 - j(\epsilon''/\epsilon')}}$$

$$\rightarrow \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} \right] \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} \right)$$

VD2 Lan truyền sóng trong điện môi (10)

$\mathbf{E} = 377\cos(10^9t - 5y)\mathbf{a}_z$ V/m là điện trường của một sóng phẳng lan truyền theo hướng y trong một chất điện môi ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$), ε_r , v_P , η , λ , & \mathbf{H} ?

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_s &= -k^2 \mathbf{E}_s \\ \mathbf{E}_s &= 377e^{-j5y}\mathbf{a}_z \\ \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} (-j5)^2 377e^{-j5y}\mathbf{a}_z &= -k^2 377e^{-j5y}\mathbf{a}_z \\ &\rightarrow k = 5 \text{ rad/m} \\ k &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \varepsilon_r = \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0} = \frac{5^2}{(10^9)^2 (4\pi \cdot 10^{-7}) (8,854 \cdot 10^{-12})} = 2,2469$$

$$v_P = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^9}{5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

VD2 Lan truyền sóng trong điện môi (11)

$\mathbf{E} = 377 \cos(10^9 t - 5y) \mathbf{a}_z$ V/m là điện trường của một sóng phẳng lan truyền theo hướng y trong một chất điện môi ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$), ε_r , v_P , η , λ , & \mathbf{H} ?

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2,2469 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}} = 251,33 \, \Omega$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{5} = 1,257 \, \text{m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \\ E_z = 377 \cos(10^9 t - 5y) \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow H_x = \frac{377}{251,33} \cos(10^9 t - 5y) \rightarrow \mathbf{H} = 1,5 \cos(10^9 t - 5y) \mathbf{a}_x \, \text{A/m}$$

VD3 Lan truyền sóng trong điện môi (12)

Một sóng 2GHz lan truyền trong chất điện môi với $\mu_r = 1,6$; $\epsilon_r = 25$; $\sigma = 2,5$ S/m. Trong vùng này có một điện trường $\mathbf{E} = 0,1e^{-\alpha z}\cos(2\pi ft - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m. Tìm jk , α , β , η , v_p , λ , & \mathbf{H} ?

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ \epsilon'' &= \frac{\sigma}{\omega} \end{aligned} \right\} \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 - j \frac{\sigma}{2\pi f} = 25.8,854.10^{-12} - j \frac{2,5}{2\pi.2.10^9}$$

$$= 2,2135.10^{-10} - j1,9894.10^{-10} \text{ F/m}$$

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j\omega\sqrt{\mu_r\mu_0}\sqrt{\epsilon' - j\epsilon''}$$

$$= j2\pi.2.10^9\sqrt{1,6.4\pi.10^{-7}}\sqrt{2,2135.10^{-10} - j1,9894.10^{-10}}$$

$$= j1,7819.10^7\sqrt{2,9761.10^{-10} \angle -41,9^\circ}$$

$$= (1,7819.10^7 \angle 90^\circ)(1,7251.10^{-5} \angle -20,1^\circ)$$

$$= 307,40 \angle 69,0^\circ = 110,03 + j287,04 \text{ 1/m}$$

VD3 Lan truyền sóng trong điện môi (13)

Một sóng 2GHz lan truyền trong chất điện môi với $\mu_r = 1,6$; $\varepsilon_r = 25$; $\sigma = 2,5$ S/m. Trong vùng này có một điện trường $\mathbf{E} = 0,1e^{-\alpha z}\cos(2\pi ft - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m. Tìm jk , α , β , η , v_p , λ , & \mathbf{H} ?

$$jk = 307,40 / \underline{69,0^\circ} = 110,03 + j287,04 \text{ 1/m}$$

$$\alpha = \text{Re}[jk] = 110,03 \text{ Np/m}$$

$$\beta = \text{Im}[jk] = 287,04 \text{ rad/m}$$

$$\begin{aligned}\eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon' - j\varepsilon''}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2,2135 \cdot 10^{-10} - j1,9894 \cdot 10^{-10}}} \\ &= \sqrt{\frac{1,6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2,9761 \cdot 10^{-10} / \underline{-41,9^\circ}}} = \sqrt{6,7558 \cdot 10^3 / \underline{41,9^\circ}} = 82,19 / \underline{21,0^\circ} \text{ } \Omega\end{aligned}$$

VD3 Lan truyền sóng trong điện môi (14)

Một sóng 2GHz lan truyền trong chất điện môi với $\mu_r = 1,6$; $\epsilon_r = 25$; $\sigma = 2,5$ S/m. Trong vùng này có một điện trường $\mathbf{E} = 0,1e^{-\alpha z}\cos(2\pi ft - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m. Tìm jk , α , β , η , v_P , λ , & \mathbf{H} ?

$$jk = 307,40 / \underline{69,0^\circ} = 110,03 + j287,04 \text{ 1/m}$$

$$\alpha = \text{Re}[jk] = 110,03 \text{ Np/m}$$

$$\beta = \text{Im}[jk] = 287,04 \text{ rad/m}$$

$$v_P = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^9}{287,04} = 4,38 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{287,04} = 0,0218 \text{ m}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{110,03} = 0,0091 \text{ m}$$

VD3 Lan truyền sóng trong điện môi (15)

Một sóng 2GHz lan truyền trong chất điện môi với $\mu_r = 1,6$; $\epsilon_r = 25$; $\sigma = 2,5$ S/m. Trong vùng này có một điện trường $\mathbf{E} = 0,1e^{-\alpha z}\cos(2\pi ft - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m. Tìm jk , α , β , η , v_p , λ , & \mathbf{H} ?

$$\alpha = 110,03 \text{ Np/m}; \beta = \text{Im}[jk] = 287,04 \text{ rad/m}; \eta = 82,19 / \underline{21,0^\circ} \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_x}{H_y} = \eta &\rightarrow \frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \\ E_{xs} = 0,1e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} &= 0,1e^{-110,03z}e^{-j287,04z} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow H_{ys} = \frac{E_{xs}}{\eta} = \frac{0,1e^{-110,03z}e^{-j287,04z}}{82,19e^{j21,0^\circ}} = 0,0012e^{-110,03z}e^{-j287,04z}e^{-j21,0^\circ}$$

$$\rightarrow \mathbf{H} = 1,2e^{-110,03z}\cos(4\pi \cdot 10^9 t - 287,04z - 21,0^\circ)\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Sóng phẳng

1. Lan truyền sóng trong môi trường tự do
2. Lan truyền sóng trong điện môi
- 3. Định lý Poynting & năng lượng sóng**
4. Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt
5. Phân cực sóng



Định lý Poynting & năng lượng sóng (1)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\rightarrow -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Định lý Poynting & năng lượng sóng (2)

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) \\ \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow -\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv &= \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) dv + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) dv \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \boxed{-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv}$$

Định lý Poynting & năng lượng sóng (3)

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2}$$

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = S_z \mathbf{a}_z$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned} \right\} \rightarrow S_z = \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z)$$

$$\begin{aligned} S_{z, \text{tbình}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt = \frac{1}{2T} \frac{E_{x0}^2}{\eta} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{1}{2T} \frac{E_{x0}^2}{\eta} \left[1 + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right] \Bigg|_0^T = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} \quad \text{W/m}^2 \end{aligned}$$

Định lý Poynting & năng lượng sóng (4)

