Nguyễn Công Phương

Lý thuyết trường điện từ

Các phương trình Poisson & Laplace

Nội dung

I. Giới thiệu
II. Giải tích véctơ
III. Luật Coulomb & cường độ điện trường
IV. Dịch chuyển điện, luật Gauss & đive
V. Năng lượng & điện thế
VI. Dòng điện & vật dẫn
VII. Điện môi & điện dung
VIII. Các phương trình Poisson & Laplace
IX. Từ trường dừng
X. Lực từ & điện cảm
XI. Trường biến thiên & hệ phương trình Maxwell
XII. Sóng phẳng
XIII. Phản xạ & tán xạ sóng phẳng
XIV. Dẫn sóng & bức xạ

Các phương trình Laplace & Poisson

1. Phương trình Poisson
2. Phương trình Laplace
3. Định lý nghiệm duy nhất
4. Giải phương trình Laplace
5. Giải phương trình Poisson
6. Nghiệm tích của phương trình Laplace
7. Các phương pháp số

Phương trình Poisson (1)

Luật Gauss: $\nabla.\mathbf{D} = \rho_v$

$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$

Gradient thế: $\mathbf{E} = -\nabla V$

$$\rightarrow \nabla.\mathbf{D} = \nabla.(\varepsilon\mathbf{E}) = -\nabla.(\varepsilon\nabla V) = \rho_v$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla.\nabla V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

(Phương trình Poisson)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla.\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\rightarrow \nabla.\nabla V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Phương trình Poisson (2)

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\bullet\nabla V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \\ &\nabla.\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ &\text{Đặt } \nabla\bullet\nabla = \nabla^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

(Hệ Descartes)

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

(Hệ trụ)

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

(Hệ cầu)

Ví dụ

Phương trình Poisson (3)

Tìm Laplacian của các trường vô hướng sau:

$$a)\ A = 2xy^2z^3$$

$$b)\ B = \frac{\cos 2\varphi}{\rho}$$

$$c)\ C = \frac{20\sin\theta}{r^3}$$

Các phương trình Laplace & Poisson

1. Phương trình Poisson
2. **Phương trình Laplace**
3. Định lý nghiệm duy nhất
4. Giải phương trình Laplace
5. Giải phương trình Poisson
6. Nghiệm tích của phương trình Laplace
7. Các phương pháp số

Phương trình Laplace

Phương trình Poisson: $\nabla^2 V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$

$\rho_v = 0$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$ (Phương trình Laplace, hệ Descartes)

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$ (Hệ trụ)

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0}$$

(Hệ cầu)

Các phương trình Laplace & Poisson

1. Phương trình Poisson
2. Phương trình Laplace
3. **Định lý nghiệm duy nhất**
4. Giải phương trình Laplace
5. Giải phương trình Poisson
6. Nghiệm tích của phương trình Laplace
7. Các phương pháp số

Định lý nghiệm duy nhất (1)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Giả sử phương trình Laplace có 2 nghiệm V_1 & V_2, :

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 V_1 &= 0 \\ \nabla^2 V_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

Giả sử phương trình Laplace có điều kiện bờ $V_b \rightarrow V_{1b} = V_{2b} = V_b$

$$\left.\begin{aligned} \nabla.(V\mathbf{D}) &= V(\nabla.\mathbf{D}) + \mathbf{D}.(\nabla V) \\ V &= V_1 - V_2 \\ \mathbf{D} &= \nabla(V_1 - V_2) \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \nabla.[(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] = (V_1 - V_2)[\nabla.\nabla(V_1 - V_2)] + \\ + \nabla(V_1 - V_2).\nabla(V_1 - V_2)$$

Định lý nghiệm duy nhất (2)

$$\nabla.[(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] = (V_1 - V_2)[\nabla.\nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2).\nabla(V_1 - V_2)$$

$$\to \boxed{\int_V \nabla.[(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]dv} = \int_V (V_1 - V_2)[\nabla.\nabla(V_1 - V_2)]dv + $$

$$+ \int_V \nabla(V_1 - V_2).\nabla(V_1 - V_2)dv$$

Định lý đive: $\oint_S \mathbf{D}.d\mathbf{S} = \int_V \nabla.\mathbf{D}dv$

$$\left.\begin{array}{r} \to \boxed{\int_V \nabla.[(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]dv} = \oint_S [(V_{1b} - V_{2b})\nabla(V_{1b} - V_{2b})].d\mathbf{S} \\ V_{1b} = V_{2b} = V_b \end{array}\right\}$$

$$\to \boxed{\int_V \nabla.[(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]dv} = 0$$

$$\to \boxed{0} = \int_V (V_1 - V_2)[\nabla.\nabla(V_1 - V_2)]dv + \int_V \nabla(V_1 - V_2).\nabla(V_1 - V_2)dv$$

Định lý nghiệm duy nhất (3)

$$\left.\begin{aligned}&\int_V (V_1 - V_2)[\nabla.\nabla(V_1 - V_2)]dv + \int_V \nabla(V_1 - V_2).\nabla(V_1 - V_2)dv = 0\\ &\nabla.\nabla(V_1 - V_2) = \nabla^2(V_1 - V_2) = 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\to \int_V \nabla(V_1 - V_2).\nabla(V_1 - V_2)dv = 0 = \int_V [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dv\\ &[\nabla(V_1 - V_2)]^2 \geq 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&\to [\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0 \to \nabla(V_1 - V_2) = 0\\ &\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\end{aligned}\right\} \to V_1 - V_2 = \text{const}\\ &\left.\begin{aligned}&\text{Tại biên giới } V_1 = V_{b1},\ V_2 = V_{b2}\\ &V_{1b} = V_{2b} = V_b\end{aligned}\right\} \to \text{const} = V_{b1} - V_{b2} = 0\end{aligned}\right\} \to \boxed{V_1 = V_2}$$

Các phương trình Laplace & Poisson

1. Phương trình Poisson
2. Phương trình Laplace
3. Định lý nghiệm duy nhất
4. **Giải phương trình Laplace**
5. Giải phương trình Poisson
6. Nghiệm tích của phương trình Laplace
7. Các phương pháp số

Giải phương trình Laplace (1)

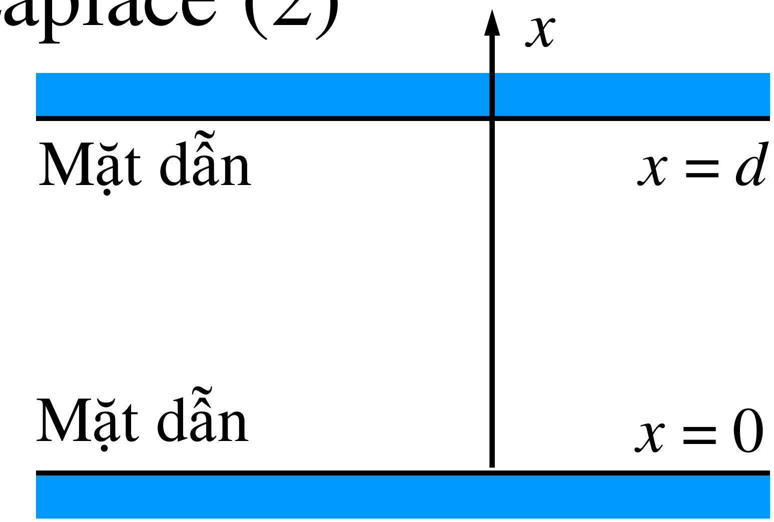
Ví dụ 1

$$\left.\begin{array}{l}\text{Giả sử } V = V(x)\\ \nabla^2 V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\end{array}\right\} \to \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \to \left.\begin{array}{l} V = Ax + B \\ V\big|_{x=x_1} = V_1 \\ V\big|_{x=x_2} = V_2 \end{array}\right\}$$

$$\to \begin{cases} A = \dfrac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \\ B = \dfrac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2} \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} V = \dfrac{V_1(x - x_2) - V_2(x - x_1)}{x_1 - x_2} \\ V\big|_{x=0} = 0 \\ V\big|_{x=d} = V_0 \end{array}\right\} \to \boxed{V = \frac{V_0 x}{d}}$$

Giải phương trình Laplace (2)

Ví dụ 1



$$\left.\begin{array}{l} V = V(x) \\ V\big|_{x=0} = 0 \\ V\big|_{x=d} = V_0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} V = \dfrac{V_0 x}{d} \\ \mathbf{E} = -\nabla V \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \mathbf{E} = -\dfrac{V_0}{d}\mathbf{a}_x \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{D} = -\varepsilon \frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$

$$\rightarrow \mathbf{D}_S = \mathbf{D}\big|_{x=0} = -\varepsilon \frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x \rightarrow D_N = -\varepsilon \frac{V_0}{d} \rightarrow \rho_S = D_N = -\varepsilon \frac{V_0}{d}$$

$$\rightarrow Q = \int_S \rho_S dS = \int_S \frac{-\varepsilon V_0}{d} dS = -\varepsilon \frac{V_0 S}{d} \rightarrow C = \frac{|Q|}{V_0} \boxed{= \frac{\varepsilon S}{d}}$$

Giải phương trình Laplace (3)

Ví dụ 2

Giả sử $V = V(\rho)$ (hệ trụ)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Giả sử } V = V(\rho) \text{ (hệ trụ)} \\ \nabla^2 V = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \end{array}\right\} \to \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

$$\to \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = 0 \to \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = 0 \to \rho\frac{dV}{d\rho} = A$$

$$\left.\begin{array}{l} \to V = A\ln\rho + B \\ \left.\begin{array}{l} V\big|_{\rho=a} = A\ln a + B = V_0 \\ V\big|_{\rho=b} = A\ln b + B = 0 \;\; (b > a) \end{array}\right\} \to \begin{cases} A = \dfrac{V_0}{\ln a - \ln b} \\ B = -\dfrac{V_0 \ln b}{\ln a - \ln b} \end{cases} \end{array}\right\} \to \boxed{V = V_0\frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}}$$

Giải phương trình Laplace (4)

Ví dụ 2

Giả sử $V = V(\rho)$ (hệ trụ)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Giả sử } V = V(\rho) \text{ (hệ trụ)} \\ \nabla^2 V = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{V = V_0 \dfrac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}}$$

