VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

PGS. TS. NGUYỄN XUÂN THẢO

BÀI GIẢNG

GIẢI TÍCH III

Hà Nội - 2015

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 1. CHƯƠNG I. LÝ THUYẾT CHUỖI

§ 1. Đại cương về chuỗi số

- Định nghĩa
- Điều kiện cần để chuỗi hội tụ
- Các tính chất cơ bản

Đặt vấn đề: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$

- Có phải là cứ cộng mãi các số hạng của vế trái thì thành vế phải?
- 1 + (– 1)+1 + (– 1) + ... = ?

1. Chuỗi số:

Định nghĩa: Với mỗi số tự nhiên n, cho tương ứng với một số thực a_n, ta có dãy số kí hiệu là $\{a_n\}$.

Định nghĩa:

Cho dãy số $\{a_n\}$, ta gọi tổng vô hạn $a_1+a_2+a_3+\cdots$ là chuỗi số, ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a_n là số hạng tổng quát.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ là tổng riêng thứ n. Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ thì ta bảo chuỗi hội tụ, có tổng S và viết: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Khi dãy $\{S_n\}$ phân kỳ thì ta bảo chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ và tính $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

$$S_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\quad |q|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},\quad |q|<1$$

Phân kỳ khi $|q|\ge 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\quad |q|<1.$$

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ và tính $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ, phân kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Chuỗi điều hoà) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

Lấy $n > 2^{m+1}$ có

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right)$$

$$> \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \cdots + 2^m.\frac{1}{2^{m+1}} = (m+1)\frac{1}{2}$$

Do đó S_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý, nên có $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

Chuỗi đã cho phân kỳ

Ví dụ 4. Chuỗi nghịch đảo bình phương: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \cdots + \frac{1}{n.n} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

S_n tăng và dương

$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S$$

Nhận xét:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ)

Chứng minh: Có $a_n = S_n - S_{n-1}$; $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$

- Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ hoặc không tồn tại thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.
- Thay đổi một số hữu hạn số hạng đầu không làm thay đổi tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

Ví dụ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ phân kỳ

Ví dụ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

Có $\lim_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}1 & n=2k, k\in N\\ -1 & n=2k+1.\end{cases}$

Không tồn tại $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ phân kỳ.

Ví dụ 7. Tìm tổng (nếu có) của chuỗi số sau $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$ (ĐS: 1)

Ví dụ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ (PK)

2. Tính chất. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=S_2,$

• $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha S_1+\beta S_2$

§2. Chuỗi số dương

• Định nghĩa • Các định lí so sánh • Các tiêu chuẩn hội tụ

1. Định nghĩa: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n>0$

Nhận xét. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ khi và chỉ khi S_n bị chặn.

Trong bài này ta giả thiết chỉ xét các chuỗi số dương

2. Các định lí so sánh.

Định lí 1. Cho hai chuỗi số dương, $a_n \le b_n$, n tuỳ ý hoặc từ một lúc nào đó trở đi

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ

Chứng minh.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$0 < S_n \le T_n$

Rút ra các khẳng định.

Ví dụ 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$

Chuỗi dương

$3^n + 1 > 3^n$

$\frac{1}{3^n + 1} < \frac{1}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$ hội tụ

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Chuỗi dương

$\ln n < n$

$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ phân kỳ

Định lí 2. Cho hai chuỗi số dương, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ne 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nhận xét. Đối với các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

1°/ Nếu $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

2/° Nếu $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì

Ví dụ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3 - 3}$

Chuỗi dương

$$\frac{n+2}{2n^3-3}=\frac{n}{2n^3}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{2n^3}}=\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{2n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n^3}:\frac{1}{2n^2}\right)=1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^3-3}$ hội tụ

Ví dụ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p>0$

Khi $0<p\le 1$ có $0<n^p\le n\Rightarrow \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, do $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ phân kỳ.

Khi $p>1$, n tuỳ ý, chọn m sao cho $n<2^m$, có

$$S_n\le S_{2^m-1}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\dots+\frac{1}{7^p}\right)+\dots+\left[\frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^p}+\dots+\frac{1}{\left(2^m-1\right)^p}\right]$$

$$\le 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\dots+\frac{2^{m-1}}{\left(2^{m-1}\right)^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^2}+\dots+\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^{m-1}}$$

$$=\frac{1-a^m}{1-a}<\frac{1}{1-a},\quad 0<a=\frac{1}{2^{p-1}}<1$$

Dãy S_n bị chặn trên $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hội tụ.

KL: Chuỗi hội tụ với $p > 1$ và phân kì với $0 < p \le 1$.

Ví dụ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$

Chuỗi dương

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}=\frac{1}{n^{3/2}\sqrt{1+\frac{3}{n^3}}};\ b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$ hội tụ

Ví dụ 7

a1) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$ (PK) **a2)** $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ (PK)

b1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin^2\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ (PK); **b2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ (HT)

c1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{\sqrt{n^5+1}}$ (HT) **c2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$ (PK)

d1) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$ (PK) **d2)** $\sum_{n=2}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ (PK)

d3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n^3+3}}$ (HT)

e) Xét sự hội tụ

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ (HT) **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arcsin\frac{1}{n}+\ln n}$ (PK)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\arctan^2\frac{\pi}{2\sqrt{n^3}}\right)$ (HT)

f) Xét sự hội tụ

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1-\ln n}$ (PK) **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$ (HT)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (HT)

f) Xét sự hội tụ : **1)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{(n+1)^3}}$ (HT)

3) Các tiêu chuẩn hội tụ

a) Tiêu chuẩn D'Alembert

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$

Khi $l<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

Khi $l>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Chứng minh

• $l < 1$: Từ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, chọn $\varepsilon > 0$ đủ bé để $l + \varepsilon < 1 \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_0$.

• Mặt khác có $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}.\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\dfrac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}.a_{n_0}\leq(l+\varepsilon)^{n-n_0}a_{n_0}\to 0,\ n\to\infty$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$

• $l > 1$: Từ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$, chọn ε đủ bé để $l-\varepsilon > 1 \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}>l-\varepsilon>1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$\Rightarrow$ phân kì

Nhận xét. Khi $l = 1$ không có kết luận gì

Ví dụ 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$

$a_n=\dfrac{1}{n!}>0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}:\dfrac{1}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ hội tụ

Ví dụ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$

$a_n=\dfrac{3^n}{n!}>0$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\dfrac{3^n}{n!}=\dfrac{3}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$

Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+\cdots+\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.5.8\cdots(3n-1)}$

$$a_n=\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.5.8\cdots(3n-1)}>0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1.3.5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2.5.8\cdots(3n-1)(3n+2)}:\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.5.8\cdots(3n-1)}=\frac{2n+1}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}<1$$

Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 4

a1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$ (PK) **a2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$ (HT)

a3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$ (HT)

b1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{4^n\ln(n+1)}$ (PK) **b2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{5^n\ln(n+1)}$ (HT)

b3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{n^n}$ (HT) **b4)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^n}$ (HT)

c1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+1}{2^n(3n+2)}$ (HT)

d1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$ (PK) **d2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\pi^n}{n^n}$ (PK)

b) Tiêu chuẩn Cauchy

Giả sử $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

Nếu $l<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ

Nếu $l>1$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kỳ

Nhận xét. Nếu l = 1, không có kết luận gì

Ví dụ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right) > 0$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n-1}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1$$

Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 6. Xét sự hội tụ, phân kì $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (PK)

Ví dụ 7.

a1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$ (HT)

a2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+\sqrt{n}+1}{3n^2+\sin n}\right)^{3n-\ln n}$ (HT)

a3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} 5^n}{2^n (n+1)^{n^2}}$ (HT)

b1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+4)}$ (HT)

b2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n(n+4)}$ (PK)

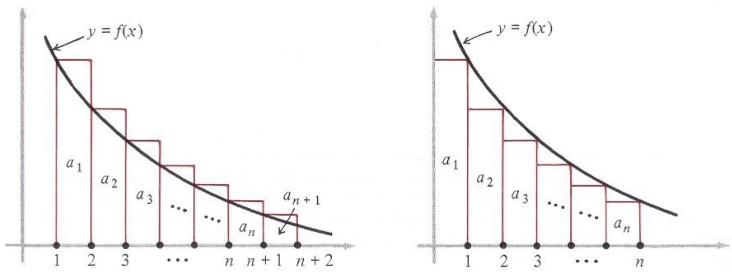
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} 5^n}{3^n (n+1)^{n^2}}$ (HT)

c) Tiêu chuẩn tích phân

Có mối liên hệ hay không giữa:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$



Hình 14.4

$$\int_1^n f(x)dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)dx,$$

Nếu *f*(*x*) là hàm liên tục, dương giảm với mọi $x \ge 1$ và $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(n) = a_n$, khi đó

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\int_1^{\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

$f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ dương, giảm với $x\ge 2$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\right)=\infty$$

$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ phân kỳ

Tổng quát có thể xét $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ hội tụ chỉ khi $p > 1$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng: $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\ln 2$

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left[\ln 2n+\gamma+o(1)\right]-\left[\ln n+\gamma+o(1)\right],\quad voi\quad \gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

$$=\ln 2+o(1)\to\ln 2\quad khi\quad n\to\infty$$

Mặt khác ta có

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim S_{2n}=\ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$$

Ví dụ 10. Tương tự nhận được $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\dfrac{3}{2}\ln 2.$

Ví dụ 11. Xét sự hội tụ phân kì của chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{n}}{(n+2)^2}$ (HT); **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{(n+3)^2}$ (HT) **c)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{3n^2}$ (HT)

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 2

§ 3. Chuỗi số với số hạng có dấu bất kì

• Chuỗi với số hạng có dấu bất kì • Chuỗi đan dấu

• Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối

1. Đặt vấn đề.

2. Chuỗi với số hạng có dấu bất kì

Định nghĩa: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là bán hội tụ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ (HTTĐ) d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$ (HTTĐ)

Hướng dẫn.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$

+) Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

+) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ hội tụ

+) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$ hội tụ

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

+) $\sin n^2 \in \mathbb{R}$

+) Không có $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$

Thật vậy, phản chứng có $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+3) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \cos(2n+1) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)\right) = 0$ (vô lí)

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ phân kì.

Nhận xét.

1°/ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ phân kì theo tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì

2°/ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ phân kì $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì (đúng hay sai?)

3. Chuỗi đan dấu

Định nghĩa. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n > 0$ được gọi là chuỗi đan dấu

Chú ý. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n,\ a_n > 0$ cũng được gọi là chuỗi đan dấu.

Định lí Leibnitz

Dãy $\{a_n\}$ giảm, $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ hội tụ và có $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \le a_1$

Chứng minh:

+) $n = 2m$:

- Có $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \Rightarrow \{S_{2m}\}$ tăng
- $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$
- Từ đó $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$ và có $S \le a_1$

+) $n = 2m+1$:

- $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$
- Do $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$.

Định lí được chứng minh.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (Bán HT)

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ (HTTĐ)

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (Bán HT)

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$ (PK)

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$ (HTTĐ)

f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{7.9.11\ldots(2n+5)}$ (PK)

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$ (HTTĐ)

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$ (PK)

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$ (PK)

k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$ (PK)

l) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln^2\frac{n+1}{n}$ (HTTĐ)

m) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ (Bán HT)

o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin(2n\beta)}{\sqrt[3]{n^7+2n^3+3}}$, $\beta\in\mathbb{R}$ (HTTĐ)

p) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ (Bán HT)

q) Xét sự hội tụ

1°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)$ (HT)

2°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{\ln\sqrt{n}}{n}\right)$ (HT)

3°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}-1\right)$ (HT)

4°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^2}-1\right)$ (HT)

r

r) 1°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

2°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-1)}{3.5.8...(3n-1)}$

Hướng dẫn.

b) +) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu

+) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ giảm và có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

+) Hội tụ theo Leibnitz

+) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì $\Rightarrow$ bán hội tụ

d) +) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$ là chuỗi đan dấu

+) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5}=\frac{1}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n-5}$ phân kì

+) $\nexists\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$

+) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{6n-5}$ phân kì.

4. Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối

a) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=S\Rightarrow$ chuỗi số nhận được từ chuỗi này bằng cách đổi thứ tự các số hạng và nhóm tuỳ ý các số hạng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S

b) Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì $\Rightarrow$ có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để chuỗi thu được hội tụ và có tổng là một số bất kì cho trước hoặc trở nên phân kì.

Định nghĩa. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, khi đó ta định nghĩa phép nhân chuỗi:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ ở đó } c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = S_2 \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = S_1 S_2$

Ví dụ 3. a) Xét sự hội tụ của tích các chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tan\frac{1}{k\sqrt{k}}.\ln^2\frac{n+2-k}{n+1-k}\right)$

c) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k\cos(k\alpha)}{\sqrt[3]{k^7+k^4+1}} \frac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)^{\frac{3}{2}} - \ln(n+1-k)}\right)$,

Hướng dẫn.

a) +) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ hội tụ tuyệt đối

+) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\right).\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ hội tụ

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 3

§ 4. Chuỗi hàm số

• **Đặt vấn đề.**

1. Chuỗi hàm số hội tụ

Định nghĩa: Cho dãy hàm số $\{u_n(x)\}$ xác định trên X, ta định nghĩa chuỗi hàm số

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tại $x_0 \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ phân kì tại $x_0 \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ phân kì

Tập các điểm hội tụ của (1) gọi là tập hội tụ của nó. Tổng của chuỗi hàm số là hàm số xác định trong tập hội tụ của nó.

Ví dụ 1. Tìm tập hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $(x>1)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\mathbb{R})$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n^2+4)x}{(3n+1)^2}$ $(\mathbb{R})$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n\cos x}$ $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi < x < \frac{\pi}{2}+k2\pi)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n5^n(x-3)^n}$ $(|x-3|>\frac{1}{5})$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n-1}$ $(-1<x<3)$

Hướng dẫn.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$

+) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_0^{n-1}\right|$ (2)

+) (2) hội tụ với $|x_0|<1$ +) Tại $|x_0|\ge 1$, (2) phân kì +) Tập hội tụ: $|x|<1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$

+) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx_0|}{n^2+x_0^2}$ (2) +) $\frac{|\cos nx_0|}{n^2+x_0^2} \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ (2) hội tụ với mọi x_0

+) Tập hội tụ $\mathbb{R}$

Ví dụ 2. Tìm tập hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+3}}{3^{2n}(2n+3)}$ $(-3 \le x \le 3)$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}(x+1)^n}$ $(x > 0 \vee x \le -2)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}(x+2)^n}$ $(x > -1 \vee x \le -3)$

b) 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(n^2+1)^2}\left(\dfrac{4x-3}{x}\right)^n$ $\left(\left[\dfrac{3}{5};1\right)\right)$

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ $([0;+\infty))$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2-x+1)^n}{(n+1)\sqrt{n+2}}$ $(0 \le x \le 1)$

d) 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+(\tan x)^n}$ $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi < x < \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+(\cot x)^n}$ $\left(k\pi < x < \dfrac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+(\ln x)^n}$ $\left(\mathbb{R} \setminus \left[\dfrac{1}{e};e\right]\right)$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+e^{nx}}$ $(x > 0)$

2. Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định nghĩa. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên tập X $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý $\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > n_0(\varepsilon)$, ta có $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.

Ý nghĩa hình học. Với n đủ lớn, $S_n(x)$ thuộc dải $(S(x)-\varepsilon;\ S(x)+\varepsilon)$.

Tiêu chuẩn Cauchy. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều trên tập $X \subset \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý $\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall p > q > n_0(\varepsilon)$, ta có $|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.

Tiêu chuẩn Weierstrass. Nếu có $|u_n(x)| \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên X.

Tiêu chuẩn Dirichlet.

$u_n = v_n.w_n$, $|V_n|$ đơn điệu không tăng và $\to 0$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}w_k\right| \le c, \forall n \Rightarrow$ Hội tụ đều.

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$

+) $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \forall x$ +) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ

+) Chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$

Ví dụ 4. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ (HTĐ)

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n n\sqrt[3]{n}}$, $x\in[-2;\ 2]$ (HTĐ)

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{3^n}$, $x\in\mathbb{R}$ (HTĐ)

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n}$, $x\in(-1;\ 1)$ (HTĐ)

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ (HTĐ)

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x>0$

Hướng dẫn.

b) +) $\left|\dfrac{x^n}{2^n n\sqrt[3]{n}}\right| \le \dfrac{1}{n^{4/3}}$, $|x|\le 2$ +) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{4/3}}$ hội tụ

+) Chuỗi đã cho hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối trên $[-2\,;2]$.

Ví dụ 5. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm

a) 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^2}}\right)\sin nx$, $x\in\mathbb{R}$ (HTĐ)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cos nx$, $x\in\mathbb{R}$ (HTĐ)

b) 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^n$, $x\in[-1;\ 1]$ (HTĐ)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^n$, $x\in[-1;\ 1]$ (HTĐ)

c) Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ hội tụ đều với $x\ge 0$

d) 1) Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n+1}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

2) Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n+2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[4]{1+\sin^2 t}}dt\right)\cos nx$ (HTKĐ)

3. Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lí 1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X, $u_n(x)$ liên tục trên X, với $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x)$ liên tục trên X, nghia la

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

Định lí 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên $[a;\ b]$, $u_n(x)$ liên tục trên $[a;b]$, $\forall n$

$$\Rightarrow \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

Định lí 3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ trên $(a;\ b)$, các hàm $u_n(x)$ khả vi liên tục trên $(a;\ b)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên $(a;\ b) \Rightarrow S(x)$ khả vi trên $(a;\ b)$ và có

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

Ví dụ 6. Xét tính khả vi của các hàm sau

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$; b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{n^2}$ $\left(f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2},\ x \in \mathbb{R}\right)$

Hướng dẫn.

a) +) $x \neq -n$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo Leibnitz

+) $u_n'(x) = \frac{n}{(n+x)^2}$ liên tục $\forall x \neq -n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ hội tụ đều theo Dirichlet

+) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+x)^2}$, $x \neq -n$

Ví dụ 7. a) Tìm miền hội tụ và tính tổng

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}$

$$\left((0\,;2],\ S = (x-1)\left[\frac{1}{3}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]\right)$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{3n+2}}{3n+1}$

$\left((-2;0],\ S=(x+1)\left[\frac{1}{3}\ln\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]\right)$

b) Tìm miền hội tụ và tính tổng

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ $\left((0;2),\ S=\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

c) Xét tính khả vi và tính đạo hàm (nếu có)

1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n+1}}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+1}\right)$

2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n+2}}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}\right)$

d) Tính tổng

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$ $\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ |x|<1\right)$

Hướng dẫn.

b1) Hội tụ với $|x+1|<1$ và tại $x+1=1 \Rightarrow$ miền hội tụ $(-2;0]$

+) Đặt $t=-(x+1) \Rightarrow s=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} \Rightarrow s'(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=-\frac{1}{1-t}$

+) $\int_0^t s'(u)du=\ln|u-1|\Big|_0^t \Rightarrow s(t)-s(0)=\ln|t-1|$

+) $s(0)=0 \Rightarrow s(x)=\ln(x+2)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 4

§ 5 Chuỗi luỹ thừa

• Định nghĩa • Các tính chất • Khai triển thành chuỗi luỹ thừa

• Đặt vấn đề

1. Định nghĩa. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ (1)

Ký hiệu là $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, ở đó a_n là các số thực, x là biến số.

Ta bảo chuỗi luỹ thừa hội tụ (phân kỳ) tại $x_0 \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ hội tụ (phân kỳ),

chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hội tụ trên khoảng $(a\,;\,b) \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ hội tụ, x_0 tuỳ ý $\in (a; b)$.

Ví dụ 1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$

Đã biết hội tụ khi $|x| < 1$, có $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Phân kỳ khi $|x| \geq 1$

Định lí 1 (*Abel*). $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ hội tụ tuyệt đối tại $x: |x| < |x_0|$

Chứng minh. +) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx_0^n$ hội tụ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_nx_0^n = 0 \Rightarrow |a_nx_0^n| \leq M, \forall n \geq N_0$

+) $|a_nx^n| = \left| a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

+) $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ (Định lí so sánh 1) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hội tụ tuyệt đối

Nhận xét. Từ định lí Abel suy ra:

• Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ phân kỳ tại $x_0 \Rightarrow$ phân kỳ tại $x: |x| > |x_0|$

• Tập hội tụ khác rỗng

Định lý 2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$ (hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$) thì bán kính hội tụ R của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ được xác định bởi $R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<\infty\\ 0, & \rho=+\infty\\ \infty, & \rho=0\end{cases}$

Nhận xét. • Quy ước viết $R=0$ ở khẳng định 2), $R=+\infty$ ở khẳng định 3), từ đó có thể phát biểu gọn định lý này như sau: *Mọi chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ đều có một bán kính hội tụ R với $0\le R\le+\infty$, khi đó chuỗi hội tụ tuyệt đối với $|x|<R$ và phân kỳ với $|x|>R$.*

• Cách tìm bán kính hội tụ R: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ hoặc $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Ví dụ 1. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$$

$R=1$, chuỗi hội tụ với $|x|<1$, phân kỳ với $|x|>1$.

Tại $|x|=1$ có $\left|\dfrac{x^2}{n^2}\right|=\dfrac{1}{n^2}$, mặt khác $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $|x|=1$.

Khoảng hội tụ là $[-1;\ 1]$.

Ví dụ 2. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+2}{3^n}x^n$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n+2}{3^n}:\frac{n+3}{3^{n+1}}=3\frac{n+2}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3$$

$R=3$, chuỗi hội tụ khi $|x|<3$, phân kỳ khi $|x|>3$.

Tại $x=3$ có $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)$ phân kỳ.

Tại $x=-3$ có $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)$ phân kỳ

Khoảng hội tụ: $(-3;\ 3)$.

Ví dụ 3. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n+2}=\frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=1$$

$R=1$, chuỗi hội tụ với $|x|<1$, phân kỳ với $|x|>1$

Khi $x=1$ có $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ phân kỳ

Khi $x=-1$ có $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ là chuỗi đan dấu hội tụ

Khoảng hội tụ là $[-1;\ 1)$.

Ví dụ 4. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Không thể dùng ngay công thức vì một nửa các hệ số của chuỗi bằng 0: $a_{2n+1}=0$

Đặt $y=x^2$ có chuỗi luỹ thừa: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^n$

Có $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}:\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\right|=\frac{(2(n+1))!}{(2n)!}=(2n+1)(2n+2)$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\infty$$

Khoảng hội tụ: $(-\infty,\infty)$

Ví dụ 5. Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$ $(-1<x<1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n!}$ $(|x|<1)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$ $(-3\le x\le -1)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ $(-4<x<4)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ $(2<x<4)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$ $(1-\frac{1}{e}<x<1+\frac{1}{e})$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^{n!}$ $(-1<x<1)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{3n^2+4n+1}x^{2n-1}$ $(|x|\le 1)$

i) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{3n^2+4n+5}x^{2n}$ $(|x|\le 1)$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n^2+1}(x+1)^{2n}$ $\left(\left[-1-\frac{1}{\sqrt{3}};-1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right)$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ $(0<x<2)$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x+2)^n$ $(-2-\frac{1}{e}<x<-2+\frac{1}{e})$

n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{4n}}{(n+2)\ln(n+1)}$ $(2<x<4)$ o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{(n+1)\ln(n+2)}$ $(3<x<5)$

p 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n-1}$ (-1<x<3) 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^{2n-1}$ (-3<x<1)

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-3)^{2n}$ $(3-\sqrt{e},3+\sqrt{e})$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}(x-3)^{2n}$ $(-3-\sqrt{e},-3+\sqrt{e})$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}(x-1)^n$ $(0\le x<2)$

q) 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{7^n\ln(n+1)}(x-1)^n$ $(\frac{2}{9}\le x<\frac{16}{9})$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+1}{(n^3+5)3^n}(x-3)^n$ $(0<x\le 6)$

r) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2^n}(x+1)^n$ $(-3\le x<1)$

Nhận xét

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ (1) được gọi là chuỗi luỹ thừa tại $x=a$,

Đặt $z = x - a$ có $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ (2), tìm bán kính hội tụ R của chuỗi (2), thì có tập hội tụ của chuỗi (1), cụ thể hội tụ với: $-R < x - a < R$ hay $a - R < x < a + R$ và phân kỳ với $x < a - R$, hoặc $x > a + R$; để nhận được khoảng hội tụ ta cần xét tại $x = a - R$ và $x = a + R$.