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ \eta &= |\eta| / \theta_\eta \end{aligned} \right\} \rightarrow H_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

$$\rightarrow S_z = E_x H_y = \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

$$= \frac{E_{x0}^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - 2\theta_\eta) + \cos \theta_\eta]$$

$$\rightarrow S_{z, \text{thình}} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta = \boxed{\frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_s \times \hat{\mathbf{H}}_s] \text{ W/m}^2}$$

$$\mathbf{E}_s = E_{x0} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_x$$

$$\hat{\mathbf{H}}_s = \frac{E_{x0}}{\hat{\eta}} e^{j\beta z} \mathbf{a}_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{j\theta_\eta} e^{j\beta z} \mathbf{a}_y$$

VD1 Định lý Poynting & năng lượng sóng (5)

Cho một sóng phẳng có $\mathbf{E} = 100\cos(\omega t + 6z)\mathbf{a}_x$ V/m trong môi trường tự do.
Tìm mật độ công suất trung bình?

$$\omega = k_0 c = 6.3.10^8 = 1,8.10^9 \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{E}_s = 100e^{j6z}\mathbf{a}_x = E_{xs}\mathbf{a}_x$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s \rightarrow \frac{\partial E_{xs}}{\partial z}\mathbf{a}_y = j600e^{j6z}\mathbf{a}_y = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s$$

$$\rightarrow \mathbf{H}_s = \frac{j600e^{j6z}}{-j\omega\mu_0}\mathbf{a}_y = -\frac{600e^{j6z}}{(1,8.10^9)(4\pi.10^{-7})}\mathbf{a}_y = -0,2653e^{j6z}\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H} = \text{Re}[\mathbf{H}_s e^{j\omega t}] = \text{Re}[-0,2653e^{j(1,8.10^8 t + 6z)}\mathbf{a}_y] = -0,2653\cos(1,8.10^8 t + 6z)\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

$$\mathbf{S}_{\text{t bình}} = \frac{1}{2}\text{Re}[\mathbf{E}_s \times \hat{\mathbf{H}}_s] = \frac{1}{2}\text{Re}[100e^{j6z}\mathbf{a}_x \times (-0,2653e^{-j6z}\mathbf{a}_y)] = -13,265\mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$$

VD2 Định lý Poynting & năng lượng sóng (6)

Có một điện trường $\mathbf{E} = C \sin \alpha x \cos(\omega t - kz) \mathbf{a}_y$ V/m trong một vùng điện môi không điện tích. Tìm cường độ từ trường & mật độ công suất trung bình?

$$\mathbf{E}_s = E_{ys} \mathbf{a}_y = C \sin \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_y$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial E_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ys}}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial E_{zs}}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial E_{ys}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xs}}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

$$\rightarrow jkC \sin \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_x + \alpha C \cos \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_z = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

$$\rightarrow \mathbf{H}_s = -\frac{kC}{\omega\mu} \sin \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_x + j \frac{\alpha C}{\omega\mu} \cos \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_z$$

VD2 Định lý Poynting & năng lượng sóng (7)

Có một điện trường $\mathbf{E} = C \sin \alpha x \cos(\omega t - kz) \mathbf{a}_y$ V/m trong một vùng điện môi không điện tích. Tìm cường độ từ trường & mật độ công suất trung bình?

$$\mathbf{E}_s = E_{ys} \mathbf{a}_y = C \sin \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_s = -\frac{kC}{\omega\mu} \sin \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_x + j \frac{\alpha C}{\omega\mu} \cos \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{S}_{\text{tbình}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_s \times \hat{\mathbf{H}}_s]$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\left(C \sin \alpha x e^{-jkz} \mathbf{a}_y \right) \times \left(-\frac{kC}{\omega\mu} \sin \alpha x e^{jkz} \mathbf{a}_x - j \frac{\alpha C}{\omega\mu} \cos \alpha x e^{jkz} \mathbf{a}_z \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{kC^2}{\omega\mu} \sin^2 \alpha x \mathbf{a}_z - j \frac{\alpha C^2}{\omega\mu} \sin \alpha x \cos \alpha x \mathbf{a}_x \right] = \frac{kC^2}{2\omega\mu} \sin^2 \alpha x \mathbf{a}_z$$

VD3 Định lý Poynting & năng lượng sóng (8)

Một sóng 2GHz lan truyền trong chất điện môi với $\mu_r = 1,6$; $\varepsilon_r = 25$; $\sigma = 2,5$ S/m. Trong vùng này có một điện trường $\mathbf{E} = 0,1e^{-\alpha z}\cos(2\pi ft - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m. Tìm mật độ công suất trung bình?

$$\mathbf{E}_s = 0,1e^{-110,03z}e^{-j287,04z}\mathbf{a}_x \text{ V/ m}$$

$$\mathbf{H}_s = 0,0012e^{-110,03z}e^{-j(287,04z+21,0^\circ)}\mathbf{a}_y \text{ A/ m}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{tbình}} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_s \times \hat{\mathbf{H}}_s] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\left[\left(0,1e^{-110,03z}e^{-j287,04z}\mathbf{a}_x\right) \times \left(0,0012e^{-110,03z}e^{+j(287,04z+21,0^\circ)}\mathbf{a}_y\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\left[121,7 \cdot 10^{-6}e^{-2 \cdot 110,03z}e^{j21,0^\circ}\mathbf{a}_z\right] = \frac{1}{2} \text{Re}\left[121,7 \cdot 10^{-6}e^{-220,06z}e^{j21,0^\circ}\mathbf{a}_z\right] \\ &= \frac{1}{2} 121,7 \cdot 10^{-6}e^{-220,06z} \cos 21,0^\circ \mathbf{a}_z = 56,79e^{-220,06z}\mathbf{a}_z \mu \text{ W/ m}^2 \end{aligned}$$

Sóng phẳng

1. Lan truyền sóng trong môi trường tự do
2. Lan truyền sóng trong điện môi
3. Định lý Poynting & năng lượng sóng
- 4. Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt**
5. Phân cực sóng



Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (1)

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}} \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}} = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

$$\left. \begin{aligned} -j &= 1 \angle -90^\circ \\ \sqrt{1 \angle -90^\circ} &= 1 \angle -45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow jk = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma} = (j1 + 1)\sqrt{\pi f \mu \sigma} = \alpha + j\beta$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

$$\rightarrow E_x = E_{x0}e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) = E_{x0}e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (2)

$$E_x = E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

$$E_x|_{z=0} = E_{x0} \cos \omega t$$

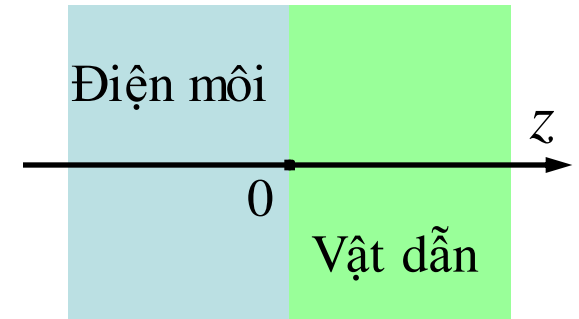
$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

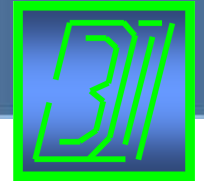
$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$$

$$\delta_{Cu} = \frac{0,066}{\sqrt{f}}$$

$$\delta_{Cu, 50\text{Hz}} = 9,3 \text{ mm}$$

$$\delta_{Cu, 10.000 \text{ MHz}} = 6,61 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$





Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (3)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \beta = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \\ \beta &= \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \lambda = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\rightarrow v_p = \omega\delta$$

Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (4)

Ví dụ

Khảo sát sóng 1 MHz trong môi trường nước biển, $\sigma = 4 \text{ S/m}$, $\varepsilon'_r = 81$.

