Nguyễn Công Phương

Lý thuyết trường điện từ

Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive

Nội dung

Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive

1. Dịch chuyển điện
2. Luật Gauss
3. Đive
4. Phương trình Maxwell 1
5. Toán tử véctơ ∇
6. Định lý đive

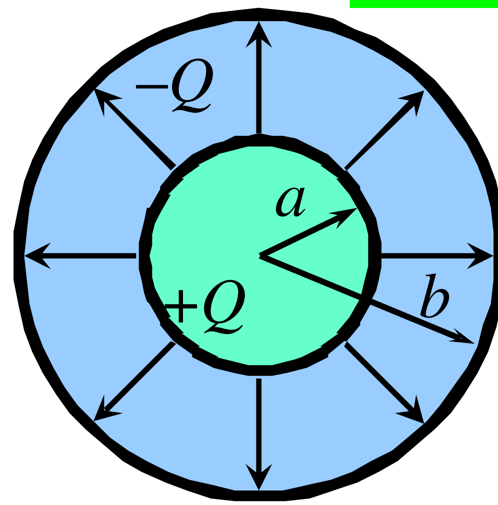
Dịch chuyển điện (1)

- M. Faraday (1837)
- *Hiện tượng*: tổng điện tích của mặt cầu ngoài *có trị tuyệt đối* bằng tổng điện tích ban đầu của mặt cầu trong, không phụ thuộc vào chất điện môi giữa hai mặt cầu
- *Kết luận*: có một sự “dịch chuyển” nào đó từ bán cầu trong ra bán cầu ngoài, gọi là *dịch chuyển điện*:

$$\Psi = Q$$

- Ψ: thông lượng

Dịch chuyển điện (2)



$S_a = 4\pi a^2$ (m^2)

Mật độ thông lượng chảy qua mặt cầu trong:

$$\frac{\Psi}{4\pi a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

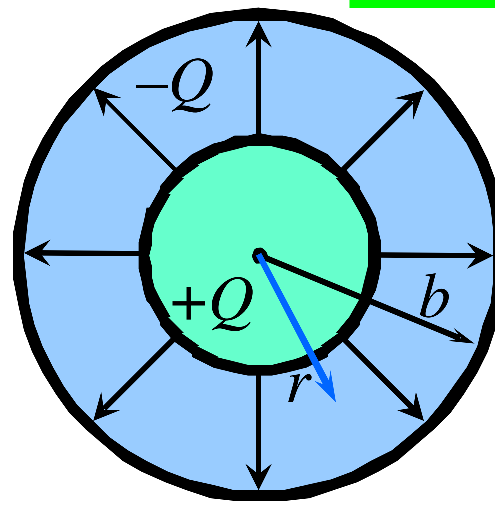
Véctơ mật độ dịch chuyển điện (véctơ dịch chuyển điện):

$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D}\Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2}\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D}\Big|_{a \le r \le b} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

Dịch chuyển điện (3)



$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r \quad (a < r < b)$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\mathbf{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r} \\ \mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}}$$

(trong chân không)

(trong chân không)

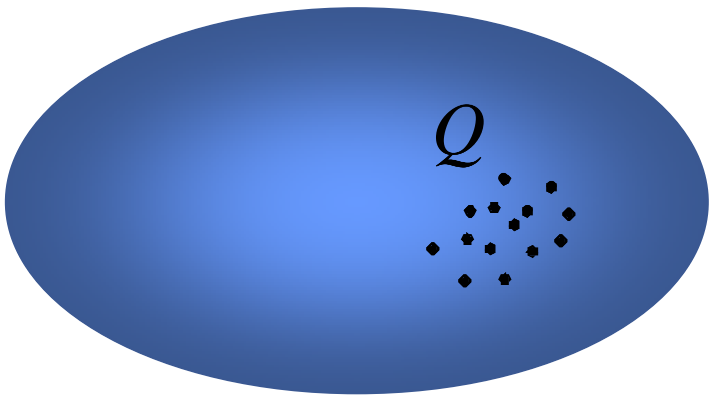
$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}} \\ \mathbf{E} = \displaystyle\int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_r \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{D} = \displaystyle\int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2}\mathbf{a}_r}$$

Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive

1. Dịch chuyển điện
2. **Luật Gauss**
3. Đive
4. Phương trình Maxwell 1
5. Toán tử véctơ ▽
6. Định lý đive

Luật Gauss (1)

- Tổng quát hoá thí nghiệm của Faraday
- Luật Gauss: *thông lượng chảy qua một mặt kín bất kỳ bằng tổng điện tích được bao trong mặt kín đó*



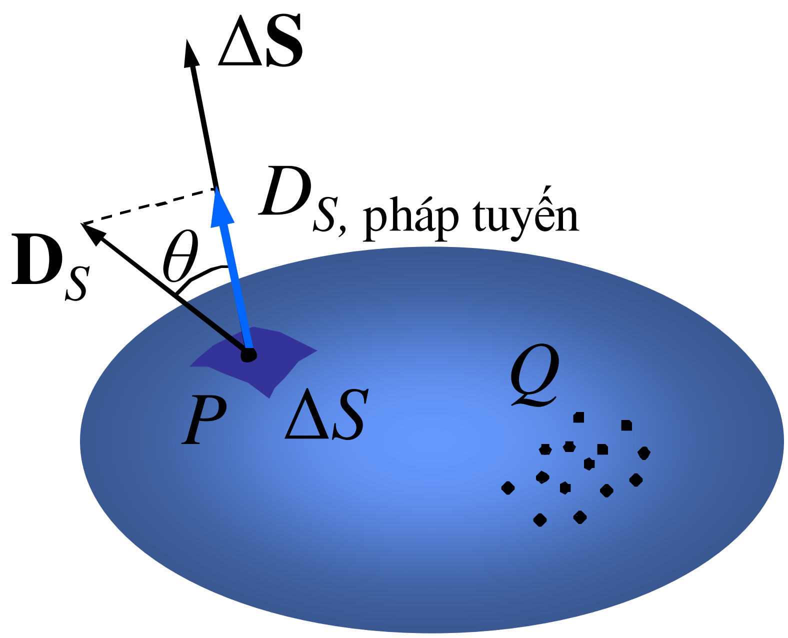
Luật Gauss (2)

$\Delta\Psi$ = thông lượng qua $\Delta\mathbf{S}$

$= D_S \cos\theta \Delta S$

$= \mathbf{D}_S . \Delta\mathbf{S}$

$\rightarrow \Psi = \int d\psi = \oint_{\text{mặt kín}} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S}$



$$\boxed{\Psi = \oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = \text{điện tích trong mặt kín} = Q}$$

Luật Gauss (3)

$$\boxed{\Psi = \oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = \text{điện tích trong mặt kín} = Q}$$

$$Q = \sum Q_n$$

$$Q = \int \rho_L dL$$

$$Q = \int_S \rho_S dS$$

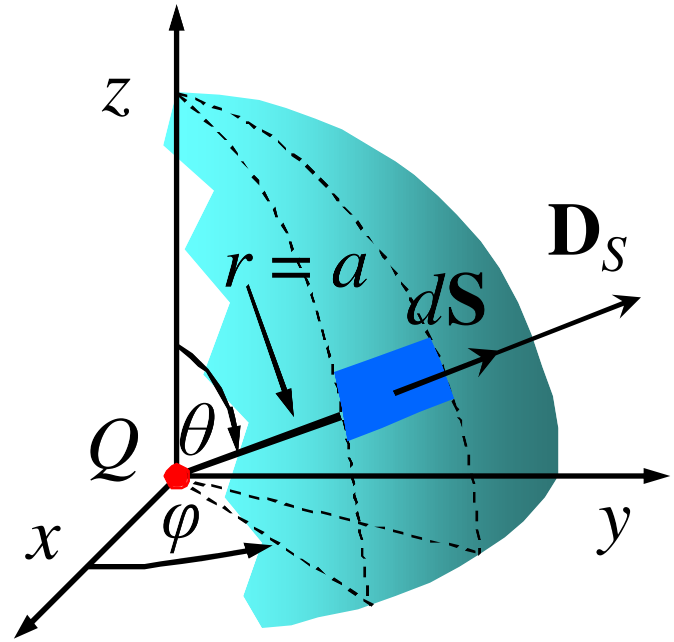
$$Q = \int_V \rho_v dV$$

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = \int_V \rho_v dv}$$

Kiểm chứng lại thí nghiệm của Faraday bằng luật Gauss

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0\mathbf{E}\end{aligned}\right\} \rightarrow \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

$$\rightarrow \mathbf{D}_S = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r \quad \text{(tại mặt cầu)}$$



$$\left.\begin{aligned}&\rightarrow \oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r d\mathbf{S} \\ &dS = r^2\sin\theta d\theta d\varphi = a^2\sin\theta d\theta d\varphi \\ &\rightarrow d\mathbf{S} = a^2\sin\theta d\theta d\varphi\mathbf{a}_r\end{aligned}\right\} \rightarrow \oint_S \mathbf{D}_S.d\mathbf{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi$$