2. Các tính chất của chuỗi luỹ thừa

a) Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ đều trên mọi đoạn $[a;\ b]$ nằm trong khoảng hội tụ của nó.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$, $|x|<R\neq 0 \Rightarrow S(x)$ liên tục trên khoảng $(-R;\ R)$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ |x| < R \neq 0 \Rightarrow S(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a\,;\ b] \subset (-R\,;\ R)$ và có

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n \, dx \right)$$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ |x| < R \neq 0 \Rightarrow S(x)$ khả vi trên khoảng $(-R\,;\ R)$ và có:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right)$$

Nhận xét. Thực chất từ a) ta có: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} \left(a_n x^n\right)$

Ví dụ 1. Tìm biểu thức chuỗi luỹ thừa của $\ln(1+x)$

Miền xác định: $|x| < 1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, ở đó đặt $f(x) = \ln(1 + x)$

$$f'(x)\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \left[(-1)^n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Do $f(0) = 0$ nên có $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots,\quad |x| < 1$

Ví dụ 2. Tìm biểu diễn chuỗi luỹ thừa của hàm $\tan^{-1} x$

Đặt $f(x) = \tan^{-1} x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\left(-x^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^{2n}, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\tan^{-1}x - \tan^{-1}0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1$$

Ví dụ 3. Tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

Có $R = 1$, chuỗi hội tụ với $|x| < 1$

Đặt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ có $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} \quad |x| < 1$$

$$f(x) - f(0) = -\ln(1-x), \quad |x| < 1 \Rightarrow f(x) = -\ln(1-x), \quad |x| < 1$$

Ví dụ 4. Biểu diễn chuỗi luỹ thừa của hàm $\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad |x| < 1$$

Ví dụ 5. Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$

$R = 1$, chuỗi hội tụ về $f(x)$ với $|x| < 1$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x.n^2x^{n-1} = xg(x),$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = \frac{d}{dx}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)$$

Theo ví dụ 4 có $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$f(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Ví dụ 6. Tính tổng

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\quad(\arctan x,\ |x|<1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$ $\left(\dfrac{x}{(x-1)^2},\ |x|>1\right)$ $\qquad$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ $\quad(3)$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}$ $\quad\left((x-1)\left[\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x}{x^2-3x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right],\right.$
$\left.0<x\le 2\right)$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^{3n+2}}{3n+1}$ $\quad\left((x+1)\left[\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right],\right.$
$\left.-2<x<0\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n$ $\quad(\ln|x+2|,\ -2<x<0)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ $\quad\left(\dfrac{x^2-1}{x^2},\ 0<x<2\right)$

h) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+2}}$ $\quad\left(\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\ln 3+\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]\right)$

k: 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}$ $\quad(4)$ $\qquad$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$ $\quad\left(\dfrac{9}{4}\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ $\quad(\ln 2)$ $\qquad$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$ $\quad\left(\ln\dfrac{3}{4}\right)$

l : 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)3^{n+1}}$ $\left(\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{3}\right)\right)$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{3^n}$ $\quad\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)3^n}$

Hướng dẫn.

a) +) $R=1$ $\qquad$ +) $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ +) $\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt$

+) $S(x)-S(0)=\arctan x\Rightarrow S(x)=\arctan x$

c) +) Xét chuỗi $S(x)=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$ có $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=A$

+) $R = 1$ +) $S(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ +) $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3$

3. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa

Định nghĩa. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ tại lân cận điểm x_0.

Nếu $x_0 = 0$ ta có $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ được gọi là chuỗi MacLaurin của hàm số $f(x)$.

Định nghĩa. Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$ ta bảo hàm số $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm x_0

Định lí 3. $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$,

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ ở giữa x_0 và x

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Định lí 4. $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của điểm x_0;

$\left|f^{(n)}(\xi)\right| \le M$, $\forall \xi$ thuộc lân cận của x_0 nói trên

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Chú ý. • Có hàm khả vi vô hạn không được khai triển thành chuỗi Taylor, ví dụ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$, n tự nhiên bất kỳ

Thật vậy có ngay

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t\,e^{t}} = 0.$$

Từ đó có đạo hàm mọi cấp tại $x = 0$ cũng bằng 0.

Chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ là $0 + 0 + 0 + 0 + \ldots.$

Chuỗi này hội tụ, chúng hội tụ về 0. Nhưng hàm $f(x) \ne 0, \forall x \ne 0$

Nên $f(x)$ nói trên không được khai triển thành chuỗi Taylor

• Số dư $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ nhận được do sử dụng định lý Rolle

Ví dụ 7. Tìm chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Hàm này có được khai triển thành chuỗi Maclaurin hay không? Vì sao?

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 5

§ 5. Chuỗi luỹ thừa (TT)

- Khai triển một số hàm sơ cấp
- Ứng dụng

4. Khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản

4.1. Một số khai triển

1°/ $f(x) = e^x$

- $f^{(n)}(0) = 1$
- $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^A = M, \ \forall x \in (-A;\ A),\ A > 0$
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \ \forall x \in (-A;\ A),\ A > 0 \Rightarrow e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

2° $f(x) = \cos x$

- $f^{(n)}(0) = \cos n\dfrac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$
- $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}$

3° $f(x) = \sin x$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}$

4° $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$

- $f(x) = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \ \ -1 < x < 1$

5° $f(x) = \ln(1+x)$

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots, \ -1 < x < 1$

6° $f(x) = \arctan x$

- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}, \ -1 \le x \le 1$

Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Maclaurin

a) $f(x) = a^x, \ 0 < a \ne 1$

- $a^x = e^{x\ln a}$
- $e^{x\ln a} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\ln^n a}{n!}x^n, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \ln(2+x)$

- $\ln(2+x) = \ln 2\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right), \ -1 < \dfrac{x}{2} < 1$

- $\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n.2^n}$
- $\ln(2+x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n.2^n}, -2<x<2$

c) $\sin^2 x \qquad (\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R})$

d) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad (2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ -1<x<1)$

e) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ x\in\mathbb{R})$

f) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3) \qquad (\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n},\ -1\le x\le 1)$

g) $f(x)=e^x\sin x \qquad (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{4}, x\in\mathbb{R})$

h) $f(x)=\cosh x \qquad (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R})$

i) $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt \qquad (\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ x\in\mathbb{R})$

k) $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \qquad (x+\frac{x^5}{2.5}+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{n!2^n(4n+1)}x^{4n+1}+\dots,\ |x|<1)$

l) Viết rõ các hệ số đến x^6: $f(x)=e^x\sin x \qquad (x+x^2+\frac{x^3}{3}+0x^4-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}\cdots)$

m) Viết rõ các hệ số đến x^6: $f(x)=e^x\cos x \qquad (1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{30}+0x^6+\cdots)$

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm tương ứng

a) $f(x)=\ln x,\ \ x=1$

- $\ln x=\ln(1+x-1)$
- $\ln(1+x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2},\ \ x=4$

- $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$
- $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$

- $f^{(n)}(4)=(-1)^n n!\left(5^{-n-1}-6^{-n-1}\right)$
- $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(5^{-n-1}-6^{-n-1}\right)(x-4)^n$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, theo chuỗi luỹ thừa của $\dfrac{x}{1+x}$

$\left(f(x)=\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2+\dfrac{1.3}{2.4}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^3+\dots+\dfrac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n-2)}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n+\dots\right)$

d) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, theo chuỗi luỹ thừa của $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1!2}-\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!2^2}-\dots-\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}}+\dots\right]\right)$

e) $f(x)=\sin 3x$, theo chuỗi luỹ thừa của $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n-1}\right)$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ theo luỹ thừa của $(x-3)$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(x-3)^n,\ |x-3|<1\right)$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ theo luỹ thừa của $(x-2)$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{4^n}\right)(x-2)^n,\ |x-2|<3\right)$

h) Khai triển thành chuỗi Maclaurin

1) $f(x)=\ln\left(x^3+2x^2+4x+8\right)$

2) $f(x)=\ln\left(4x+8-x^3-2x^2\right)$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{4^n}\right)(x-2)^n,\ |x-2|<3\right)$ $\left(3\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-1)^{n-1}2-1}{n2^n}x^n,\ |x|<2\right)$

g) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}, R=\infty\right)$

4.2. Ứng dụng của chuỗi luỹ thừa

1°/ Tính gần đúng

Ví dụ 3. Áp dụng chuỗi luỹ thừa, tính gần đúng

a) $\sin 18°$ với độ chính xác 10^{-5}

$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

- $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$
- $\sin 18° = \sin \frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}$
- $|R_n| < \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!10^{2n+1}} \le 10^{-5}$
- $n \ge 3$

b) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ với độ chính xác 10^{-3}

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$
- $I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}$
- $|R_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} \le 10^{-3} \Rightarrow n \ge 4$

c) Tính gần đúng số e với độ chính xác $0,00001$ $(2,71828)$

d) Tính gần đúng $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ với độ chính xác $0,0001$ $(0,747)$

e) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ với độ chính xác 10^{-3} $(0,118)$

2°/ Tính giới hạn.

Ví dụ 4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}}{x^9}$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9)$
- $A = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^9}{9!} + o(x^9)}{x^9} = \frac{1}{9!}$

§ 6 Chuỗi FOURIER

- Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier
- Khai triển hàm số thành chuỗi Fourier

• **Đặt vấn đề**

1. Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier

a) Chuỗi lượng giác

Định nghĩa. Chuỗi lượng giác là chuỗi hàm số có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ a_n, b_n \in \mathbb{R} \qquad (1.1)$$

Nhận xét.

1°/ Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi (1.1) hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$

2°/ Tuy nhiên, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ không phải là điều kiện cần để chuỗi (1.1) hội tụ.

b) Chuỗi Fourier

Bổ đề. Với $\forall\, p, k \in \mathbb{Z}$, ta có

1°/ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = 0$

2°/ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\, dx = 0,\ k \neq 0$

3°/ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \sin px\, dx = 0$

4°/ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos px\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \neq 0 \end{cases}$

5°/ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \sin px\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \neq 0 \end{cases}$

• Giả sử $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π và có

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1.2)$$

Sử dụng bổ đề trên và tính toán ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (1.3)$$

Định nghĩa. Chuỗi lượng giác $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ với các hệ số a_0, a_n, b_n xác định trong (1.3) được gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$.

2. Điều kiện để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

Định nghĩa. Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về hàm $f(x)$ thì ta bảo hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lí Dirichlet. Cho $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi\,;\,\pi] \Rightarrow$ chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn $[-\pi\,;\,\pi]$ và có

$S(x) = f(x)$, tại điểm liên tục của $f(x)$.

Còn tại điểm gián đoạn $x = c$ có $S(c) = \dfrac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$.

Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, xác định như sau

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$

+) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0$

+) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos nx)dx + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = 0$

+) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin nx)dx + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx$

$= \dfrac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \dfrac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$

+) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ -x, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ $\left(f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}\right)$

c) $f(x) = x^2,\ -\pi < x < \pi$

+) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \dfrac{2\pi^2}{3}$

+) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx\,dx = 0$

+) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \dfrac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n\dfrac{4}{n^2}$

$f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left[\dfrac{\cos x}{1} - \dfrac{\cos 2x}{4} + \dfrac{\cos 3x}{9} - \dfrac{\cos 4x}{16} + \cdots\right]$

d) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

$$\left(f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right)$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 6

§ 6 Chuỗi Fourier (TT)

• Khai triển hàm chẵn, lẻ • Khai triển hàm tuần hoàn chu kì bất kì

3. Khai triển hàm chẵn, lẻ

3.1. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx; \quad b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 1. $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \le x \le \pi \\ \pi + x, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ tuần hoàn với chu kì 2π, khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

+) $f(-x) = f(x)$

+) $b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$

+) $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\left(\pi x - \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$

+) $a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos kx\,dx = \dfrac{2}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,d\left(\dfrac{\sin kx}{k}\right)$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dx\right] = \frac{2}{\pi}.\frac{-\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}(1 - \cos k\pi) = \frac{2}{\pi k^2}\left(1 - (-1)^k\right)$$

+) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)\cos kx = \dfrac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin của các hàm số sau

a) $f(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le \pi$ $\qquad \left(1 - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos(4n+1)x}{4n+1} - \dfrac{\cos(4n+3)x}{4n+3}\right]\right)$

c) $f(x) = x(\pi - x), \ 0 < x < \pi$ $\qquad \left(\dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{n^2}\right)$

3.2. Nếu hàm $f(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow f(x)\cos kx$ là hàm số lẻ còn $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn

$$\Rightarrow a_k = 0; \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \forall k \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = x,\ -\pi \le x \le \pi$, tuần hoàn với chu kì 2π, khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier

+) Hàm $f(x)$ lẻ

+) $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$

+) $b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x d\left(\dfrac{-\cos kx}{k}\right)$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos k\pi}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

+) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx$

Ví dụ 4. Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số sin của các hàm số sau

a) $f(x) = \pi - x,\ 0 < x < \pi$ $\quad\left(2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ $\quad\left(\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin nx\right)$

c) $f(x) = x(\pi - x),\ 0 < x < \pi$ $\quad\left(\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\right)$

3.3 Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2l$, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-l;\ l]$. Đổi biến $x' = \dfrac{\pi}{l}x \Rightarrow f(x) = f\left(\dfrac{l}{\pi}x'\right) \equiv F(x')$ tuần hoàn với chu kì 2π

Sử dụng khai triển Fourier cho hàm này có

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x + b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right),$$

ở đó $a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx,\quad \forall n \in \mathbb{N}$;

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nhận xét. Công thức này nhận được từ công thức (1.3) khi thay π bởi l, thay x bởi $\dfrac{\pi}{l}x$

Ví dụ 5. Khai triển hàm tuần hoàn với chu kì 2, $f(x) = x^2,\ -1 \le x \le 1$ thành chuỗi Fourier

+) $f(x)$ chẵn

+) $b_k = 0,\ k = 1, 2, \dots$

+) $a_0 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}$

+) $a_n = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x\, dx = 2\int\limits_{0}^{1} x^2 \cos n\pi x\, dx$

$$= 2\int\limits_0^1 x^2 d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right) = 2\left[\left.\frac{x^2}{n\pi}.\sin n\pi x\right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}.2xdx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\int\limits_0^1 xd\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{4}{n\pi}\left[\left.x.\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n\pi} - \left.\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right|_0^1\right] = (-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2}$$

+) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$

Ví dụ 6. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x \le 0 \\ \dfrac{x}{3}, & 0 < x \le 3 \end{cases}$ với chu kì $2l = 6$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3} + \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\right)$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le 0 \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2 \end{cases}$ với chu kì $2l = 4$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$$

c) Khai triển hàm tuần hoàn $T = 4$ thành chuỗi Fourier.

1) $f(x) = x^2,\ -2 \le x \le 2$ $\quad \left(\dfrac{4}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{16}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\right)$

2) $f(x) = x|x|,\ -2 \le x \le 2$ $\quad \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{2},\ b_n = \begin{cases} \dfrac{8}{(2k-1)\pi} - \dfrac{32}{(2k-1)^3\pi^3}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{8}{2k\pi}, & n = 2k \end{cases}\right.$

3.4. Nếu $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a;\ b]$, muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn với chu kì $\geq (b-a)$ sao cho $g(x) = f(x),\quad \forall x \in [a;\ b]$.

Khai triển hàm $g(x)$ thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi bằng $f(x)$ tại $\forall x \in [a;\ b]$ (trừ ra có chăng là các điểm gián đoạn của $f(x)$). Vì hàm $g(x)$ không duy nhất nên có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm số $f(x)$, nói riêng nếu hàm số $g(x)$ chẵn thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số cosin, còn nếu hàm số $g(x)$ lẻ thi chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số sin.

Ví dụ 7. Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2},\quad 0 < x < 2$ thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin và thành chuỗi Fourier theo các hàm số sin.

a) +) Xét hàm $g(x) = \dfrac{|x|}{2},\ -2 \leq x \leq 2$, tuần hoàn chu kì 4

+) $g(x) \equiv f(x),\ 0 < x < 2$

+) Khai triển Fourier hàm $g(x)$ có $g(x)$ chẵn, do đó

$$b_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|dx = \int_0^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \int_0^2 xd\left(\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi}x\sin\left.\frac{k\pi x}{2}\right|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\cos\left.\frac{k\pi x}{2}\right|_0^2 = \frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

+) $g(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos\frac{k\pi x}{2} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2},\ |x| \leq 2$

+) $f(x) = 1 - \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2},\ 0 < x < 2$

b) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{2},\ 0 < x < 2$

c) 1) Khai triển thành chuỗi Fourier theo hàm số cosine

$f(x) = \dfrac{x}{3},\ 0 \leq x < 3$ $\qquad\left(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right)$

2) Khai triển thành chuỗi Fourier theo hàm số sine

$f(x) = \dfrac{x}{3},\ 0 \leq x < 3$ $\qquad\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)$

CHƯƠNG II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. MỞ ĐẦU

• **Đặt vấn đề**

• Các quy luật trong vũ trụ đều được viết theo ngôn ngữ Toán học

• Môn Đại số đủ để giải rất nhiều bài toán tĩnh

• Tuy nhiên, hầu hết các hiện tượng tự nhiên đáng quan tâm lại liên quan tới sự biến đổi và thường được mô tả bởi các phương trình có liên quan đến sự thay đổi về lượng, đó là **phương trình vi phân.**

1. Khái niệm cơ bản

• **Phương trình vi phân** là phương trình có dạng $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ (1)

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

• **Cấp của phương trình vi phân.** Là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình (1).

• **Phương trình vi phân tuyến tính.** Là phương trình vi phân (1) khi F là bậc nhất đối với $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

trong đó $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ là những hàm số cho trước.

• **Nghiệm của phương trình vi phân** (1) là hàm số thoả mãn (1)

• **Giải phương trình vi phân** (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân sau

a) $y' = \cos x$ b) $y' = \ln x$ c) $y' = x^5 e^x$ d) $y' = x^4 \sin x$

2. Một số ứng dụng

a) Sinh trưởng tự nhiên và thoái hoá

• Sự tăng dân số: $\dfrac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P$, β là tỉ lệ sinh, δ là tỉ lệ chết

b) Lãi luỹ tiến $\dfrac{dA}{dt} = rA$, A là lượng đô la trong quỹ tiết kiệm tại thời điểm t, tính theo năm, r là tỉ lệ lãi luỹ tiến tính theo năm.

c) Sự phân rã phóng xạ $\dfrac{dN}{dt} = -kN$, k phụ thuộc vào từng loại đồng vị phóng xạ

d) Giải độc $\dfrac{dA}{dt} = -\lambda A$, λ là hằng số giải độc của thuốc

e) Phương trình tăng trưởng tự nhiên $\dfrac{dx}{dt} = kx$

Ví dụ 2. Theo số liệu tại **www.census.gov** vào giữa năm 1999 số dân toàn thế giới đạt tới 6 tỉ người và đang tăng thêm khoảng 212 ngàn người mỗi ngày. Giả sử là mức tăng dân số tự nhiên tiếp tục với tỷ lệ này, hỏi rằng:

- **(a)** Tỷ lệ tăng k hàng năm là bao nhiêu?
- **(b)** Vào giữa thế kỉ 21, dân số toàn thế giới sẽ là bao nhiêu?
- **(c)** Hỏi sau bao lâu số dân toàn thế giới sẽ tăng gấp 10 lần–nghĩa là đạt tới 60 tỉ mà các nhà nhân khẩu học tin là mức tối đa mà hành tinh của chúng ta có thể cung cấp đầy đủ lương thực?

(a) Ta tính dân số theo tỉ và thời gian theo năm. Lấy $t = 0$ ứng với giữa năm 1999, nên $P_0 = 6$. Sự kiện P tăng lên 212 ngàn hay là 0,000212 tỉ người trong một ngày tại $t = 0$ có nghĩa là $P'(0) = (0{,}000212)(365{,}25) \approx 0{,}07743$ tỉ một năm.
Từ phương trình tăng dân số tự nhiên $P' = kP$ với $t = 0$, ta nhận được

$$k = \frac{P'(0)}{P(0)} \approx \frac{0{,}07743}{6} \approx 0{,}0129,$$

Như vậy, số dân thế giới đang tăng theo tỉ lệ khoảng 1,29% một năm vào năm 1999. Với giá trị k này, ta có hàm cho số dân thế giới là $P(t) = 6e^{0{,}0129t}$.
(b) Với $t = 51$ ta có dự báo $P(51) = 6e^{(0{,}0129)(51)} \approx 11{,}58$ (tỉ) sẽ là số dân của thế giới vào giữa năm 2050 (như thế kể từ năm 1999 mới qua một nửa thế kỉ, dân số thế giới đã tăng gần gấp đôi).
(c) Dân số thế giới sẽ đạt tới 60 tỉ khi mà $60 = 6e^{0{,}0129t}$; nghĩa là khi $t = \dfrac{\ln 10}{0{,}0129} \approx 178$; tức là năm 2177.

f) Quá trình nguội đi và nóng lên $\dfrac{dT}{dt} = k(A - T)$, k là hằng số dương, A là nhiệt độ của môi trường

Ví dụ 3. Một miếng thịt 4-lb (1 lb ≈ 450 gam) có nhiệt độ ban đầu là 50^0 F $(1^0 C = 3{,}38^0 F)$), được cho vào một cái lò 375^0 F vào lúc 5 giờ chiều. Sau 75 phút người ta thấy nhiệt độ miếng thịt là 125^0 F. Hỏi tới khi nào miếng thịt đạt nhiệt độ 150^0 F (vừa chín tới)?

Giải. Ta tính thời gian theo phút và coi lúc 5 giờ chiều là t = 0. Ta cũng giả thiết (có vẻ không thực tế) rằng tại mọi lúc, nhiệt độ T(t) của cả miếng thịt là đều như nhau. Ta có $T(t) < A = 375$, $T(0) = 50$ và $T(75) = 125$. Vì thế

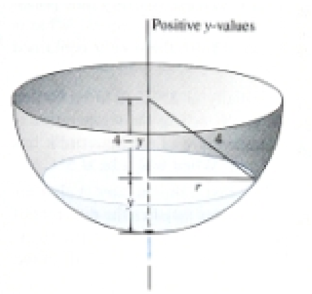
$$\frac{dT}{dt} = k(375 - T);\ \int \frac{dT}{375 - t} = \int k\,dt;\ -\ln(375 - T) = kt + C;\ 375 - T = Be^{-kt}.$$

Vì $T(0) = 50$ nên $B = 325$, vậy $T = 375(1 - e^{-kt})$. Ta lại thấy $T = 125$ khi $t = 75$. Thay các giá trị đó vào phương trình trên sẽ được $k = -\dfrac{1}{75}\ln\left(\dfrac{250}{325}\right) \approx 0{,}0035.$

Sau cùng, ta giải phương trình $150 = 375 - 325e^{(-0{,}0035)t}$, đối với $t = -[\ln(225/325)]/(0{,}0035) \approx 105$ (phút) là tất cả thời gian nướng thịt theo yêu cầu đặt ra. Bởi vì miếng thịt được đặt vào lò lúc 5 giờ chiều, ta sẽ lấy nó ra khỏi lò vào khoảng 6 giờ 45 phút.

g) Quy luật Torricelli $A(y)\dfrac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$, ở đó, v là thể tích nước trong thùng, A(y) là diện tích tiết diện thẳng nằm ngang của bình ở độ cao y so với đáy, $\sqrt{2gy}$ là tốc độ nước thoát ra khỏi lỗ hổng

Ví dụ 4. Một cái bát dạng bán cầu có bán kính miệng bát là 4ft ($ft \approx 0.3048$ m)được chứa đầy nước vào thời điểm t = 0. Vào thời điểm này, người ta mở một lỗ tròn đường kính 1in (in $\approx 2,54$ cm) ở đáy bát. Hỏi sau bao lâu sẽ không còn nước trong bát?