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'} = \frac{4}{(2\pi \cdot 10^6)(81)(8,85 \cdot 10^{-12})} = 8,9 \cdot 10^2 \gg 1$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{(\pi \cdot 10^6)(4\pi \cdot 10^{-7})(4)}} = 0,25 \text{ m}$$

$$\lambda = 2\pi\delta = 1,6 \text{ m}$$

$$v_p = \omega\delta = (2\pi \cdot 10^6)(0,25) = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

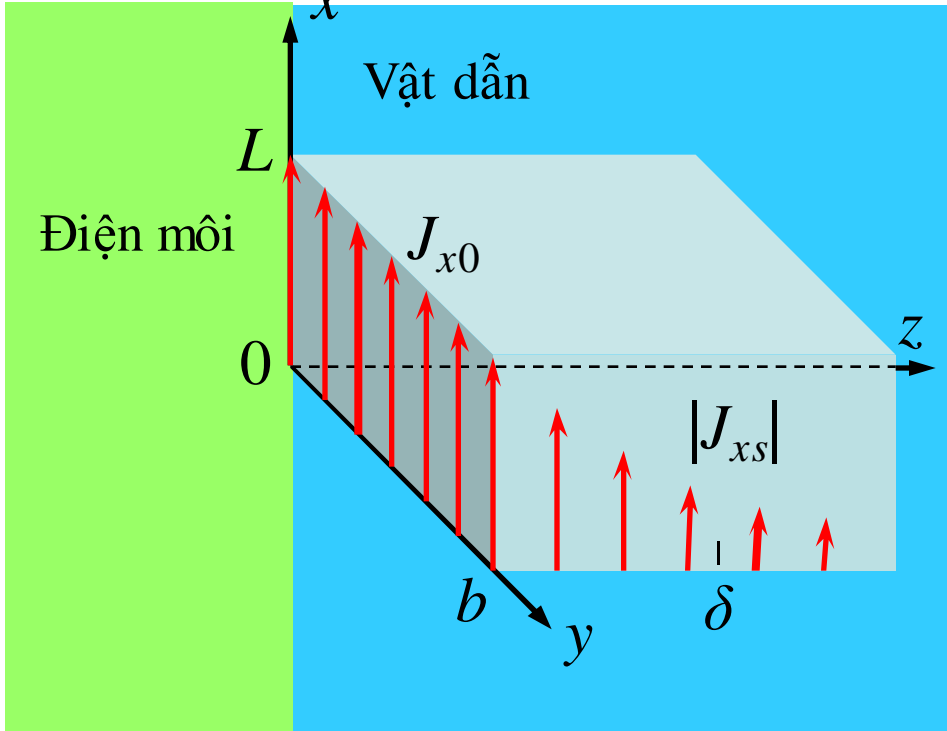
Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (5)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon' - j\varepsilon''}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon'}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma \gg \omega\varepsilon' \\ \sqrt{j} = 1/\underline{45^\circ} \end{array} \right\} \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \eta = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta} \left\{ \begin{array}{l} E_x = E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}) = E_{x0} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \\ \frac{E_x}{H_y} = \eta \end{array} \right.$$

$$\rightarrow H_y = \frac{\sigma\delta E_{x0}}{\sqrt{2}} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (6)

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \\ H_y &= \frac{\sigma \delta E_{x0}}{\sqrt{2}} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \\ S_{\text{t bình}} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_s \times \hat{\mathbf{H}}_s] \end{aligned} \right\} \text{Điện môi}$$


$$\rightarrow S_{\text{t bình}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \delta E_{x0}^2}{\sqrt{2}} e^{-2z/\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} \sigma \delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}}$$

$$S_{L, \text{t bình}} = \int_S S_{z, \text{t bình}} dS = \int_0^b \int_0^L \frac{1}{4} \sigma \delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta} \Big|_{z=0} dx dy = \frac{1}{4} \sigma \delta b L E_{x0}^2$$

Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (7)

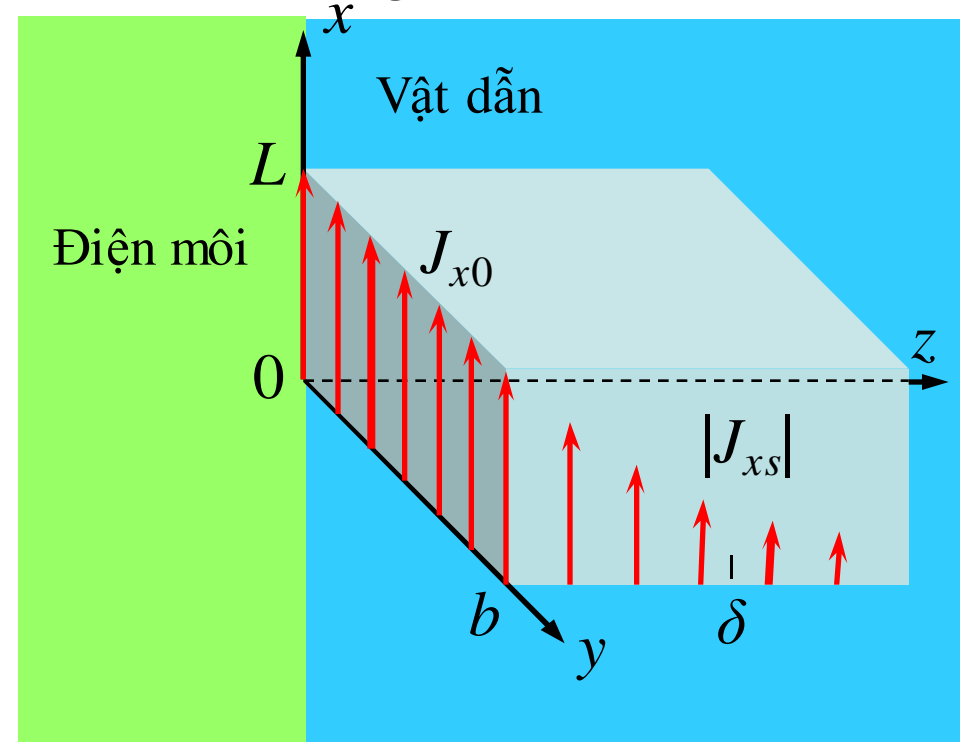
$$\left. \begin{aligned} S_{L, \text{tình}} &= \frac{1}{4} \sigma \delta b L E_{x0}^2 \\ J_{x0} &= \sigma E_{x0} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow S_{L, \text{tình}} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_{x0}^2$$

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz \\ J_x &= J_{x0} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow J_{xs} = J_{x0} e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta}$$

$$= J_{x0} e^{-(1+j)z/\delta}$$



$$\rightarrow I_s = \int_0^\infty \int_0^b J_{x0} e^{-(1+j)z/\delta} dy dz = J_{x0} b e^{-(1+j)z/\delta} \left. \frac{-\delta}{1+j} \right|_0^\infty = \frac{J_{x0} b \delta}{1+j}$$

$$\rightarrow I = \frac{J_{x0} b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (8)

$$I = \frac{J_{x0} b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow J' = \frac{I}{b \delta} = \frac{J_{x0}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow S_L = \frac{1}{\sigma} (J')^2 b L \delta$$