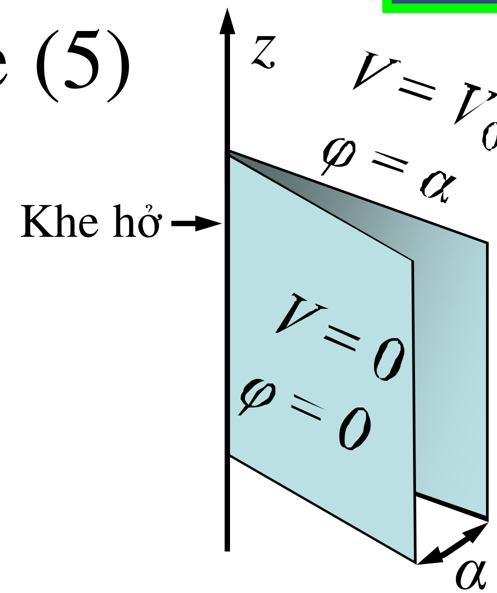
$$\rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_0}{\rho \ln(b/a)} \mathbf{a}_\rho$$

$$\rightarrow D_{N(\rho=a)} = \frac{\varepsilon V_0}{a \ln(b/a)} = \rho_S$$

$$\rightarrow Q = \int_S \rho_S dS = \frac{\varepsilon V_0 2\pi a L}{a \ln(b/a)} \rightarrow C = \frac{Q}{V_0} = \boxed{\frac{\varepsilon 2\pi L}{\ln(b/a)}}$$

Giải phương trình Laplace (5)

Ví dụ 3



Giả sử $V = V(\varphi)$ (hệ trụ)

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \rightarrow V = A\varphi + B$$

$$\left.\begin{array}{l} V\big|_{\varphi=0} = B = 0 \\ V\big|_{\varphi=\alpha} = A\alpha + B = V_0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \dfrac{V_0}{\alpha} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{V = V_0\frac{\varphi}{\alpha}}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{\alpha\rho}\mathbf{a}_\varphi}$$

Giải phương trình Laplace (6)

Ví dụ 4

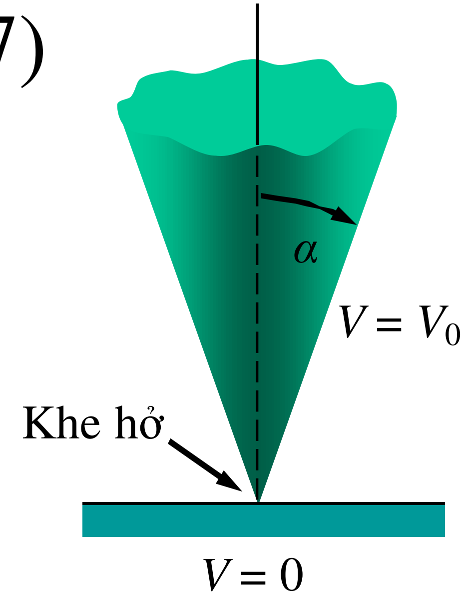
$$\left.\begin{array}{l}\text{Giả sử } V = V(\theta) \text{ (hệ cầu)}\\ \nabla^2 V = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0\\ \text{Giả sử } r \neq 0;\ \theta \neq 0;\ \theta \neq \pi\end{array}\right\} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0 \rightarrow \sin\theta\frac{dV}{d\theta} = A$$

$$\rightarrow dV = A\frac{d\theta}{\sin\theta} \quad \rightarrow V = \int A\frac{d\theta}{\sin\theta} + B = A\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right) + B$$

Giải phương trình Laplace (7)

Ví dụ 4



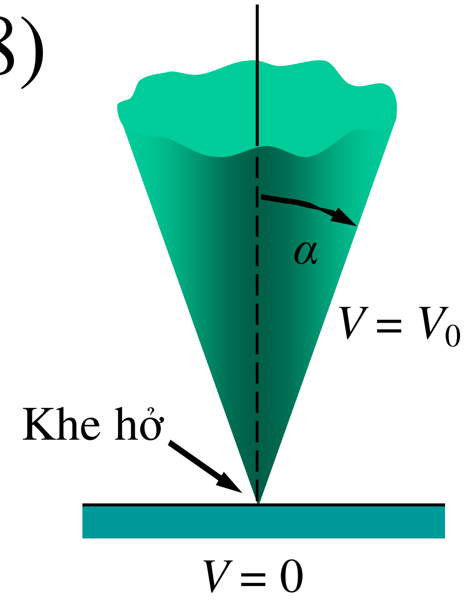
$$\left.\begin{aligned} &\text{Giả sử } V = V(\theta)\ \ (\text{hệ cầu}) \to V = A\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + B \\ &V\Big|_{\theta=\pi/2} = 0 \\ &V\Big|_{\theta=\alpha} = V_0\ \ (\alpha < \pi/2) \end{aligned}\right\}$$

$$\to V = V_0 \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)} \to \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r\sin\theta \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}\mathbf{a}_\theta$$

$$\to \rho_S = D_N = \varepsilon E = -\frac{\varepsilon V_0}{r\sin\alpha \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Giải phương trình Laplace (8)

Ví dụ 4



Giả sử $V = V(\theta)$ (hệ cầu) $\to \rho_S = -\dfrac{\varepsilon V_0}{r\sin\alpha \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

$$\left.\begin{aligned} &\to Q = \oint_S \rho_S dS = -\oint_S \frac{\varepsilon V_0}{r\sin\alpha\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)} dS \\ &dS = r\sin\alpha d\varphi dr \end{aligned}\right\}$$

$$\to Q = \frac{-\varepsilon V_0}{\sin\alpha\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r\sin\alpha d\varphi dr}{r} = \frac{-2\pi\varepsilon V_0}{\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty dr$$

$$\to C = \frac{Q}{V_0} \doteq \boxed{\frac{2\pi\varepsilon r_1}{\ln\left(\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}\right)}}$$

Các phương trình Laplace & Poisson

1. Phương trình Poisson
2. Phương trình Laplace
3. Định lý nghiệm duy nhất
4. Giải phương trình Laplace
5. **Giải phương trình Poisson**
6. Nghiệm tích của phương trình Laplace
7. Các phương pháp số

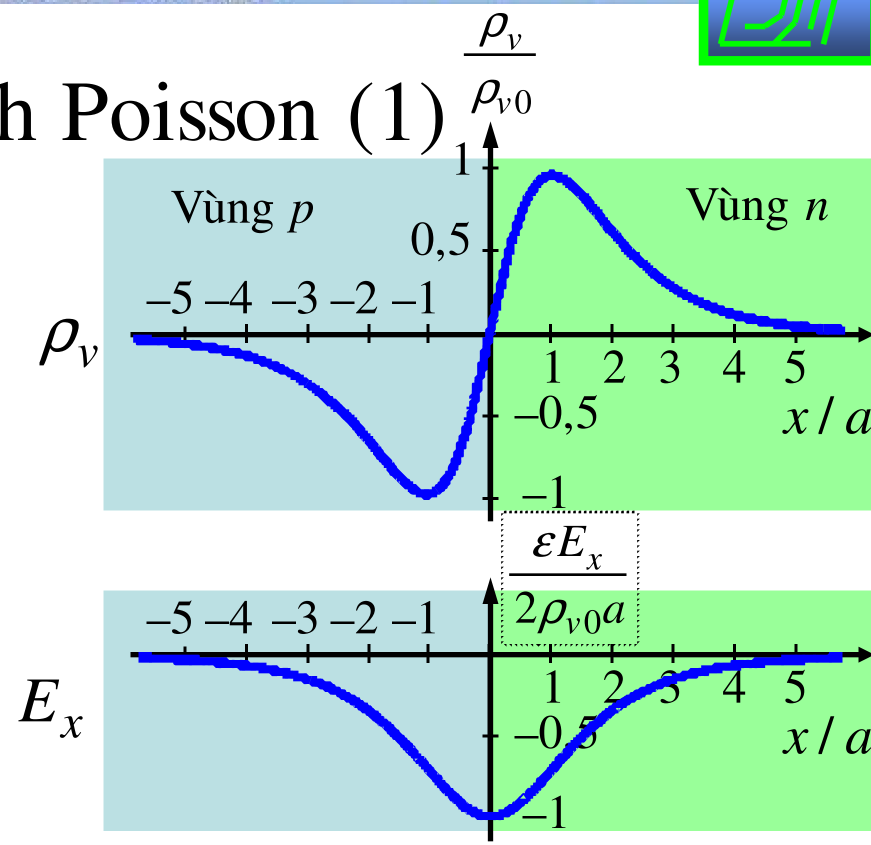
Giải phương trình Poisson (1)

$$\left.\begin{array}{l} \rho_v = 2\rho_{v0}\,\text{sech}\,\dfrac{x}{a}\,\text{th}\,\dfrac{x}{a} \\ \left(\ \text{sech}\,x = \dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}};\ \text{th}\,x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\ \right) \\ \text{Phương trình Poisson}: \nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{2\rho_{v0}}{\varepsilon}\,\text{sech}\,\frac{x}{a}\,\text{th}\,\frac{x}{a}$$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow \dfrac{dV}{dx} = \dfrac{2\rho_{v0}a}{\varepsilon}\,\text{sech}\,\dfrac{x}{a} + C_1 \\ E_x = -\dfrac{dV}{dx} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E_x = -\dfrac{2\rho_{v0}a}{\varepsilon}\,\text{sech}\,\dfrac{x}{a} - C_1 \\ \text{Khi } x \rightarrow \pm\infty \text{ thì } E_x \rightarrow 0 \end{array}\right\} \rightarrow C_1 = 0$$

$$\rightarrow E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\varepsilon}\,\text{sech}\,\frac{x}{a}$$