Tháo nước từ một bát bán cầu

Giải. Ta nhận thấy trong hình, dựa vào tam giác vuông có $A(y) = \pi r^2 = \pi[16-(4-y)^2] = \pi(8y - y^2)$,
với $g = 32ft/s^2$, phương trình trên có

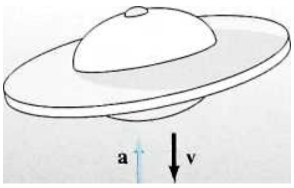
$$\pi(8y - y^2)\frac{dy}{dt} = -\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2\sqrt{2.32y};$$

$$\int(8y^{1/2} - y^{3/2})dy = -\int\frac{1}{72}dt; \quad \frac{16}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -\frac{1}{72}t + C.$$

Do $y(0) = 4$, ta có $C = \dfrac{16}{3}\cdot 4^{3/2} - \dfrac{2}{5}4^{5/2} = \dfrac{448}{15}$.

Bình hết nước khi $y = 0$, nghĩa là khi $t = 72\cdot\dfrac{448}{15} \approx 2150 \ (s)$; tức là khoảng 35 phút 50 giây. Có thể coi là sau gần 36 phút, bát sẽ không còn nước.

Ví dụ 5. Một đĩa bay rơi xuống bề mặt Mặt trăng với vận tốc 450m/s. Tên lửa hãm của nó, khi cháy, sẽ tạo ra gia tốc 2,5m/s^2 (gia tốc trọng trường trên mặt trăng được coi là bao gồm trong gia tốc đã cho). Với độ cao nào so với bề mặt Mặt trăng thì tên lửa cần được kích hoạt để đảm bảo "sự tiếp đất nhẹ nhàng", tức là $v = 0$ khi chạm đất?

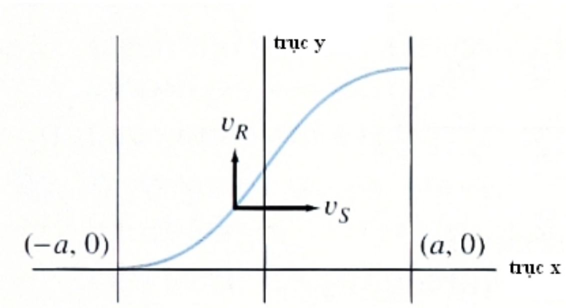


Đĩa bay trong Ví dụ 5

- Phương trình: $v(t) = 2,5t - 450$.
- Đáp số: $x_0 = 40,5$ km.

Do đó tên lửa hãm nên được kích hoạt khi đĩa bay ở độ cao 40,5km so với bề mặt Mặt trăng, và nó sẽ tiếp đất nhẹ nhàng sau 3 phút giảm tốc.

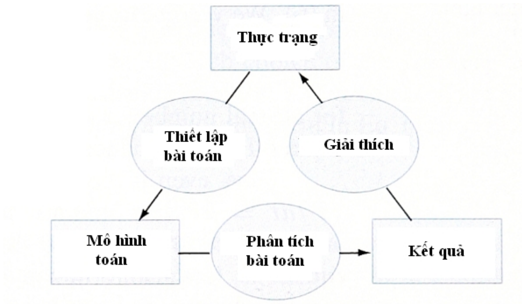
Ví dụ 6. Bài toán người bơi



Bài toán về người bơi

Phương trình vi phân cho quỹ đạo của người bơi qua sông là $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_0}{v_s}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$

3. Các mô hình toán

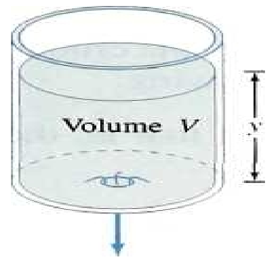


Quá trình mô hình toán.

Ví dụ 1. Suất biến đổi theo thời gian của dân số $P(t)$ trong nhiều trường hợp đơn giản với tỷ lệ sinh, tử không đổi thường tỷ lệ với số dân. Nghĩa là: $\frac{dP}{dt} = kP$

(1)

với k là hằng số tỷ lệ.



Quy luật thoát nước của **Torricelli**.

Phương trình (1) mô tả quá trình thoát nước khỏi bể chứa.

Ví dụ 2. Quy luật của Torricelli nói rằng suất biến đổi theo thời gian của khối lượng nước V trong một bể chứa tỷ lệ với căn bậc hai của độ sâu y của nước trong bể:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}\text{, với } k \text{ là một hằng số.}$$

Nếu bể chứa là một hình trụ tròn xoay với diện tích đáy là A, thì $V = Ay$, và $dV/dt = A.(dy/dt)$. Khi đó phương trình có dạng: $\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}$, trong đó $h = k/A$ là một hằng số.

Ví dụ 3. Quy luật giảm nhiệt của Newton có thể phát biểu như sau: Suất biến đổi đối với thời gian của nhiệt độ $T(t)$ của một vật thể tỷ lệ với hiệu số giữa T và nhiệt độ A của môi trường xung quanh. Nghĩa là $\frac{dT}{dt} = -k(T - A).$

(2)

trong đó, k là một hằng số dương. Nhận thấy rằng nếu $T > A$, thì $dT/dt < 0$, do đó nhiệt độ là một hàm giảm theo t và vật thể nguội đi. Nhưng nếu $T < A$, thì $dT/dt > 0$, và T sẽ tăng lên.

Quy luật giảm nhiệt của Newton,

Phương trình (2) mô tả một hòn đá nóng bị nguội đi trong nước

Vậy, một quy luật vật lý đã được diễn giải thành một phương trình vi phân. Nếu ta đã biết các giá trị của k và A, thì ta có thể tìm được một công thức tường minh cho T(t), rồi dựa vào công thức đó, ta có thể dự đoán nhiệt độ sau đó của vật thể

§ 2. Phương trình vi phân cấp một

- Đại cương về phương trình vi phân cấp 1
- Phương trình vi phân khuyết

• Đặt vấn đề

1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 là $F(x, y, y') = 0$ (1) hoặc $y' = f(x, y)$ (2)

Định lí về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

- $f(x, y)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$
- $(x_0; y_0) \in D$

$\Rightarrow$ trong lân cận $U_\varepsilon(x_0)$ nào đó của x_0, tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (2) thoả mãn $y(x_0) = y_0$. Nếu ngoài ra $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ liên tục trên D thì nghiệm trên là duy nhất

Chú ý

- Việc vi phạm điều kiện của định lí có thể sẽ phá vỡ tính duy nhất

- $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$
- $f'_y(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ gián đoạn tại $(0 ; 0)$
- Có hai nghiệm thoả mãn: $y_1 = x^2$; $y_2 = 0$.

- Vi phạm giả thiết định lí có thể làm bài toán vô nghiệm

- $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 1$
- Nghiệm: $\dfrac{dy}{y} = 2\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx^2$
- $y(0) = 1$, không có C nào $\Rightarrow$ vô nghiệm.

- Có hay không phương trình vi phân không thoả mãn giả thiết và có duy nhất nghiệm?
- Bài toán Cauchy $y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$
- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2) là hàm số $y = \varphi(x, C)$:
  - $\varphi(x, C)$ thoả (2) với mọi C
  - $\forall (x_0\ ;\ y_0) \in D,\ \exists C = C_0 :\ \varphi(x, C_0)\big|_{x=x_0} = y_0$

Khi đó $\varphi(x, C_0)$ được gọi là nghiệm riêng
- Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát
- Tích phân tổng quát là nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn $\phi(x, y, C) = 0$
- Khi cho tích phân tổng quát một giá trị cụ thể ta có tích phân riêng $\phi(x, y, C_0) = 0$

2. Phương trình vi phân khuyết

a) $F(x, y') = 0$

+) $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$

+) $x = f(y')$, đặt $y' = t \Rightarrow x = f(t);\ y = \int tf'(t)dt$

Ví dụ 1. Giải phương trình sau $x = y'^2 - y' + 2$

+) $y' = t$

+) $x = t^2 - t + 2$

+) $dy = t\,dx \Rightarrow y = \int t(2t-1)\,dt = \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{t^2}{2} + C$

+) Nghiệm $x = t^2 - t + 2,\ \ y = \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{t^2}{2} + C$

b) $F(y, y') = 0$

+) $y' = f(y) \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \dfrac{1}{f(y)}dy$

+) $y = f(y')$, đặt $y' = t \Rightarrow y = f(t),\ x = \int \dfrac{f'(t)}{t}dt$

+) $F(y, y') = 0$, đặt $y = f(t) \Rightarrow y' = g(t) \Rightarrow x = \int \dfrac{f'(t)}{g(t)}dt$

Ví dụ 2. Giải phương trình $y^2 + y'^2 = 4$

+) $y = 2\sin t \Rightarrow dy = 2\cos t\,dt = 2\cos t\,dx$

+) Nếu $\cos t \neq 0 \Rightarrow dt = dx \Rightarrow t = x + c \Rightarrow y = 2\sin(x + c)$ là nghiệm tổng quát

+) Nếu $\cos t = 0 \Rightarrow t = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = \pm 2$ (Nghiệm kì dị)

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 7

§2. Phương trình vi phân cấp một (TT)

3. Phương trình vi phân phân li biến số

a) Định nghĩa. $f(y)\,dy = g(x)\,dx$

b) Cách giải. $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

$$F(y) = \int g(x)\,dx$$

Ví dụ 1. 1°/ $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

+) $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, $|y| < 1$, $x > 0$ +) $\int \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

+) $\sin^{-1} y = \sqrt{x} + C$ +) $y = \sin\left(\sqrt{x} + C\right)$

+) $y = \pm 1$ là nghiệm kỳ dị

2°/ $y' = 1 + x + y + xy$

+) $y' = (1 + x)(1 + y)$ +) $\dfrac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$

+) $\dfrac{dy}{1+y} = (1+x)\,dx$, $y \neq -1$, $\ln|1+y| = x + \dfrac{x^2}{2} + C$

+) $y = -1$ là nghiệm kì dị

3°/ $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$ $\quad (1 + y^2 = C(1 - x^2))$

4°/ $\tan x \sin^2 y\,dx + \cos^2 x \cot y\,dy = 0$ $\quad (\cot^2 y = \tan^2 x + C)$

5°/ $y - xy' - a(1 + x^2y) = 0$ $\quad \left(y = a + \dfrac{Cx}{1 + ax}\right)$

6°/ $x + xy + y'(y + xy) = 0$ $\quad (x + y = \ln(C(x+1))(y+1))$

7°/ $y' = (x + y)^2$ $\quad (\arctan(x + y) = x + C)$

8°/ $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$ $\quad (5x + 10y + C = 3\ln(10x - 5y + 6))$

9°/ $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

$$\left(\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(\sqrt{4x - 2y + 1} + 2\right) = x + C\right)$$

10°/ $(xy^2 + 2x)\,dx + (2y - 2x^2y)\,dy = 0$ $\quad \left(\sqrt{|x^2 - 1|} = C(y^2 + 2)\right)$

c) Một số ứng dụng

1°/ Sinh trưởng tự nhiên và thoái hoá

- Sự tăng dân số: $\dfrac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P$, β là tỉ lệ sinh, δ là tỉ lệ chết

2°/ Lãi luỹ tiến $\dfrac{dA}{dt} = rA$

A là lượng đô la trong quỹ tiết kiệm tại thời điểm t, tính theo năm

r là tỉ lệ lãi luỹ tiến tính theo năm.

3°/ Sự phân rã phóng xạ $\dfrac{dN}{dt} = -kN$, k phụ thuộc vào từng loại đồng vị phóng xạ

4°/ Giải độc $\dfrac{dA}{dt} = -\lambda A$, λ là hằng số giải độc của thuốc

5°/ Phương trình tăng trưởng tự nhiên $\dfrac{dx}{dt} = kx$

6°/ Quá trình nguội đi và nóng lên $\dfrac{dT}{dt} = k(A - T)$, k là hằng số dương, A là nhiệt độ của môi trường

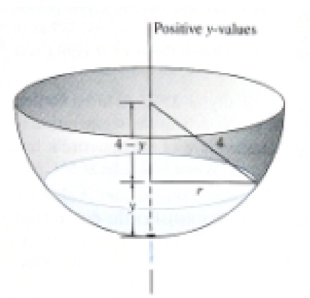
Ví dụ 2. Một miếng thịt 4-lb có nhiệt độ ban đầu là 50^0 F, được cho vào một cái lò 375^0 F vào lúc 5 giờ chiều. Sau 75 phút người ta thấy nhiệt độ miếng thịt là 125^0 F. Hỏi tới khi nào miếng thịt đạt nhiệt độ 150^0 F (vừa chín tới)?

- $\dfrac{dT}{dt} = k(375 - T)$, $T(0) = 50$, $T(75) = 125$
- $\displaystyle\int \frac{dT}{375 - T} = \int k\,dt \Rightarrow 375 - T = Be^{-kt}$
- Thay $T(0) = 50$, $T(75) = 125 \Rightarrow B = 325$, $k \approx 0,0035$
- $t \approx 105$ phút tức vào lúc khoảng 6h45'.

7°/ Quy luật Torricelli $A(y)\dfrac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$, ở đó v là thể tích nước trong thùng, A(y) là diện tích tiết diện thẳng nằm ngang của bình ở độ cao y so với đáy, $\sqrt{2gy}$ là tốc độ nước thoát ra khỏi lỗ hổng

Ví dụ 3. Một cái bát dạng bán cầu có bán kính miệng bát là 4ft được chứa đầy nước vào thời điểm t = 0. Vào thời điểm này, người ta mở một lỗ tròn đường kính 1 inch ở đáy bát. Hỏi sau bao lâu sẽ không còn nước trong bát?

- $A(y) = \pi r^2 = \pi(8y - y^2)$,
- $\pi(8y - y^2)\dfrac{dy}{dt} = -\pi\left(\dfrac{1}{24}\right)^2\sqrt{2.32y}$;
- $\dfrac{16}{3}y^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} = -\dfrac{1}{72}t + C.$
- $y(0) = 4 \Rightarrow C = \dfrac{448}{15}$.
- $t \approx 2150\ (s)$; tức là khoảng 35 phút 50 giây.



Tháo nước từ một bát bán cầu

Ví dụ 4. 1. $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$, $y(\pi) = \pi$ $\left(C = 2,\ \ln\left|\tan\dfrac{y}{4}\right| = 2 - 2\sin\dfrac{x}{2}\right)$

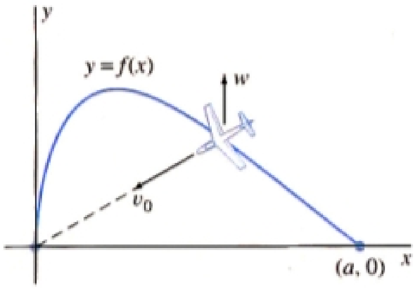
2. $x - xy + y'(y - xy) = 0$ $\left(y = 1,\ x + y + \ln|(y-1)(1-x)| = C\right)$

4. Phương trình thuần nhất (đẳng cấp)

a) Đặt vấn đề

• Nhiều ứng dụng dẫn đến các phương trình vi phân không phân li

• Chẳng hạn, một máy bay xuất phát từ điểm $(a\,;\,0)$ đặt ở đúng phía Đông của nơi nó đến, là một sân bay đặt tại gốc tọa độ $(0\,;\,0)$. Máy bay di chuyển với vận tốc không đổi v_0 liên quan đến gió, mà thổi theo đúng hướng Nam với vận tốc không đổi w. Như đã thể hiện trong Hình vẽ, ta giả thiết rằng phi công luôn giữ hướng bay về phía gốc tọa độ.



Máy bay hướng về gốc

Đường bay $y = f(x)$ của máy bay thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v_0 x}\left(v_0 y - w\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

b) Định nghĩa. $$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (hoặc } \frac{dx}{dy} = G\left(\frac{x}{y}\right)\text{)}$$ (1)

c) Cách giải

• Đặt $v = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

• Biến đổi (1) thành phương trình phân ly: $x\dfrac{dv}{dx} = F(v) - v$.

Ví dụ 1

1°/ Giải phương trình: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$

• $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ • $v = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{v} = \dfrac{x}{y}$, $y = vx \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

• $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2}{v} + \dfrac{3}{2}v$ • $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2}{v} + \dfrac{v}{2} = \dfrac{v^2 + 4}{2v}$;

• $\displaystyle\int \frac{2v}{v^2 + 4}dv = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln(v^2 + 4) = \ln|x| + \ln C$.

• $v^2 + 4 = C|x| \Rightarrow \dfrac{y^2}{x^2} + 4 = C|x| \Rightarrow y^2 + 4x^2 = kx^3$.

2°/ Giải: $xy^2y' = x^3 + y^3$

+) $y = 0$ không là nghiệm +) $y \neq 0;\ y' = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y}{x}$

+) $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$ +) $u + xu' = u + \dfrac{1}{u^2}$

+) $u^3 = 3\ln|x| + C \Rightarrow y^3 = x^3(3\ln|x| + C)$

3°/ $(x + 2y)dx - x\,dy = 0$ $(x + y = Cx^2)$

4°/ $(x - y)y\,dx = x^2\,dy$ $\left(x = Ce^{\frac{x}{y}}\right)$

5°/ $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$ $\left(x = \pm y\sqrt{\ln Cx}\right)$

6°/ $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$ $(y = -x\ln\ln Cx)$

7°/ $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$ $\left((x + y)^2 = Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}\right)$

8°/ $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$ $\left((3x + y + 2\ln|x + y - 1| = 0\right)$

9°/ $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ $(1 - xy = Cx^3(2 + xy),\ \ xy = -2)$

Ví dụ 2. 1°/ $xy' - y = y(\ln y - \ln x),\ y(1) = e$ $\left(x = \ln\dfrac{y}{x}\right)$

2°/ $(x^2 - y^2)dy = 2xydx$ $\left(y = 0,\ \ x' = \dfrac{x}{2y} - \dfrac{y}{2x}\right.$, đẳng cấp)

3°/ $y^2dx = (xy - x^2)dy$ $(e^{y/x} = Cy,\ y = 0,\ x = 0)$

4°/ $(x - y)ydx = x^2dy$ $\left(y = x\left(\ln|Cx|\right)^{-1},\ y = 0,\ x = 0\right)$

5°/ $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2},\ y(1) = 0$ $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2,\ C = 1\right)$

6°/ $(2x - y + 4)dx + (x - 2y + 5)dy = 0$ $\left((x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)\right)$

7°/ $(2x + y + 1)dx - (x + 2y - 3)dy = 0$ $\left(C|y - x - 4|^3\left|y + x - \dfrac{2}{3}\right| = 1\right)$

8°/ $yy' = y^3 - \dfrac{2}{x^3}$

9°/ $(x^2 + y^2)dx = xydy$ $\left(y^2 = \dfrac{1}{3}(\ln x^2 + C)\right.$, x=0)

5. Phương trình tuyến tính

a) Đặt vấn đề

• Phương trình đại số tuyến tính cấp một $ax = b$ luôn giải được

• Liệu có thể xây dựng được cách giải đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp một hay không?

b) Định nghĩa. $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$ hoặc $x' + p(y)x = q(y)$ (1)

c) Phương pháp giải. Có 3 phương pháp giải là :

- Sử dụng công thức nghiệm tổng quát.

- Thừa số tích phân.

- Biến thiên hằng số.

Dưới đây là phương pháp thừa số tích phân :

• Tính thừa số tích phân $\rho(x) = e^{\int p(x)dx}$,

• Nhân hai vế của phương trình vi phân với $\rho(x)$,

• Đưa vế trái của phương trình được xét về dạng đạo hàm của một tích:

$$D_x\left(\rho(x)y(x)\right) = \rho(x)q(x).$$

• Tích phân phương trình này

$$\rho(x)y(x) = \int \rho(x)q(x)dx + C,$$

rồi giải theo y để nhận được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

Ngoài ra có thể giải bằng các phương pháp khác như : Sử dụng công thức ngiệm tổng quát (3), phương pháp biến thiên hằng số)

Ví dụ 1. 1°/ Giải bài toán giá trị ban đầu $\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{11}{8}e^{-x/3},\ \ y(0) = -1.$

• Có $p(x) = -1$ và $q(x) = \dfrac{11}{8}e^{-x/3}$, thừa số tích phân là $\rho(x) = e^{\int(-1)dx} = e^{-x}$.

• Nhân cả hai vế của phương trình đã cho với e^{-x} được $e^{-x}\dfrac{dy}{dx} - e^{-x}y = \dfrac{11}{8}e^{-4x/3}$

• $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}y) = \dfrac{11}{8}e^{-4x/3}$

• $e^{-x}y = \displaystyle\int \frac{11}{8}e^{-4x/3}dx = -\frac{33}{32}e^{-4x/3} + C,$

• $y(x) = Ce^{x} - \dfrac{33}{32}e^{-x/3}$.

• Thay $x = 0$ và $y = -1$ vào ta có $C = 1/32$, nghiệm riêng cần tìm là

$$y(x) = \frac{1}{32}e^{x} - \frac{33}{32}e^{-x/3} = \frac{1}{32}(e^{x} - 33e^{-x/3}).$$

2°/ Giải phương trình $y' + 3y = 2x.e^{-3x}$

+) $p = 3,\ q = 2x.e^{-3x}$

+) $\rho = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

+) $e^{3x}(y' + 3y) = 2x$

+) $\dfrac{d}{dx}\left(y.e^{3x}\right) = 2x$

+) $y.e^{3x} = x^2 + C \Rightarrow y = (x^2 + C)e^{-3x}$

3°/ Giải: $\left(x + y.e^{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 1$

+) $\dfrac{dx}{dy} - x = y.e^{y}$

+) $\rho = e^{-\int dy} = e^{-y}$

+) $e^{-y}(x' - x) = y$ +) $\frac{d}{dy}\left(xe^{-y}\right) = y$

+) $xe^{-y} = \frac{1}{2}y^2 + C \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}y^2 + C\right)e^y$

4°/ $y'(2x+1) = 4x + 2y$ $\left(y = (2x+1)(C + \ln|2x+1| + 1)\right)$

5°/ $y = x(y' - x\cos x)$ $\left(y = x(C + \sin x)\right)$

6°/ $(x + y^2)dy = y\,dx$ $\left(x = y^2 + Cy\right)$

7°/ $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$ $\left(x = Cy^2 - \frac{1}{y}\right)$

8°/ $(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right)dy$ $\left(x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C\right)$

9°/ $(2x + y)dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$ $\left(x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2\right)$

ĐỊNH LÝ 1. Phương trình tuyến tính cấp một

Nếu hàm $p(x)$ và $q(x)$ liên tục trên một khoảng mở I chứa điểm x_0, thì bài toán giá trị ban đầu

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

có nghiệm duy nhất $y(x)$ trên I, cho bởi công thức

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx + C\right] \tag{3}$$

với một giá trị C thích hợp.

Chú ý:

• Định lý 1 cho ta biết mọi nghiệm của phương trình (1) đều nằm trong nghiệm tổng quát cho bởi (3). Như vậy phương trình vi phân *tuyến tính* cấp một không có các nghiệm kì dị.

• Giá trị thích hợp của hằng số C–cần để giải bài toán giá trị ban đầu với phương trình (2) – có thể chọn "một cách tự động" bằng cách viết

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(u)du}.q(t)dt\right]$$

Các cận x_0 và x nêu trên đặt vào các tích phân bất định trong (3) đảm bảo trước cho $\rho(x_0) = 1$ và vì thế $y(x_0) = y_0$.

Ví dụ 2. Giả sử hồ Erie có thể tích 480 km^3 và vận tốc của dòng chảy vào (từ hồ Huron) và của dòng chảy ra (vào hồ Ontario) đều là 350 km^3/năm. Giả sử tại thời điểm $t = 0$ (năm), nồng độ ô nhiễm của hồ Erie – mà nguyên nhân là ô nhiễm công nghiệp và nay đã được giảm bớt – bằng 5 lần so với hồ Huron. Nếu dòng chảy ra đã được hoà tan hoàn toàn với nước hồ, thì sau bao lâu nồng độ ô nhiễm của hồ Erie sẽ gấp 2 lần hồ Huron?

• Phương trình vi phân cấp 1: $\dfrac{dx}{dt} = rc - \dfrac{r}{V}x$

• Ta viết lại nó theo dạng tuyến tính cấp 1: $\dfrac{dx}{dt} + px = q$

với hệ số hằng $p = r/V$, $q = rc$ và nhân tử tích phân $\rho = e^{pt}$.

• $x(t) = cV + 4cVe^{-rt/V}$.