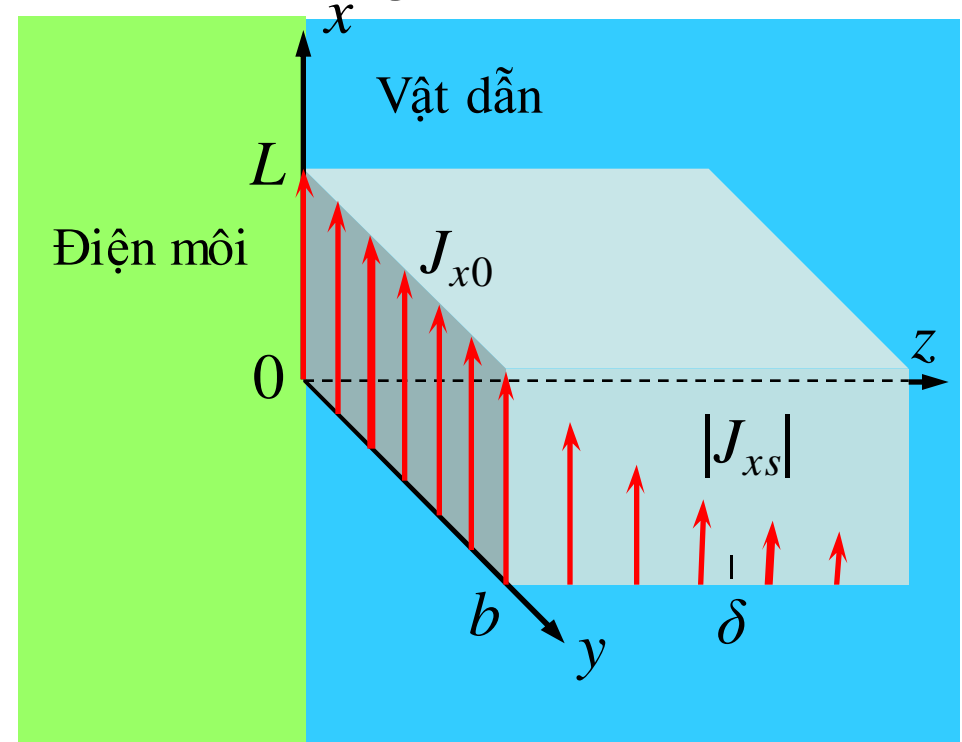
$$= \frac{J_{x0}^2}{2\sigma} b L \delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

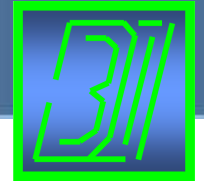
$$\rightarrow S_{L, \text{tbình}} = \frac{1}{4\sigma} J_{x0}^2 b L \delta$$

(với giả thiết là dòng điện tổng phân bố đều trên $0 < z < \delta$)

$$S_{L, \text{tbình}} = \frac{1}{4\sigma} J_{x0}^2 b L \delta$$

(với giả thiết là dòng điện tổng phân bố trên $0 < z < \infty$)





Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt (9)

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi a \delta}$$

$$R_{Cu, 1\text{MHz}, a=1\text{mm}, l=1\text{km}} = \frac{10^3}{(5,8 \cdot 10^7)(2\pi)(10^{-3})(0,066 \cdot 10^{-3})} = 41,5 \Omega$$



Sóng phẳng

1. Lan truyền sóng trong môi trường tự do
2. Lan truyền sóng trong điện môi
3. Định lý Poynting & năng lượng sóng
4. Lan truyền trong vật dẫn: hiệu ứng bề mặt
- 5. Phân cực sóng**



Phân cực sóng (1)

- Trong các phần trước, coi \mathbf{E} & \mathbf{H} có hướng cố định \rightarrow phân cực tuyến tính
- Tuy nhiên, hướng của \mathbf{E} & \mathbf{H} có thể thay đổi theo thời gian & không gian, miễn là nằm trong mặt phẳng vuông góc với hướng z
- λ , v_p , \mathbf{S} , ...
- Hướng tức thời của trường véctor
- *Phân cực sóng*: hàm theo thời gian của hướng của véctor điện trường ở một điểm cố định trong không gian
- Có thể tìm \mathbf{H} từ \mathbf{E}

Phân cực sóng (2)

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}\mathbf{a}_y)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{H}_s = (H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

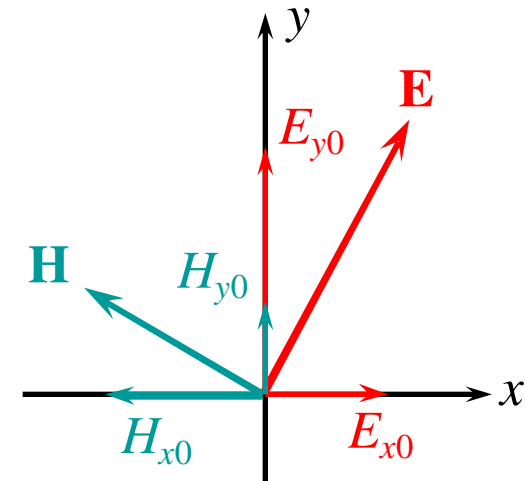
$$= \left[-\frac{E_{y0}}{\eta}\mathbf{a}_x + \frac{E_{x0}}{\eta}\mathbf{a}_y \right] e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

$$S_{z, \text{tình}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_s \times \hat{\mathbf{H}}_s]$$