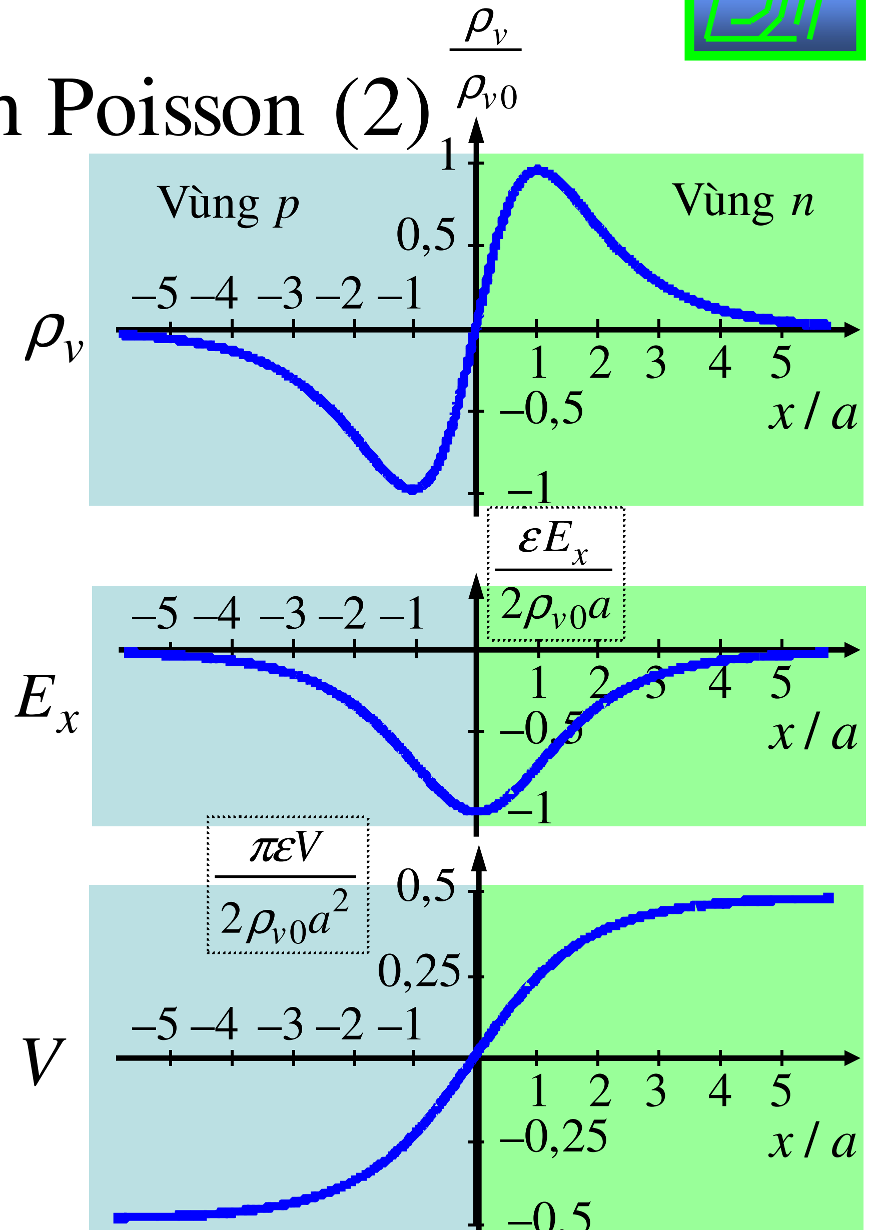
Giải phương trình Poisson (2)

$$\left.\begin{array}{l}\rho_v = 2\rho_{v0}\,\mathrm{sech}\,\dfrac{x}{a}\,\mathrm{th}\,\dfrac{x}{a} \\ \text{Phương trình Poisson}: \nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}\end{array}\right\}$$

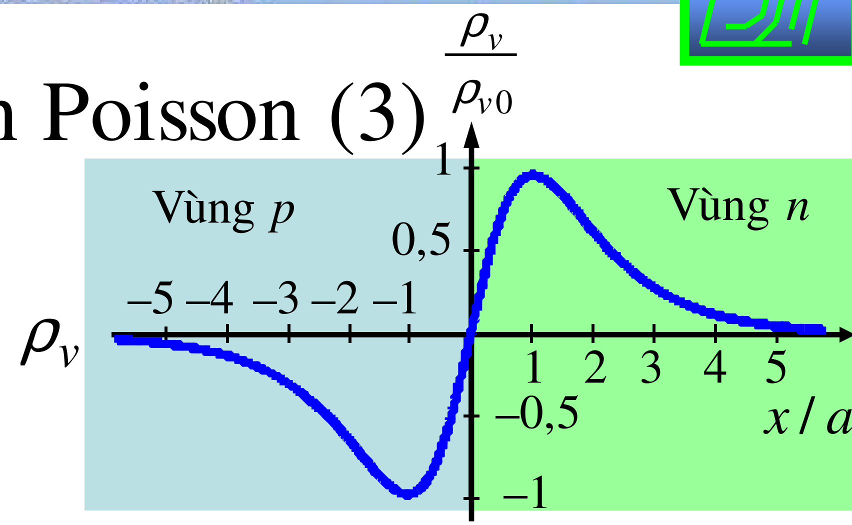
$$\rightarrow E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\varepsilon}\,\mathrm{sech}\,\frac{x}{a}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow V = \dfrac{4\rho_{v0}a^2}{\varepsilon}\,\mathrm{arctg}\,e^{x/a} + C_2 \\ \text{Giả sử } V\big|_{x=0} = 0 \rightarrow 0 = \dfrac{4\rho_{v0}a^2}{\varepsilon}\dfrac{\pi}{4} + C_2\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\varepsilon}\left(\mathrm{arctg}\,e^{x/a} - \frac{\pi}{4}\right)$$



Giải phương trình Poisson (3)



$$\rho_v = 2\rho_{v0}\,\mathrm{sech}\frac{x}{a}\,\mathrm{th}\frac{x}{a}$$

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\varepsilon}\left(\mathrm{arctg}\,e^{x/a} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &V_0 = V_{x\to\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_{v0}a^2}{\varepsilon} \\ &Q = \int_V \rho_v dv = \int_V 2\rho_{v0}\,\mathrm{sech}\frac{x}{a}\,\mathrm{th}\frac{x}{a}dv = S\int_0^\infty 2\rho_{v0}\,\mathrm{sech}\frac{x}{a}\,\mathrm{th}\frac{x}{a}dx = 2\rho_{v0}aS \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\to Q = S\sqrt{\frac{2\rho_{v0}\varepsilon V_0}{\pi}} \\ &I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_0}{dt} \to C = \frac{dQ}{dV_0} \end{aligned}\right\} \to \boxed{C = S\sqrt{\frac{\rho_{v0}\varepsilon}{2\pi V_0}} = \frac{\varepsilon S}{2\pi a}}$$

Các phương trình Laplace & Poisson

1. Phương trình Poisson
2. Phương trình Laplace
3. Định lý nghiệm duy nhất
4. Giải phương trình Laplace
5. Giải phương trình Poisson
6. **Nghiệm tích của phương trình Laplace**
7. Các phương pháp số

Nghiệm tích của phương trình Laplace (1)

- Các ví dụ trước giả thiết rằng *V* chỉ biến thiên theo/phụ thuộc vào một tọa độ
- Phương pháp nghiệm tích áp dụng cho $V(x, y)$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \\ &V = V(x, y) \end{aligned}\right\} \to \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

- Giả sử $V = XY$, $X = X(x)$, $Y = Y(y)$

$$\to Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \qquad \to Y\frac{d^2 X}{dx^2} + X\frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (2)

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0\rightarrow\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0\rightarrow\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2}\ \text{chỉ phụ thuộc } x\\ -\dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2}\ \text{chỉ phụ thuộc } y\end{matrix}\right\}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2}=\alpha^2\\ -\dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2}=\alpha^2\end{cases}$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (3)

$$\left.\begin{aligned} & V = V(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \\ & \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho}{R}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right) = \alpha^2 \\ -\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \alpha^2 \end{cases}$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (4)

$$\left.\begin{aligned} &V = V(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta) \\ &\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\to \left(\frac{\rho}{R^2}\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{2\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \left(\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\Theta\,\mathrm{tg}\,\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{\rho}{R^2}\dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \dfrac{2\rho}{R}\dfrac{\partial R}{\partial\rho} = n(n+1) \\ \dfrac{1}{\Theta}\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\Theta\,\mathrm{tg}\,\theta}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\theta} = -n(n+1) \end{cases}$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (5)

Ví dụ

Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

$$V = V(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho}{R}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right) = \alpha^2 \\ -\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \alpha^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Đặt } \Phi(\varphi) = \sum A_p \cos p\varphi + \sum B_p \sin p\varphi, \quad p = \pm\alpha \\ V(\varphi) = V(-\varphi); \quad V(\varphi) = -V(\pi - \varphi) \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \Phi(\varphi) = A_1 \cos\varphi, \qquad \alpha = 1$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (6)

Ví dụ

Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \alpha^2 \quad \rightarrow \Phi(\varphi) = A_1\cos\varphi, \qquad \alpha = 1 \\ \dfrac{\rho}{R}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right) = \alpha^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\rho}{R}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right) = \alpha^2 \\ \text{Đặt } R(\rho) = B_k\rho^k \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{\rho}{R}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right) = \dfrac{k^2B_k\rho^k}{B_k\rho^k} = \alpha^2 \\ \alpha = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow k = \pm 1$$

$$\rightarrow R(\rho) = B_1^+\rho + B_1^-\rho^{-1}$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (7)

Ví dụ

Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=\alpha^2 \rightarrow \Phi(\varphi)=A_1\cos\varphi \\ \dfrac{\rho}{R}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)=\alpha^2 \rightarrow R(\rho)=B_1^+\rho+B_1^-\rho^{-1}\end{cases} \\ V=V(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow V=A_1B_1^+\rho\cos\varphi+A_1B_1^-\rho^{-1}\cos\varphi=C^+\rho\cos\varphi+C^-\rho^{-1}\cos\varphi$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (8)

Ví dụ

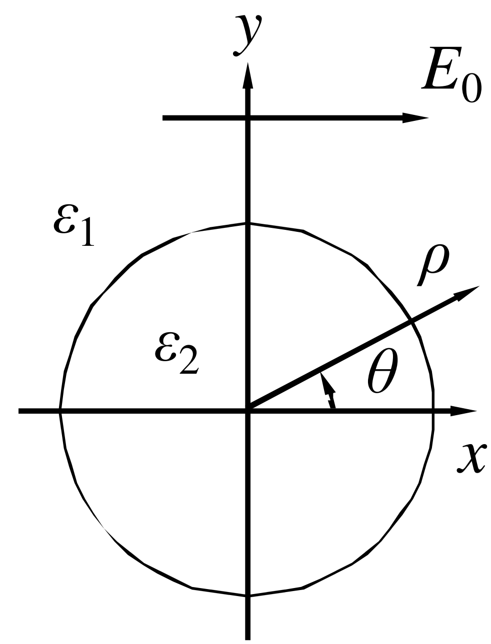
Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