• Để xác định khi nào $x(t)=2cV$, ta cần giải phương trình:

$$cV + 4cVe^{-rt/V} = 2cV\,;\; t = \frac{V}{r}\ln 4 = \frac{480}{350}\ln 4 \approx 1{,}901 \text{ (năm)}.$$

Ví dụ 3. Một bình dung tích 120 gallon (gal) lúc đầu chứa 90 lb (pao-khoảng 450g) muối hoà tan trong 90 gal nước. Nước mặn có nồng độ muối 2 lb/gal chảy vào bình với vận tốc 4 gal/phút và dung dịch đã được trộn đều sẽ chảy ra khỏi bình với vận tốc 3 gal/phút. Hỏi có bao nhiêu muối trong bình khi bình đầy?

• Phương trình vi phân : $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{3}{90+t}x = 8$

• Bình sẽ đầy sau 30 phút, và khi t = 30 ta có lượng muối trong bình là :

$$x(30) = 2(90+30) - \frac{90^4}{120^3} \approx 202 \text{ (lb)}.$$

Ví dụ 4.

a) 1°/ $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0,\ y(0) = 1$ $\quad\left(x = y^2 - \dfrac{1}{y}\right)$

2°/ $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0,\ y(1) = 1$ $\quad\left(x = \dfrac{y^2}{2}(1+y)\right)$

b) 1°/ $ydx - (x + y^2\sin y)dy = 0$ $\quad(x = (C - \cos y)y,\ y = 0)$

2°/ $(1+y^2)dx - (\arctan y - x)dy = 0$ $\quad(x = \arctan y - 1 + Ce^{-\arctan y})$

c) 1°/ $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ $\quad(y = x + x\sin x)$

2°/ $y' - y = \dfrac{e^x}{x},\quad y(1) = e$ $\quad(y = (1+\ln x)e^x)$

3°/ $y' = \dfrac{e^x}{x+1} - \dfrac{y}{x+1}$ $\quad\left(y = \dfrac{e^x + C}{x+1}\right)$

4°/ $y' = 1 + \dfrac{y}{x(x+1)}$ $\quad\left(y = \dfrac{x}{x+1}(x + \ln|x| + C)\right)$

d) 1°/ $2ydx - (6x - y^2)dy = 0,\quad y(1) = 1$ $\quad\left(x = \dfrac{y^2}{2}(1+y)\right)$

2°/ $(y+2)dx + (y - x + 2)dy = 0,\quad y(1) = 1$ $\quad\left(x = \left(\dfrac{1}{3} - \ln|y+2|\right)(y+2)\right)$

e) 1°/ $xy' + y - e^x = 0,\ y(1) = 1$ $\quad\left(y = \dfrac{e^x - e + 1}{x}\right)$

2°/ $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0,\ y(1) = 0$ $\left(y = \dfrac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)\right)$

f) 1°/ $4ydx - (12x - 8y)dy = 0$ $\left(x = y^3\left(c + \dfrac{1}{y^2}\right);\ y = 0\right)$

2°/ $2\sqrt{2}ydx - \left(6\sqrt{2}x - 2y^2\right)dy = 0$ $\left(x = y^3\left(c + \dfrac{1}{y\sqrt{2}}\right);\ y = 0\right)$

6. Phương trình Bernoulli

a) Định nghĩa. $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ hoặc $x' + p(y)x = q(y)x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ (2)

b) Cách giải

• Với $y \neq 0$, đặt $v = y^{1-\alpha}$

• Biến đổi phương trình (2) thành phương trình tuyến tính:

$$\frac{dv}{dx} + (1-\alpha)p(x)v = (1-\alpha)q(x).$$

Ví dụ 1. 1°/ $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{2x}{y}$

• Là phương trình Bernoulli với $p(x) = -3/(2x)$, $q(x) = 2x$, $\alpha = -1$ và $1 - \alpha = 2$

$\Rightarrow yy' - \dfrac{3}{2x}y^2 = 2x$

• Đặt: $v = y^2$ ta thu được phương trình tuyến tính: $\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{3}{x}v = 4x$

+) Nhân tử tích phân $\rho = e^{\int(-3/x)dx} = x^{-3}$.

+) $D_x(x^{-3}v) = \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow x^{-3}v = -\dfrac{4}{x} + C \Rightarrow x^{-3}y^2 = -\dfrac{4}{x} + C$

• $y^2 = -4x^2 + Cx^3$.

2°/ $y' + 2y = y^2e^x$ $\left(y(e^x + Ce^{2x}) = 1;\ y = 0\right)$

3°/ $xy^2y' = x^2 + y^3$ $(y^3 = Cx^3 - 3x^2)$

4°/ $y' = y^4\cos x + y\tan x$

$(y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x;\ y = 0)$

5°/ $(x+1)(y' + y^2) = -y$ $(y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1,\ y = 0)$

6°/ $3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)\,dx$ $(y^3(3 + ce^{\cos x}) = x,\ x = 0,\ y = 0)$

Ví dụ 2 1°/ $y' + 2xy = 2x^3y^3$ $\left(y^{-2} = \dfrac{1}{2}(Ce^{2x^2} + 2x^2 + 1),\ y = 0\right)$

2°/ $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$ $(y^{-1} = (1+x)(\ln|1+x| + C),\ y = 0)$

3°/ $3xy^2y' = x^3\cos x + y^3$ $\left(y = \sqrt[3]{x(x\sin x + \cos x + C)}\right)$

4°/ $(x+1)(y' + y^2) = -y$ $\left(y = 0,\ y = \left[(x+1)(\ln|x+1| + C)\right]^{-1}\right)$

5°/ a) $xy^2y' = x^2 + y^3$ $\left(y = x\sqrt[3]{c - \frac{3}{x}}\right)$

b) $8xy^2y' = x^2 - 8y^3$ $\left(y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{c + \frac{3}{40}x^5}\right)$

7. Phương trình vi phân toàn phần

a) Định nghĩa. Phương trình $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (1)

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền đơn liên D và có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

thì có tích phân tổng quát là

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt = C \text{ hoặc } \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt + \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt = C$$

Chú ý. Có hai cách giải phương trình VPTP : Sử dụng công thức tích phân tổng quát nêu trên, hoặc Định lý 4 mệnh đề tương đương học trong Giải tích 2.

Ví dụ 1. 1°/ Giải phương trình vi phân $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$

- $P(x, y) = (6xy - y^3)$; $Q(x, y) = (4y + 3x^2 - 3xy^2)$
- $\frac{\partial P}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\Rightarrow$ Phương trình vi phân toàn phần
- $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \Rightarrow F(x, y) = \int (6xy - y^3)dx = 3x^2y - xy^3 + g(y)$.
- $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$,
- $g'(y) = 4y \Rightarrow g(y) = 2y^2 + C_1$,
- $F(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C_1$.
- Tích phân tổng quát $3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C$

2°/ $(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0$

+) $P = 2x + 3y$; $Q = 3x + 2y \Rightarrow Q_x = P_y = 3$ +) $F = \int (2x + 3y)dx = x^2 + 3xy + g(y)$

+) $F_y(y) = 3x + 2y \Rightarrow 3x + g'(y) = 3x + 2y \Rightarrow g(y) = y^2$

+) $x^2 + 3xy + y^2 = C$

3°/ $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$ $\left((4x^2 + y^2) = Cx\right)$

4°/ $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$ $(y + xe^{-y} = C)$

5°/ $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ $(4y\ln x + y^4 = C)$

6°/ $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ $(x^2 - y^2 = Cy^2)$

7°/ $x\,dx + y\,dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ $\quad\left(x^2 + y^2 - 2\arctan\dfrac{y}{x} = C\right)$

8°/ $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$ $\quad\left(x^2\cos^2 y + y^2 = C\right)$

9°/ $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$ $\quad\left(x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y\right)$

10°)

a) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ $\quad\left(\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C\right)$

b) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ $\quad\left(\dfrac{y^4}{4} + y\ln x = C\right)$

c) $\left(\sin x + \dfrac{y}{x}\right)dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ $\quad\left(-\cos x + \dfrac{y^4}{4} + y\ln x = C\right)$

d) $\left(\sin x - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \left(\cos y + 2\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$ $\quad\left(-\cos x + \sin y + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

11°)

a) $\left(\sin x + \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0$ $\quad\left(\cos x + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

b) $\left(\cos x - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{2y}{x}dy = 0$ $\quad\left(\sin x + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

c) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(-y + x^2y\right)dy = 0$ $\quad\left(x^2 + \left(x^2 - 1\right)y^2 = C\right)$

d) $\left(xy^2 - x\right)dx + \left(y + x^2y\right)dy = 0$ $\quad\left(-x^2 + \left(x^2 + 1\right)y^2 = C\right)$

12°) $(1 - \dfrac{y^2}{x^2})dx + \dfrac{2y}{x}dy = 0$ $\quad\left(x + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

13°) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y - 3x^2}{y^4}dy = 0$ $\quad\left(\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{2y^2} = C\right)$

b) Thừa số tích phân

Phương trình vi phân $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ với $Q'_x \neq P'_y$ có thể đưa về phương trình vi phân toàn phần khi tìm được $\mu(x) \neq 0$ (hoặc $\mu(y) \neq 0$) sao cho phương trình $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ có $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P)$. Khi đó hàm $\mu(x)$ $(\mu(y))$ được gọi là thừa số tích phân, và được tính như sau.

• Nếu $\dfrac{Q'_x - P'_y}{Q} = \varphi(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{-\int \varphi(x)dx}$

• Nếu $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = \psi(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}$

Ví dụ 2. 1°/ $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$ (1)

+) $\dfrac{Q'_x - P'_y}{Q} = \dfrac{-4y}{-2xy} = \dfrac{2}{x}$ +) $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \dfrac{1}{x^2}$

+) $x = 0$ là nghiệm

+) $x \neq 0$: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x+y^2}{x^2}dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phần

+) $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt + \int_0^y \frac{-2t}{x}dt = C$ +) $\ln|x| - \dfrac{y^2}{x} = C$ là tích phân tổng quát

2°/ $(x^2 - y)dx + x\,dy = 0$ $\left(\mu = \dfrac{1}{x^2},\ x + \dfrac{y}{x} = C,\ x = 0\right)$

3°/ $2x\tan y\,dx + (x^2 - 2\sin y)dy = 0$ $\left(\mu = \cos y,\ x^2\sin y + \dfrac{1}{2}\cos 2y = C\right)$

4°/ $(e^{2x} - y^2)dx + y\,dy = 0$ $\left(\mu = e^{-2x},\ y^2 = (C-2x)e^{2x}\right)$

5°/ $(1+3x^2\sin y)dx - x\cot y\,dy = 0$ $\left(\mu = \dfrac{1}{\sin y},\ x^3 + \dfrac{x}{\sin y} = C\right)$

Ví dụ 3.

a) 1°/ $e^x(2+2x-y^2)dx - 2e^x ydy = 0$ $\left(2xe^x - e^x y^2 = C\right)$

2°/ $(2xy + x^2y^3)dx + (x^2 + x^3y^2)dy = 0$ $\left(x^2y + \dfrac{1}{3}x^3y^3 = C\right)$

3°/ Tìm $h(x)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(x)\left[(y+\cos y)dx + (1-\sin y)dy\right] = 0$

$\left(h = K_1e^x,\ e^x(y+\cos y) = C\right)$

4°/ Tìm $h(y)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(y)\left[(1-\sin x)dx + (\cos x + x)dy\right] = 0$

$\left(h = K_1e^y,\ e^y(x+\cos x) = C\right)$

b)

1°/ Tìm $h(x)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(x)\left[(y+\ln x)dx - xdy\right] = 0$

$\left(h = \dfrac{C}{x^2},\ -\dfrac{1}{x}\ln x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x} = C\right)$

2°/ Tìm $h(y)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(y)\left[y(1+xy)\,dx - xdy\right] = 0$

$\left(h = \dfrac{C}{y^2},\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = C\right)$

c)

1°/ Tìm $h(y)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(y)\left[(1-\sin x)\,dx + (\cos x + x)dy\right] = 0$

$(h = Ce^{y},\ e^{y}(x + \cos x) = C)$

2°/ Tìm $h(x)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(x)\left[(y + \cos y)dx + (1 - \sin y)dy\right] = 0$

$(h = Ce^{x},\ e^{x}(y + \cos y) = C$

d) $(1+3x^2\sin y)dx - x\cot y dy = 0$

e) Tìm h(y) để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó

. $2xh(y)\tan y dx + h(y)(x^2 - 2\sin y)dy = 0,\ \ (h(y) = \cos y, x^2 \sin y + \frac{\cos 2y}{2} = C)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 8

§3. Phương trình vi phân cấp hai

• **Đặt vấn đề.** Bài trước đã học xong phương trình vi phân cấp một và có ứng dụng thú vị sau:

• Phương trình logistic được đưa ra (vào khoảng năm 1840) bởi nhà toán học và nhân chủng học người Bỉ P.F. Verhulst và nó trở thành một mô hình cho sự tăng trưởng dân số.

• Trong ví dụ sau đây chúng ta so sánh mô hình tăng trưởng tự nhiên và mô hình logistic cho dữ liệu điều tra dân số ở Mỹ vào thế kỷ 19, sau đó đưa ra dự án so sánh cho thế kỷ 20.

Ví dụ. Dân số nước Mỹ năm 1850 là 23.192 triệu. Nếu lấy $P_0 = 5,308$.

• Thế các dữ liệu t = 50, P = 23,192 (với thời điểm 1850) và t = 100, P = 76212 (với thời điểm 1900) vào phương trình logistic $\frac{dP}{dt} = kP(M-P)$ (1)

ta có hệ hai phương trình
$$\frac{(5,308)M}{5,308+(M-5,308)e^{-50kM}} = 23,192 \ ;$$
$$\frac{(5.308)M}{5,308+(M-5,308)e^{-100kM}} = 76,212.$$

• Giải hệ này ta có $M = 188,121,\ k = 0,000167716$.

• Thế vào (1) ta có $P(t) = \dfrac{998,546}{5,308+(182,813)e^{-(0,031551)t}}$ (2)

Năm	Dân số thực của nước Mỹ	Mô hình dân số dạng mũ	Sai số dạng mũ	Mô hình logistic	Sai số logistic
1800	5.308	5.308	0.000	5.308	0.000
1810	7.240	6.929	0.311	7.202	0.038
1820	9.638	9.044	0.594	9.735	-0.097
1830	12.861	11.805	1.056	13.095	-0.234
1840	17.064	15.409	1.655	17.501	-0.437
1850	23.192	20.113	3.079	23.192	0.000
1860	31.443	26.253	5.190	30.405	1.038
1870	38.558	34.268	4.290	39.326	-0.768
1880	50.189	44.730	5.459	50.034	0.155
1890	62.980	58.387	4.593	62.435	0.545
1900	76.212	76.212	0.000	76.213	-0.001
1910	92.228	99.479	-7.251	90.834	1.394
1920	106.022	129.849	-23.827	105.612	0.410
1930	123.203	169.492	-46.289	119.834	3.369
1940	132.165	221.237	-89.072	132.886	-0.721
1950	151.326	288.780	-137.454	144.354	6.972
1960	179.323	376.943	-197.620	154.052	25.271
1970	203.302	492.023	-288.721	161.990	41.312
1980	226.542	642.236	-415.694	168.316	58.226
1990	248.710	838.308	-589.598	173.252	76.458
2000	281.422	1094.240	-812.818	177.038	104.384

Hình 1.7.4. So sánh kết quả của mô hình dạng mũ và mô hình logistic
với dân số thực của nước Mỹ (tính theo triệu)

• Những dự đoán theo mô hình dạng mũ $P(t) = (5{,}308)e^{(0{,}026643)t}$ và theo mô hình dạng logistic (2) đối chiếu với kết quả thống kê dân số thực của Mỹ, ta thấy

– Cả 2 mô hình đều cho kết quả tốt trong giai đoạn thế kỉ 19

– Mô hình dạng mũ cho số liệu phân kỳ ngay từ thập niên đầu tiên của thế kỉ 20, trong khi mô hình logistic có kết quả tương đối tốt cho tới tận những năm 1940.

– Đến cuối thế kỉ 20 mô hình dạng mũ cho kết quả vượt quá xa dân số thực của Mỹ, còn mô hình logistic lại cho số liệu dự đoán thấp hơn số liệu thực.

• **Sai số trung bình** để đo mức độ cho phép của mô hình hợp lí với dữ liệu thực tế: là căn bậc hai của trung bình các bình phương của các sai số thành phần.

• Từ bảng 1.7.4 trên được: mô hình dạng mũ có sai số trung bình là 3.162, còn mô hình logistic có sai số trung bình là 0.452. Do đó mô hình logistic dự đoán tốc độ tăng trưởng dân số nước Mỹ suốt thế kỷ 20 tốt hơn mô hình dạng mũ.

1. Đại cương

• **Định nghĩa.** $F(x, y, y', y'') = 0$ (1) hoặc $y'' = f(x, y, y')$ (2)

Ví dụ. a) $yy'' + y'^2 + xy = 0$

b) $y' = \sqrt[3]{xy + y'' + 1}$

• **Định lí về sự tồn tại và duy nhất nghiệm**

Nếu $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} f(x, y, y')$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, y_0') \in D$ thì (2) có nghiệm duy nhất trong $U_\varepsilon(x_0)$ thoả mãn $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$

• **Về mặt hình học:** Định lí trên khẳng định nếu $(x_0, y_0, y_0') \in D \Rightarrow$ trong $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ có đường tích phân duy nhất của phương trình (2) đi qua (x_0, y_0) và hệ số góc của tiếp tuyến của nó tại điểm này bằng y_0'.

Định nghĩa. Hàm $y = \varphi((x, C_1, C_2)$ là nghiệm tổng quát của (2) $\Leftrightarrow$

+) $\varphi(x, C_1, C_2)$ thoả mãn (2) với $\forall C_1, C_2$

+) $\forall (x_0, y_0, y_0') \in D$ nêu trong định lí tìm được c_1^0, c_2^0: $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ thoả mãn

$$\varphi(x, c_1^0, c_2^0)\Big|_{x=x_0} = y_0,\ \varphi'(x, c_1^0, c_2^0)\Big|_{x=x_0} = y_0'$$

Hàm $\varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ được gọi là nghiệm riêng

Định nghĩa. Hệ thức $\phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của (2) dưới dạng ẩn được gọi là tích phân tổng quát. Hệ thức $\phi(x, y, c_1^0, c_2^0)$ được gọi là tích phân riêng

• **Một số ứng dụng**

• Là mô hình toán học của những hệ cơ học và mạch điện : $LI'' + RI' + \dfrac{1}{C} I = E'(t)$, ở đó E(t) là điện áp (nguồn điện).

• Phương trình mô tả dao động tự do của chất điểm $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+kx=0,$ở đó chất điểm có khối lượng m, các hằng số dương $k,\ c$.

• Phương trình mô tả dao động cưỡng bức của chất điểm bởi tác động của ngoại lực $F(t)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t).$$

• Bài toán vận tốc vũ trụ cấp hai : $m\dfrac{d^2r}{dt^2}=-k\dfrac{Mm}{r^2},r(0)=R,r'(0)=v_0$

2. Phương trình khuyết

a) $F(x,y'')=0$

Cách giải. Đặt $y'=p\Rightarrow$ phương trình vi phân cấp một $F(x,p')=0\ \Rightarrow\ p=\varphi(x,c)$. Giải phương trình vi phân cấp một $y'=\varphi(x,c)$

Ví dụ 1. 1°/ $x=(y'')^2+y''+1$

• $p=y'\ \Rightarrow\ x=(p')^2+p'+1$

• Đặt $p'=t\ \Rightarrow\ \ x=t^2+t+1$ và $dp=tdx=t(2t+1)dt\ \Rightarrow\ p=\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{t^2}{2}+c_1$

• Từ $y'=p\ \Rightarrow\ y=\displaystyle\int pdx=\int\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{4}+c_1\right)(2t+1)dt$

$$=\frac{4}{15}t^5+\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{6}t^3+c_1t^2+c_1t+c_2$$

• Tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$x=t^2+t+1,\ y=\frac{4}{15}t^5+\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{6}t^3+c_1t^2+c_1t+c_2$$

2°/ $y''=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ ($y=x(\ln|x|+C_1)+C_2$)

3°/ $y''=x+\sin x$ ($y=\dfrac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$)

4°/ $y''=\ln x$ $\qquad$ ($y=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)+C_1x+C_2$)

5°/ $y''=\arctan x$ $\qquad$ ($y=\dfrac{x^2-1}{2}\arctan x-\dfrac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$)

6°/ $xy''=x^2-x,$ y(0)=0 . $\qquad$ ($y=a_1x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6},a_1\in\mathbb{R}$)

b) $F(x, y', y'') = 0$

Cách giải. Đặt $p = y'$ $\Rightarrow$ phương trình vi phân cấp một $F(x, p, p') = 0$ $\Rightarrow$ $p = \varphi(x, c)$, giải phương trình vi phân cấp một $y' = \varphi(x, c)$

Ví dụ 2. 1°/ $(1-x^2)y'' - xy' = 2,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

• $p = y'$ $\Rightarrow$ $(1-x^2)p' - xp = 2$ $\Rightarrow$ $p' - \dfrac{x}{1-x^2}p = \dfrac{2}{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có nghiệm tổng quát

$$p = c_1 e^{-\int \frac{-x}{1-x^2}dx} + e^{-\int \frac{-x}{1-x^2}dx}\int \frac{2}{1-x^2} e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} dx$$

$$= c_1 e^{-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|} + e^{-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|}\int \frac{2}{1-x^2} e^{\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|} dx = \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$$

$$y' = \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x \Rightarrow\ y = (\arcsin x)^2 + c_1 \arcsin x + c_2$$

• $y(0) = 0 \ \Rightarrow\ c_2 = 0\ y'(0) = 0 \ \Rightarrow\ c_1 = 0$

• Nghiệm cần tìm : $y = (\arcsin x)^2$

2°/ $y'' = y' + x$ $\quad\left(y = C_1 e^x + C_2 - x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

3°/ $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$ $\quad\left(y = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1 x^2 + C_2\right)$

4°/ $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$ $\quad\left(y = (C_1 x - C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2\right)$

5°/ $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$ $\quad\left(y = (1+C_1^2)\ln\left|x + C_1\right| - C_1 x + C_2\right)$

6°/ $x^2 y'' = y'^2$ $\quad\left(C_1 x - C_1^2 y = \ln\left|C_1 x + 1\right| + C_2;\ 2y = x^2 + C;\ y = C\right)$

7°/ $2xy'y'' = y'^2 - 1$ $\quad\left(9C_1^2(y - C_1^2) = 4(C_1 x + 1)^3;\ y = C \pm x\right)$

8°/* $y''^2 + y' = xy''$ $\quad\left(y = C_1\dfrac{x^2}{2} - C_1^2 x + C_2;\ y = \dfrac{x^3}{12} + C\right)$

9°/* $y''^3 + xy'' = 2y'$ $\quad\left(x = C_2 p + 3p^2;\ y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5}{4}C_1 p^4 + C_1^2\dfrac{p^3}{6} + C_2;\ y = C\right)$

10°/* $2y'(y''+2) = xy''^2$ $\quad\left(3C_1 y = (x - C_1)^3 + C_2;\ y = C;\ y = C - 2x^2\right)$

Ví dụ 3

a). 1°/ $y'' + \frac{y'}{x} = x^2(y')^4$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$ $\left(y = \frac{1}{2}\left[5 - (1 - 3\ln|x|)^{\frac{2}{3}}\right]\right)$

2°/ $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ $\left(y = \ln(1+x^2) + 2\arctan x + 1\right)$

b). $y'' - \frac{1}{x-1}y' = x(x-1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$ $\left(y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}\right)$

c). $2xy'' - 6y' + x^2 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ $\left(y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \frac{7}{24}\right)$

d). $1 + (y')^2 = 2xy'y''$ $\left(y = \frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3} + C_2\right)$

e/ $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y'(0) = 1$ $\left(y = -x + \ln(1+x)^2 + C_2,\ x \neq 0\right)$

c) $F(y, y', y'') = 0$

Cách giải. Đặt $p = y' \Rightarrow \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy} \Rightarrow F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$ là phương trình vi phân cấp một, giải ra có $p = \varphi(y, c)$, giải phương trình vi phân cấp một $y' = \varphi(y, c)$ ta được nghiệm cần tìm.