Kiểm chứng lại thí nghiệm của Faraday bằng luật Gauss

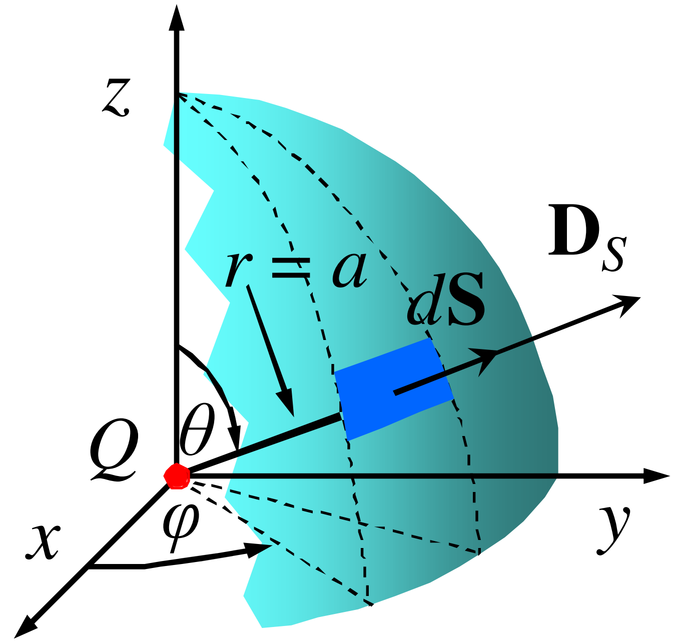
$$\oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi} d\varphi$$

$$= Q$$



Luật Gauss (4)

Ví dụ 1

Cho một điện tích điểm 1 nC tại (2, 0, 3) & một điện tích điểm 2 nC tại (4, – 5, 6). Tính tổng thông lượng chảy ra khỏi khối lập phương được tạo bằng 6 mặt phẳng x, y, $z = \pm 8$.

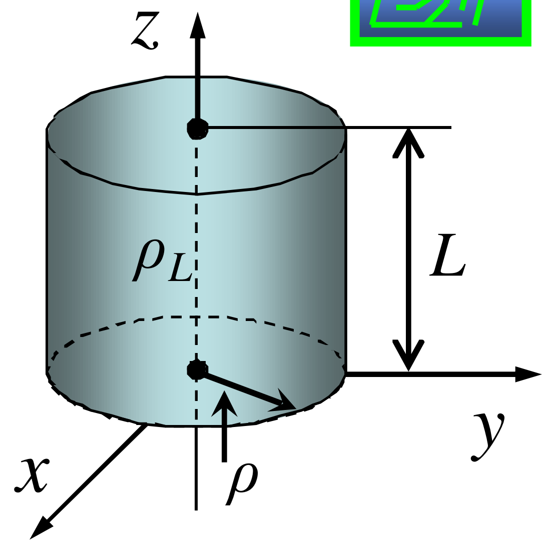
Luật Gauss (5)

- Luật Coulomb được dùng để tính **E** [= $f(Q)$]
- Một số bài toán khó tính được **E** nếu dùng luật Coulomb
- Luật Gauss có thể dùng để tính **D** (→ **E**) khi đã biết Q

$$\boxed{Q = \oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S}}$$

- Bài toán sẽ dễ giải hơn nếu chọn được một mặt kín thoả mãn 2 điều kiện:
  - $\mathbf{D}_S$ tại mọi nơi vuông góc hoặc tiếp tuyến với mặt kín, sao cho $\mathbf{D}_S.d\mathbf{S}$ trở thành $D_S dS$ hoặc zero
  - Ở những nơi (trên mặt kín) mà $\mathbf{D}_S.d\mathbf{S} \neq 0$, D_S = const
- (gọi là mặt Gauss)

Luật Gauss (6)



$$\boxed{E = ?}$$

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho;\ D_\rho = f(\rho)$$

$$Q = \oint_{\text{trụ tròn}} \mathbf{D}_S . d\mathbf{S}$$

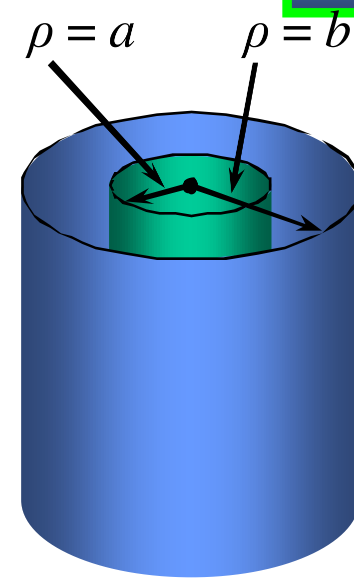
$$= D_S \int_{\text{sườn}} dS + 0 \int_{\text{đỉnh}} dS + 0 \int_{\text{đáy}} dS$$

$$= D_S \int_{z=0}^{z=L} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho d\varphi dz = D_S 2\pi\rho L \rightarrow D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho L}$$

$$Q = \rho_L L$$

$$\rightarrow D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \qquad \rightarrow E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho}$$

Luật Gauss (7)



Hai mặt trụ tròn đồng trục dẫn điện, dài vô tận. Mặt ngoài của mặt trụ trong có mật độ điện tích mặt ρ_S.

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

(điện tích của một mặt trụ tròn dài L, bán kính ρ $(a < \rho < b)$)

$$Q = \int_{z=0}^{z=L} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho_S a d\varphi dz = 2\pi a L \rho_S$$

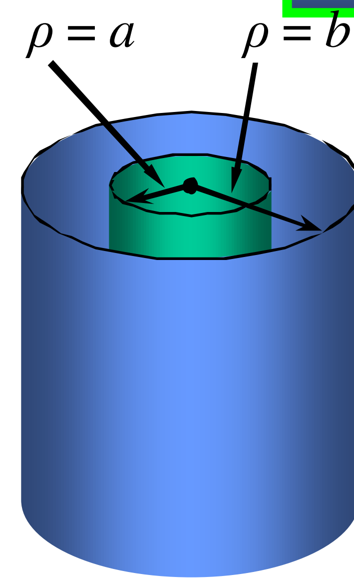
(điện tích tổng của mặt trụ trong dài L)

$$\to D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \qquad \mathbf{D} = \frac{a\rho_S}{\rho}\mathbf{a}_\rho \;\; (a < \rho < b)$$

$$\rho_L = Q\big|_{l=1} = \rho_S\, S\big|_{l=1} = \rho_S.2\pi a.1 = 2\pi a \rho_s$$

$$\to \boxed{\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

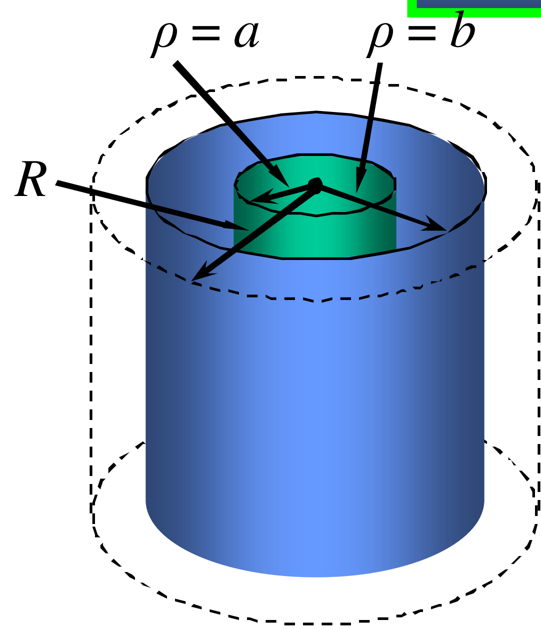
Luật Gauss (8)



$$\left.\begin{aligned}
Q_{\text{mặt trụ ngoài}} &= -Q_{\text{mặt trụ trong}} \\
Q_{\text{mặt trụ ngoài}} &= 2\pi b L \rho_{S,\text{mặt trụ ngoài}} \\
Q_{\text{mặt trụ trong}} &= 2\pi a L \rho_{S,\text{mặt trụ trong}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\to \rho_{S,\text{mặt trụ ngoài}} = -\frac{a}{b}\rho_{S,\text{mặt trụ trong}}$$

Luật Gauss (9)



$$\Psi_{R,R>b} = Q_{\text{mặt trụ ngoài}} + Q_{\text{mặt trụ trong}} = 0 = D_{S,R} 2\pi RL$$

$$\rightarrow D_{S,R} = 0$$

Một cáp đồng trục dài vô hạn (hoặc hở hai đầu & dài hữu hạn nhưng $L >> b$) không có trường ở bên ngoài & không có trường ở bên trong dây dẫn trong