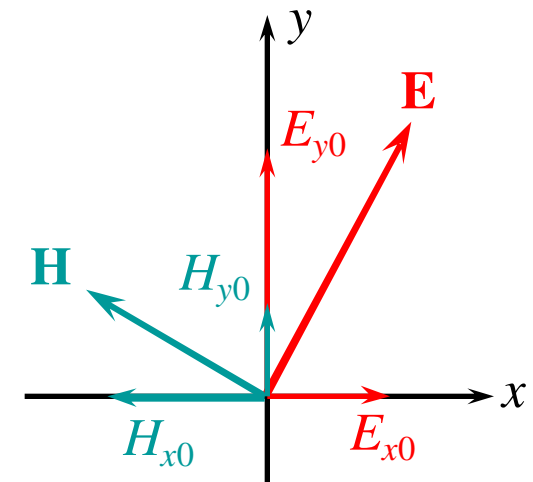
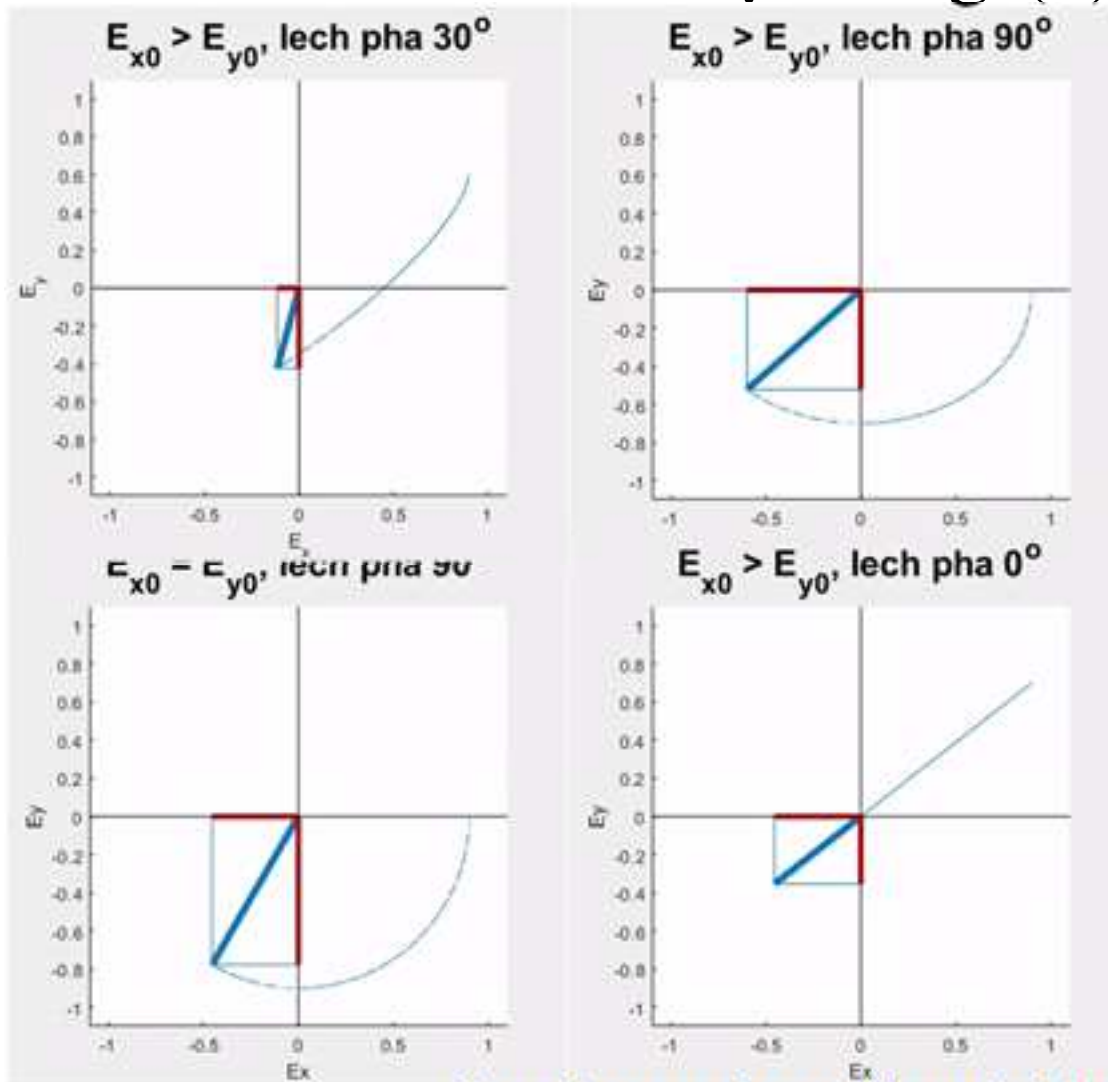
$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_{x0}\hat{H}_{y0}(\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) + E_{y0}\hat{H}_{x0}(\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x) \right] e^{-2\alpha z}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{E_{x0}\hat{E}_{x0}}{\hat{\eta}} + \frac{E_{y0}\hat{E}_{y0}}{\hat{\eta}} \right] e^{-2\alpha z} \mathbf{a}_z$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{1}{\hat{\eta}} \right] \left(|E_{x0}|^2 + |E_{y0}|^2 \right) e^{-2\alpha z} \mathbf{a}_z \quad \text{W/m}^2$$



Phân cực sóng (3)

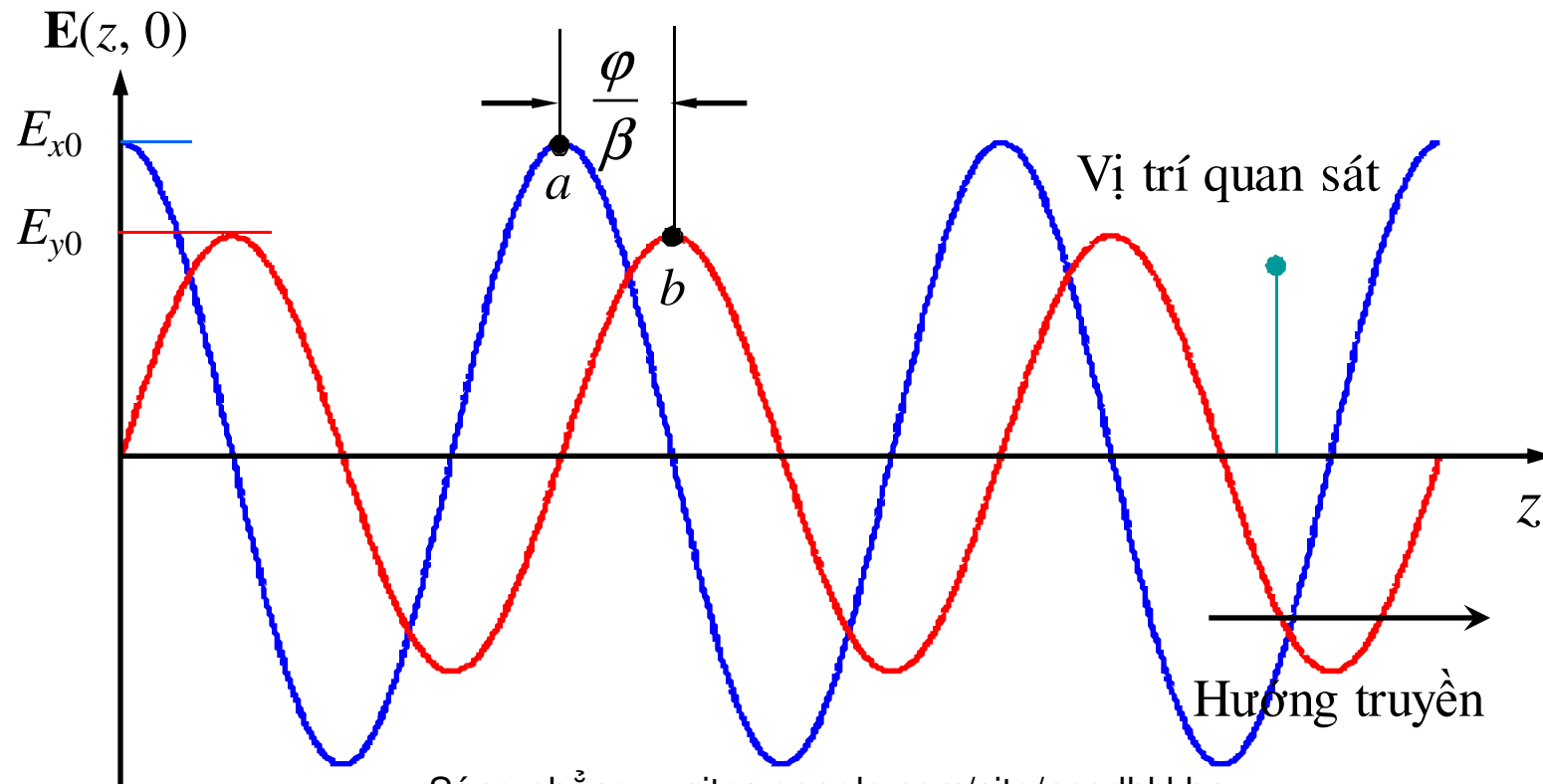


Phân cực sóng (4)