Ví dụ 4. 1°/ $2yy'' = y'^2 + 1$

- $p = y' \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$, thay vào có $2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$
- $\frac{2p}{1+p^2}dp = \frac{dy}{y}$, $y \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln(1+p^2) + \ln|c_1|$ hay $y = c_1(1+p^2)$

- Từ $p = y' \Rightarrow dx = \frac{dy}{p} = 2c_1dp$, $p \neq 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2c_1} + c_2$
- Nghiệm tổng quát $y = c_1\left(1 + \left(\frac{x}{2c_1} + c_2\right)^2\right) = c_1 + \frac{(x+2c_1c_2)^2}{4c_1}$
- Đặt $2c_1c_2 = -a$, $2c_1 = b \Rightarrow 2b\left(y - \frac{b}{2}\right) = (x-a)^2$ là parabol phụ thuộc 2 tham số và có đường chuẩn là trục Ox.

2°/ $y'^2 + 2yy'' = 0$ $\left(y^3 = C_1(x+C_2)^2,\ y = C\right)$

3°/ $yy'' + 1 = y'^2$ $\left(C_1y = \pm\sin(C_1x + C_2)\right)$

4°/ $yy'' = y'^2 - y'^3$ $\left(y + C_1\ln|y| = x + C_2,\ y = C\right)$

5°/ $2yy'' = y^2 + y'^2$ $\left(y = C_1(1 \pm \mathrm{ch}(x + C_2))\right)$

6°/ $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ $\left(e^y + C_1 = (x + C_2)^3\right)$

7°/ $y'^2 = (3y - 2y')y''$ $\quad (x = 3C_1p^2 + \ln C_2p;\ y = 2C_1p^3 + p;\ y = C)$

8°/ $y'(1 + y'^2) = ay''$ $\quad \left(x - C_1 = a\ln\left|\sin\dfrac{y - C_2}{a}\right|\right)$

Ví dụ 5. (Bài toán vận tốc vũ trụ cấp 2). Xác định vận tốc nhỏ nhất để phóng một vật thẳng đứng vào vũ trụ sao cho vật không trở lại trái đất, giả thiết sức cản không khí không đáng kể.

• Khối lượng trái đất là M, vật phóng là m, khoảng cách giữa tâm trái đất và tâm vật phóng là r, theo định luật hấp dẫn của Newton, lực hút tác dụng lên vật là $f = k\dfrac{Mm}{r^2}$, k là hằng số hấp dẫn.

• Phương trình chuyển động của vật là $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -k\dfrac{Mm}{r^2},\ r(0) = R,\ r'(0) = v_0$, ở đó R là bán kính trái đất, v_0 là vận tốc lúc phóng.

• Đặt $v = r' \Rightarrow r'' = v\dfrac{dv}{dr} \Rightarrow v\dfrac{dv}{dr} = -k\dfrac{M}{r^2} \Rightarrow vdv = -\dfrac{kM}{r^2}dr \Rightarrow \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{1}{r}kM + c_1$

• Từ $v(0) = 0$ có $v(R) = v_0 \Rightarrow c_1 = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R} \Rightarrow \dfrac{v^2}{2} = k\dfrac{M}{r} + \left(\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R}\right) \ge 0$

Cho $r \to \infty \Rightarrow v_0 \ge \sqrt{\dfrac{2kM}{R}} \approx 11{,}2$ km/s (do $k = 6{,}68.10^{-11}\dfrac{m^3}{kg.s^2}$, $R = 63.10^5$ m.

• Vận tốc vũ trụ cấp hai là $11{,}2$ km/s

Ví dụ 6

a). $yy'' - y'^2 = y^4,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ $\quad \left(y = \dfrac{1}{1 - x}\right)$

b) . 1. $2yy'' - y'^2 = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$ $\quad \left(y = \dfrac{x^2 + 1}{2}\right)$

2. $yy'' + y'^2 = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ $\quad (y = x + 1)$

c). $2yy'' - y'^2 - 1 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$ $\quad \left(y = \dfrac{x^2 + 1}{2}\right)$

d). $1 + (y')^2 = 2yy''$ $\quad (C_1^2(x + C_2)^2 = 4(C_1y - 1))$

e) $y'^2 - 2yy'' = 0$ $\quad \left(y = \dfrac{c_1}{4}(x + c_2)^2\right.$, y=C)

f) $y'' + y'^2 = 3e^{-y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{6}$ $\quad \left(2e^{\frac{y}{2}} - \sqrt{6}\left(x + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = 0\right.$, y=C)

d) Một số trường hợp $F(x, y, y', y'') = 0$

Ví dụ 1.

a) $yy'' + y'^2 = 2x$

b) $y'' = 2yy'$ $\left(y = C_1 \tan(C_1 x + C_2); \ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1 y + C_2; y(x + C_2) = -1; y = C \right)$

c) $yy'' = y'(1 + y')$ $(C_1 y - 1 = C_2 e^{C_1 x}; y = C - x, y = 0)$

d) $yy'' + y'^2 = 1$ $(y^2 = x^2 + C_1 x + C_2)$

e) 1°/ $xy'' - y'\left(e^y - 1\right) = 0$

$$\left(\ln|x| + C_2 = \frac{1}{C_1}\left(y - \ln\left|e^y + C_1\right|\right),\ e^{-y} + \ln|x| + C_2 = 0,\ y = c\right)$$

2°/ $xy'' + y'\left(e^{-y} + 1\right) = 0$

$$\left(\ln|x| + C_2 = \frac{1}{C_1}\left(y + \ln\left|e^{-y} + C_1\right|\right),\ e^y = \ln|x| + C_2;\ y = c\right)$$

3°/ $yy'' + (y')^2 + x\sin x = 0$ $\left(-\dfrac{y^2}{2} + x\sin x + 2\cos x + C_1 x + C_2 = 0\right)$

4°/ $yy'' + (y')^2 + \ln x = 0$ $\left(-\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2 = 0\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 9

§3. Phương trình vi phân cấp hai (TT)

• **Đặt vấn đề.** Mô hình toán học của hệ cơ học và mạch điện dẫn đến phương trình vi phân cấp hai $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$; $LI'' + RI' + \dfrac{1}{C}I = E'(t)$

k là hệ số co dãn của lò xo; c là hệ số giảm xóc; m là khối lượng vật thể

3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

a) Định nghĩa. $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)

b) Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)

Định lí 1. y_1, y_2 là các nghiệm của (2) $\Rightarrow$ $c_1y_1 + c_2y_2$ cũng là nghiệm của (2), $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

• **Định nghĩa.** Các hàm $y_1(x), y_2(x)$ là độc lập tuyến tính trên $[a\,;b] \Leftrightarrow \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq$ hằng số trên $[a\,;b]$. Trong trường hợp ngược lại ta nói các hàm này phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 1. a) e^x, e^{2x} b) $x^2 + 2x + 1, \ x + 1$ c) $\tan x, 2\tan x$

Định nghĩa. Cho các hàm $y_1(x), y_2(x)$, khi đó định thức Wronsky của các hàm này là

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Định lí 2. Các hàm y_1, y_2 phụ thuộc tuyến tính trên $[a\,;b] \Rightarrow W(y_1, y_2) = 0$ trên đoạn đó

Chú ý. Nếu $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại x_0 nào đó thuộc $[a;b] \Rightarrow$ độc lập tuyến tính

Định lí 3. Cho y_1, y_2 là các nghiệm của (2), $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x_0 \in [a;b]$, các hàm $p(x), q(x)$ liên tục trên $[a;b] \Rightarrow W(y_1, y_2) \neq 0, \forall\, x \in [a\,;b]$

Định lí 4. Các nghiệm y_1, y_2 của (2) độc lập tuyến tính trên $[a;b]$

$\Rightarrow W(y_1, y_2) \neq 0, \forall\, x \in [a\,;b]$

Định lí 5. Cho y_1, y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của (2) là

$$y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Ví dụ 2. $y'' + y = 0$

Định lí 6. Biết nghiệm riêng $y_1 \neq 0$ của (2) $\Rightarrow$ tìm được nghiệm riêng y_2 của (2) độc lập tuyến tính với y_1 và có dạng $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

Hệ quả. Với giả thiết của định lí 6, nghiệm y_2 tìm được theo công thức sau

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx \text{ (Liouville).}$$

Vấn đề đặt ra là : Tìm nghiệm riêng khác không như thế nào ?

Ví dụ 3. a) $y'' - y' = 0$

+) Dễ thấy $y_1 = 1$ là nghiệm +) $y_2 = \int e^{-\int (-1)dx} dx = e^x$ +) $y = C_1 + C_2 e^x$

b) $x^2 y'' + xy' - y = 0$

+) $y_1 = x$ là nghiệm +) $y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = x\int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-2x}$

+) $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$

c) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ $(y = C_1 x + C_2 e^{-2x})$

d) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ $(y = C_1 e^x + C_2 x^2 e^x)$

e) $y'' - 2(1+\tan^2 x)y = 0$ $(y = C_1 \tan x + C_2(1 + x\tan x))$

c) Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)

Định lí 1. Nghiệm tổng quát của (1) có dạng $y = \bar{y} + Y$, ở đó $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của (2), Y là nghiệm riêng của (1).

Định lí 2. (Nguyên lí chồng nghiệm)

Nếu y_1 là nghiệm của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$.

y_2 là nghiệm của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$.

Thì có $y = y_1 + y_2$ là nghiệm của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

- Biết nghiệm tổng quát của (2) là $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$
- Giải hệ sau $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ có $C_1 = \phi_1(x) + K_1$, $C_2 = \phi_2(x) + K_2$
- Nghiệm tổng quát của (1) là $y = y_1(\phi_1(x) + K_1) + y_2(\phi_2(x) + K_2)$

Nhận xét. Phương pháp này cho ta cách tìm NTQ của (1), khi biết NTQ của (2).

Ví dụ 4. a 1) $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$

+) $y_1 = 1$ là nghiệm +) $y_2 = \int e^{\int dx} dx = e^x$ +) $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$

+) Giải hệ $\begin{cases} C_1' + C_2' e^x = 0 \\ C_1'.0 + C_2' e^x = \dfrac{2-x}{x^3} e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{2-x}{x^3} e^x \\ C_2' = \dfrac{2-x}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = \displaystyle\int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx \\ C_2 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + K_2 \end{cases}$$

Ta có $C_1 = \displaystyle\int \frac{e^x}{x^2} dx + \int e^x d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x^2} + K_1$

+) Nghiệm tổng quát $y = 1.\left(\dfrac{e^x}{x^2} + K_1\right) + e^x\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + K_2\right) = K_1 + K_2 e^x + \dfrac{e^x}{x}$

2) $x^2 y'' + xy' - y = x^2$

+) Theo ví dụ 3 có $\bar{y} = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$

+) Giải hệ $\begin{cases} C_1' x + C_2' \dfrac{1}{x} = 0 \\ C_1'.1 + C_2'\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ C_1' - C_2' \dfrac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2} \\ C_2' = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{x}{2} + K_1 \\ C_2 = -\dfrac{x^3}{6} + K_2 \end{cases}$$

+) Nghiệm tổng quát $y = x\left(\dfrac{x}{2} + K_1\right) + \dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{x^3}{6} + K_2\right) = K_1 x + \dfrac{K_2}{x} + \dfrac{x^2}{3}$

b) $x^2 y'' - xy' = 3x^3$ $\quad (y_1 = x^3)$

c) $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$ $\quad \left(y = -\dfrac{1}{x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}\right)$

d. 1) $x^2(x+1)y'' = 2y$, biết nghiệm riêng $y_1 = 1 + \dfrac{1}{x}$

$$\left(y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2\left[x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x}\ln(x+1)^2\right]\right)$$

2) $y'' \tan x + y'(\tan^2 x - 2) + 2y \cot x = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = \sin x$

$$(y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x)$$

3) $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = e^x$ bằng cách đổi hàm số $y = \dfrac{z}{x^2}$

$\left(y = \frac{C_1}{x^2}\cos x + \frac{C_2}{x^2}\sin x + \frac{e^x}{2x^2}\right)$

e. 1) $xy'' + 2y' + xy = x$ bằng cách đổi hàm số $y = \frac{u}{x}$

$\left(y = \frac{1}{x}(C_1\cos x + C_2\sin x + x)\right)$

2) $y'' + y'\tan x - y\cos^2 x = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = e^{\sin x}$ $\left(y = C_1e^{\sin x} + C_2e^{-\sin x}\right)$

3) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ $\left(y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x)\right)$

f. 1) $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ biết nghiệm riêng $y_1 = x$ $\left(y = C_1x + C_2x\ln|x|\right)$

2) $y'' - \frac{2xy'}{x^2 + 1} + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0$ biết nghiệm riêng $y_1 = x$ $\left(y = C_1x + C_2(x^2 - 1)\right)$

g. 1) $x^2y'' - (6x^2 + 2x)y' + (9x^2 + 6x + 2)y = 4x^3e^{3x}$ bằng cách đặt $u = \frac{y}{x}$

$\left(y = e^{3x}(C_1x + C_2x^2 + 2x^3)\right)$

2) $xy'' + 2(1 - x)y' + (x - 2)y = e^{-x}$ bằng cách đặt $u = yx$

$\left(y = C_1\frac{e^x}{x} + C_2e^x + \frac{1}{4x}e^{-x}\right)$

h. 1) $y'' + y = \cos x + \tan x$

$\left(y = K_1\cos x + K_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x - \frac{\cos x}{2}\ln\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$

2) $y'' + y = \sin x + \cot x$ $\left(y = K_1\cos x + K_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x - \frac{\sin x}{2}\ln\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right)$

i. $\frac{y''}{y'^3} + \frac{2}{y'} - x - y = e^{-y}$ $\left(x = e^y\left(C_1 + C_2y\right) - y - 2 - \frac{1}{4}e^{-y}\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 10

§3. Phương trình vi phân cấp hai (TT)

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi

$$y'' + py' + qy = f(x),\ p, q \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

a) Phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$ (2)

Cách giải.

• Giải phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ (3)

• (3) có hai nghiệm thực $k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$

• (3) có nghiệm kép $k_1 \Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát $y = e^{k_1x}(C_1x + C_2)$

• (3) có 2 nghiệm phức $k_{1,2} = \gamma \pm i\beta \Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát

$$y = e^{\gamma x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

Ví dụ 1.

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ **b)** $y'' + 4y' + 4y = 0$ **c)** $y'' + y' + y = 0$

d) $y'' - 4y' + 5y = 0$ **e)** $4y'' + 4y' + y = 0$ **f)** $y'' + 4y' + 3y = 0$

Giải a) • $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$

• Nghiệm tổng quát $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

b) +) $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow (k+2)^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = -2$ +) $y = e^{-2x}(C_1x + C_2)$

c) +) $k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ +) $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\sqrt{\dfrac{3}{2}}x + C_2\sin\sqrt{\dfrac{3}{2}}x\right)$

b) Phương trình không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$ (1)

1°/ Khi $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x), \alpha \in \mathbb{R}$

• Nếu α không là nghiệm của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng $Y = e^{\alpha x}Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thức bậc n của x.

• Nếu α là nghiệm đơn của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng $Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)$.

• Nếu α là nghiệm kép của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng $Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$.

Ví dụ 2. **a)** $y'' + 3y' - 4y = x$

Giải • $k^2 + 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = -4$ • $\overline{y} = c_1e^x + c_2e^{-4x}$

• $\alpha = 0 \Rightarrow Y = Ax + B$, thay vào ta có $-4Ax + 3A - 4B = x, \forall x \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{4}; B = -\dfrac{3}{16}$

$\Rightarrow Y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{16}$

• Nghiệm tổng quát $y = c_1e^x + c_2e^{-4x} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{16}$

b) $y'' - 2y' + y = 2xe^x$ $\left(y = C_1e^x + C_2xe^x + \dfrac{x^3}{3}e^x\right)$

c) $y'' - y = e^x$ **d)** $y'' + y'^2 = 3e^{-y}, y(0) = 0, y'(0) = \sqrt{6}$

Giải • $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$ • $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}$

• $\alpha = 1$ là nghiệm đơn $\Rightarrow Y = xe^xA$, do đó $A(xe^x + 2e^x) - Axe^x = e^x$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow Y = \dfrac{1}{2}xe^x$

• Nghiệm tổng quát $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{x}{2}e^x$

d) $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x} + e^{-4x}$ $\left(y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \dfrac{x}{5}e^{-4x} - \left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{36}\right)e^{-x}\right)$

e) $y'' - y = 2e^x - x^2$ $(y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2)$

f) $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$ $\left(y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{9}(2 - 3x) + \dfrac{1}{16}(2x^2 - x)e^{3x}\right)$

2°/ Khi $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$

• Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của (3) thì nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y = Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x, \quad l = \max(m, n)$$

• Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y = x\left[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right]$$

Ví dụ 3. **a)** $y'' + y = x\sin x$

Giải • $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$ • $\bar{y} = c_1\cos x + c_2\sin x$

• $\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $\Rightarrow$ nghiệm riêng có dạng

$$Y = x\left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right]$$

• Tính Y', Y'' thay vào có

$[4Cx + 2(A + D)]\cos x + [-4Ax + 2(C - B)]\sin x = x\sin x, \ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4C = 0 \\ A + D = 0 \\ -4A = 1 \\ C - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow Y = \dfrac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$$

• Nghiệm tổng quát $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{x}{4}(\sin x - \cos x)$

b) $y'' + y = \cos x$ ($y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$)

c) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$

($y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0,1x - 0,12)\cos x - (0,3x - 0,34)\sin x$)

d) $y'' + 9y = \cos 2x$

Giải • $k^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3i$ • $\bar{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

• $Y = A\cos 2x + B\sin 2x$ • $Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

• $5A\cos 2x + 5B\sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow A = \frac{1}{5}$ và $B = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}\cos 2x$

• Nghiệm tổng quát $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{5}\cos 2x$

e) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$

($y = (C_1 + xC_2)e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{x^2}{4}e^{-3x} + x\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right)e^{2x}$)

f) $y'' - 4y' - 8y = e^{2x} + \sin 2x$

($y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 0,25e^{2x} + 0,1\cos 2x + 0,5\sin 2x$)

g) $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$

($y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x}{4}(3\sin 2x + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}$)

h) $y'' + y = 2x\cos x\cos 2x$

($y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x - \frac{x}{8}\cos 3x + \frac{3}{32}\sin 3x$)

i) $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = e^{-x}$, bằng cách đặt $z = xy$

($y = C_1e^x + \frac{C_2}{x}e^x + \frac{1}{4x}e^{-x}$)

k) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ ($y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$)

l) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ ($y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x\ln|x|$)

m) $y'' + y = \tan x$ ($y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$)

n) $y'' - y = \tanh x$ ($y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x})\arctan e^x$)

o) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2$, $x > 0$, bằng cách đặt $x = e^t$

($y = x^2(C_1 + C_2\ln x) + \frac{3}{2}x^2\ln^2 x$)

Chú ý. 1/ Khi $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x\right]$, đặt $y = e^{\alpha x}z$ để đưa về 2°/ hoặc biện luận theo $\alpha \pm i\beta$ như sau :

• Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của (3) thì nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y = e^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x],\ l = \max(m, n)$$

• Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y = xe^{\alpha x}\left[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right]$$

2/ Vế phải là tổng các dạng 1°/ và 2°/
3/ $f(x)$ bất kì dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange
4/ Vế phải là tổng của 1°/ (hoặc 2°/) và bất kỳ.

Ví dụ 4.

a) **1)** $y'' + y = xe^x + \cos x$ **(**$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x + \frac{e^x}{2}(x-1)$**)**

2) $y'' + y = \sin x + e^{-x}x$ **(**$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}(x+1)$**)**

3) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ **(**$y = (-x + K_1)\cos x + (\ln|\sin x| + K_2)\sin x$**)**

4) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ **(**$y = (K_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (K_2 + x)\sin x$**)**

b) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ **(**$y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$**)**

c) **1)** $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^{3x}$ **(**$y = (C_1 + C_2x - 4x^2)e^{3x} + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}$**)**

2) $y'' + 2y' + y = e^{-x} + \frac{e^{-x}}{x}$ **(**$y = e^{-x}\left(C_1 + C_2x - x + x\ln|x| + \frac{x^2}{2}\right)$**)**

3) $y'' + y = \cot x$ **(**$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$**)**

4) $y'' + y = \tan x$ **(**$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\left|\cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$**)**

d) **1)** $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2e^x\cos\frac{x}{2}$

($y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x} + \frac{8}{3}e^x(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2})$**)**

2) $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x) + 5\sin 2x$

($y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (2x+1)xe^x + \frac{1}{4}(3\cos 2x - \sin 2x)$**)**

3) $y'' + 2y' + y = 4xe^x + \frac{e^{-x}}{x}$

$$\left(y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + (x-1)e^{x} - xe^{-x} + xe^{-x}\ln|x|\right)$$

4) $y'' + y = 3xe^{x} - \cot^2 x$

$$\left(y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{3}{4}e^{x}(x-1) + 2\cos x\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)$$

e) **1)** $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\cos x$ $\quad\left(y = e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x\right) - \frac{5}{9}e^{\frac{3}{5}x}\cos x\right)$

2) $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\sin x$ $\quad\left(y = e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x\right) - \frac{5}{9}e^{\frac{3}{5}x}\sin x\right)$

f) **1)** $y'' + y = 2\cos x\cos 2x$ $\quad\left(y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{x}{2}\sin x\right)$

2) $y'' + 9y = 2\sin 2x\cos x$ $\quad\left(y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{x}{6}\cos 3x + \frac{1}{8}\sin x\right)$

3) $y'' + y = \cos x + \tan x$ $\quad\left(y = K_1\cos x + K_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x - \frac{\cos x}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$

4) $y'' + y = \sin x + \cot x$ $\quad\left(y = K_1\cos x + K_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x - \frac{\sin x}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$

g) **1)** $y'' - 4y = xe^{-x} + \cos x$ $\quad\left(C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{3}\right)e^{-x} - \frac{1}{5}\cos x\right)$

2) $y'' + 4y = xe^{x} + \sin x$ $\quad\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \left(\frac{x}{5} - \frac{2}{25}\right)e^{x} + \frac{1}{3}\sin x\right)$

h) **1)** $y'' - 3y' + 2y = \frac{x}{e^{x}} + \cos x$ $\left(C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{36}\right)e^{-x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x.\right)$

2) $y'' + y' - 2y = \frac{x}{e^{x}} + \sin x$ $\left(C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 11

§3. Phương trình vi phân cấp hai (TT)

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi

c) Phương trình Euler $x^2y'' + axy' + by = 0,\ a, b \in \mathbb{R}$

Cách giải.

• Đặt $|x| = e^t \Rightarrow t = \ln|x|$

• $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}.\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \dfrac{dy}{dt}$

• $y'' = \dfrac{d}{dx}y' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}.\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{x}.\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right).\dfrac{dt}{dx}$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

• Thay vào có $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + a\dfrac{dy}{dt} + by = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\dfrac{dy}{dt} + by = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ (1)

b) $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$

c) $x^2y'' + xy' + y = x$

d) $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$

e) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

Giải a)

• $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$

• $y' = \dfrac{1}{x}.\dfrac{dy}{dt},\ y'' = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right) \Rightarrow xy' = \dfrac{dy}{dt},\ x^2y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$

• Thay vào ta có $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$ (2)

• Phương trình đặc trưng $r^2 + r - 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2, r = -3$

• (2) có nghiệm tổng quát $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$

• (1) có nghiệm tổng quát $y = c_1e^{2\ln x} + c_2e^{-3\ln x} = c_1x^2 + \dfrac{c_2}{x^3}$

Ví dụ 2. a) Giải phương trình vi phân $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2,\ x > 0$ bằng cách đặt $x = e^t$

$(y = C_1x^2 + C_2 + 3x^2 \ln x)$

b) 1) $x^2y'' + xy' + y = x,\ x > 0$ $\quad\left(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x + \dfrac{x}{2}\right)$

2) $4x^2y'' + 2xy' + y = 2x,\ x > 0$ $\quad\left(\sqrt[4]{x}\left(C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ln x\right) + C_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ln x\right)\right) + \dfrac{2}{3}x\right)$

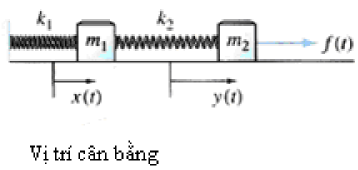
§4. Hệ phương trình vi phân

• Đặt vấn đề

– Các quy luật của tự nhiên không diễn ra đơn lẻ mà gồm nhiều quá trình đan xen nhau

– Hệ phương trình vi phân tuyến tính giải quyết nhiều bài toán nêu trên, chẳng hạn như :

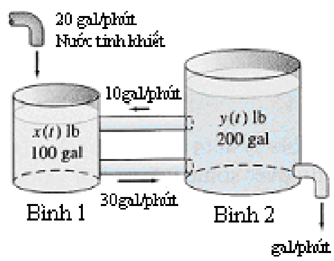
1°/ Ví dụ 1. Xét hệ hai khối lượng và hai lò xo như trong Hình 1, với một lực tác động từ bên ngoài $f(t)$ bên phải khối lượng m_2. Ta kí hiệu $x(t)$ là hàm vị trí (sang phải) của khối lượng m_1 từ trạng thái cân bằng (khi hệ bất động và cân bằng với $f(t) = 0$) và $y(t)$ là vị trí của khối lượng m_2 từ trạng thái tĩnh của nó.