Luật Gauss (10)

Ví dụ 2

Xét một cáp đồng trục dài 1m, bán kính trong 1mm, bán kính ngoài 4mm. Giữa các dây dẫn là không khí. Tổng điện tích của dây dẫn trong là 40nC. Tính mật độ điện tích trên các dây dẫn, **E** & **D**.

$$\rho_{S,\text{dây trong}} = \frac{Q_{\text{dây trong}}}{2\pi a L} = \frac{40.10^{-9}}{2\pi.10^{-3}.1} = 6,37 \ \ \mu\text{C/m}^2$$

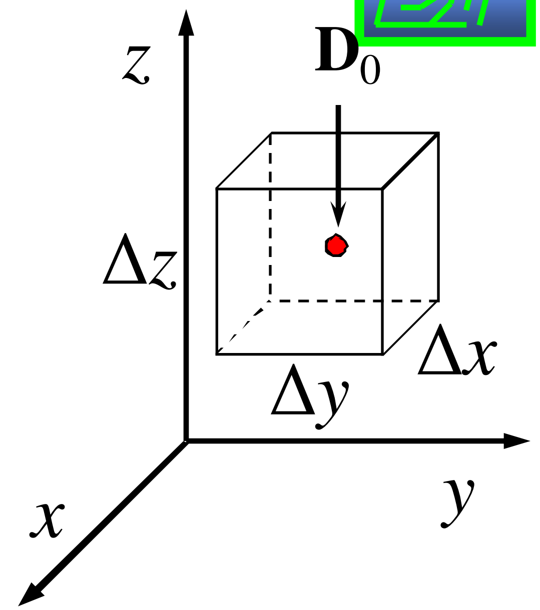
$$\rho_{S,\text{dây ngoài}} = \frac{Q_{\text{dây ngoài}}}{2\pi b L} = \frac{-40.10^{-9}}{2\pi.4.10^{-3}.1} = -1,59 \ \ \mu\text{C/m}^2$$

$$D_\rho\Big|_{10^{-3}<\rho<4.10^{-3}} = \frac{a\rho_{S,\text{dây trong}}}{\rho} = \frac{1.10^{-3}.6,37.10^{-6}}{\rho} = \frac{6,37}{\rho} \ \ \text{nC/m}^2$$

$$E_\rho\Big|_{10^{-3}<\rho<4.10^{-3}} = \frac{D_\rho}{\varepsilon_0} = \frac{6,37.10^{-9}}{8,854.10^{-12}\rho} = \frac{719}{\rho} \ \ \text{V/m}^2$$

Luật Gauss (11)

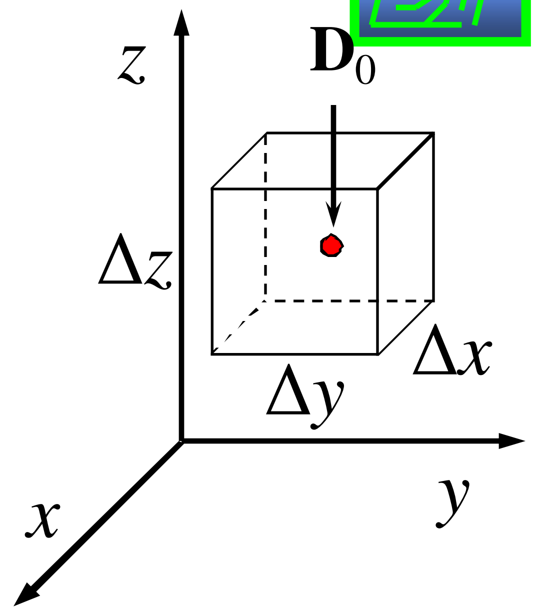
- Để áp dụng luật Gauss (tính **D**) thì phải tìm được mặt Gauss
- *Vấn đề*: khó tìm mặt Gauss
- *Giải pháp*: chọn một mặt kín rất nhỏ (tiến đến zero)



$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$$

Luật Gauss (12)

$$\boxed{Q = \oint_S \mathbf{D}_S . d\mathbf{S}}$$



$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

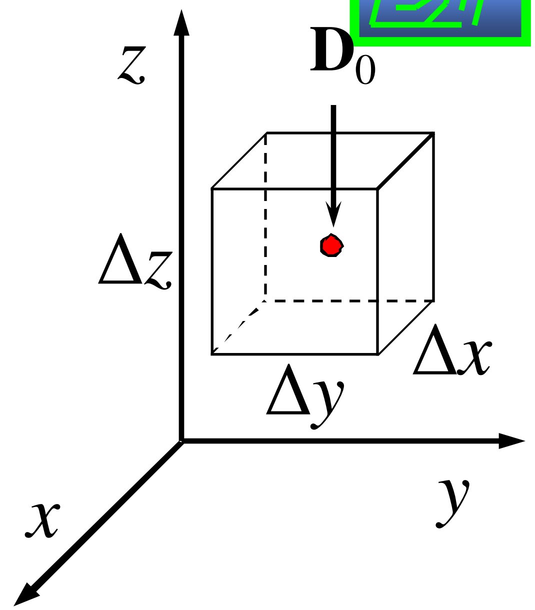
Vì mặt kín rất nhỏ nên **D** về cơ bản là hằng số trên từng mặt

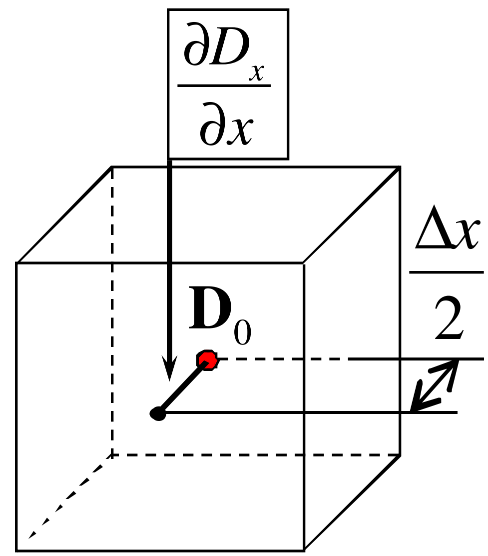
$$\int_{\text{trước}} \doteq \mathbf{D}_{\text{trước}} . \Delta\mathbf{S}_{\text{trước}} \doteq \mathbf{D}_{\text{trước}} . \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \doteq D_{x,\text{trước}} \Delta y \Delta z$$

Luật Gauss (13)

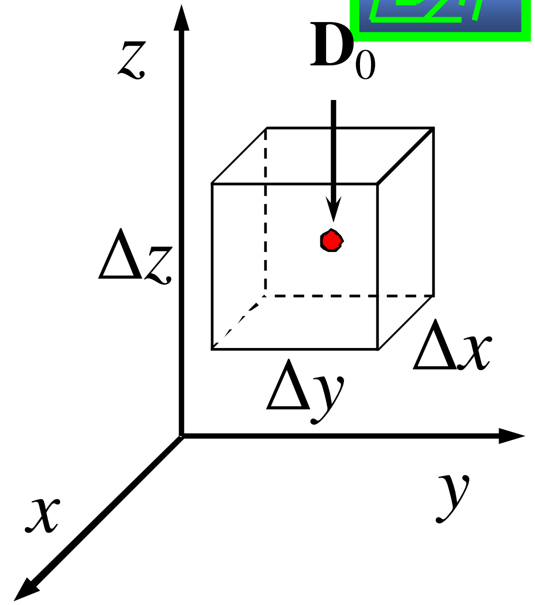
$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\text{trước}} \doteq D_{x,\text{trước}}\Delta y \Delta z \\
&D_{x,\text{trước}} \doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\times(\text{tốc độ thay đổi của } D_x \text{ theo } x) \\
&\qquad\quad \doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}
\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \int_{\text{trước}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \right)\Delta y \Delta z$$





Luật Gauss (14)



$$\int_{\text{trước}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \right)\Delta y \Delta z$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\text{sau}} \doteq \mathbf{D}_{\text{sau}}.\Delta\mathbf{S}_{\text{sau}} \doteq \mathbf{D}_{\text{sau}}.(-\Delta y \Delta z \mathbf{a}_x) \\
&\doteq -D_{x,\text{sau}}\Delta y \Delta z \\
&D_{x,\text{sau}} \doteq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}
\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \int_{\text{sau}} \doteq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \right)\Delta y \Delta z$$