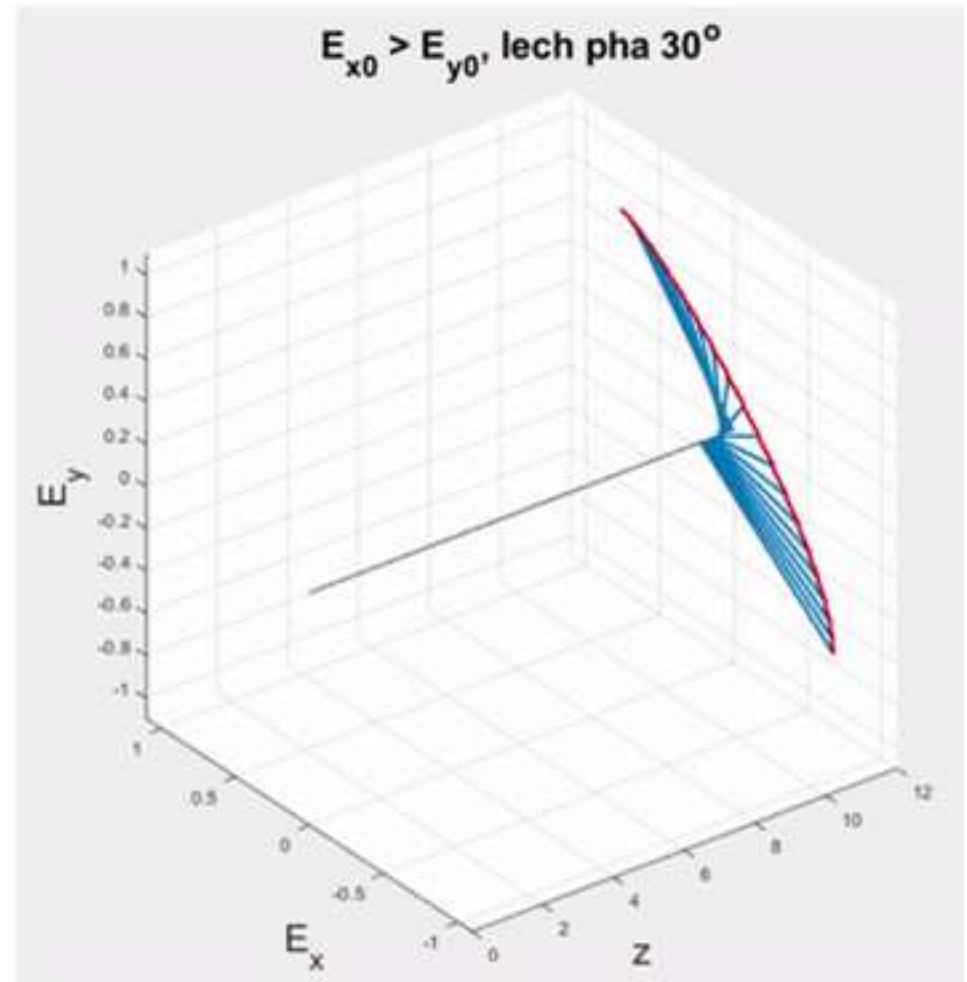
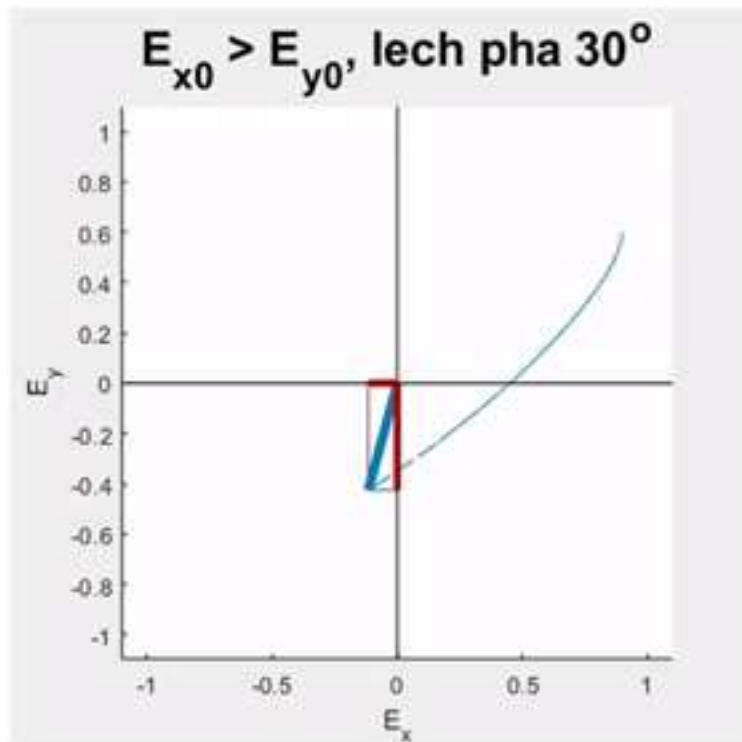
$$\mathbf{E}_s = (E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi)\mathbf{a}_y$$

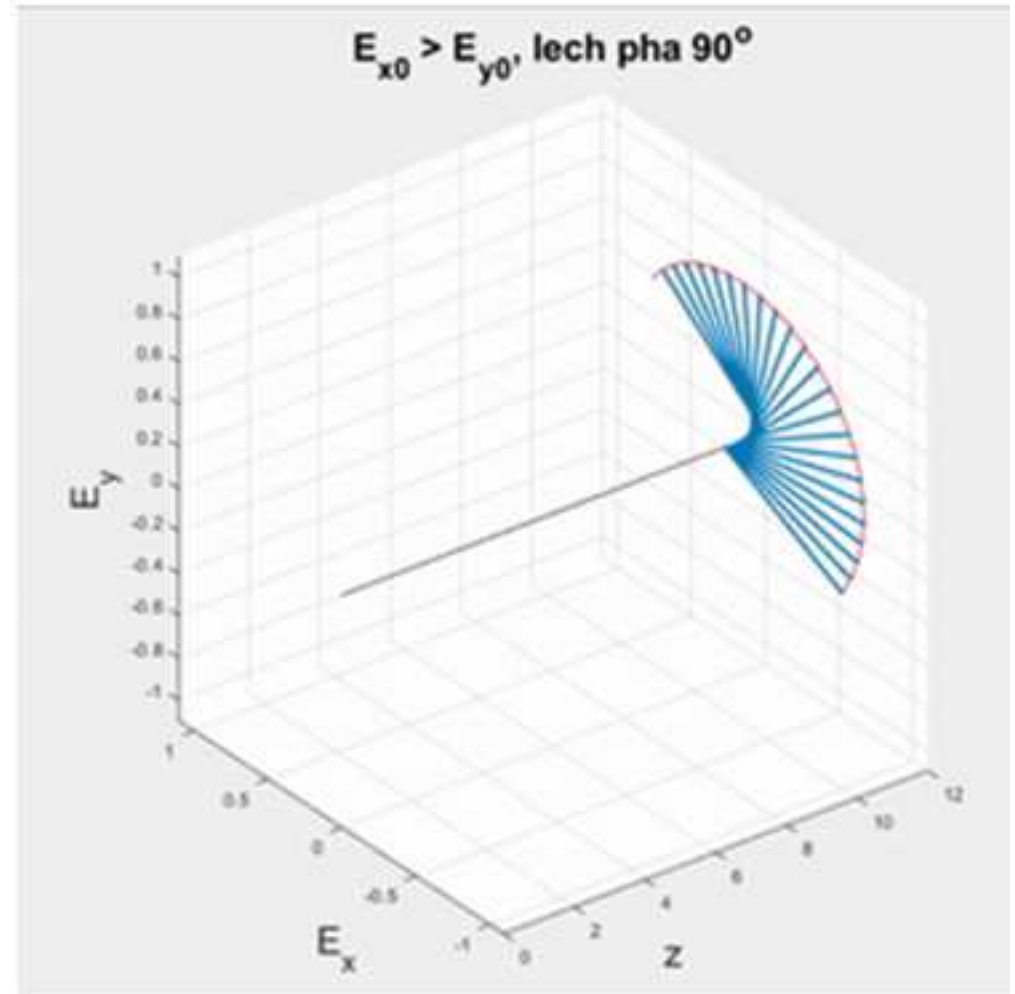
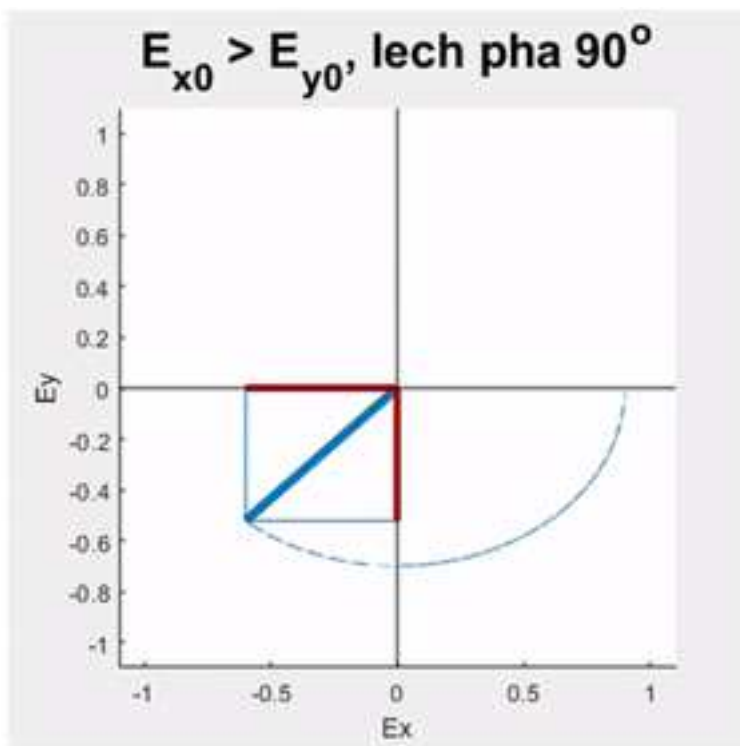
$$\rightarrow \mathbf{E}(z, 0) = E_{x0} \cos(\beta z)\mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\beta z - \varphi)\mathbf{a}_y$$