Hình 1. Hệ khối lượng và lò xo trong Ví dụ 1

– Có mô hình toán là $\begin{cases} m_1x'' = -k_1x + k_2(y - x) \\ m_2y'' = -k_2(y - x) + f(t) \end{cases}$

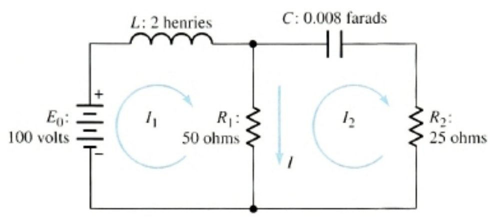
2°/ Ví dụ 2. Xét hai thùng nước muối được nối với nhau như trong Hình 2. Thùng 1 chứa $x(t)$ pounds muối trong 100 gallon của nước biển và thùng 2 chứa $y(t)$ pounds muối trong 200 gallon (gal = 4,54 lit ở Anh và = 3,78 lít ở Mỹ) nước biển. Nước biển trong mỗi thùng được giữ nguyên bởi các vòi bơm và nước biển thùng này sang thùng khác với tốc độ chỉ ra trên Hình 2. Thêm nữa nước nguyên chất chảy vào thùng 1 với tốc độ 20gal/phút và nước muối trong thùng 2 chảy ra với tốc độ 20gal/phút



Hình 2. Hai thùng nước biển trong Ví dụ 2

– Có mô hình toán là $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{10}x + \dfrac{1}{20}y \\ y' = \dfrac{3}{10}x - \dfrac{3}{20}y \end{cases}$

3°/ Ví dụ 3. Xét mạch điện như trong Hình 3, ở đó I_1(t) kí hiệu của dòng điện chạy qua cảm biến L và I_2(t) kí hiệu của dòng điện chạy qua điện trở R_2. Dòng điện chạy qua điện trở R_1 là $I = I_1 - I_2$ theo hướng đã chỉ.



Hình 3. Mạng điện trong Ví dụ 3

– Có mô hình toán là $\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 = 50 \\ 2\dfrac{dI_1}{dt} - 3\dfrac{dI_2}{dt} - 5I_2 = 0 \end{cases}$

1. Đại cương

– **Định nghĩa.** Hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một có dạng

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

– **Định lí 1.** Giả sử các hàm $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Cho $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$, khi đó $\exists U_\varepsilon(x_0)$ để (1) có nghiệm duy nhất thoả mãn các điều kiện $y_i(x_0) = y_i^0, i = \overline{1, n}$

Định nghĩa. Ta bảo $(y_1, \ldots, y_n)$, ở đó $y_i = \varphi_i(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là nghiệm tổng quát của hệ (1) $\Leftrightarrow$

• thoả mãn hệ (1) $\forall c_1, c_2, \ldots, c_n$

• $\forall (x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ thoả mãn định lí 1 $\Rightarrow$ $\exists c_i = c_i^0$ sao cho các hàm số $y_i = \varphi_i(x, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ thoả mãn điều kiện $y_i\big|_{x=x_0} = y_i^0, i = \overline{1, n}$

Nghiệm riêng của (1) nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho $c_i, i = \overline{1, n}$ các giá trị xác định

2. Cách giải

• Phương trình vi phân cấp n: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ luôn đưa về hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1: Đặt $y = y_1$, có

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Ngược lại, hệ PTVP chuẩn tắc luôn đưa về phương trình cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các phương trình của hệ, được gọi là phương pháp khử

Ví dụ 1. a) $\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{y}{2} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$

e) $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$ $\left(\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ z = C_2 \cos x - C_1 \sin x \end{cases} \right)$

f) $\begin{cases} y' = y + 5z \\ z' = -(y + 3z) \end{cases}$ $\left(\begin{cases} y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ z = \dfrac{1}{5} e^{-x}\left[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x\right] \end{cases} \right)$

g) $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ $\left(\begin{cases} y = (C_1 - C_2 - C_1 x)e^{-2x} \\ z = (C_1 x + C_2)e^{-2x} \end{cases} \right)$

Giải a)

- Từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow$ $y'' = 5y' + 4z'$
- Thay $z' = 4y + 5z$ vào phương trình 1 có $y'' = 5y' + 16y + 20z$
- Từ phương trình 1 $\Rightarrow$ $z = \dfrac{1}{4}(y' - 5y)$, thay vào ta có $y'' - 10y' + 9 = 0$
- Nghiệm tổng quát $y = c_1 e^x + c_2 e^{9x}$
- $y' = c_1 e^x + 9c_2 e^{9x}$, thay vào phương trình đầu có $z = -c_1 e^x + c_2 e^{9x}$

c) +) $zz'' = 2z'^2$ +) $z = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2}$ +) $y = \dfrac{2C_1}{(C_1 x + C_2)^2}$

3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số

a) Định nghĩa
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (1)$$

ở đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$

b) Cách giải. Để đơn giản ta xét hệ
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \qquad (2)$$

- Giải phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ (3)
- Nếu (3) có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2 $\Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát là (y_1, y_2) ở đó

$$y_1 = c_1y_{11} + c_2y_{12}; \qquad y_2 = c_1y_{21} + c_2y_{22}$$

ở đó $y_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 x}$, $y_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 x}$, $y_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 x}$, $y_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 x}$, (p_{1k}, p_{2k}) là vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_k, k = 1, 2$

Ví dụ 1. Giải các hệ sau **a)** $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 4y + 3z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$

Giải a) Cách 1. Phương pháp khử:

• $y'' = y' + 2z'$ với $z' = 4y + 3z$ và

$$z = \frac{1}{2}(y' - y) \Leftrightarrow \begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 0 \\ z = \frac{1}{2}(y' - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2e^{5x} \\ z = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{5x} \end{cases}$$

Cách 2. *Phương pháp toán tử*

Hệ $\begin{cases} L_1x + L_2y = f_1(t) \\ L_3x + L_4y = f_2(t) \end{cases}$, *ở đó* L_i *là các toán tử tuyến tính*

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_2 \\ f_2(t) & L_4 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & f_1(t) \\ L_3 & f_2(t) \end{vmatrix}$$

• $\begin{cases} (D-1)y - 2z = 0 \\ 4y + (3-D)z = 0 \end{cases}$, $D \equiv \dfrac{d}{dx}$

• Ta có $\begin{vmatrix} D-1 & -2 \\ 4 & 3-D \end{vmatrix} = (D-1)(3-D) + 8 = -D^2 + 4D + 5$

• Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -y'' + 4y' + 5y = 0 \\ -z'' + 4z' + 5z = 0 \end{cases}$

• Phương trình đặc trưng $-k^2 + 4k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1, k_2 = 5$

• Ta có $y = c_1e^{-x} + c_2e^{5x}$; $\quad z = c_3e^{-x} + c_4e^{5x}$

• Thay y, z vào phương trình 1 ta có

$$0 = -y' + y + 2z = c_1e^{-x} - c_2.5e^{5x} + c_1e^{-x} + c_2e^{5x} + 2(c_3e^{-x} + c_4e^{5x})$$
$$= (2c_1 + 2c_3)e^{-x} + (-4c_2 + 2c_4)e^{-5x}, \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ -4c_2 + 2c_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = -c_1 \\ c_4 = 2c_2 \end{cases}$$

• Nghiệm tổng quát (y, z), ở đó $y = c_1e^{-x} + c_2e^{5x}$; $z = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{5x}$

Cách 3. • $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

• $\lambda_1 = 5$: $\begin{cases} (1-5)p_{11} + 2p_{21} = 0 \\ 4p_{11} + (3-5)p_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4p_{11} - 2p_{21} = 0$

Chọn $p_{11} = 1, p_{21} = 2$

- $\lambda_2 = -1$: $\begin{cases} (1-(-1))\,p_{12} + 2p_{22} = 0 \\ 4p_{12} - (3-(-1))\,p_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2p_{12} + 2p_{22} = 0$

Chọn $p_{12} = 1,\ p_{22} = -1$

- Hệ nghiệm cơ bản là $y_1 = e^{5x}$; $z_1 = 2e^{5x}$; $y_2 = e^{-x}$; $z_2 = -e^{-x}$
- Nghiệm tổng quát: $(y\,;\ z)$, ở đó $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}; z = 2c_1 e^{5x} - c_2 e^{-x}$

Ví dụ 2

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}\right.$ hoặc $\left.\begin{cases} x = -C_1 e^t + \dfrac{1}{3} C_2 e^{5t} \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \end{cases}\right)$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t) \end{cases}\right.$ hoặc $\left.\begin{cases} y = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ x = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t) \end{cases}\right)$

Chú ý. Phương pháp toán tử giải được hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng số

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 12

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

§1. Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

• Phép biến đổi Laplace
• Tính chất của phép biến đổi Laplace
• Phép biến đổi Laplace ngược

1. Đặt vấn đề

• Thường gặp trong thực tế các phương trình vi phân

$$mx'' + cx' + kx = F(t); \qquad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

tương ứng với hệ thống giảm sóc và chuỗi mạch RLC, $F(t)$ và $E'(t)$ nói chung là gián đoạn, khi đó phương pháp như đã biết khá bất tiện. Có hay không phương pháp tiện lợi hơn?

• Phép biến đổi Laplace: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ biến phương trình vi phân với ẩn hàm $f(t)$ thành một phương trình đại số với ẩn hàm $F(s)$ - có lời giải được tìm ra dễ hơn nhiều. Chẳng hạn như đối với phương trình vi phân cấp cao

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots a_{n-1}y' + a_n y = f(x),$$

với điều kiện ban đầu nhận được công thức nghiệm tường minh biểu diễn qua tích chập Laplace.

• Giải một lớp phương trình vi phân cấp cao với hệ số hàm số (điều này không thể làm được với các phương pháp đã biết), chẳng hạn $xy'' - (4x+1)y' + 2(2x+1)y = 0$

• Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

$$\begin{cases} y_1^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}y_k + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)} = \sum\limits_{k=n}^{n} a_{nk}y_k + f_n(x) \end{cases}$$

• Giải một lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp cao với hệ số hàm số.

2. Phép biến đổi Laplace

• **Định nghĩa:** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$, ở đó $s, f(t) \in \mathbb{R}$

• **Nhận xét.** Phép biến đổi Laplace xác định với $s, f(t) \in \mathbb{C}$. Nhưng trong chương này ta chỉ cần sử dụng $s, f(t) \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1. Tính $\mathcal{L}\{1\}(s)$

• $= \int\limits_0^{\infty} e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s},\ s > 0$

• Không tồn tại $\mathcal{L}\ \{1\}(s)$ khi $s \le 0$.

Ví dụ 2. $f(t) = e^{at},\ t \ge 0$. Tính $\mathcal{L}\ \left(e^{at}\right), a \in \mathbb{R}$.

• $\mathcal{L}\ \left\{e^{at}\right\}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{(s-a)t}}{s-a}\right)\Bigg|_0^b$

$= \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{s-a}\left(1 - e^{-(s-a)b}\right) = \frac{1}{s-a}$, nếu $s > a$

• Phân kì khi $s \le a$

Ví dụ 3. Cho $f(t) = t^a,\ a > -1$. Tính $\mathcal{L}\ \{f(t)\}$ và $\mathcal{L}\ \left\{t^n\right\}, n \in \mathbb{N}$

• $\mathcal{L}\ \left\{t^a\right\}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}t^a dt$.

• Đặt $u = st \Rightarrow t = \frac{u}{s},\ dt = \frac{du}{s}$ có $\mathcal{L}\ \left\{t^a\right\} = \frac{1}{s^{a+1}}\int\limits_0^{\infty} e^{-u}u^a du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},\ s > 0$ (2.1)

• $\mathcal{L}\ \left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$

3. Tính chất của phép biến đổi Laplace

Định lý 1. Tính tuyến tính của phép biến đổi Laplace

Cho α, β là hằng số và $\exists\ \mathcal{L}\ \{f(t)\}(s)$ và $\mathcal{L}\ \{g(t)\}(s)$, khi đó

$$\mathcal{L}\ \{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\ \{f(t)\}(s) + \beta\mathcal{L}\ \{g(t)\}(s),\ \forall s$$

Chứng minh. +) $\mathcal{L}\ \{\alpha f + \beta g\}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)dt$

+) $= \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} e^{-st}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)dt$

+) $= \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} e^{-st}\alpha f(t)dt + \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} e^{-st}\beta g(t)dt$

+) $= \alpha\int\limits_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt + \beta\int\limits_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt$

+) $= \alpha\mathcal{L}\ \{f\} + \beta\mathcal{L}\ \{g\}$.

Ví dụ 4. Tính $\mathcal{L}\ \left\{3t^2 + 4t^{\frac{3}{2}}\right\}$

• Ta có $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

• $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

• $\mathcal{L}\left\{3t^2+4t^{\frac{3}{2}}\right\}=3\mathcal{L}\left\{t^2\right\}+4\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}$

Sử dụng (2.1) ta có

• $\mathcal{L}\left\{t^2\right\}=\frac{\Gamma(3)}{s^3}=\frac{2!}{s^3},\ s>0$

• $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4.s^{\frac{5}{2}}}$

• $\mathcal{L}\left\{3t^2+4t^{\frac{3}{2}}\right\}=3.\frac{2!}{s^3}+4\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{6}{s^3}+3\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}$

Ví dụ 5. Tính $\mathcal{L}\{\cosh kt\}$, $\mathcal{L}\{\sinh kt\}$, $\mathcal{L}\{\cos kt\}$, $\mathcal{L}\{\sin kt\}$

• $\mathcal{L}\{\cosh kt\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{kt}\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-kt}\right\}\right)$

• Theo ví dụ 2 có $\mathcal{L}\{\cosh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)=\frac{s}{s^2-k^2},\ s>k>0$

• Tương tự $\mathcal{L}\{\sinh kt\}=\frac{k}{s^2-k^2},\ s>k>0$

• $\mathcal{L}\{\cos kt\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cos kt\,dt=\frac{e^{-st}}{s^2+k^2}(k\sin kt-s\cos kt)\Big|_0^\infty=\frac{s}{s^2+k^2}$

(hoặc $\mathcal{L}\{\cos kt\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ik}+\frac{1}{s+ik}\right)=\frac{s}{s^2+k^2},\ s>0$)

• Tương tự $\mathcal{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2},\ s>0$

Ví dụ 6. Tính $\mathcal{L}\left\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\right\}$

• $\mathcal{L}\left\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\right\}=\mathcal{L}\left\{3e^{2t}+1-\cos 6t\right\}$

• $=3\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}+\mathcal{L}\{1\}-\mathcal{L}\{\cos 6t\}$

• $=\frac{3}{s-2}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36}$

• $=\frac{3s^3+144s-72}{s(s-2)(s^2+36)},\ s>2$

4. Phép biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa. Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ thì ta gọi $f(t)$ là biến đổi Laplace ngược của $F(s)$ và viết $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Ví dụ 7 a. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt,\ s > 0$; **b.** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt,\ s > k > 0$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$ $(s > 0)$
t	$\dfrac{1}{s^2}$ $(s > 0)$
$t^n \ (n \geq 0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$
$t^a \ (a > -1)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $(s > 0)$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ $(\mathrm{Re}\, s > 0)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$ $(s > 0)$
$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$ $(s > 0)$
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$ $(s > \lvert k \rvert)$
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$ $(s > \lvert k \rvert)$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ $(s > 0)$, a>0

Bảng 4. 1. 2. Bảng các phép biến đổi Laplace

c. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s-5}\right\} = 4.e^{5t}$

+) $\dfrac{4}{s-5} = 4\mathcal{L}\{e^{5t}\}$ +) $= \mathcal{L}\{4e^{5t}\}$ +) $= \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s-5}\right\} = 4e^{5t}$

d. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^4}\right\} = \dfrac{1}{3}t^3$

+) $\dfrac{2}{s^4} = \dfrac{2}{3!}\cdot\dfrac{3!}{s^4} = \dfrac{1}{3}\mathcal{L}\{t^3\}$ +) $= \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{3}t^3\right\}$ +) $= \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^4}\right\} = \dfrac{1}{3}t^3$

Nhận xét. Phép biến đổi ngược Laplace có tính chất tuyến tính.

Thật vậy, ta có

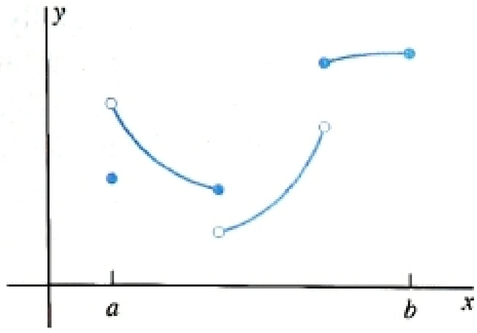
+) $\alpha F + \beta G = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}$

+) $= \mathcal{L}\{\alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G\}\}$

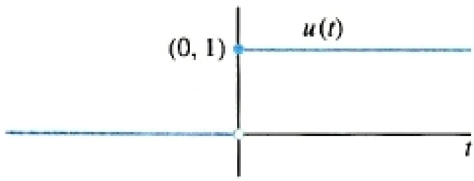
+) Từ đó và từ định nghĩa có $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F + \beta G\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G\}$.

Định nghĩa. Hàm số $f(t)$ được gọi là liên tục từng khúc trên $[a;\ b]$ nếu như

- $f(t)$ liên tục trên mỗi khoảng nhỏ (ở đó $[a;\ b]$ được chia thành hữu hạn khoảng nhỏ)
- $f(t)$ có giới hạn hữu hạn khi t tiến tới hai điểm biên của mỗi đoạn này.



Hình 4.1.3. Đồ thị của hàm liên tục từng khúc.
Các dấu chấm chỉ ra các giá trị mà hàm số gián đoạn



Hình 4.1.4. Đồ thị của hàm đơn vị bậc thang

Ví dụ 8. Tính $\mathcal{L}\{u_a(t)\},\ a > 0,\ u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \ge a. \end{cases}$

- $\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} u_a(t)dt = \int\limits_a^\infty e^{-st} dt = \lim\limits_{b \to \infty} \left(-\dfrac{e^{-st}}{s} \right) \Bigg|_{t=a}^{b}$
- $= \dfrac{1}{s} . \lim\limits_{b \to \infty} \left(e^{-sa} - e^{-sb} \right)$
- $= \dfrac{e^{-as}}{s},\ s > 0, a > 0$

Định nghĩa. Hàm f được gọi là bậc mũ khi $t \to +\infty$ nếu tồn tại các hằng số không âm M, c, T sao cho $|f(t)| \le Me^{ct}, \forall t \ge T$

Định lý 2. Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace

Nếu hàm f liên tục từng khúc với $t \ge 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ thì tồn tại $\mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ \forall s > c$.

Chứng minh. +) Từ giả thiết f là bậc mũ khi $t \to \infty \Rightarrow |f(t)| \le Me^{ct}, \ \forall t \ge 0$

+) Ta có $\int_0^b |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^b e^{-st} |f(t)| dt \le \int_0^b e^{-st}.Me^{ct} dt = M \int_0^b e^{-(s-c)t} dt \le \dfrac{M}{s-c}, \ s > c$.

+) Cho $b \to +\infty$ có $|F(s)| \le \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \le \dfrac{M}{s-c} \Rightarrow \exists F(s), s > c$.

Từ đó, khi cho $s \to +\infty$, ta có

Hệ quả. Nếu $f(t)$ thỏa mãn giả thiết của Định lý 2 thì $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = 0$

Chú ý.

• Một hàm hữu tỉ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) là ảnh của phép biến đổi Laplace

• Định lí 2 không là điều kiện cần, ví dụ:

Hàm $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ không liên tục từng khúc tại $t = 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$, nhưng ở ví dụ 3 có

$$\mathcal{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Định lý 3. Sự duy nhất của biến đổi Laplace nghịch đảo

Giả sử rằng các hàm $f(t), g(t)$ thỏa mãn giả thiết của Định lý 2 để tồn tại $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. Nếu $F(s) = G(s), \ \forall s > c$ thì có $f(t) = g(t)$ tại t mà cả hai hàm liên tục.

Ví dụ 9. Dùng bảng tính biến đổi Laplace của các hàm số sau

a) $f(t) = \cos^2 t$ b) $f(t) = \sin 2t \cos 3t$ c) $f(t) = \cosh^2 3t$

d) $f(t) = (2+t)^2$ e) $f(t) = te^t$ f) $f(t) = t + 2e^{3t}$

Ví dụ 10. Dùng bảng tính biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau

a) $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$ b) $F(s) = \dfrac{2}{s-3}$ c) $F(s) = \dfrac{4-2s}{s^2+4}$

d) $F(s) = \dfrac{5s-2}{9-s^2}$ e) $F(s) = 3s^{-1}e^{-5s}$

Chú ý

• Hai hàm liên tục từng khúc, là bậc mũ và bằng nhau qua phép biến đổi Laplace chỉ có thể khác nhau tại những điểm gián đoạn cô lập. Điều này không quan trọng trong hầu hết các ứng dụng thực tế.

• Phép biến đổi Laplace có một lịch sử khá thú vị: Xuất hiện đầu tiên trong nghiên cứu của Euler, mang tên nhà toán học Pháp Laplace (1749-1827) - người đã dùng tích phân trong lý thuyết xác xuất của mình, nhưng việc vận dụng phương pháp biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân lại không thuộc về Laplace mà thuộc về kĩ sư người Anh Oliver Heaviside (1850-1925).