Ngoài: $V_1 = C_1^+ \rho \cos\varphi + C_1^- \rho^{-1} \cos\varphi$

Trong: $V_2 = C_2^+ \rho \cos\varphi + C_2^- \rho^{-1} \cos\varphi$

$$\left.\begin{aligned} V\big|_{-\infty} &= E_0\, x\big|_{x\to-\infty} \\ V\big|_{-\infty} &= V_1\big|_{\theta=\pi,\ \rho\to-\infty} = -C_1^+ x\big|_{x\to-\infty} \end{aligned}\right\} \to C_1^+ = -E_0$$

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{gốc tọa độ}} = V_2\big|_{\rho\to0} = \frac{C_2^-}{\rho}\bigg|_{\rho\to0} \to \infty \\ \text{Ở gốc tọa độ điện trường vẫn hữu hạn} \end{aligned}\right\} \to C_2^- = 0$$



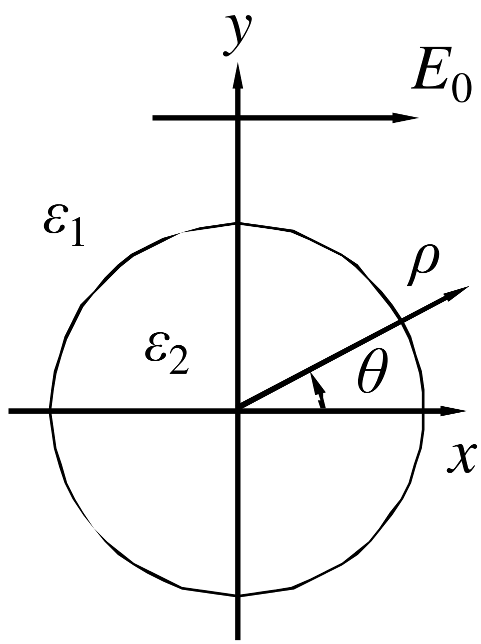
Nghiệm tích của phương trình Laplace (9)

Ví dụ

Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ngoài: } V_1 = C_1^+ \rho\cos\varphi + C_1^- \rho^{-1}\cos\varphi \\ &\text{Trong: } V_2 = C_2^+ \rho\cos\varphi + C_2^- \rho^{-1}\cos\varphi \\ &C_1^+ = -E_0, \quad C_2^- = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} V_1 = -E_0\rho\cos\varphi + C_1^-\rho^{-1}\cos\varphi \\ V_2 = C_2^+\rho\cos\varphi \end{cases}$$



Nghiệm tích của phương trình Laplace (10)

Ví dụ

Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

$$V_1 = -E_0 \rho \cos\varphi + C_1^- \rho^{-1} \cos\varphi$$

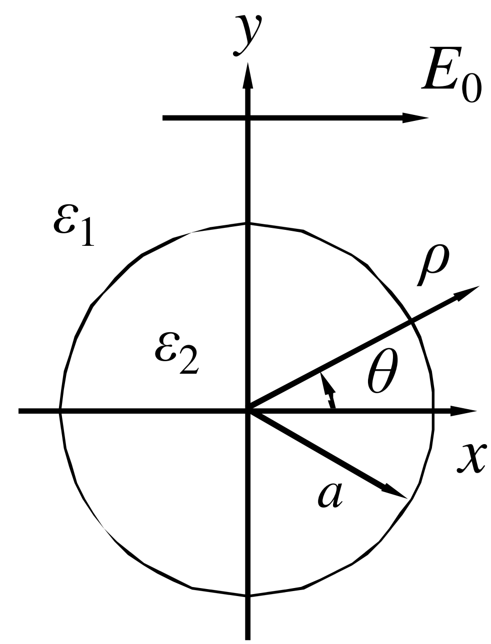
$$V_2 = C_2^+ \rho \cos\varphi$$

$$V_1\Big|_{\rho=a} = V_2\Big|_{\rho=a}$$

$$\rightarrow (-E_0 a + C_1^- a^{-1})\cos\varphi = C_2^+ a \cos\varphi$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a}$$

$$\rightarrow \varepsilon_1(-E_0 - C_1^- a^{-2})\cos\varphi = \varepsilon_2 C_2^+ a \cos\varphi$$



Nghiệm tích của phương trình Laplace (11)

Ví dụ

Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

$$\left.\begin{aligned}
&V_1 = -E_0\rho\cos\varphi + C_1^-\rho^{-1}\cos\varphi\\
&V_2 = C_2^+\rho\cos\varphi\\
&\left.\begin{aligned}
&(-E_0 a + C_1^- a^{-1})\cos\varphi = C_2^+ a\cos\varphi\\
&\varepsilon_1(-E_0 - C_1^- a^{-2})\cos\varphi = \varepsilon_2 C_2^+ a\cos\varphi
\end{aligned}\right\}\rightarrow C_1^- = -E_0\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}a^2,\ C_2^+ = -E_0\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}
\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases}
V_1 = -E_0\left(1-\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{a^2}{\rho^2}\right)\rho\cos\varphi, & \text{với } \rho \ge a\\[2ex]
V_2 = -E_0\dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\rho\cos\varphi & \text{với } \rho \le a
\end{cases}}$$

Nghiệm tích của phương trình Laplace (12)

Ví dụ

Khảo sát điện thế & điện trường ở lân cận một vật hình trụ tròn dài vô hạn nằm trong một điện trường đều E_0. Điện môi của môi trường & của vật lần lượt là ε_1 & ε_2. Điện trường vuông góc với trục của vật.

$$\begin{cases} V_1 = -E_0\left(1 - \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{a^2}{\rho^2}\right)\rho\cos\varphi, & \text{với } \rho \ge a \\ V_2 = -E_0\dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\rho\cos\varphi & \text{với } \rho \le a \end{cases}$$

$$\boxed{E_{1\rho} = -\frac{\partial V_1}{\partial \rho} = E_0\left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi, \qquad E_{1\varphi} = -\frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = -E_0\left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi}$$

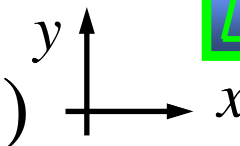
$$E_{2\rho} = -\frac{\partial V_2}{\partial \rho} = E_0\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\cos\varphi, \qquad E_{2\varphi} = -\frac{\partial V_2}{\partial \varphi} = -E_0\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\sin\varphi$$

$$\rightarrow \boxed{E_2 = E_{2z} = E_0\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

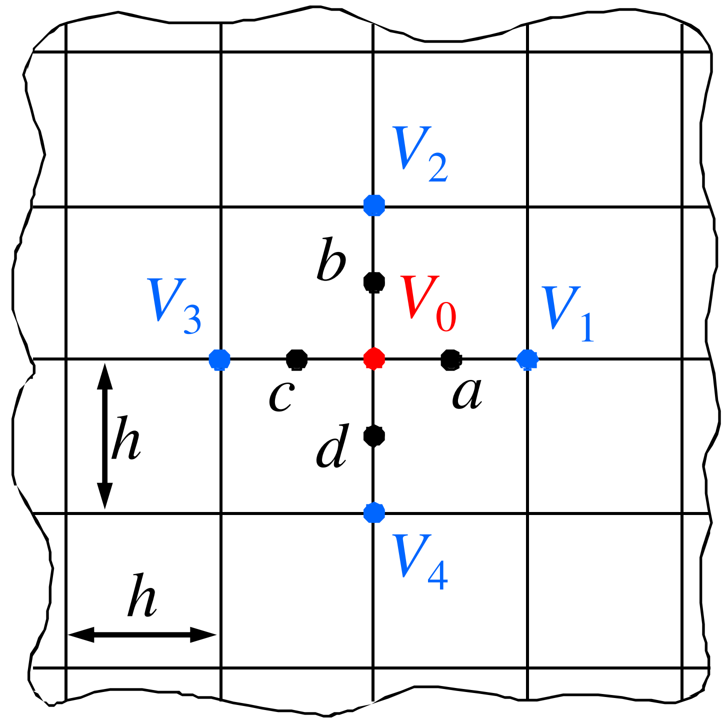
Các phương trình Laplace & Poisson

1. Phương trình Poisson
2. Phương trình Laplace
3. Định lý nghiệm duy nhất
4. Giải phương trình Laplace
5. Giải phương trình Poisson
6. Nghiệm tích của phương trình Laplace
7. **Các phương pháp số**
   a) **Phương pháp sai phân hữu hạn**
   b) **Phương pháp phần tử hữu hạn**

Phương pháp sai phân hữu hạn (1)

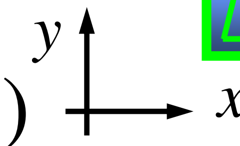


$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \\ V &= V(x, y)\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

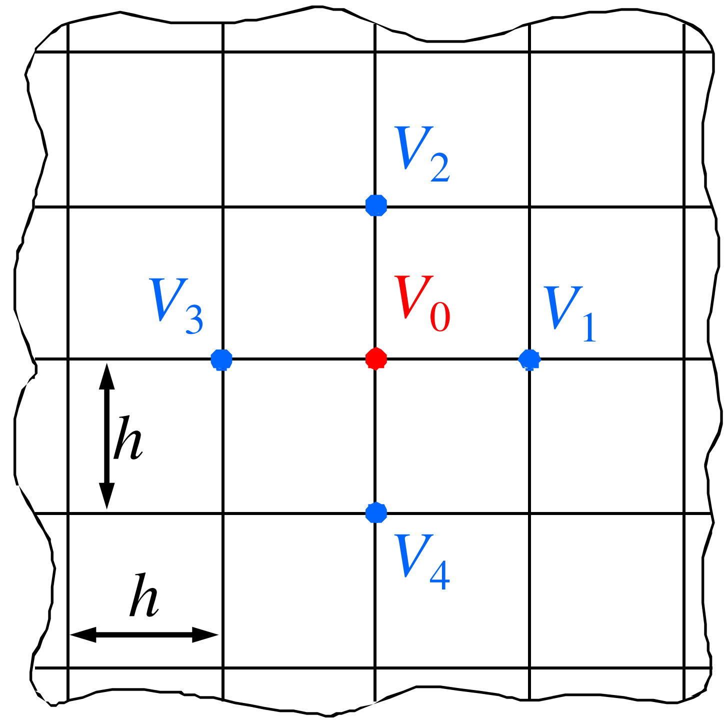


$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a &\approx \frac{V_1 - V_0}{h} \\ \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c &\approx \frac{V_0 - V_3}{h} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &\approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h}\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