Luật Gauss (15)

$$\left.\begin{array}{l} \int_{\text{trước}} \doteq \left(D_{x0} + \dfrac{\Delta x}{2}\dfrac{\partial D_x}{\partial x} \right)\Delta y \Delta z \\ \int_{\text{sau}} \doteq \left(-D_{x0} + \dfrac{\Delta x}{2}\dfrac{\partial D_x}{\partial x} \right)\Delta y \Delta z \end{array}\right\}$$

$$\to \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

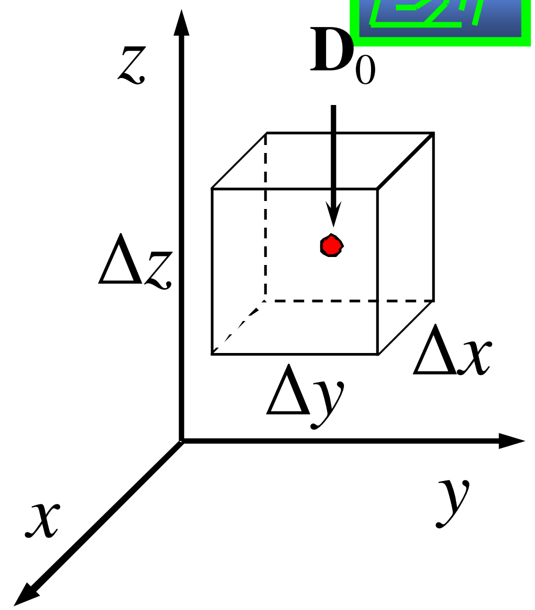
Tương tự:
$$\begin{cases} \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} \doteq \dfrac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z \\ \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}} \doteq \dfrac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z \end{cases}$$

Luật Gauss (16)

$$\left.\begin{aligned}
\int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} &\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \\
\int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} &\doteq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z \\
\int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}} &\doteq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z \\
\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{trái}} &+ \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Luật Gauss (17)



$$\left.\begin{aligned}\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} &\doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \\ \Delta v &= \Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v$$

$$\boxed{Q_{\text{bao trong mặt kín }\Delta v} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\times \Delta v}$$

Luật Gauss (18)

Ví dụ 3

Tính tổng điện tích xấp xỉ bao trong một mặt kín thể tích 10^{-10} m^3 nằm ở gốc toạ độ. Cho $\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ C/m^2.

$$Q_{\text{bao trong mặt kín }\Delta v} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\times\Delta v$$

$$\left.\begin{aligned}
D_x &= e^{-x}\sin y \to \frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x}\sin y \to \left.\frac{\partial D_x}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\\
D_y &= -e^{-x}\cos y \to \frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x}\sin y \to \left.\frac{\partial D_y}{\partial y}\right|_{y=0} = 0\\
D_z &= 2z \to \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 \to \left.\frac{\partial D_z}{\partial z}\right|_{z=0} = 2
\end{aligned}\right\}$$

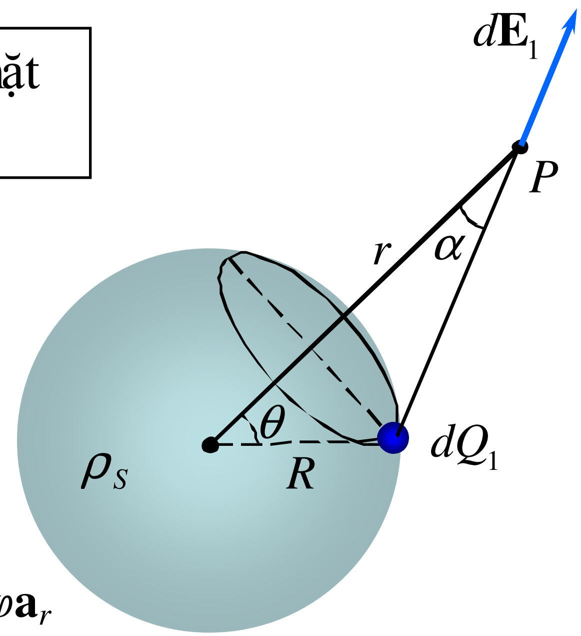
$$\to Q_{\text{bao trong mặt kín }\Delta v} \doteq (0+0+2)10^{-10} = 0,2 \text{ nC}$$

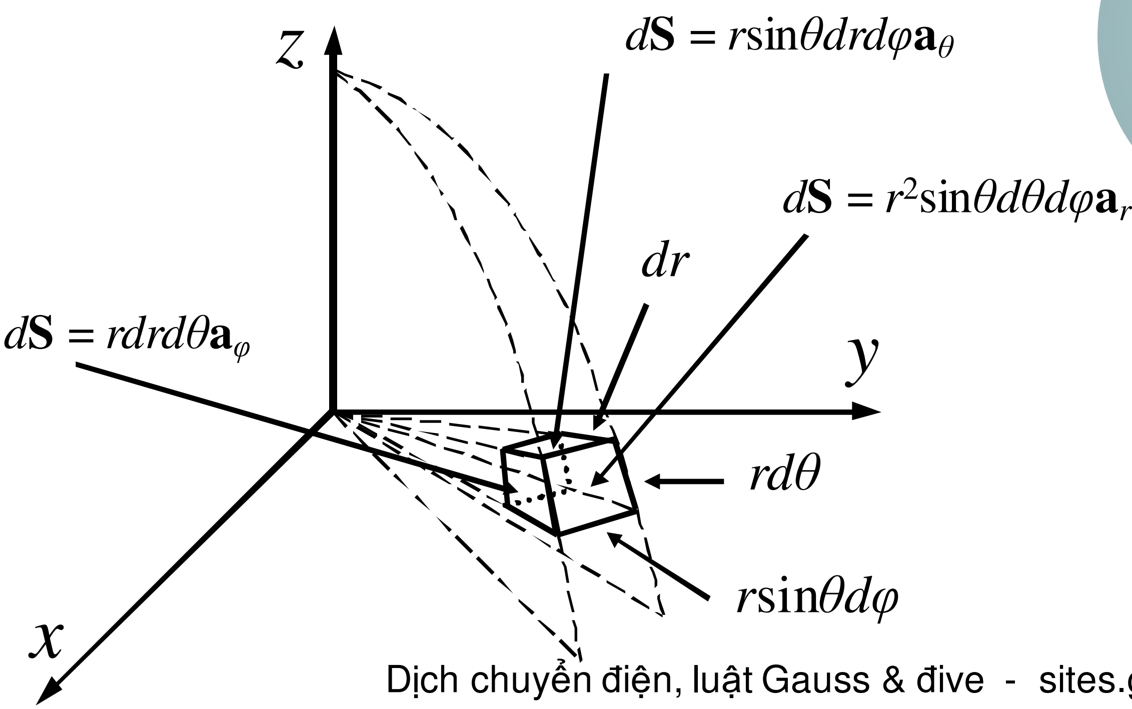
Luật Gauss (19)

Ví dụ 4

Một mặt cầu bán kính R có phân bố điện tích mặt đều ρ_S. Tìm **E** ở P?

$$dQ_1 = \rho_S dS_1 = \rho_S R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$



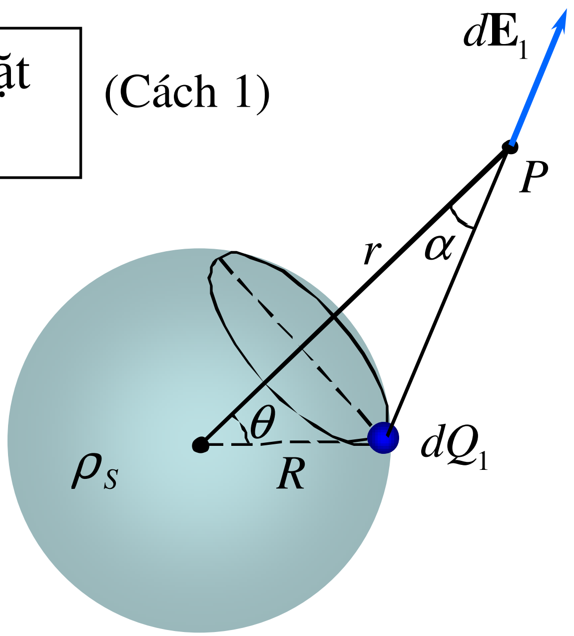


Luật Gauss (20)

Ví dụ 4

Một mặt cầu bán kính R có phân bố điện tích mặt đều ρ_S. Tìm $\mathbf{E}$ ở P?