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 13

§2. Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu

• Phép biến đổi của đạo hàm
• Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu
• Hệ phương trình vi phân tuyến tính
• Những kĩ thuật biến đổi bổ sung

1. Đặt vấn đề

• Vận dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng

$$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=f(t)$$

với điều kiện $x(0)=x_0,\ \ x'(0)=x_0'$

• So sánh với các phương pháp giải đã học
• Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính

2. Phép biến đổi của đạo hàm

Định lý 1. Cho $f(t)$ liên tục và trơn từng khúc với $t\ge 0$ và là bậc mũ khi $t\to+\infty$ (tức tồn tại hằng số không âm $c,\ M$ và T thoả mãn:

$$|f(t)|\le Me^{ct},\quad t\ge T \tag{2.1}$$

Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ với $s>c$ và có $\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)=sF(s)-f(0)$

Chứng minh. +) $\mathcal{L}\{f'(s)\}=\int\limits_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=\int\limits_0^\infty e^{-st}df(t)$

+) $=e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty+s\int\limits_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

Do $|f(t)|\le Me^{ct}, t\ge T\Rightarrow e^{-st}f(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$ khi $s>c$

+) Từ Định lí 2 (bài 1) $\Rightarrow\int\limits_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ hội tụ với $s>c$

+) Từ đó ta có $\mathcal{L}\{f'\}(s)=s\mathcal{L}\{f\}(s)-f(0)$

Định nghĩa. Hàm f được gọi là trơn từng khúc trên $[a;\ b]$ $\Leftrightarrow$ nó khả vi trên $[a;\ b]$ trừ ra hữu hạn điểm và $f'(t)$ liên tục từng khúc trên $[a;\ b]$

3. Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

Hệ quả. Phép biến đổi của đạo hàm bậc cao

Giả sử rằng các hàm số $f,f',\cdots,f^{(n-1)}$ liên tục và trơn từng khúc với $t\ge 0$ và là bậc mũ khi $t\to+\infty$. Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$ với $s>c$ và có

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^n\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$
$$=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

Ví dụ 1. Sử dụng Định lí 1, chứng minh rằng

a) $\mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Chứng minh bằng qui nạp

+) $n = 1$: $f(t) = te^{at} \Rightarrow f'(t) = ate^{at} + e^{at} \Rightarrow sF(s) - f(0) = aF(s) + \dfrac{1}{s-a}$

$\Rightarrow F(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

+) $n = k$: $\mathcal{L}\left\{t^k e^{at}\right\} = \dfrac{k!}{(s-a)^{k+1}}$

+) $\mathcal{L}\left\{t^{k+1} e^{at}\right\} = \dfrac{k+1}{s-a}\mathcal{L}\left\{t^k e^{at}\right\} = \dfrac{k+1}{s-a}\cdot\dfrac{k!}{\left(s-a^{k+1}\right)} = \dfrac{(k+1)!}{(s-a)^{k+2}}$

b) $\mathcal{L}\left\{t\sinh kt\right\} = \dfrac{2sk}{s^2 - k^2}$

+) $f(t) = t.\sinh kt \Rightarrow f(0) = 0$ và có

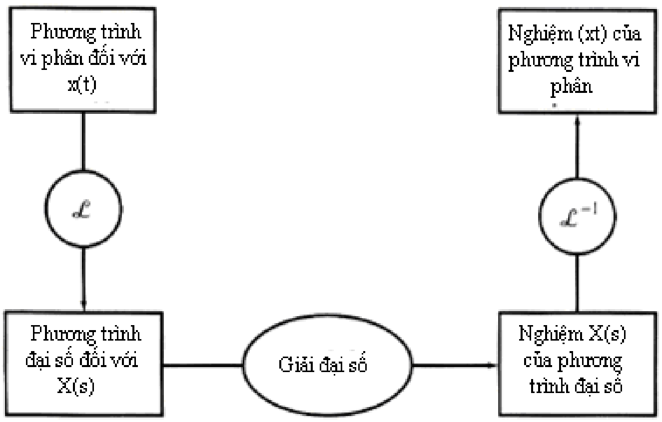
+) $f'(t) = \sinh kt + kt\cosh kt$, $f'(0) = 0$

$f''(t) = 2k\cosh kt + k^2 t\sinh kt$

+) $\mathcal{L}\left\{2k\cosh kt + k^2 t\sin kt\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0)$

+) $2k\dfrac{s}{\left(s^2 - k^2\right)} + k^2F(s) = s^2F(s)$, ở đó $F(s) = \mathcal{L}\left\{t\sinh kt\right\}$

+) $F(s) = \dfrac{2ks}{\left(s^2 - k^2\right)^2}$



Hình 4. 2. 4. Sử dụng biến đổi Laplace để giải một phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $x'' - x' - 6x = 0$ với điều kiện $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$

• Ta có: $\mathcal{L}\left\{x'(t)\right\} = sX(s) - 2$

• $\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\} = s^2X(x) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 1$

• Thay vào phương trình đã cho có

$\left(s^2X(s)-2s+1\right)-\left(sX(s)-2\right)-6X(s)=0 \Leftrightarrow \left(s^2-s-6\right)X(s)-2s+3=0$

• $X(s)=\dfrac{2s-3}{s^2-s-6}=\dfrac{2s-3}{(s-3)(s+2)}=\dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{s-3}+\dfrac{7}{5}.\dfrac{1}{s+2}$.

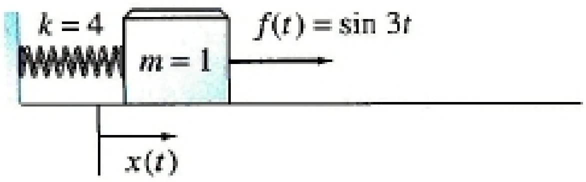
• Do $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$ nên có $x(t)=\dfrac{3}{5}e^{3t}+\dfrac{7}{5}e^{-2t}$

là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu.

Ví dụ 3. Giải bài toán giá trị ban đầu

a) $x''+4x=\sin 3t,\quad x(0)=x'(0)=0$

Bài toán này gắn liền với quá trình chuyển động của một hệ vật – lò xo với tác động của lực bên ngoài)



Hình 4. 2. 2. Hệ vật – lò xo thỏa mãn bài toán điều kiện đầu trong Ví dụ 2. Điều kiện đầu của vật là vị trí cân bằng của nó.

• Từ điều kiện ban đầu có: $\mathcal{L}\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$

• Từ bảng 4.1.2 có $\mathcal{L}\{\sin 3t\}=\dfrac{3}{s^2+3^2}$.

• Thay vào ta có $s^2X(s)+4X(s)=\dfrac{3}{s^2+9}$

$\Leftrightarrow X(s)=\dfrac{3}{(s^2+9)(s^2+4)}=\dfrac{As+B}{(s^2+4)}+\dfrac{Cs+D}{(s^2+9)}$

• Đồng nhất ta có $A=C=0,\ B=\dfrac{3}{5},\ D=-\dfrac{3}{5}$, do đó

$X(s)=\dfrac{3}{10}.\dfrac{2}{s^2+4}-\dfrac{1}{5}.\dfrac{3}{s^2+9}$

• Do $\mathcal{L}\{\sin 2t\}=\dfrac{2}{s^2+4}$, $\mathcal{L}\{\sin 3t\}=\dfrac{3}{s^2+3^2}$ nên ta có $x(t)=\dfrac{3}{10}\sin 2t-\dfrac{1}{5}\sin 3t$.

b) $x''+9x=0,\ x(0)=3,\ x'(0)=4$ $\quad\left(x(t)=3\cos 3t+\dfrac{4}{3}\sin 3t\right)$

c) $x''+8x'+15x=0,\ x(0)=2,\ x'(0)=-3$ $\quad\left(x(t)=\dfrac{1}{2}\left(7e^{-3t}-3e^{-5t}\right)\right)$

d) $x''+4x=\cos t,\ x(0)=0,\ x'(0)=0$ $\quad\left(x(t)=\dfrac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)\right)$

e) $x''+9x=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=0$ $\quad\left(x(t)=\dfrac{1}{9}(1-\cos 3t)\right)$

Nhận xét. Như vậy phương pháp biến đổi Laplace cho lời giải trực tiếp tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu mà không cần phân biệt đó là phương trình vi phân thuần nhất hay là không thuần nhất.

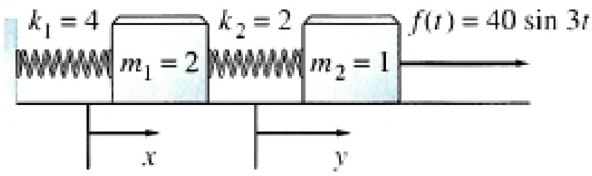
4. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

• Phép biến đổi Laplace có khả năng biến đổi hệ phương trình vi phân tuyến tính thành một hệ phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4. a) Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính $\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y, \\ y'' = 2x - 2y + 40\sin 3t \end{cases}$

với điều kiện ban đầu $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

• Đây là bài toán giá trị ban đầu xác định hàm dịch chuyển $x(t)$ và $y(t)$ của hệ hai vật thể được chỉ ra trong Hình 4.2.5, giả sử rằng lực $f(t) = 40\sin 3t$ là tác động bất ngờ tới vật thể thứ hai tại thời điểm t = 0 khi cả hai vật thể đang ở trạng thái tĩnh tại vị trí cân bằng của chúng.



Hình 4. 2. 5. Hệ vật thể thỏa mãn điều kiện đầu trong Ví dụ 3. Cả hai vật thể đang ở vị trí cân bằng.

• Từ điều kiện ban đầu có L $\{x''(t)\} = s^2X(s) - s\,x(0) - x'(0) = s^2X(s)$

• Tương tự L $\{y''(t)\} = s^2Y(s)$

• Do L $\{\sin 3t\} = \dfrac{3}{s^2+9}$, thay vào hệ phương trình có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2s^2X(s) = -6X(s) + 2Y(s) \\ s^2Y(s) = 2X(s) - 2Y(s) + \dfrac{120}{s^2+9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s^2+3)X(s) - Y(s) = 0 \\ -2X(s) + (s^2+2)Y(s) = \dfrac{120}{s^2+9} \end{cases}$$

• $$\Delta = \begin{vmatrix} (s^2+3) & -1 \\ -2 & (s^2+2) \end{vmatrix} = (s^2+1)(s^2+4)$$

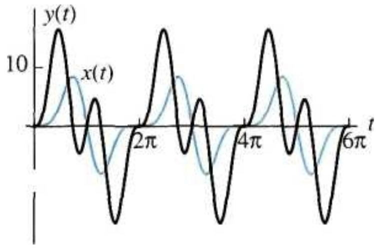
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{120}{s^2+9} & s^2+2 \end{vmatrix} = \frac{120}{s^2+9}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} s^2+3 & 0 \\ -2 & \dfrac{120}{s^2+9} \end{vmatrix} = \frac{120\left(s^2+3\right)}{s^2+9}$$

• Do đó $X(s) = \dfrac{120}{(s^2+4)(s^2+9)(s^2+1)} = \dfrac{5}{s^2+1} - \dfrac{8}{s^2+4} + \dfrac{3}{s^2+9}$

• Do đó $x(t) = 5\sin t - 4\sin 2t + \sin 3t$

• Tương tự có $Y(s) = \dfrac{120(s^2+3)}{(s^2+4)(s^2+9)(s^2+1)} = \dfrac{10}{(s^2+1)} + \dfrac{8}{s^2+4} - \dfrac{18}{s^2+9}$

• nên có $y(t) = 10\sin t + 4\sin 2t - 6\sin 3t$



Hình 4. 2. 6. Các hàm định vị $x(t)$ và $y(t)$ trong Ví dụ 3 a).

b) $\begin{cases} x' + 2y' + x = 0, \; x(0) = 0 \\ x' - y' + y = 0, \;\; y(0) = 1 \end{cases}$

Tác động toán tử Laplace, sử dụng điều kiện ban đầu có

$$\begin{cases} sX(s) + 2[sY(s) - 1] + X(s) = 0 \\ \;\; sX(s) - [sY(s) - 1] + Y(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+1)X(s) + 2sY(s) = 2 \\ sX(s) + (1-s)Y(s) = -1 \end{cases}$$

Giải hệ 2 phương trình tuyến tính cấp 1 ta có

+) $X(s) = -\dfrac{2}{3s^2 - 1} = \dfrac{2}{-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1/\sqrt{3}}{s^2 - (1/\sqrt{3})^2} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{L}\left\{\sinh\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right\}$

$$Y(s) = \frac{3s+1}{3s^2 - 1} = \frac{s + 1/3}{s^2 - 1/3} = \frac{s}{s^2 - (1/\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{s^2 - (1/\sqrt{3})^2}$$

$$= \mathrm{L}\left\{\cosh\frac{t}{\sqrt{3}}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{L}\left\{\sinh\frac{t}{\sqrt{3}}\right\}$$

+) $x(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sinh\dfrac{t}{\sqrt{3}}, \; y(t) = \cosh\dfrac{t}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sinh\dfrac{t}{\sqrt{3}}$

c) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x + e^{-t}, \;\; x(0) = 0 = y(0) \end{cases}$

$\left(x(t) = \dfrac{2}{9}\left(e^{2t} - e^{-t} - 3te^{-t}\right), \; y(t) = \dfrac{1}{9}\left(e^{2t} - e^{-t} + 6te^{-t}\right)\right)$

d) $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = 0, \; x(0) = y(0) = 0 \\ y'' + x + 2y = 0, \;\; x'(0) = y'(0) = -1 \end{cases}$

$\left(x(t) = \dfrac{1}{4}(2t - 3\sin 2t), \; y(t) = -\dfrac{1}{8}(2t + 3\sin 2t)\right)$

e) 1°/ $\begin{cases} x' + 3y' + x = 0, \;\; x(0) = 0 \\ x' - y' + y = 0, \;\;\; y(0) = 2 \end{cases}$

$\left(x(t) = -3\sinh\dfrac{t}{2}, \;\; y(t) = 2\cosh\dfrac{t}{2} + \sinh\dfrac{t}{2}\right)$

2°/ $\begin{cases} x' - 3y' + x = 0, & x(0) = 0 \\ x' - y' + y = 0, & y(0) = -2 \end{cases}$

$$\left(x(t) = 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2},\ y(t) = -2\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

f) 1) $\begin{cases} x'' = -3x + y \\ y'' = 2x - 2y + \sqrt{3}\sin\left(t\sqrt{3}\right) \end{cases}$, $\quad x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

2) $\begin{cases} x'' = -2x + 2y + \sqrt{3}\sin\left(t\sqrt{3}\right) \\ y'' = x - 3y \end{cases}$, $\quad x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

g) $\begin{cases} x'' = -3x + y, & x(0) = 0 = x'(0) \\ y'' = 2x - 2y, & y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$, $\quad \left(\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6}(2\sin t - \sin 2t) \\ y(t) &= \frac{1}{6}(\sin 2t + 4\sin t) \end{aligned} \right)$

5. Những kỹ thuật biến đổi bổ sung

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

• Đặt $f(t) = te^{at}$ thì có $f(0) = 0,\ f'(t) = e^{at} + ate^{at}$. Do đó có

$\mathcal{L}\left\{e^{at} + ate^{at}\right\} = \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$

• Do phép biến đổi tuyến tính nên có: $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + a\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = s\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$

• Do đó $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \dfrac{\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}}{s-a} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ (Do $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$)

Ví dụ 6. Tìm $\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\}$

Đặt $f(t) = t\sin kt$ thì có $f(0) = 0,\ f'(t) = \sin kt + kt\cos kt,\ f'(0) = 0$

• $f''(t) = 2k\cos kt - k^2 t\sin kt$

• Mặt khác $\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$, $\mathcal{L}\left\{\cos kt\right\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$ nên có

$$\frac{2ks}{s^2 + k^2} - k^2\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\}$$

• Do đó $\mathcal{L}\left\{t\sin kt\right\} = \dfrac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$

Định lí 2. Phép biến đổi của tích phân

Nếu $f(t)$ liên tục từng khúc với $t \ge 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ thì

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{F(s)}{s} \text{ với } s > c$$

hay là: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F\}(\tau)d\tau$

Chứng minh. +) f liên tục từng khúc $\Rightarrow g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ liên tục, trơn từng khúc với $t \geq 0$ và có $|g(t)| \leq \int\limits_0^t |f(\tau)|d\tau \leq M\int\limits_0^t e^{c\tau}d\tau = \dfrac{M}{C}\left(e^{ct}-1\right) < \dfrac{M}{C}e^{ct}$

$\Rightarrow g(t)$ là hàm bậc mũ khi $t \to \infty$

+) Sử dụng định lí 1 ta có $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$

+) Do $g(0) = 0$ nên ta có $\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$

Ví dụ 6. Tìm nghịch đảo của phép biến đổi Laplace của $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s-a)}$

• Ta có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{1}{s-a}}{s}\right\} = \int\limits_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}d\tau = \int\limits_0^t e^{a\tau}d\tau = \dfrac{1}{a}\left(e^{at}-1\right)$

• Từ đó và tiếp tục có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\frac{1}{s(s-a)}}{s}\right\} = \int\limits_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-a)}\right\}d\tau$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{a}\left(e^{a\tau}-1\right)d\tau = \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{a\tau} - \tau\right)\right]_0^t = \frac{1}{a^2}\left(e^{at} - at - 1\right).$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 14

§3. Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

• Quy tắc phân thức đơn giản • Sự cộng hưởng và nhân tử tích lặp bậc hai

1. Mở đầu.

Phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng có nghiệm là biến đổi Laplace nghịch đảo của hàm hữu tỉ $R(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Cần đưa ra kĩ thuật cho phép tính $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}$ được thuận lợi.

2. quy tắc phân thức đơn giản

a) Quy tắc 1. Phân thức đơn giản tuyến tính

Nếu $Q(s)$ có $(s-a)^n$ thì $R(s)$ có các số hạng sau

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s-a)^n}, \quad A_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}$$

b) Quy tắc 2. Phân thức đơn giản bậc hai

Nếu $Q(s)$ có $\left((s-a)^2 + b^2\right)^n$ thì $R(s)$ có dạng

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 s + B_2}{\left[(s-a)^2 + b^2\right]^2} + \dots + \frac{A_n s + B_n}{\left[(s-a)^2 + b^2\right]^n}$$

ở đó $A_i,\ B_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}$

Định lí 1. Biến đổi trên trục s

Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ tồn tại với $s > c$, thì tồn tại $\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}$ với $s > a + c$ và có

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a).$$

Hay tương đương với $\quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \equiv e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$

Chứng minh. Ta có

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt = \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\},\ s-a > c$$

Từ kết quả này và từ bảng 4.1.2 có

$f(t)$	$F(s)$		
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$,	$s > a$	(2.1)
$e^{at}\cos(kt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$,	$s > a$	(2.2)

$e^{at}\sin(kt)$ $\quad\quad$ $\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$, $\quad s>a$ $\quad\quad$ (2.3)

Ví dụ 1. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của

a) $R(s)=\dfrac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}$

• $R(s)=\dfrac{s^2+1}{s(s+2)(s-4)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+2}+\dfrac{C}{s-4}$

• $s^2+1=A(s+2)(s-4)+Bs(s-4)+Cs(s+2)$.

• Thay $s=0$, $s=-2$, và $s=4$ ta có

$$-8A=1,\ 12B=5,\ 24C=17 \Leftrightarrow A=-\frac{1}{8};\ B=\frac{5}{12},\ C=\frac{17}{24}$$

• $R(s)=-\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{s}+\dfrac{5}{12}.\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{17}{24}.\dfrac{1}{s-4}$,

• $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{12}e^{-2t}+\dfrac{17}{24}e^{4t}$.

b) $F(s)=\dfrac{s^2+2s}{s^4+5s^2+4}$ $\quad$ $\left(f(t)=\dfrac{1}{3}(2\cos t-\sin t-2\cos 2t+2\sin 2t)\right)$

c) $F(s)=\dfrac{s^2-2s}{s^4+3s^2+2}$ $\quad$ $\left(f(t)=-2\cos t-\sin t+2\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right)$

Ví dụ 2. Giải bài toán giá trị ban đầu $y''+4y'+4y=t^2$; $y(0)=y'(0)=0$.

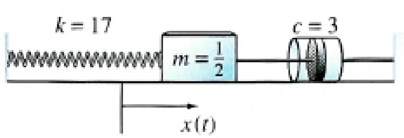
• Tác động phép biến đổi Laplace ta có $s^2Y(s)+4sY(s)+4Y(s)=\dfrac{2}{s^3}$.

• $Y(s)=\dfrac{2}{s^3(s+2)^2}=\dfrac{A}{s^3}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s}+\dfrac{D}{(s+2)^2}+\dfrac{E}{s+2}$

• Đồng nhất các hệ số ta có $Y(s)=\dfrac{\frac{1}{2}}{s^3}-\dfrac{\frac{1}{2}}{s^2}+\dfrac{\frac{3}{8}}{s}-\dfrac{\frac{1}{4}}{(s+2)^2}-\dfrac{\frac{3}{8}}{s+2}$

• $y(t)=\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4}te^{-2t}-\dfrac{3}{8}e^{-2t}$.

Ví dụ 3. Xét một hệ con lắc lò xo với $m=\dfrac{1}{2}$, $k=17$, $c=3$ đơn vị (mét, kilôgam, giây). $x(t)$ là khoảng dịch chuyển của khối lượng m từ vị trí cân bằng của nó. Nếu khối lượng được đặt ở vị trí $x(0)=3$, $x'(0)=1$. Tìm $x(t)$ là hàm của dao động tự do tắt dần.



Hình 4.3.1. Hệ khối lượng-lò xo và vật cản của Ví dụ 1

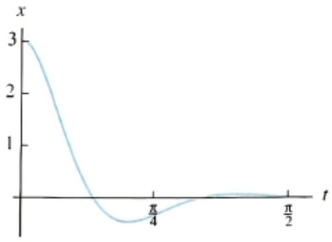
• Ta có phương trình vi phân tương ứng với bài toán là: $\frac{1}{2}x'' + 3x' + 17x = 0$ với điều kiện ban đầu $x(0) = 3$; $x'(0) = 1$

• Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế, chú ý $L\{0\} = 0$ ta có

$$\left[s^2X(s) - 3s - 1\right] + 6\left[sX(s) - 3\right] + 34X(s) = 0$$

• $X(s) = \dfrac{3s+19}{s^2+6s+34} = 3.\dfrac{s+3}{(s+3)^2+25} + 2\dfrac{5}{(s+3)^2+25}$

• Sử dụng (2.2), (2.3) có $x(t) = e^{-3t}(3\cos 5t + 2\sin 5t)$



Hình 4.3.2. Hàm vị trí $x(t)$ trong Ví dụ 1.

Từ hình ta thấy đồ thị của dao động tắt dần.

Ví dụ 4. a) Xét hệ con lắc lò xo - giảm xóc như trong Ví dụ 3, tuy nhiên với điều kiện $x(0) = x'(0) = 0$ và với một lực tác động bên ngoài $F(t) = 15\sin 2t$. Tìm chuyển động tức thời và ổn định của khối lượng đó.

• Ta cần giải bài toán với giá trị ban đầu

$$x'' + 6x' + 34x = 30\sin 2t;\ x(0) = x'(0) = 0.$$

• Tác động phép biến đổi Laplace vào ta có $s^2X(s) + 6sX(s) + 34X(s) = \dfrac{60}{s^2+4}$

• $X(s) = \dfrac{60}{(s^2+4)\left[(s+3)^2+25\right]} = \dfrac{As+B}{s^2+4} + \dfrac{Cs+D}{(s+3)^2+25}$.

• Đồng nhất ta có $A = -\dfrac{10}{29}$, $B = \dfrac{50}{29}$, $C = D = \dfrac{10}{29}$. Vì vậy,

• $X(s) = \dfrac{1}{29}\left(\dfrac{-10s+50}{s^2+4} + \dfrac{10s+10}{(s+3)^2+25}\right) = \dfrac{1}{29}\left(\dfrac{-10s+25.2}{s^2+4} + \dfrac{10(s+3)-4.5}{(s+3)^2+25}\right)$.

• Do đó $x(t) = \dfrac{5}{29}(-2\cos 2t + 5\sin 2t) + \dfrac{2}{29}e^{-3t}(5\cos 5t - 2\sin 5t)$.

b) $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1$

+) $\left[s^3X(s) - s - 1\right] + \left[s^2X(s) - 1\right] - 6sX(s) = 0$

+) $X(s) = \dfrac{s+2}{s^3+s^2-6s} = \dfrac{1}{15}\left(-\dfrac{5}{s} - \dfrac{1}{s+3} + \dfrac{6}{s-2}\right)$

+) $= \frac{1}{15}\left(-5L\{1\} - L\{e^{-3t}\} + 6L\{e^{2t}\}\right) = L\left\{\frac{1}{15}\left(6e^{2t} - e^{-3t} - 5\right)\right\}$

+) $x(t) = \frac{1}{15}\left(6e^{2t} - e^{-3t} - 5\right)$

c) $x'' - 6x' + 8x = 2,\ x(0) = 0 = x'(0)$ $\quad \left(x(t) = \frac{1}{4}\left(1 - 2e^{2t} + e^{4t}\right)\right)$

d) $x'' + 4x' + 8x = e^{-t},\ x(0) = x'(0) = 0$ $\quad \left(x(t) = \frac{1}{10}\left[2e^{-t} - e^{-2t}(2\cos 2t + \sin 2t)\right]\right)$

e) $x^{(4)} - x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$ $\left(x(t) = \frac{1}{2}(\cosh t + \cos t)\right)$

f) $x^{(4)} + 13x'' + 36x = 0,\ \ x(0) = x''(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x^{(3)}(0) = -13$

$\left(x(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$

g) $x^{(4)} + 2x'' + x = e^{2t},\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$

$\left(x(t) = \frac{1}{50}\left[2e^{2t} + (10t - 2)\cos t - (5t + 14)\sin t\right]\right)$

h) $x'' + 6x' + 18x = \cos 2t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$

$\left(x(t) = \frac{1}{510}e^{-3t}(489\cos 3t + 307\sin 3t) + \frac{1}{170}(7\cos 2t + 6\sin 2t)\right)$

i) $x^{(3)} + x'' - 12x' = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1$ $\quad \left(x(t) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{21}e^{3t} - \frac{1}{14}e^{-4t}\right)$

k) $x^{(3)} + x'' - 20x' = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1$ $\quad \left(x(t) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6}e^{4t} - \frac{1}{15}e^{-5t}\right)$

l) 1°/ $x^{(4)} - 3x'' - 4x = 0,\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ \ x'''(0) = 1$

$\left(-\frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{20}e^{2t} - \frac{1}{20}e^{-2t}\right)$

2°/ $x^{(4)} - 8x'' - 9x = 0,\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ \ x'''(0) = 1$

$\left(-\frac{1}{10}\sin t + \frac{1}{60}e^{3t} - \frac{1}{60}e^{-3t}\right)$

m)

1°/ $x^{(6)} + 4x^{(4)} - x'' - 4x = \sinh 2t,\ \ x^{(k)}(0) = 0,\ k = \overline{0,5}$ . . .. .