Phương pháp sai phân hữu hạn (2)



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\approx\dfrac{V_1-V_0-V_0+V_3}{h^2}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\approx\dfrac{V_2-V_0-V_0+V_4}{h^2}\end{array}\right\}$$



$$\rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\approx\frac{V_1+V_2+V_3+V_4-4V_0}{h}=0$$

$$\rightarrow\boxed{V_0\approx\frac{1}{4}\left(V_1+V_2+V_3+V_4\right)}$$

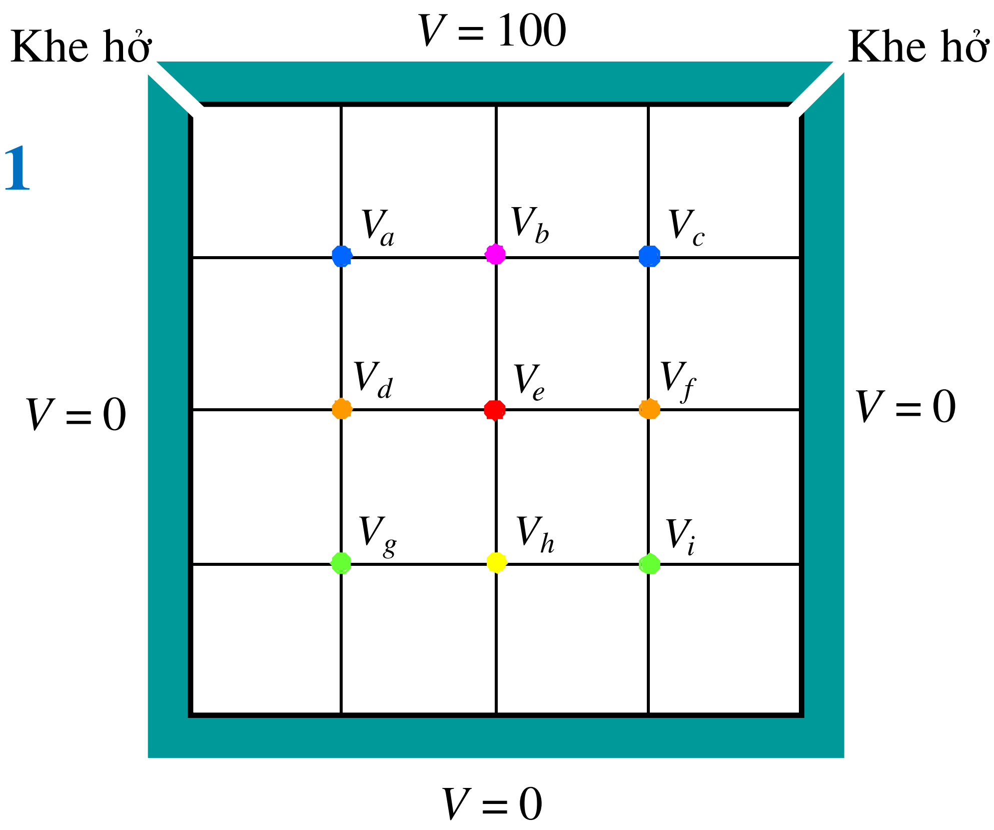
Phương pháp sai phân hữu hạn (3)

Ví dụ 1

$$V_0 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

Cách 1

$$\begin{cases} 4V_a = V_d + V_b + 100 + 0 \\ 4V_b = V_a + V_e + V_c + 100 \\ 4V_c = V_b + V_f + 0 + 100 \\ 4V_d = V_g + V_e + V_a + 0 \\ 4V_e = V_b + V_d + V_h + V_f \\ 4V_f = V_c + V_e + V_i + 0 \\ 4V_g = V_d + 0 + 0 + V_h \\ 4V_h = V_e + V_g + 0 + V_i \\ 4V_i = V_f + V_h + 0 + 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_a = 42,86\,\mathrm{V} \\ V_b = 52,68\,\mathrm{V} \\ V_c = 42,86\,\mathrm{V} \\ V_d = 18,75\,\mathrm{V} \\ V_e = 25,00\,\mathrm{V} \\ V_f = 18,75\,\mathrm{V} \\ V_g = 7,14\,\mathrm{V} \\ V_h = 9,82\,\mathrm{V} \\ V_i = 7,14\,\mathrm{V} \end{cases}$$



Phương pháp sai phân hữu hạn (4)

Ví dụ 1

$$V_0 = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

Cách 2

$$\boxed{\frac{1}{4}(0+100+0+0) = 25}$$

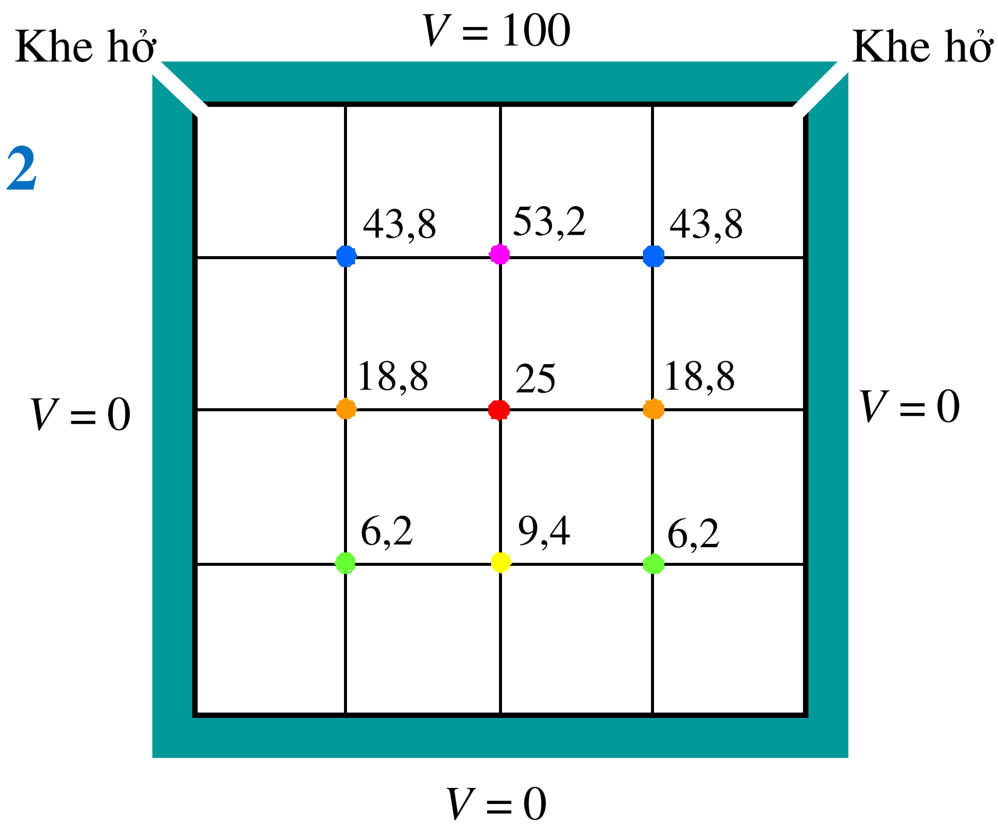
$$\boxed{\frac{1}{4}(100+50+0+25) = 43,8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}(0+25+0+0) = 6,2}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}(43,8+100+43,8+25) = 53,2}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}(25+43,8+0+6,2) = 18,8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}(6,2+25+6,2+0) = 9,4}$$



Bước 1

Phương pháp sai phân hữu hạn (5)

Ví dụ 1

$$V_0 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

Cách 2

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(100 + 50 + 0 + 25\right) = 43,8}$$

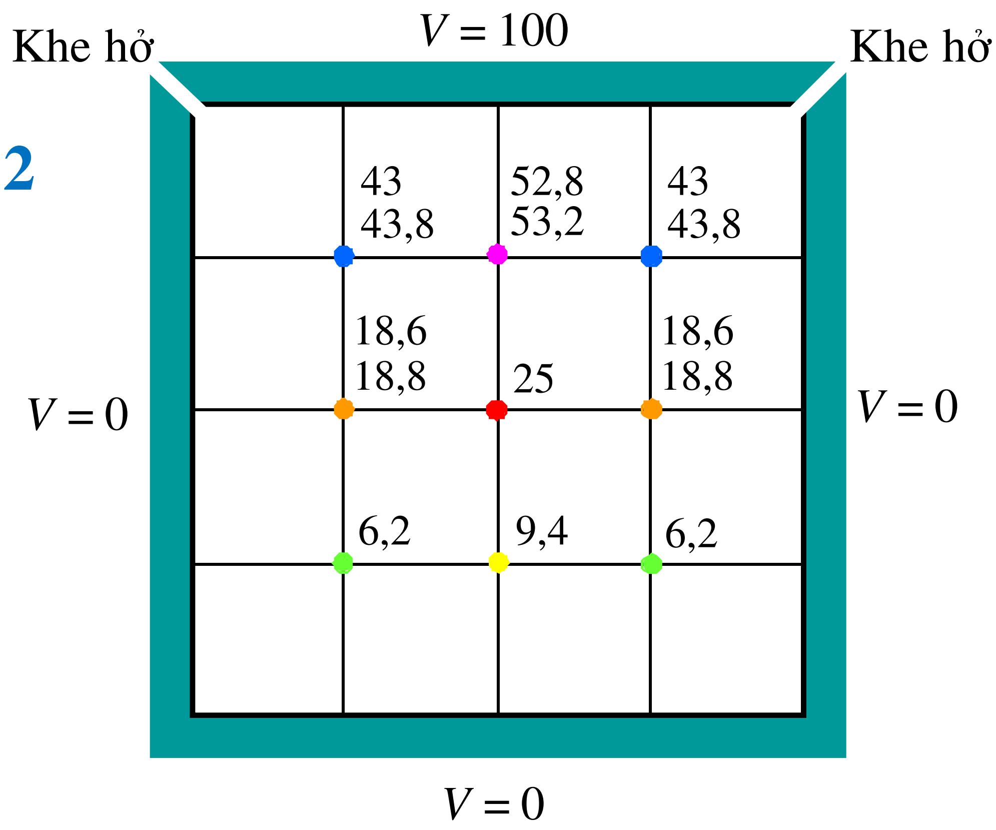
$$\boxed{\frac{1}{4}\left(53,2 + 100 + 0 + 18,8\right) = 43}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(43,8 + 100 + 43,8 + 25\right) = 53,2}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(43 + 100 + 43 + 25\right) = 52,8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(25 + 43,8 + 0 + 6,2\right) = 18,8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(25 + 43 + 0 + 6,2\right) = 18,6}$$