(Cách 1)



$$dQ_1 = \rho_S dS_1 = \rho_S R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dE_1 = \frac{dQ_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{Q_1P}^2}\cos\alpha$$

$$= \frac{\rho_S R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R_{Q_1P}^2}\cos\alpha$$

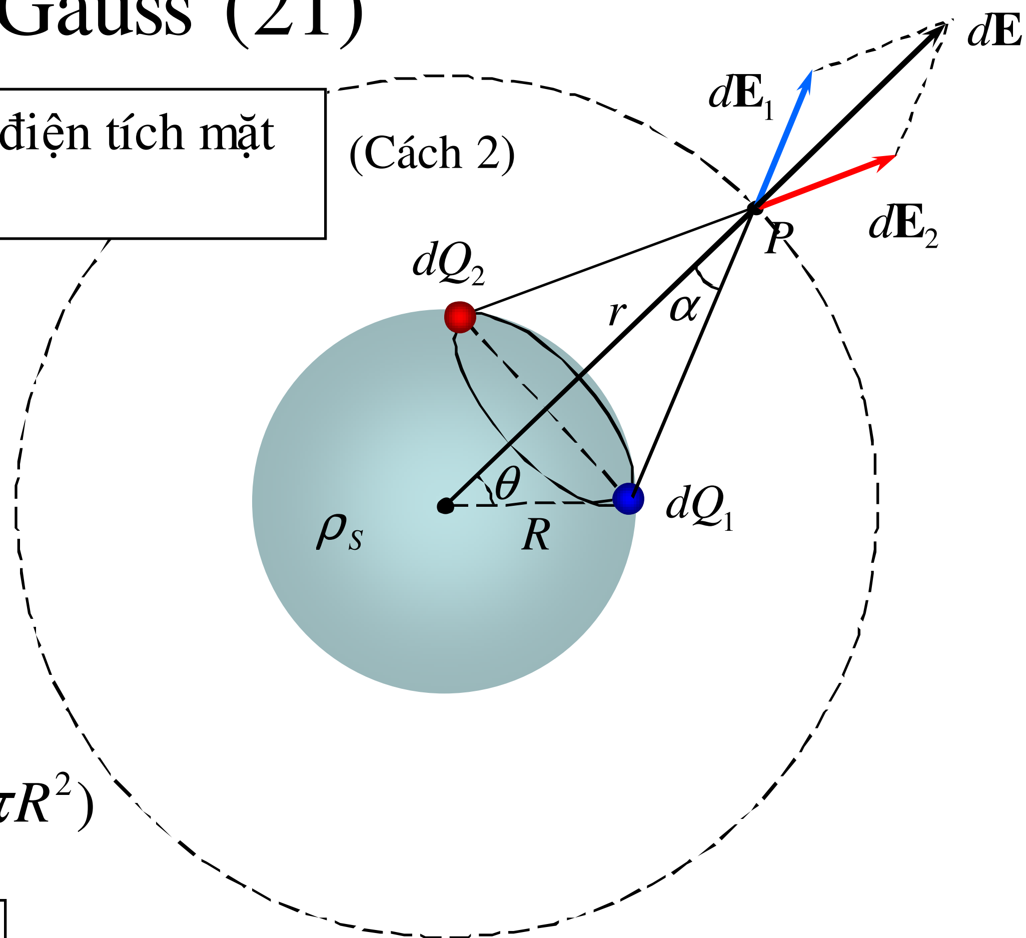
$$= \frac{\rho_S R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R_{Q_1P}^2} \times \frac{r - R\cos\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}}$$

$$\to E_P = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\rho_S R^2 \sin\theta(r - R\cos\theta)d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{3/2}} = ???$$

Luật Gauss (21)

Ví dụ 4

Một mặt cầu bán kính R có phân bố điện tích mặt đều ρ_S. Tìm **E** ở P?



$$\left.\begin{aligned}
&\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}.d\mathbf{S} = Q \\
&\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_{Pr}(4\pi r^2) \\
&Q = \rho_S(4\pi R^2)
\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_{Pr}(4\pi r^2) = \rho_S(4\pi R^2)$$

$$\rightarrow \boxed{E_{Pr} = \frac{\rho_S R^2}{\varepsilon_0 r^2}}, \qquad r > R$$

Luật Gauss (22)

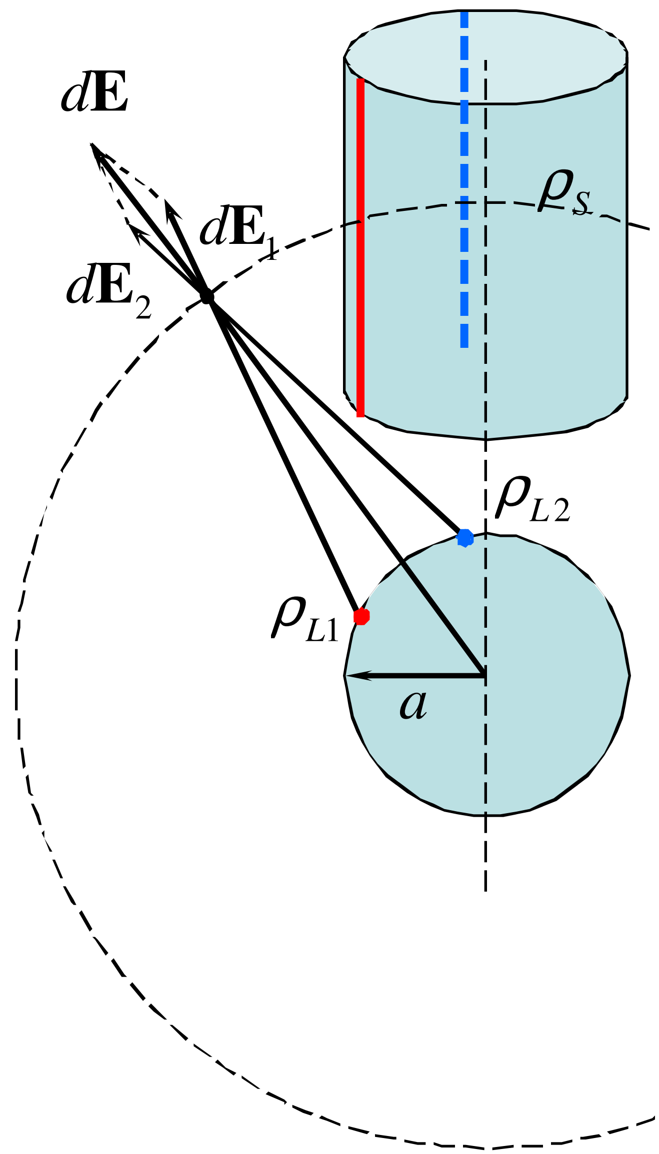
Ví dụ 5

Một mặt trụ dài vô hạn với bán kính a có mật độ điện tích mặt đều ρ_S. Tìm $\mathbf{E}$?

$$\left.\begin{aligned}&\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}.d\mathbf{S} = Q\\ &\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_r (2\pi r L)\\ &Q = \rho_S (2\pi a L)\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 E_r (2\pi r L) = \rho_S (2\pi a L)$$

$$\rightarrow \boxed{E_r = \frac{\rho_S a}{\varepsilon_0 r}}, \qquad r > a$$



Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive

1. Dịch chuyển điện
2. Luật Gauss
3. **Đive**
4. Phương trình Maxwell 1
5. Toán tử véctơ ▽
6. Định lý đive

Đive (1)

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \doteq \frac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

$$\boxed{\text{Đive của } \mathbf{A} = \text{div}\,\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}}$$

Đive (2)

$$\text{Đive của } \mathbf{A} = \text{div}\,\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

- Đive của mật độ thông lượng véctơ **A** là thông lượng trên mỗi đơn vị thể tích, chảy ra từ một vùng kín nhỏ, có thể tích tiến đến zero
- Đive là một phép toán có đối số là một véctơ, nhưng kết quả là một giá trị vô hướng
- Đive chỉ cho kết quả là có *bao nhiêu* thông lượng (trên mỗi đơn vị thể tích) chảy ra khỏi một vùng nhỏ, chứ không phải là *theo hướng nào*

Đive (3)

$$\boxed{\text{Đive của } \mathbf{A} = \operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}.d\mathbf{S}}{\Delta v}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(Descartes)}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(Trụ tròn)}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} \qquad \text{(Cầu)}$$

Đive (4)

Ví dụ 1

Tính đive ở gốc toạ độ, cho $\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\,\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\,\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ C/m^2.