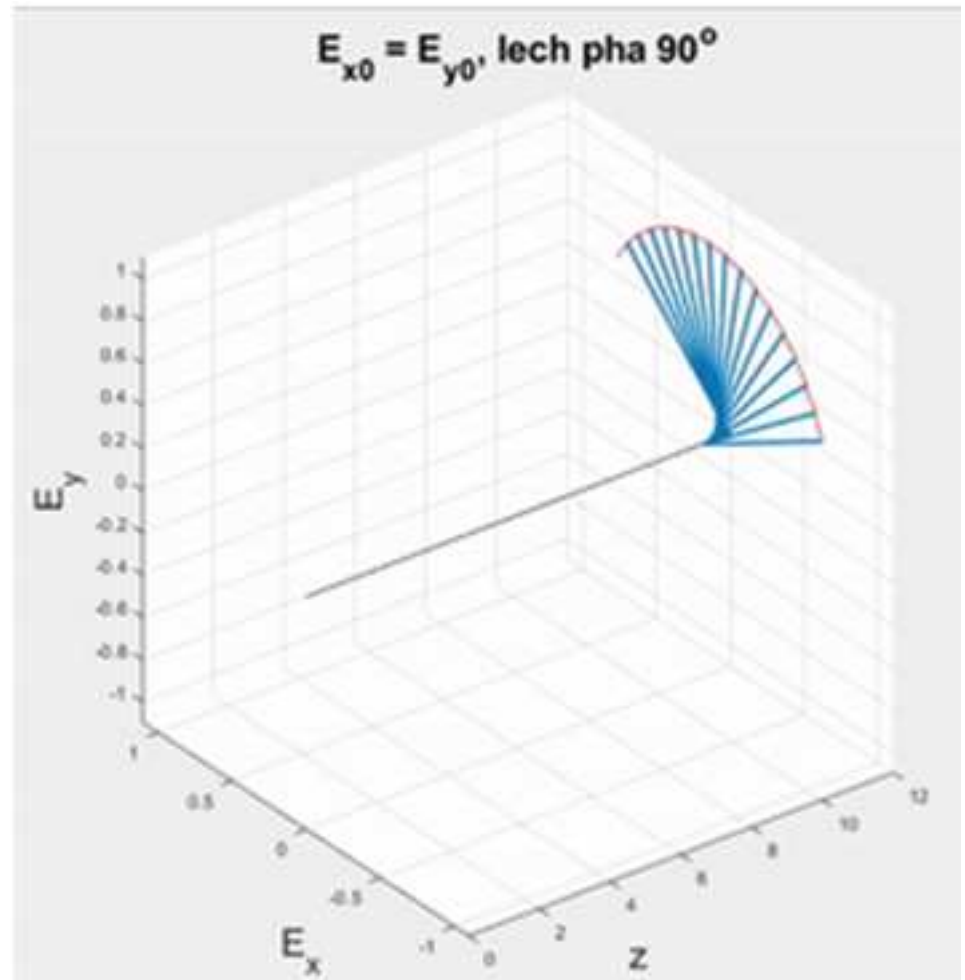
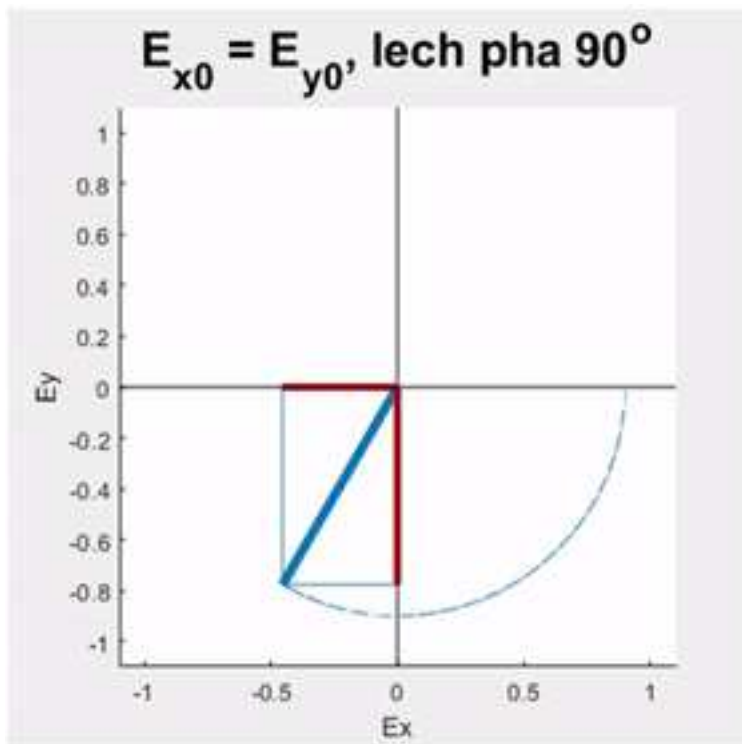
Phân cực sóng (5)