Bước 2

Phương pháp sai phân hữu hạn (6)

Ví dụ 1

$$V_0 = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

Cách 2

$$\frac{1}{4}(0+100+0+0) = 25$$

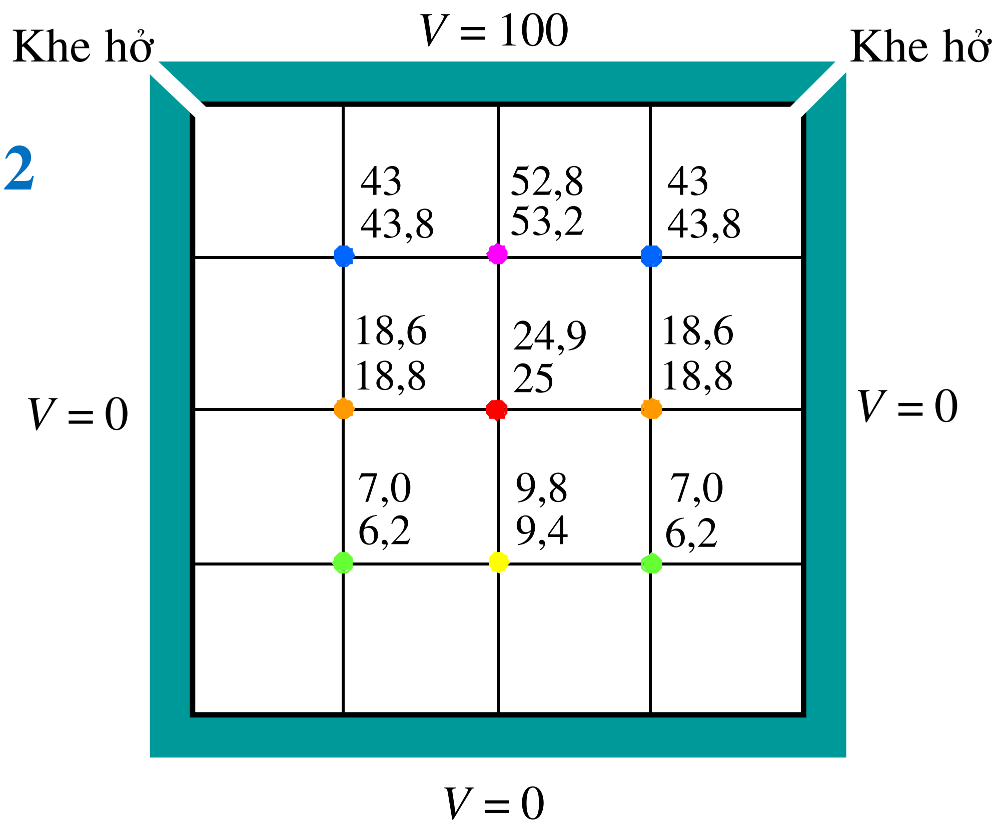
$$\frac{1}{4}(18,6+52,8+18,6+9,4) = 24,9$$

$$\frac{1}{4}(0+25+0+0) = 6,2$$

$$\frac{1}{4}(9,4+18,6+0+0) = 7,0$$

$$\frac{1}{4}(6,2+25+6,2+0) = 9,4$$

$$\frac{1}{4}(7,0+25+7,0+0) = 9,8$$



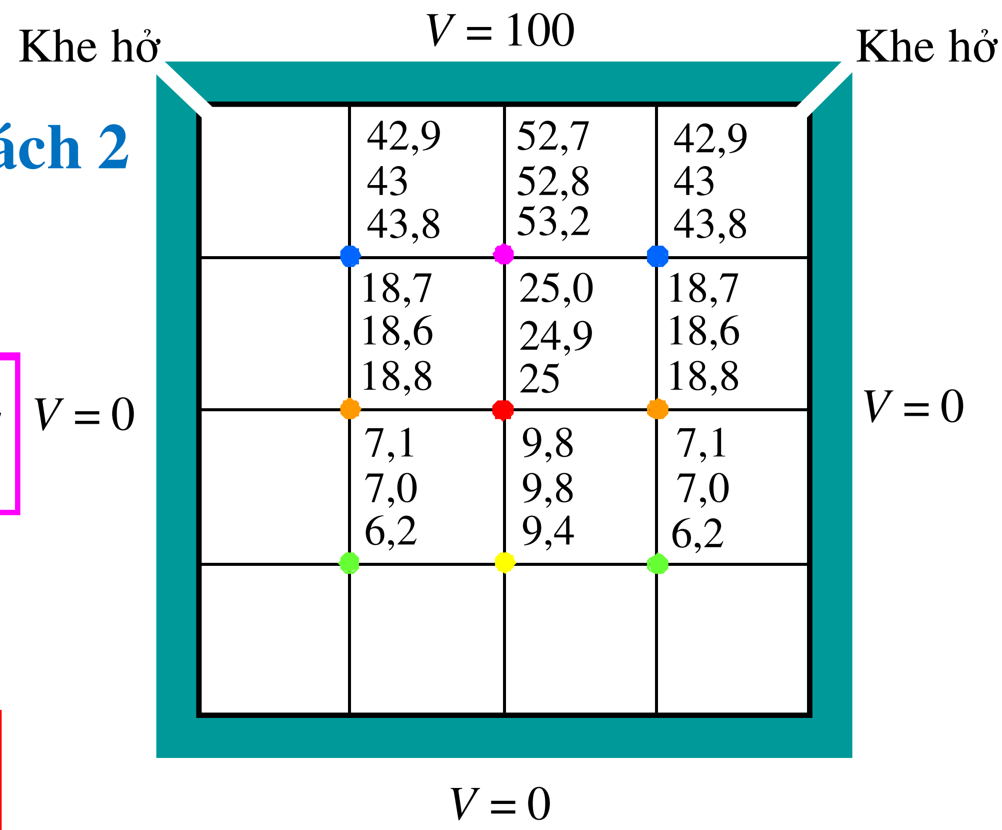
Bước 2

Phương pháp sai phân hữu hạn (7)

Ví dụ 1

$$V_0 = \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)$$

Cách 2



$$\frac{1}{4}\left(52,8+100+0+18,6\right)=42,9$$

$$\frac{1}{4}\left(42,9+100+42,9+24,9\right)=52,7$$

$$\frac{1}{4}\left(24,9+42,9+0+7,0\right)=18,7$$

$$\frac{1}{4}\left(18,7+52,7+18,7+9,8\right)=25,0$$

$$\frac{1}{4}\left(9,8+18,7+0+0\right)=7,1$$

$$\frac{1}{4}\left(7,1+25+7,1+0\right)=9,8$$

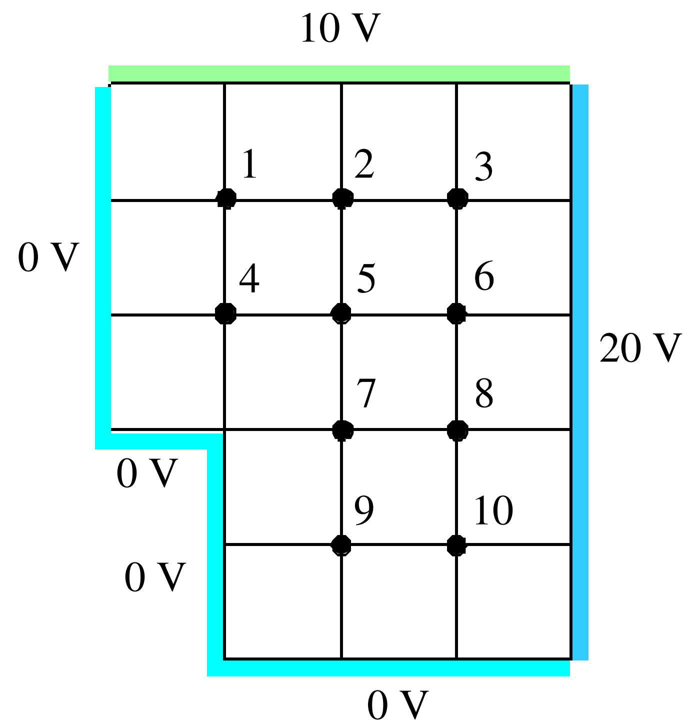
Bước 3

Phương pháp sai phân hữu hạn (8)

Ví dụ 2

Cách 1

$$\begin{cases} 4V_1 = V_2 + 10 + 0 + V_4 \\ 4V_2 = V_1 + V_5 + V_3 + 10 \\ 4V_3 = V_2 + V_6 + 20 + 10 \\ 4V_4 = V_1 + 0 + 0 + V_5 \\ 4V_5 = V_2 + V_4 + V_7 + V_6 \\ 4V_6 = V_3 + V_5 + V_8 + 20 \\ 4V_7 = V_5 + 0 + V_9 + V_8 \\ 4V_8 = V_6 + V_7 + V_{10} + 20 \\ 4V_9 = V_7 + 0 + 0 + V_{10} \\ 4V_{10} = V_8 + V_9 + 0 + 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = 5,6423\,\text{V} \\ V_2 = 9,1735\,\text{V} \\ V_3 = 13,1111\,\text{V} \\ V_4 = 3,3957\,\text{V} \\ V_5 = 7,9405\,\text{V} \\ V_6 = 13,2710\,\text{V} \\ V_7 = 5,9219\,\text{V} \\ V_8 = 12,0324\,\text{V} \\ V_9 = 3,7147\,\text{V} \\ V_{10} = 8,9368\,\text{V} \end{cases}$$



Phương pháp sai phân hữu hạn (9)