. $\left(\frac{\sinh 2t - \sin 2t}{20} - \frac{\sinh t - \sin t}{15}\right)$

2°/ $x^{(6)} - 4x^{(4)} - x'' + 4x = \sin 2t,\ x^{(k)}(0) = 0,\ k = \overline{0,5}$, $\left(\frac{\sinh 2t - \sin 2t}{20} - \frac{\sinh t - \sin t}{15}\right)$

n) $x^{(4)} + 4x = 0\ \ x(0) = 0 = x'(0) = x'''(0),\ x''(0) = 1.$ $\quad \left(\frac{1}{2}\sin t \sinh 2t\right)$

3. Sự cộng hưởng và nhân tử tích lặp bậc hai

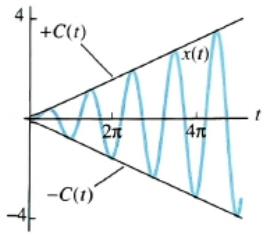
Hay dùng hai phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức đơn giản trong trường hợp phân tích lặp bậc hai (nhận được khi sử dụng kỹ thuật như ở Ví dụ 5, Bài 13)

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{2k}t\sin kt\,; \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{2k^3}(\sin kt-kt\cos kt)$$

Ví dụ 5. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải bài toán với giá trị ban đầu

$$x''+\omega_0^2x=F_0\sin\omega t\,;\ x(0)=0=x'(0)$$

- Tác động phép biến đổi Laplace vào có $s^2X(s)+\omega_0^2X(s)=\dfrac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}$
- $X(s)=\dfrac{F_0\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s^2+\omega_0^2\right)}=\dfrac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}-\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right)$, $\omega\neq\omega_0 \Rightarrow$ tìm được $x(t)$
- Nếu $\omega=\omega_0$ ta có $X(s)=\dfrac{F_0\omega_0}{\left(s^2+\omega_0^2\right)^2}$, khi đó $x(t)=\dfrac{F_0}{2\omega_0^2}\left(\sin\omega_0t-\omega_0t\cos\omega_0t\right)$



Hình 4.3.4. Nghiệm cộng hưởng trong (18) với $\omega_0=\dfrac{1}{2}$ và $F_0=1$, cùng với đường bao của nó $x=\pm C(t)$

Ví dụ 6. Giải bài toán với giá trị ban đầu

$$y^{(4)}+2y''+y=4te^t\,;\ y(0)=y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=0.$$

- Có $L\{y''(t)\}=s^2Y(s)$, $L\left\{y^{(4)}(t)\right\}=s^4Y(s)$, $L\left\{te^t\right\}=\dfrac{1}{(s-1)^2}$.
- Tác động phép biến đổi Laplace vào có $\left(s^4+2s^2+1\right)Y(s)=\dfrac{4}{(s-1)^2}$.
- $Y(s)=\dfrac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}=\dfrac{A}{(s-1)^2}+\dfrac{B}{s-1}+\dfrac{Cs+D}{\left(s^2+1\right)^2}+\dfrac{E\,s+F}{s^2+1}$
- Dùng hệ số bất định có

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{2}{s-1}+\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}+\frac{2s+1}{s^2+1}$$

- Do đó $y(t)=(t-2)e^t+(t+1)\sin t+2\cos t$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 15

§4. Đạo hàm, Tích phân, và tích các phép biến đổi

•Tích chập của hai hàm •Vi phân của phép biến đổi •Tích phân của phép biến đổi

1. Mở đầu

• Phép biến đổi Laplace của nghiệm của một phương trình vi phân đôi khi là tích của các biến đổi của hai hàm đã biết.

• Chẳng hạn, xét bài toán với giá trị ban đầu $x''+x=\cos t$; $x(0)=x'(0)=0$,

• Tác động phép biến đổi Laplace ta có:

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=\frac{s}{s^2+1} \Leftrightarrow X(s)=\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}.$$

• Mặt khác ta có $\mathcal{L}\{\cos t.\sin t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\sin 2t\right\}=\frac{1}{2}.\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{1}{s^2+4}\neq\frac{s}{(s^2+1)^2}$.

• Do đó $\mathcal{L}\{\cos t\sin t\}\neq\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}$

• Rõ ràng rằng, để giải được bài toán trên, ta cần tìm hàm $h(t)$ sao cho

$$\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}$$

2. Tích chập của hai hàm

Định nghĩa. Tích chập đối với phép biến đổi Laplace của hai hàm f, g liên tục từng khúc được định nghĩa với như sau: $(f*g)(t)=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,\quad t\geq 0$

• Tích chập là giao hoán

Ví dụ 1 a) Tính $(\cos t)*(\sin t)$

• Ta có $(\cos t)*(\sin t)=\int\limits_0^t\cos\tau\sin(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t\frac{1}{2}[\sin t-\sin(2\tau-t)]d\tau$

$$=\frac{1}{2}\left[\tau\sin t+\frac{1}{2}\cos(2\tau-t)\right]_{\tau=0}^{t}=\frac{1}{2}\left[t\sin t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos(-t)\right]=\frac{1}{2}t\sin t.$$

b) $t*e^{at}$ $\quad\left(\frac{e^{at}-at-1}{a^2}\right)$ **c)** $t^2*\cos t$ $\quad(2(t-\sin t))$

Định lí 1. • Giả sử $f(t)$, $g(t)$ liên tục từng khúc với $t\geq 0$

• $|f(t)|$, $|g(t)|$ bị chặn bởi Me^{ct} khi $t\to+\infty$, các số M, c không âm.

Khi đó ta có $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\}$ và $\mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\}=f(t)*g(t)$

Chứng minh. • Có $G(s)=\int\limits_0^\infty e^{-su}g(u)du\overset{u=t-\tau}{=}\int\limits_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)}g(t-\tau)dt$

• Do đó $G(s) = e^{s\tau}\int_0^{\infty} e^{-st} g(t-\tau)dt$

• Với $g(u) \equiv 0$ khi $u < 0$, có $F(s)G(s) = G(s)\int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)G(s)d\tau$

• $= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)\left(e^{s\tau}\int_0^{\infty} e^{-st} g(t-\tau)dt \right)d\tau = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)dt \right)d\tau.$

• Từ giả thiết đã cho đổi thứ tự lấy tích phân có

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_0^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_0^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\left[f(t) * g(t) \right]dt,$$

• Do đó $F(s)G(s) = \mathcal{L}\left\{ f(t) * g(t) \right\}$.

Ví dụ 2 a) Cho $f(t) = \sin 2t$, $g(t) = e^t$. Tính $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)} \right\}$

• Ta có $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \dfrac{2}{s^2+4}$, $\mathcal{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)} \right\} = (\sin 2t) * e^t = \int_0^{t} e^{t-\tau}\sin 2\tau d\tau$

• $= e^t\int_0^{t} e^{-\tau}\sin 2\tau d\tau = e^t\left[\dfrac{e^{-\tau}}{5}(-\sin 2\tau - 2\cos 2\tau) \right]_0^t$

• $= e^t\left[\dfrac{e^{-t}}{5}(-\sin 2t - 2\cos 2t) - \dfrac{1}{5}(-2) \right]$

• $= \dfrac{2}{5}e^t - \dfrac{1}{5}\sin 2t - \dfrac{2}{5}\cos 2t$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s(s^2+4)} \right\}$ ($\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$)

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^2(s^2+k^2)} \right\}$ ($\dfrac{kt - \sin kt}{k^3}$)

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s(s^2+4s+5)} \right\}$ ($\dfrac{1}{5}\left[1 - e^{-2t}(2\sin t + \cos t) \right]$)

3. Vi phân của phép biến đổi

Định lí 2. Giả sử $f(t)$ liên tục từng khúc với $t \geq 0$, $|f(t)| \leq Me^{ct}$ khi $t \to +\infty$, các số M, c không âm thì có

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s),\ s > c \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} \quad (3.2)$$

Tổng quát ta có

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s),\quad n = 1,2,3,\ldots \quad (3.3)$$

Chứng minh.

+) Từ giả thiết $\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ hội tụ tuyệt đối, đều và $\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right)$ liên tục, $s > c$

+) Do đó $F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right)dt$

+) $= \int_0^{\infty} e^{-st}\left(-tf(t)\right)dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$

+) Ta chứng minh (3.3) bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy,

$n = 1$: ta đã có $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$

Giả sử đúng $n = k$, tức có $\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k F^{(k)}(s)$

Ta chứng minh đúng với $n = k + 1$, thật vậy

$$\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\} = \mathcal{L}\{t.t^k f(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = -\frac{d}{ds}\left((-1)^k F^{(k)}(s)\right) = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s)$$

Ví dụ 1 a) Tìm $\mathcal{L}\{t^2 \sin kt\}$.

• Từ (3.3) ta có $\mathcal{L}\{t^2 \sin kt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{k}{s^2 + k^2}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\cdot\frac{k}{s^2 + k^2}$

• $= \frac{d}{ds}\left(\frac{-2ks}{\left(s^2 + k^2\right)^2}\right) = \frac{6ks^2 - 2k^3}{\left(s^2 + k^2\right)^3}$

b) $\mathcal{L}\{t^2 \cos 2t\}$ **(**$\frac{2s^3 - 24s}{\left(s^2 + 4\right)^3}, s > 0$**)** **c)** $\mathcal{L}\{te^{-t}\sin^2 t\}$

($\frac{2\left(3s^2 + 6s + 7\right)}{(s+1)^2\left(s^2 + 2s + 5\right)^2}, s > 0$**)**

d) $tx'' + (t-2)x' + x = 0,\ x(0) = 0,$

+) Tác động phép biến đổi Laplace và sử dụng định lí 2 ta có

+) $\mathcal{L}\{tx'\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x'\} = -\frac{d}{ds}\left(sX(s) - x(0)\right),$

$\mathcal{L}\{tx''\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x''\} = -\frac{d}{ds}\left[s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0)\right]$

+) Thay vào phương trình ta có $-\frac{d}{ds}\left[s^2X(s)-x'(0)\right]-\frac{d}{ds}\left[sX(s)\right]-2sX(s)+X(s)=0$

+) $s(s+1)X'(s)+4sX(s)=0$, là phương trình vi phân phân li biến số, có nghiệm là $X(s)=\frac{A}{(s+1)^4}$, $A\neq 0$

+) $x(t)=Ct^3e^{-t}$, $C\neq 0$

e) $tx''+(3t-1)x'+3x=0$ **(**$x(t)=Ct^2e^{-3t}, C\neq 0$**)**

f) $tx''+2(t-1)x'-2x=0$ **(**$x(t)=C\left(1-t-e^{-2t}-te^{-2t}\right), C\neq 0$**)**

g) 1°/ $tx''+(t-1)x'+x=0.\ \ x(0)=0$ **(**$x(t)=ct^2e^{-t},\ c\neq 0$**)**

2°/ $tx''+(t-2)x'+x=0.\ \ x(0)=0$ **(**$x(t)=ct^3e^{-t},\ c\neq 0$**)**

h) $tx''+(3t-1)x'+3x=0$ **,** $x(0)=0$ **(**$x(t)=ct^2e^{-3t},\ c\neq 0$**)**

Ví dụ 2 a) Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$.

• Do đạo hàm của $\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ là hàm hữu tỉ, từ (3.2) ta có

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\}$$

• $=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/s^2}{1+(1/s)^2}\right\}=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2+1}\right\}=-\frac{1}{t}(-\sin t)$

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}=\frac{\sin t}{t}$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}\right\}$ **(**$\frac{2(\cos 2t-\cos t)}{t}$**)** **c)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{3}{s+2}\right\}$ **(**$\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}$**)**

4. Tích phân của phép biến đổi

Định lí 3. Cho $f(t)$ liên tục từng khúc đối với $t\geq 0$, $\exists\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$, $|f(t)|\leq Me^{ct}$ khi $t\to+\infty$, các số M, c không âm thì có $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(\sigma)d\sigma,\ s>c$ (4.1)

$$\Leftrightarrow\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty}F(\sigma)d\sigma\right\}\quad (4.2)$$

Chứng minh.

+) Từ giả thiết $\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ hội tụ tuyệt đối và đều, $s > c$

+) Ta có $\int_s^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma = \int_s^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t)\,dt\right)d\sigma$

+) Từ đó đổi thứ tự tích phân ta có $\int_s^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma = \int_0^{\infty}\left(\int_s^{\infty} e^{-\sigma t} f(t)\,d\sigma\right)dt = \int_0^{\infty} \left.\frac{e^{-\sigma t}}{-t}\right|_{\sigma=s}^{\infty} f(t)\,dt$

+) $= \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$

Ví dụ 1 a) Tìm $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$.

- Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sinh t}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\cosh t}{1} = 1$
- $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\mathcal{L}\{\sinh t\}\,d\sigma = \int_s^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2-1}$
- $= \frac{1}{2}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma+1}\right)d\sigma = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right]_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$
- $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$

b) $\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{t}\right\}$ $\quad$ ($\frac{1}{2}\ln\left(s^2+4\right)-\ln s,\ s>0$)

c) $\mathcal{L}\left\{\frac{e^t-e^{-t}}{t}\right\}$ $\quad$ ($\ln(s+1)-\ln(s-1),\ \ s>1$)

Ví dụ 2 a) Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2}\right\}$.

- Từ (4.2) có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2}\right\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty}\frac{2\sigma}{\left(\sigma^2-1\right)^2}\,d\sigma\right\}$
- $= t\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{-1}{\sigma^2-1}\right]_s^{\infty}\right\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = t.\sinh t$
- $f(t) = t\sinh t$ thoả mãn định lí 3.

$$L^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2}\right\}=t\sinh t.$$

b) $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^2+1\right)^3}\right\}$ $\left(\dfrac{1}{8}\left(t\sin t-t^2\cos t\right)\right)$

5. Phép biến đổi của hàm liên tục từng khúc

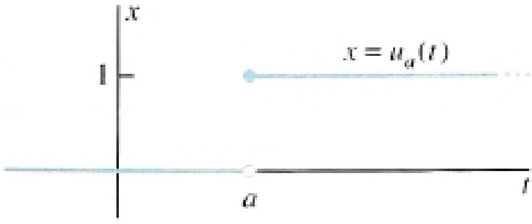
a) Đặt vấn đề

• Các mô hình toán học trong hệ cơ học hay hệ điện thường liên quan đến các hàm không liên tục tương ứng với các lực bên ngoài bất ngờ đảo chiều bật hay tắt.

• Hàm đơn giản bật, tắt là hàm bậc thang đơn vị tại $t=a$ (hàm Heaviside)

$$u_a(t)=u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\ge a\end{cases}$$

có đồ thị như sau



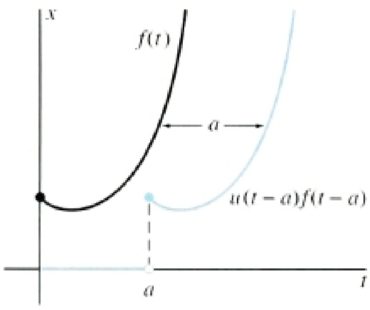
Hình 4.5.1. Đồ thị của hàm đơn vị bậc thang

b) Phép tịnh tiến trên trục t

Định lí 4. Nếu $L\{f(t)\}$ tồn tại với $s>c$, thì có

$$L\{u(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}F(s)=e^{-as}L\{f\} \quad (2.1)$$

và $$L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=u(t-a)f(t-a)=u(t-a)L^{-1}\{F\}(t-a),\ s>c+a \quad (2.2)$$



Hình 4.5.2. Tịnh tiến của $f(t)$ về phía phải a đơn vị

Chứng minh. +) Ta có $e^{-as}F(s)=\int_0^{\infty}e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau$

+) Đổi biến $t=\tau+a$, ta có $e^{-as}F(s)=\int_a^{\infty}e^{-st}f(t-a)dt$

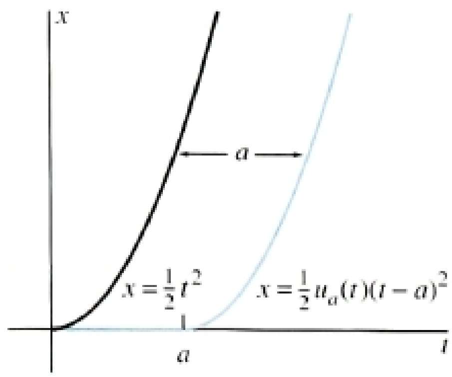
+) Do $u(t-a)f(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ f(t-a), & t\ge a\end{cases}$, nên có

$$e^{-as}F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt=\mathcal{L}\ \{u(t-a)f(t-a)\}.$$

Ví dụ 1. Cho $f(t)=\frac{1}{2}t^2$. Tính $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\}$

• Từ (2.2) có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\}=u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t-a)=u(t-a)\frac{1}{2}(t-a)^2$

• $=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{1}{2}(t-a)^2 & t\ge a\end{cases}$



Hình 4.5.3. Đồ thị của biến đổi ngược trong Ví dụ 1

Ví dụ 2. Cho $g(t)=\begin{cases}0 & t<3\\ t^2 & t\ge 3\end{cases}$. Tìm $\mathcal{L}\ \{g(t)\}$

• Do $g(t)=t^2$ nên có $f(t)=(t+3)^2$

• $F(s)=\mathcal{L}\ \{t^2+6t+9\}=\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}$

• Từ định lí có $\mathcal{L}\ \{g(t)\}=\mathcal{L}\ \{u(t-3)f(t-3)\}=e^{-3s}F(s)=e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right)$

Ví dụ 3 a) Tìm $\mathcal{L}\ \{f(t)\}$ nếu $f(t)=\begin{cases}\cos 2t & 0\le t<2\pi\\ 0 & t\ge 2\pi\end{cases}$

• $f(t)=\left[1-u\left(t-2\pi\right)\right]\cos 2t=\cos 2t-u(t-2\pi)\cos 2\left(t-2\pi\right)$

• Từ định lí 1 có $\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\cos 2t\}-e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos 2t\}=\dfrac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4}$.

b) $f(t)=\begin{cases}1, & 1\le t\le 4\\ 0, & 0\le t<1 \text{ và } t>4\end{cases}$ $\left(F(s)=\dfrac{e^{-s}-e^{-4s}}{s}\right)$

c) $f(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & 0\le t\le 2\\ 0, & t>2\end{cases}$ $\left(F(s)=\dfrac{s\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2+\pi^2}\right)$

d) $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1\\ 1, & t>1\end{cases}$ $\left(F(s)=\dfrac{1-e^{-s}}{s^2}\right)$

Ví dụ 4. Một vật nặng 32 lb (1 lb = 450 g) được gắn tự do vào một lò xo bị căng ra 1 ft bởi một lực 4 lb. Khối lượng này ban đầu ở vị trí cân bằng. Bắt đầu tại thời điểm $t=0$ (lần thứ hai), một lực ở bên ngoài $f(t)=\cos 2t$ được tác động vào vật này. Tuy nhiên tại thời điểm $t=2\pi$ lực này bị mất đi (đột ngột không liên tục). Sau đó vật này lại tiếp tục chuyển động một cách tự do. Tìm hàm vị trí $x(t)$ của vật đã cho.

• Chuyển về bài toán giá trị ban đầu $x''+4x=f(t);\ x(0)=x'(0)=0$

ở đó $f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & 0\le t<2\pi\\ 0, & t\ge 2\pi\end{cases}$

• Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế ta có $(s^2+4)X(s)=F(s)=\dfrac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4}$,

• $X(s)=\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}-e^{-2\pi s}\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}$.

• Do $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}=\dfrac{1}{4}t\sin 2t$;

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\frac{s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}=u(t-2\pi).\frac{t-2\pi}{4}\sin 2(t-2\pi)$$

• Từ đó ta có $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(x^2+4\right)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}$

$$=\frac{1}{4}t\sin 2t-u(t-2\pi).\frac{t-2\pi}{4}\sin 2(t-2\pi)=\frac{1}{4}\left[t-u(t-2\pi).(t-2\pi)\right]\sin 2t$$

- $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t \sin 2t, & t < 2\pi, \\ \frac{1}{2} \pi \sin 2t, & t \geq 2\pi. \end{cases}$

Ta thấy, vật dao động với tần số $\omega = 2$ và với biên độ tăng tuyến tính đến khi lực được bỏ đi tại thời điểm $t = 2\pi$. Sau đó, vật tiếp tục chuyển động với cùng tần số nhưng với biên độ dao động $\frac{\pi}{2}$. Lực $F(t) = \cos 2t$ có thể tiếp tục được cộng hưởng, tuy nhiên ta thấy nó bị biến mất ngay lập tức tại thời điểm nó không còn tác động nữa.

Ví dụ 5. Giải bài toán giá trị ban đầu $mx'' + cx' + kx = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$

a) $m = 1, k = 4, c = 5, f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

$$\left(x(t) = g(t) - u(t-2)g(t-2),\ g(t) = \frac{1}{12}\left(3 - 4e^{-t} + e^{4t}\right) \right)$$

b) $m = 1, k = 1, c = 0,\ f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

$$\left(x(t) = g(t) - u(t-1)\left[g(t-1) + h(t-1)\right],\ g(t) = t - \sin t,\ h(t) = 1 - \cos t \right)$$

c) 1°/ $x'' + 9x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

$$\left(x(t) = \frac{1}{9}\left[1 - u(t-\pi) - (1 + u(t-\pi))\cos 3t\right] \right)$$

2°/ $x'' + 16x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

$$\left(x(t) = \frac{1}{16}[1 - u(t-\pi)][1 - \cos 4(t-\pi)] \right)$$

d) $x'' + x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$ $, x(0) = 0 = x'(0)$

$$\left(x(t) = 1 - \cos t - [1 - \cos(t-1)]u(t-1) \right)$$

BẢNG 2

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$e^{at}f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$
2	$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s), a>0$
3	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
4	$(f*g)(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s).\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$
5	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(\tau)d\tau$
6	$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$
7	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

BẢNG 3

	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
1	$F(s)$	$-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}(t)$
2	$F(s)$	$t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\delta)d\delta\right\}(t)$
3	$F(s-a)$	$e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
4	$e^{-as}F(s)$	$u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a)$
5	$F(s)G(s)$	$\left(\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}*\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\right)(t)$
6	$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\tau)d\tau$

THE END.

Thank you and good bye!

- "Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không
- Dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không
- Chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em "

9. 1945 Hồ Chí Minh

LỜI NÓI ĐẦU

Trong số các môn toán đại cương dành cho sinh viên các trường Đại học kĩ thuật, Giải tích III là môn học có nội dung kiến thức phong phú nhất và có nhiều ứng dụng thú vị nhất.

Để tạo điều kiện cho sinh viên học tốt trong quá trình học theo học chế tín chỉ, bài giảng Giải tích 3 được viết trên cơ sở đề cương Giải tích 3 của Bộ môn Toán cơ bản cho sinh viên Đại học Bách Khoa Hà Nội. Bài giảng chứa đựng đầy đủ các kiến thức cơ bản, các dạng toán quan trọng và có minh hoạ bằng các đề thi cuối kỳ.

Các dạng toán thực hành đều có đáp số kèm theo, tạo điều kiện thuận lợi cho các em sinh viên tự học, góp phần nâng cao hiệu quả bài giảng trên lớp. Bài giảng cũng cho nhiều ứng dụng thú vị của Toán học trong cuộc sống. Bài giảng được in trên một mặt, mặt còn lại dành cho sinh viên ghi chép những điều cần thiết ở bài giảng trên lớp. Đây là tài liệu có ích cho các em sinh viên muốn đạt kết quả tốt môn học này.

Mùa xuân năm 2015

PGS. TS. Nguyễn Xuân Thảo

MỤC LỤC