Đive (5)

Ví dụ 2

Tính đive của các véctơ sau:

$$a)\mathbf{A} = xy^2z^3(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$$

$$b)\mathbf{B} = \rho\cos\varphi\mathbf{a}_\rho + \frac{z}{\rho}\sin\varphi\mathbf{a}_z$$

$$c)\mathbf{C} = r^2\sin\theta\cos\varphi(\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\varphi)$$

Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive

1. Dịch chuyển điện
2. Luật Gauss
3. Đive
4. **Phương trình Maxwell 1**
5. Toán tử véctơ ▽
6. Định lý đive

Maxwell 1 (1)

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q \quad \to \frac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

$$\left.\begin{array}{l} \to \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{Q}{\Delta v} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S}}{\Delta v} \qquad \lim\limits_{\Delta v \to 0} \dfrac{Q}{\Delta v} = \rho_v \end{array}\right\}$$

$$\to \boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v}$$ Phương trình Maxwell 1

Maxwell 1 (2)

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_v}$$

- Áp dụng cho điện trường tĩnh & từ trường dừng
- Thông lượng (trên một đơn vị thể tích) chảy ra khỏi một thể tích rất nhỏ đúng bằng mật độ điện tích khối tại đó
- Có thể gọi là *dạng vi phân của luật Gauss* vì
  - Luật Gauss liên hệ thông lượng chảy ra khỏi một mặt kín với điện tích bao trong mặt kín đó
  - Maxwell 1 phát biểu về thông lượng (trên mỗi đơn vị thể tích) chảy ra khỏi một thể tích rất nhỏ, nghĩa là tại 1 điểm
- Maxwell 1 còn gọi là dạng phương trình vi phân của luật Gauss
- Luật Gauss còn gọi là dạng tích phân của Maxwell 1

Maxwell 1 (3)

Ví dụ

Tính mật độ điện tích khối ρ_v quanh một điện tích điểm Q nằm ở gốc toạ độ.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi} \\ D_\theta &= 0, \quad D_\varphi = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\to \operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}\right) = 0 \\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_v \end{aligned}\right\} \to \rho_v = 0$$

Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive

1. Dịch chuyển điện
2. Luật Gauss
3. Đive
4. Phương trình Maxwell 1
5. **Toán tử véctơ ∇**
6. Định lý đive

$\nabla(1)$

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

$$\nabla.\mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right).\left(D_x\mathbf{a}_x + D_y\mathbf{a}_y + D_z\mathbf{a}_z\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(D_x) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z)$$

$$= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \operatorname{div}\mathbf{D}$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla.\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}}$$

$\nabla(2)$

Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = e^{-x}\sin y\mathbf{a}_x - e^{-x}\cos y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ C/m², tính $\nabla.\mathbf{D}$?

Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive

1. Dịch chuyển điện
2. Luật Gauss
3. Đive
4. Phương trình Maxwell 1
5. Toán tử véctơ ∇
6. **Định lý đive**

Định lý đive (1)

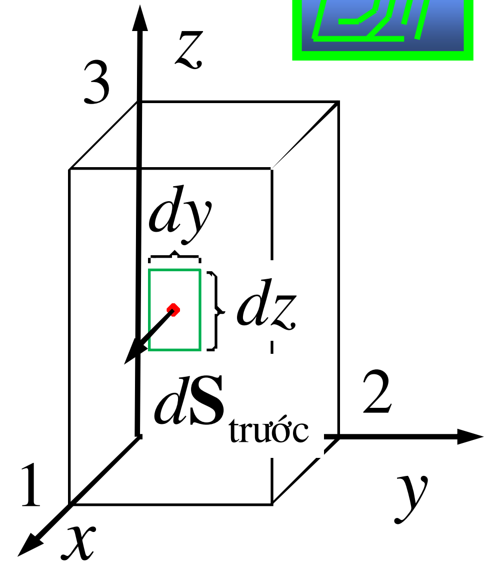
- Có thể áp dụng cho mọi trường véctơ có đạo hàm riêng.

$$\left.\begin{aligned}&\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q\\ &Q = \int_V \rho_v dv\\ &\nabla.\mathbf{D} = \rho_v\end{aligned}\right\} \rightarrow \oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = Q = \int_V \rho_v dv = \int_V \nabla.\mathbf{D} dv$$

$$\rightarrow \boxed{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D} dv}$$

- *Phát biểu*: tổng của thành phần chuẩn của một trường véctơ trên một mặt kín bằng tổng của đive của trường véctơ đó trong toàn bộ không gian nằm trong mặt kín

Định lý đive (2)



Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \ (= Q)$$

<u>Vế trái</u>

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

$$\int_{\text{trước}} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} \mathbf{D}_{\text{trước}}.d\mathbf{S}_{\text{trước}}$$

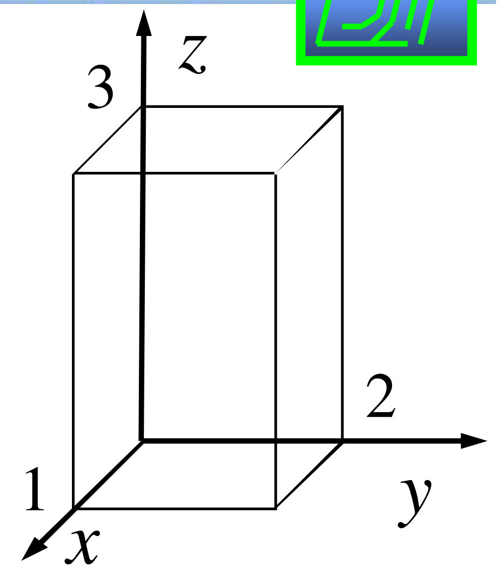
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{trước}} &= (2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y)\Big|_{x=1} = 2y\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \\ d\mathbf{S}_{\text{trước}} &= dydz\mathbf{a}_x \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \int_{\text{trước}} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} (2y\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y).(dydz\mathbf{a}_x) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} 2ydydz$$

Định lý đive (3)

Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật.
Kiểm nghiệm định lý đive.



$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \ (=Q)}$$

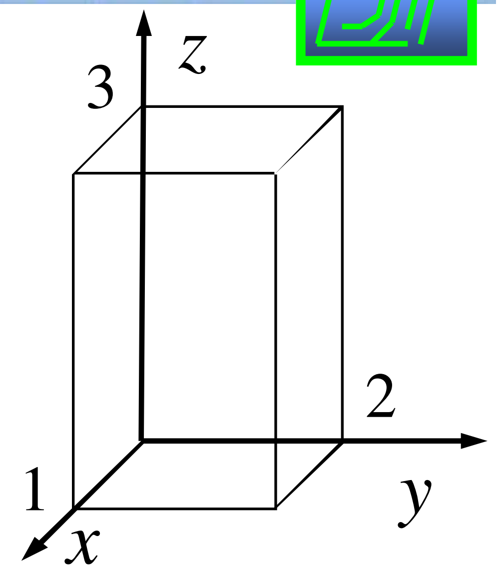
Vế trái

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

$$\int_{\text{trước}} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2}(2y\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y).(dydz\mathbf{a}_x) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2}2ydydz$$

$$= \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2}2ydydz = \int_{z=0}^{z=3}4dz = 12 \text{ C}$$

Định lý đive (4)



Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \ (= Q)$$

Vế trái

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

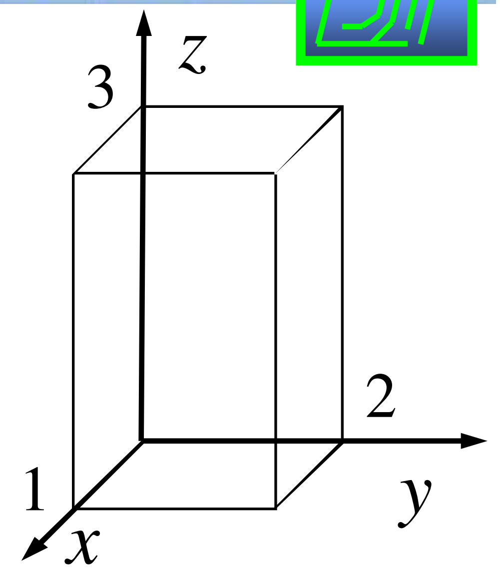
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\text{sau}} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} \mathbf{D}\Big|_{x=0}.(-dydz\mathbf{a}_x) = -\int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2} D_x\Big|_{x=0} dydz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D_x\Big|_{x=0} = (2xy)\Big|_{x=0} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \int_{\text{sau}} = 0$$

Định lý đive (5)

Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.



$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \;(= Q)$$

Vế trái

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

$$\int_{\text{phải}} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} \mathbf{D}\Big|_{y=2} .(dxdz\mathbf{a}_y) = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} D_y\Big|_{y=2} dxdz$$

$$D_y\Big|_{y=2} = (x^2)\Big|_{y=2} = x^2$$

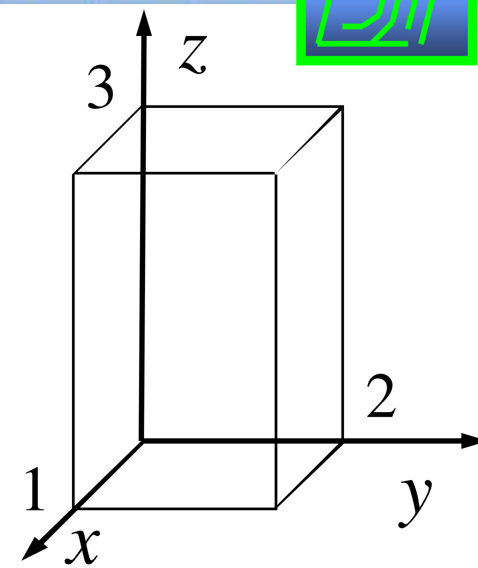
$$\rightarrow \int_{\text{phải}} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2 dxdz$$

Định lý đive (6)

Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \ (= Q)$$



Vế trái

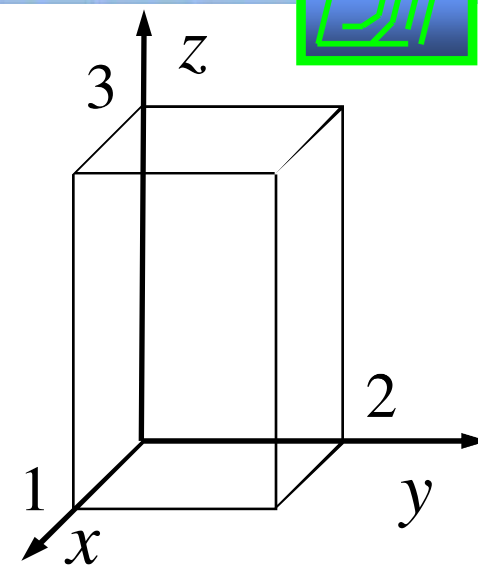
$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\text{trái}} = \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} \mathbf{D}\Big|_{y=0}.(-dxdz\mathbf{a}_y) = -\int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} D_y\Big|_{y=0} dxdz \\ \qquad\qquad\qquad D_y\Big|_{y=0} = (x^2)\Big|_{y=0} = x^2 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \int_{\text{trái}} = -\int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2 dxdz$$

Định lý đive (7)

Ví dụ



Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \;\; (=Q)$$

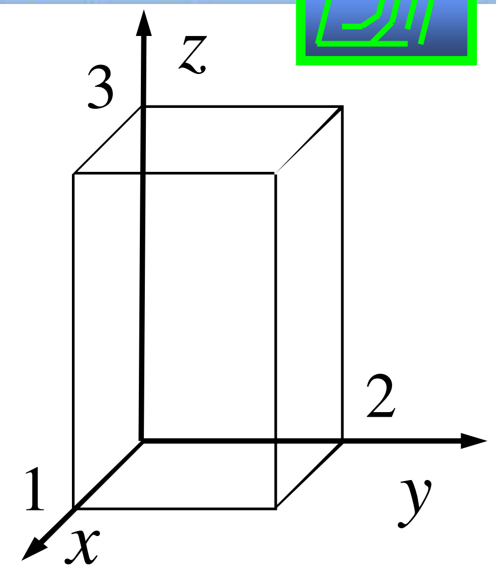
Vế trái

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

$$\int_{\text{trên}} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2}(2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y).(dxdy\mathbf{a}_z) = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} 0 = 0$$

$$\int_{\text{dưới}} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2}(2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y).(-dxdy\mathbf{a}_z) = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} 0 = 0$$

Định lý đive (8)



Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \ (= Q)$$

Vế trái

$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_{\text{trước}} + \int_{\text{sau}} + \int_{\text{phải}} + \int_{\text{trái}} + \int_{\text{trên}} + \int_{\text{dưới}}$$

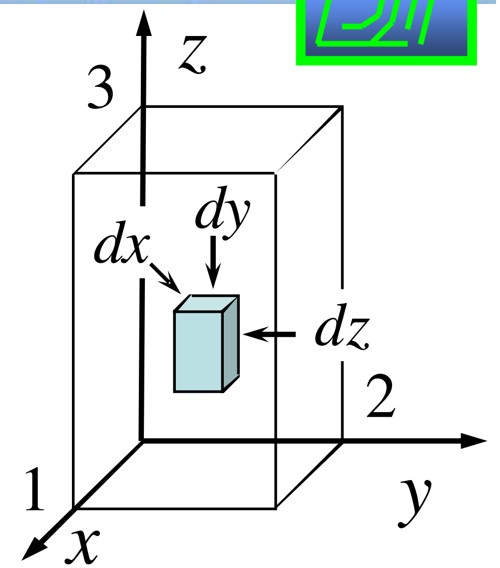
$$= 12 + 0 + \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2 dxdz - \int_{z=0}^{z=3}\int_{x=0}^{x=1} x^2 dxdz + 0 + 0$$

$$= \boxed{12 \text{ C}}$$

Định lý đive (9)

Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.



$$\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \ (= Q)$$

Vế phải

$$\int_V \nabla.\mathbf{D}dV$$

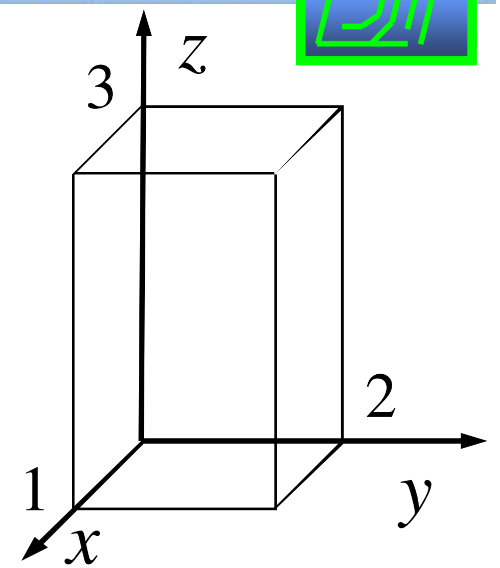
$$\left.\begin{array}{l} \nabla.\mathbf{D} = \dfrac{\partial}{\partial x}2xy + \dfrac{\partial}{\partial y}x^2 + \dfrac{\partial}{\partial z}0 = 2y \\ dV = dxdydz \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \int_V \nabla.\mathbf{D}dV = \int_{z=0}^{z=3}\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=1} 2ydxdydz = \boxed{12 \text{ C}}$$

Định lý đive (10)

Ví dụ

Cho $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² & hình hộp chữ nhật. Kiểm nghiệm định lý đive.



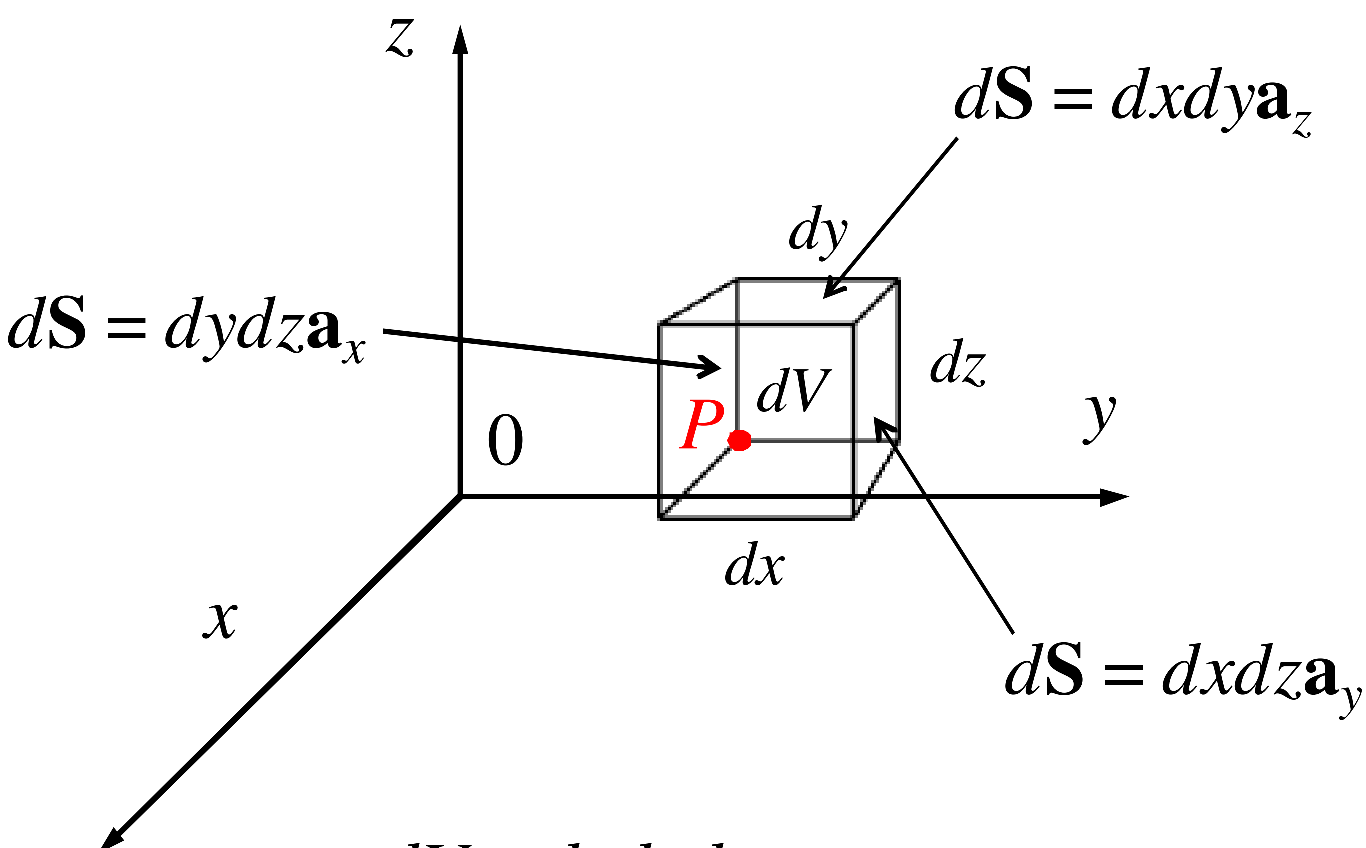
$$\boxed{\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dV \ (= Q)}$$