Ví dụ 2

Cách 2

$$V_1^{(0)} = V_2^{(0)} = \ldots = V_{10}^{(0)} = 0$$

$$V_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(V_2^{(0)} + 10 + 0 + V_4^{(0)}\right) = 2,5000\,\mathrm{V}$$

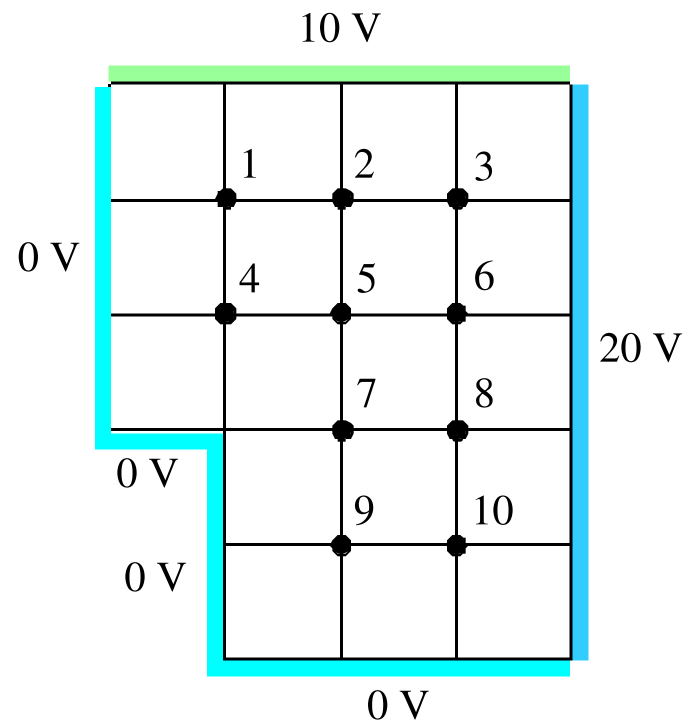
$$V_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(V_3^{(0)} + 10 + V_1^{(1)} + V_5^{(0)}\right) = 3,1250\,\mathrm{V}$$

...

$$V_7^{(1)} = \frac{1}{4}\left(V_8^{(0)} + V_5^{(1)} + 0 + V_9^{(0)}\right) = 0,2344\,\mathrm{V}$$

...

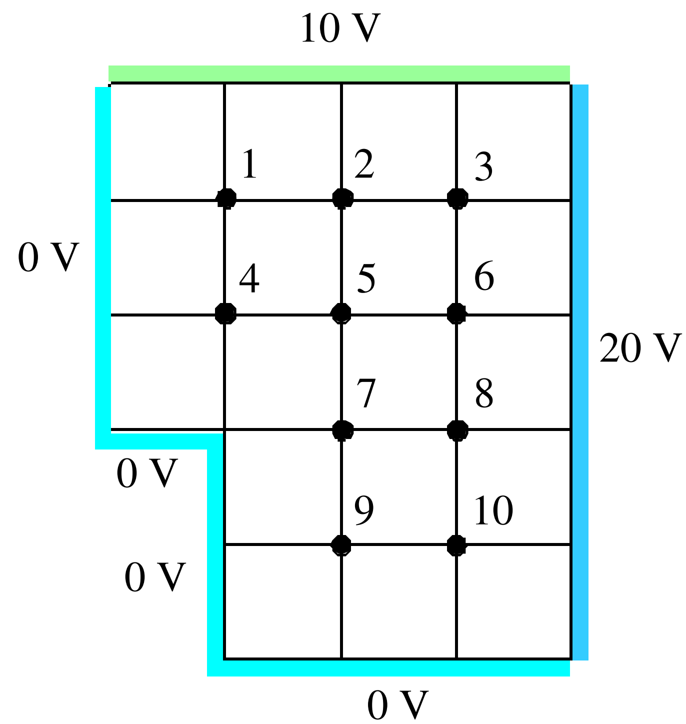
$$V_{10}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(20 + V_8^{(1)} + V_9^{(1)} + 0\right) = 6,7358\,\mathrm{V}$$



Phương pháp sai phân hữu hạn (10)

Ví dụ 2

k	0	1		23	24
$V_1^{(k)}$ (V)	0	2,5000		5,6429	5,6429
$V_2^{(k)}$ (V)	0	3,1250		9,1735	9,1735
$V_3^{(k)}$ (V)	0	8,2813		13,1111	13,1111
$V_4^{(k)}$ (V)	0	0,6250		3,3957	3,3957
$V_5^{(k)}$ (V)	0	0,9375		7,9405	7,9405
$V_6^{(k)}$ (V)	0	7,3047		13,2710	13,2710
$V_7^{(k)}$ (V)	0	0,2344		5,9219	5,9219
$V_8^{(k)}$ (V)	0	6,8848		13,0324	13,0324
$V_9^{(k)}$ (V)	0	0,0586		3,7147	3,7147
$V_{10}^{(k)}$ (V)	0	6,7358		8,9368	8,9368



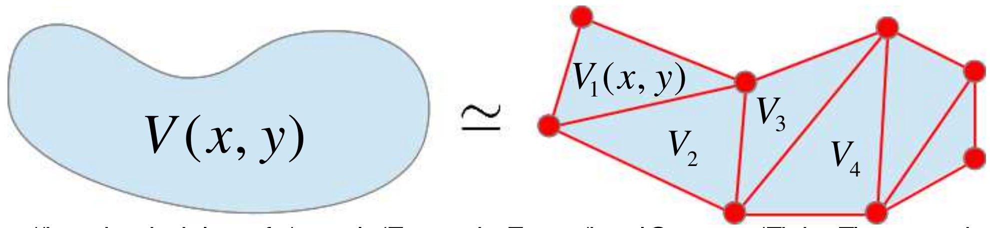
Cách 1

Các phương trình Laplace & Poisson

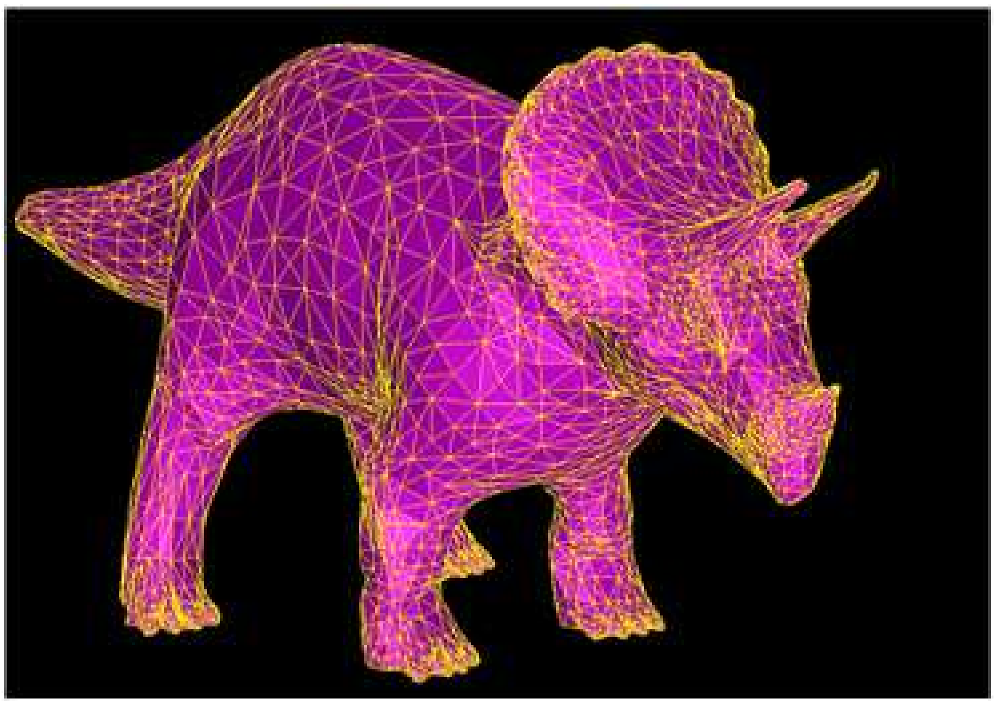
1. Phương trình Poisson
2. Phương trình Laplace
3. Định lý nghiệm duy nhất
4. Giải phương trình Laplace
5. Giải phương trình Poisson
6. Nghiệm tích của phương trình Laplace
7. **Các phương pháp số**
   a) Phương pháp sai phân hữu hạn
   b) **Phương pháp phần tử hữu hạn**

Phương pháp phần tử hữu hạn (1)

$$\nabla^2 V = 0$$



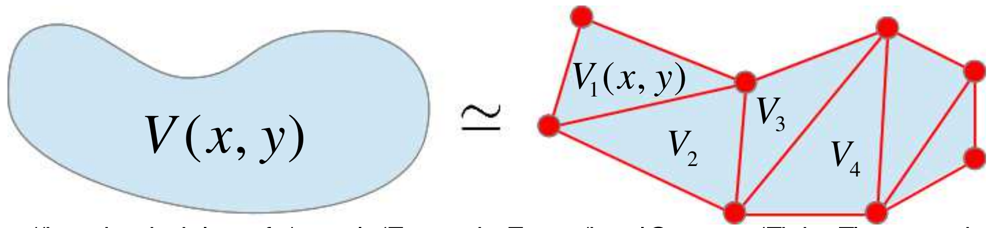
http://imagine.inrialpes.fr/people/Francois.Faure/htmlCourses/FiniteElements.html