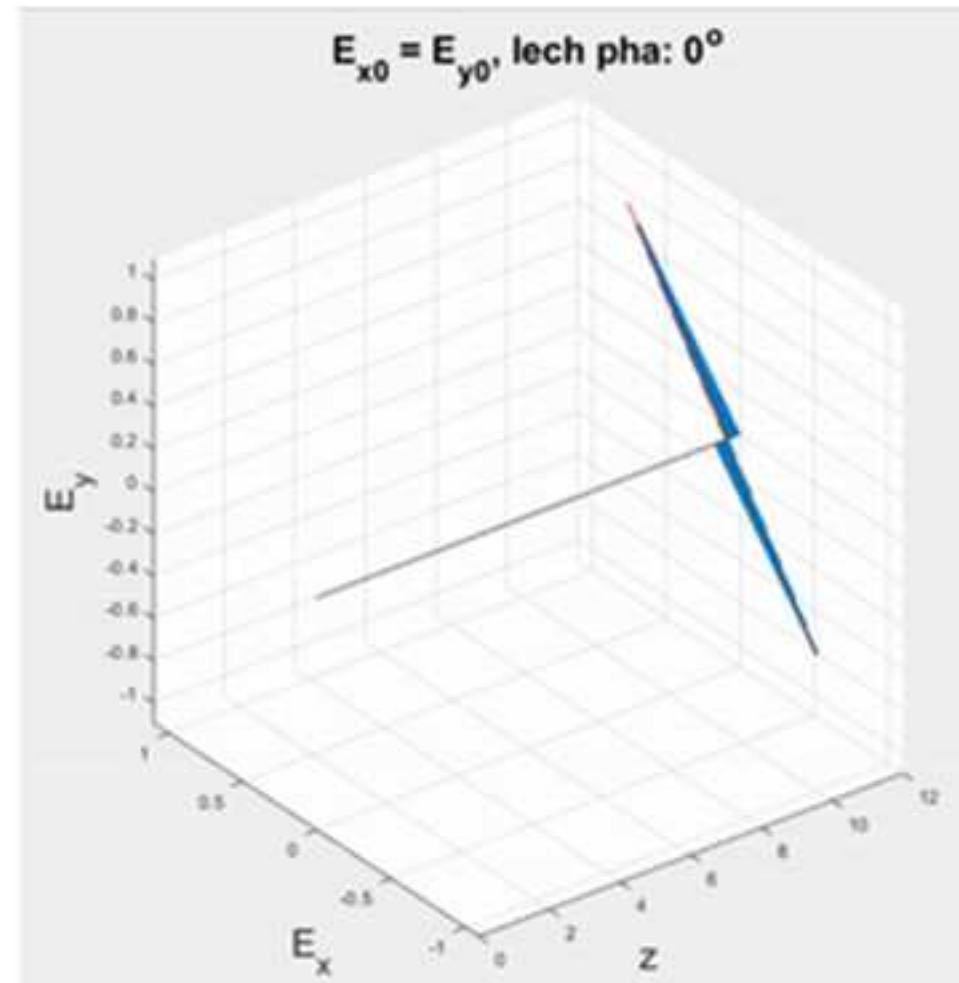
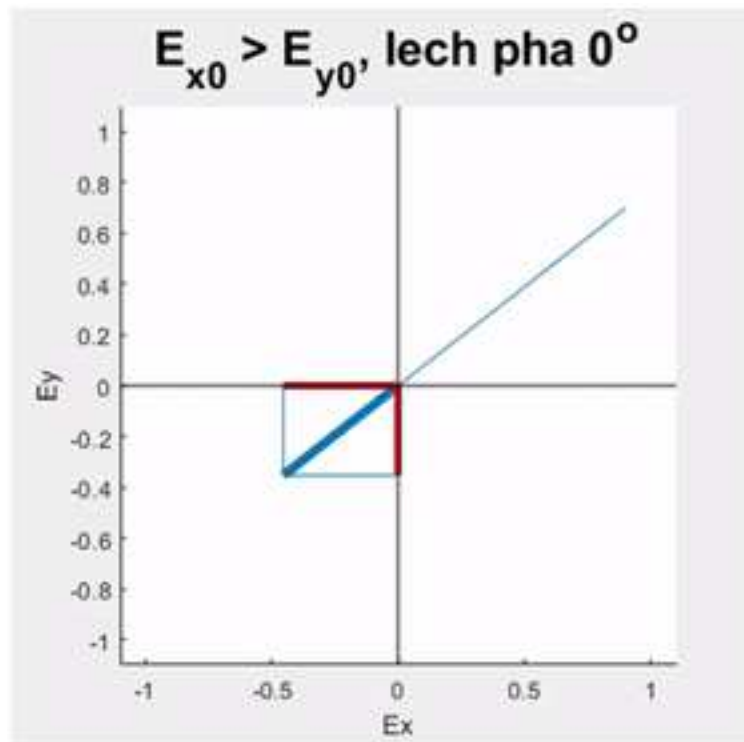
Phân cực sóng (6)



Phân cực sóng (7)



Phân cực sóng (8)



VD

Phân cực sóng (9)

Trong một vùng có điện trường $\mathbf{E}_s = e^{-0,2z} e^{-j0,5z} (3\mathbf{a}_x + j4\mathbf{a}_y)$ V/m, tìm phân cực sóng?

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \text{Re} \left[e^{-0,2z} e^{-j0,5z} (3\mathbf{a}_x + j4\mathbf{a}_y) e^{j\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[3e^{-0,2z} e^{j(\omega t - 0,5z)} \mathbf{a}_x + j4e^{-0,2z} e^{j(\omega t - 0,5z)} \mathbf{a}_y \right] \\ &= \text{Re} \left\{ 3e^{-0,2z} [\cos(\omega t - 0,5z) + j \sin(\omega t - 0,5z)] \mathbf{a}_x + \right. \\ &\quad \left. + j4e^{-0,2z} [\cos(\omega t - 0,5z) + j \sin(\omega t - 0,5z)] \mathbf{a}_y \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ 3e^{-0,2z} [\cos(\omega t - 0,5z) + j \sin(\omega t - 0,5z)] \mathbf{a}_x + \right. \\ &\quad \left. + 4e^{-0,2z} [j \cos(\omega t - 0,5z) - \sin(\omega t - 0,5z)] \mathbf{a}_y \right\} \\ &= 3e^{-0,2z} \cos(\omega t - 0,5z) \mathbf{a}_x - 4e^{-0,2z} \sin(\omega t - 0,5z) \mathbf{a}_y \\ &\rightarrow \begin{cases} E_x(z, t) = 3e^{-0,2z} \cos(\omega t - 0,5z) \\ E_y(z, t) = -4e^{-0,2z} \sin(\omega t - 0,5z) \end{cases}\end{aligned}$$

VD

Phân cực sóng (10)

Trong một vùng có điện trường $\mathbf{E}_s = e^{-0,2z} e^{-j0,5z} (3\mathbf{a}_x + j4\mathbf{a}_y)$ V/m, tìm phân cực sóng?

$$\begin{cases} E_x(z, t) = 3e^{-0,2z} \cos(\omega t - 0,5z) \\ E_y(z, t) = -4e^{-0,2z} \sin(\omega t - 0,5z) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_x(0, t) = 3 \cos \omega t \\ E_y(0, t) = -4 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{9} E_x^2(0, t) + \frac{1}{16} E_y^2(0, t) = 1$$

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} E_x(0, 0) = 3 \\ E_y(0, 0) = 0 \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{2\omega} \rightarrow \begin{cases} E_x(0, \pi / 2\omega) = 0 \\ E_y(0, \pi / 2\omega) = -4 \end{cases}$$