Vế trái $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = 12 \text{ C}$

Vế phải $\int_V \nabla.\mathbf{D}dV = 12 \text{ C}$

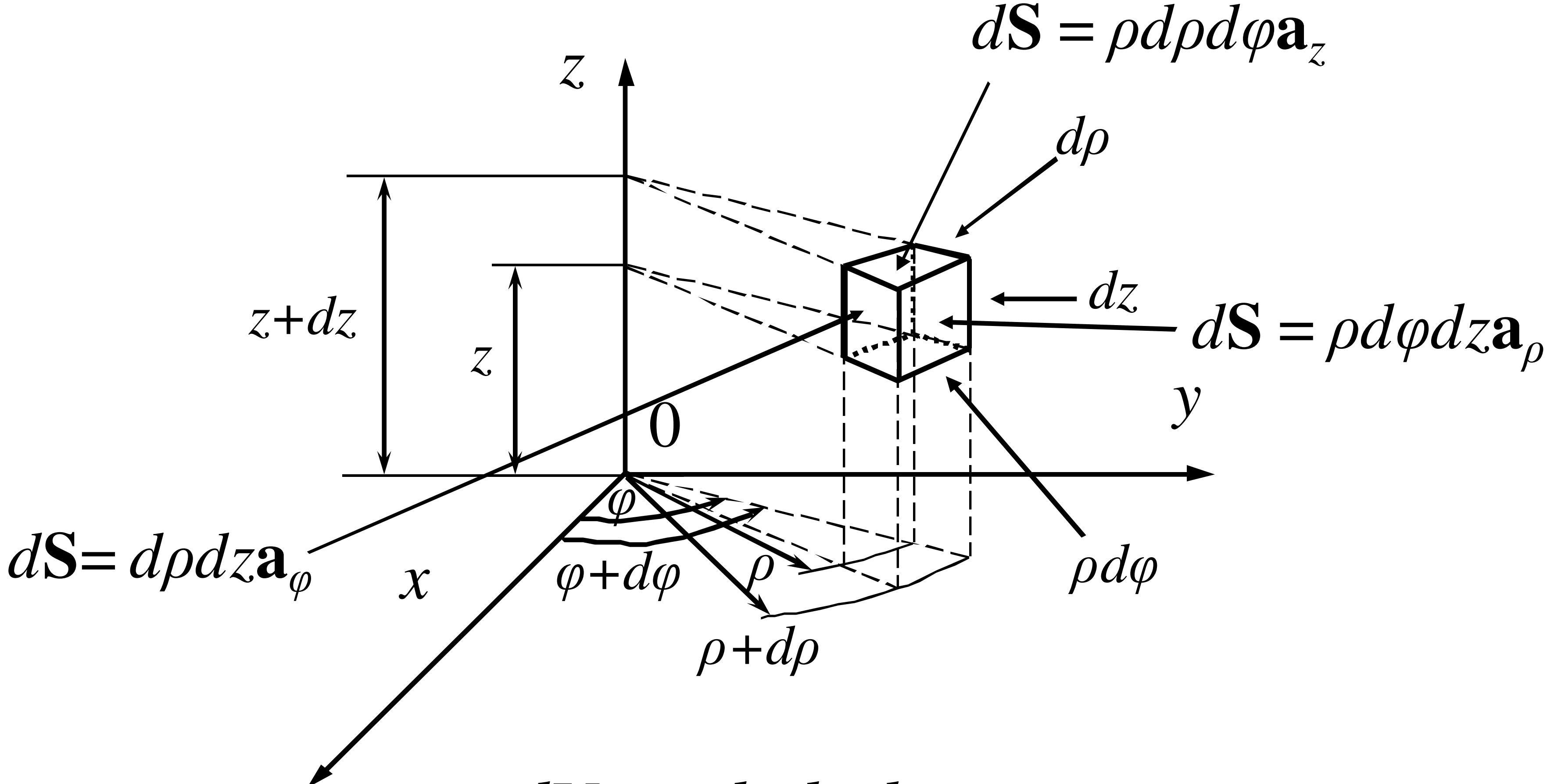
- Có thể dùng định lý đive để tính thông lượng chảy ra từ một mặt kín hoặc điện tích trong mặt kín
- Có 2 cách tính: luật Gauss & định lý đive
- Định lý đive (trong ví dụ này) tính nhanh hơn luật Gauss

Hệ tọa độ Descartes



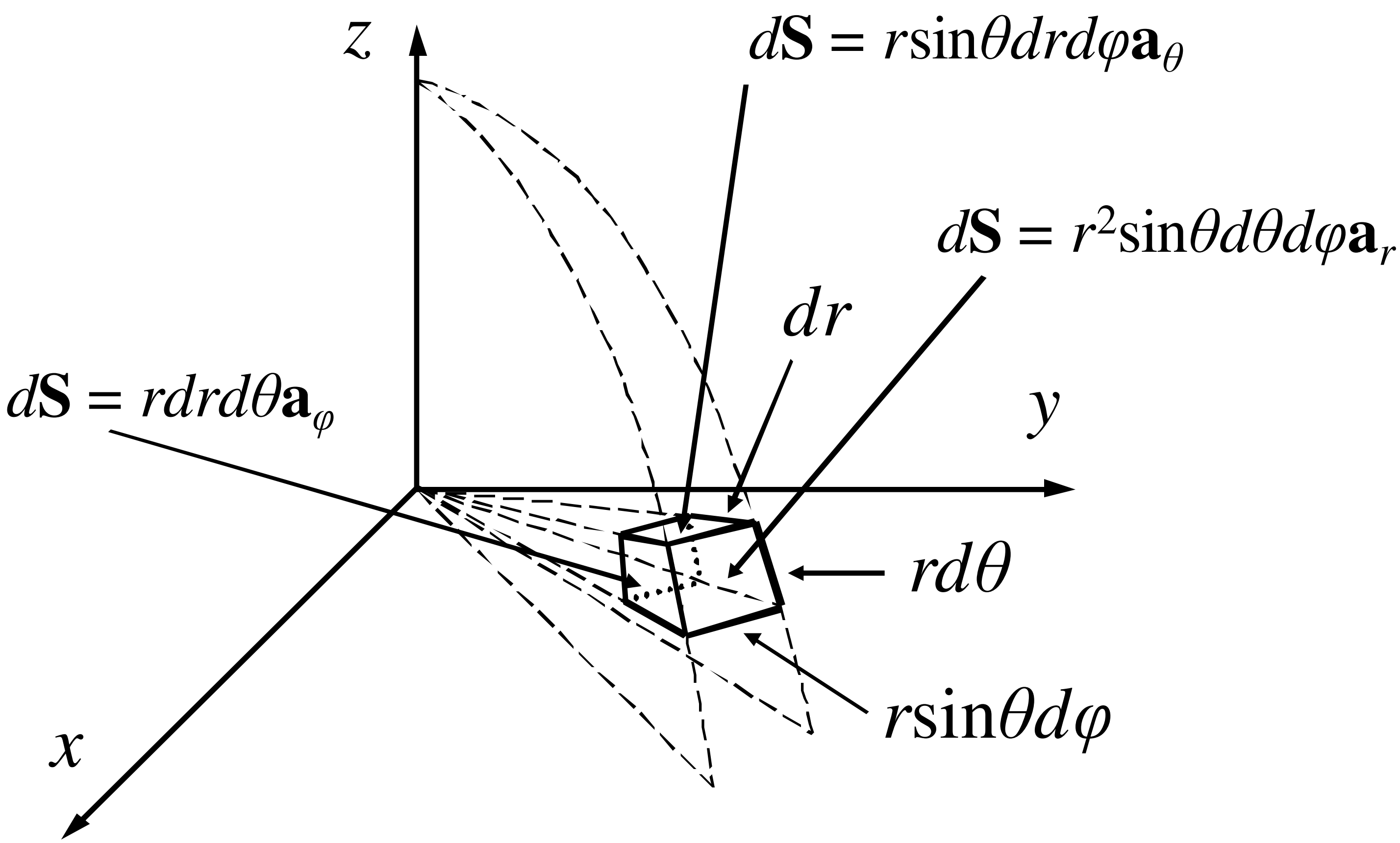
$$dV = dxdydz$$

Hệ tọa độ trụ tròn



$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Hệ tọa độ cầu



$$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$Q \longrightarrow \mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{a}_R \longrightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{a}_R \longrightarrow \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$