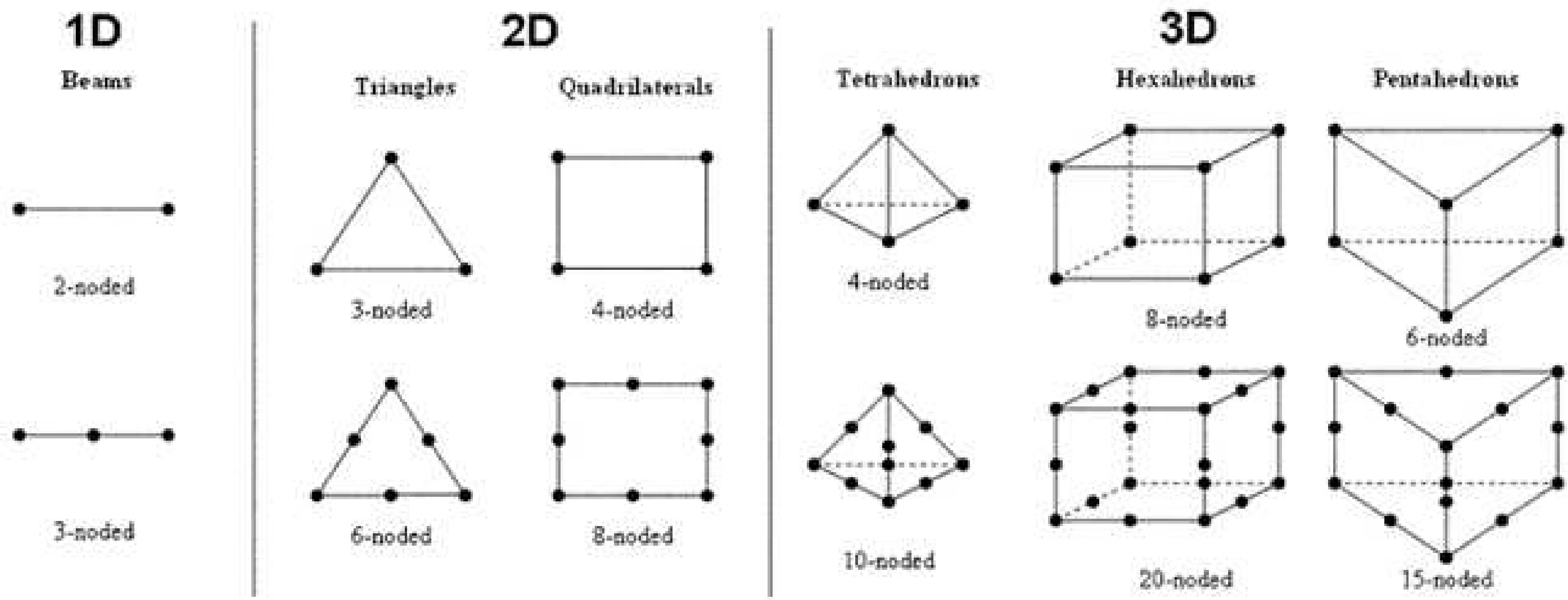
http://www.cosy.sbg.ac.at/~held/projects/mesh/mesh.html

Phương pháp phần tử hữu hạn (2)

$$\nabla^2 V = 0$$



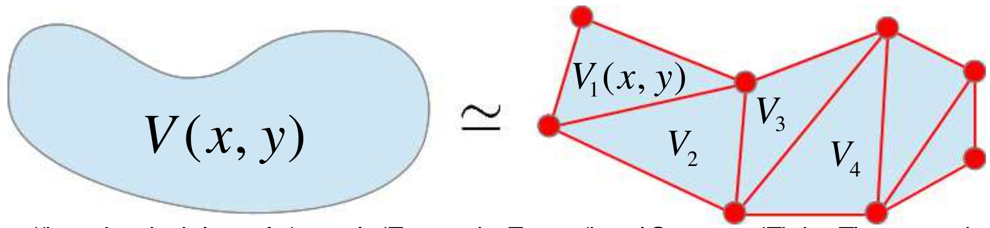
http://imagine.inrialpes.fr/people/Francois.Faure/htmlCourses/FiniteElements.html



http://illustrations.marin.ntnu.no/structures/analysis/FEM/theory/index.html

Phương pháp phần tử hữu hạn (3)

$\nabla^2 V = 0$



http://imagine.inrialpes.fr/people/Francois.Faure/htmlCourses/FiniteElements.html

- Chia vùng nghiệm thành một số lượng hữu hạn các phần tử,
- Xây dựng các phương trình cho một phần tử,
- Kết hợp các phần tử, &
- Giải hệ phương trình thu được.

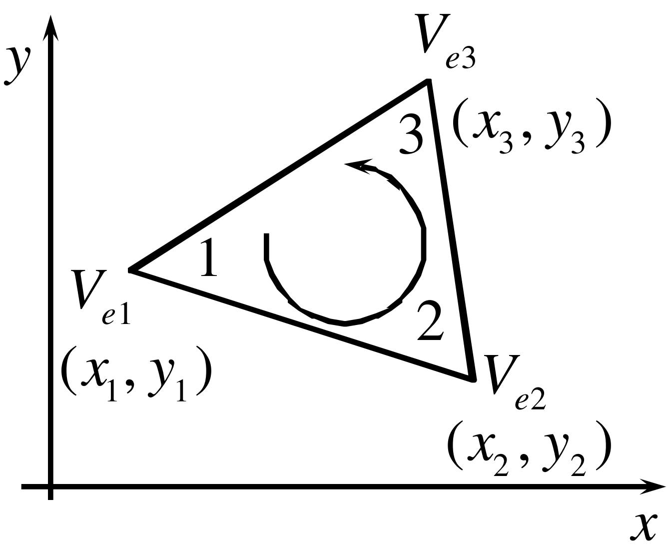
Phương pháp phần tử hữu hạn (4)

$$V(x,y)=\sum_{e=1}^{N}V_e(x,y)$$

$$V_e(x,y)=a+bx+cy$$

$$\begin{bmatrix}V_{e1}\\V_{e2}\\V_{e3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_2 & y_2\\1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_2 & y_2\\1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}V_{e1}\\V_{e2}\\V_{e3}\end{bmatrix}$$



$$\rightarrow V_e=\begin{bmatrix}1 & x & y\end{bmatrix}\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\1 & x_2 & y_2\\1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}(x_2y_3-x_3y_2) & (x_3y_1-x_1y_3) & (x_1y_2-x_2y_1)\\(y_2-y_3) & (y_3-y_1) & (y_1-y_2)\\(x_3-x_2) & (x_1-x_3) & (x_2-x_1)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}V_{e1}\\V_{e2}\\V_{e3}\end{bmatrix}$$

Phương pháp phần tử hữu hạn (5)

$$V_e = [1 \quad x \quad y] \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V_e = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (x, y) V_{ei}}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}[(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y],$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y],$$

$$A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

Phương pháp phần tử hữu hạn (6)

$$\nabla^2 V = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^2}{2} + bx + c\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_S \varepsilon E_e^2 dS \\ \mathbf{E} = -\nabla V \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow W_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_S \varepsilon \left|\nabla V_e\right|^2 dS \\ V_e = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x, y) V_{ei} \\ \rightarrow \nabla V_e = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} V_{ei} \nabla \alpha_i \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon V_{ei}\left[\int_S (\nabla\alpha_i)(\nabla\alpha_j) dS\right] V_{ej}$$

Phương pháp phần tử hữu hạn (7)

$$\left.\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon V_{ei}\left[\int_S (\nabla\alpha_i)(\nabla\alpha_j)dS\right]V_{ej} \\
C_{ij}^{(e)} &= \int_S (\nabla\alpha_i)(\nabla\alpha_j)dS \\
[V_e] &= \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \\
\left[C^{(e)}\right] &= \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow W_e = \frac{1}{2}\varepsilon[V_e]^T\left[C^{(e)}\right][V_e]$$

Phương pháp phần tử hữu hạn (8)

$$C_{ij}^{(e)} = \int_S (\nabla\alpha_i)(\nabla\alpha_j)dS$$

$$\left.\begin{aligned}
&C_{12}^{(e)} = \int_S (\nabla\alpha_1)(\nabla\alpha_2)dS \\
&\alpha_1 = \frac{1}{2A}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \\
&\alpha_2 = \frac{1}{2A}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \\
&A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]
\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow C_{12}^{(e)} = \frac{1}{4A}[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)]$$

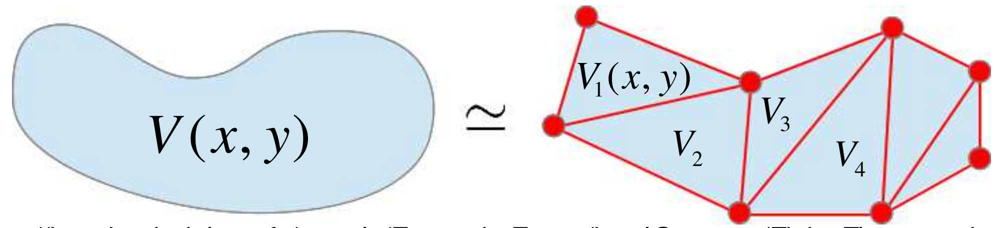
Phương pháp phần tử hữu hạn (9)

$$\left.\begin{aligned}
C_{12}^{(e)} &= \frac{1}{4A}[(y_2-y_3)(y_3-y_1)+(x_3-x_2)(x_1-x_3)] \\
C_{13}^{(e)} &= \frac{1}{4A}[(y_2-y_3)(y_1-y_2)+(x_3-x_2)(x_2-x_1)] \\
C_{23}^{(e)} &= \frac{1}{4A}[(y_3-y_1)(y_1-y_2)+(x_1-x_3)(x_2-x_1)] \\
C_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4A}[(y_2-y_3)^2+(x_3-x_2)^2] \\
C_{22}^{(e)} &= \frac{1}{4A}[(y_3-y_1)^2+(x_1-x_3)^2] \\
C_{33}^{(e)} &= \frac{1}{4A}[(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2] \\
C_{21}^{(e)} &= C_{12}^{(e)}, \quad C_{31}^{(e)} = C_{13}^{(e)}, \quad C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \\
&P_1 = y_2-y_3,\ P_2 = y_3-y_1,\ P_3 = y_1-y_2 \\
&Q_1 = x_3-x_2,\ Q_2 = x_1-x_3,\ Q_3 = x_2-x_1
\end{aligned}\right\} \to C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A}(P_iP_j+Q_iQ_j)$$

$$A = \frac{P_2Q_3-P_3Q_2}{2}$$

Phương pháp phần tử hữu hạn (3)

$$\nabla^2 V = 0$$



http://imagine.inrialpes.fr/people/Francois.Faure/htmlCourses/FiniteElements.html

- Chia vùng nghiệm thành một số lượng hữu hạn các phần tử,
- Xây dựng các phương trình cho một phần tử,
- **Kết hợp các phần tử**, &
- Giải hệ phương trình thu được.

Phương pháp phần tử hữu hạn (10)

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon [V_e]^T \left[C^{(e)}\right][V_e]$$

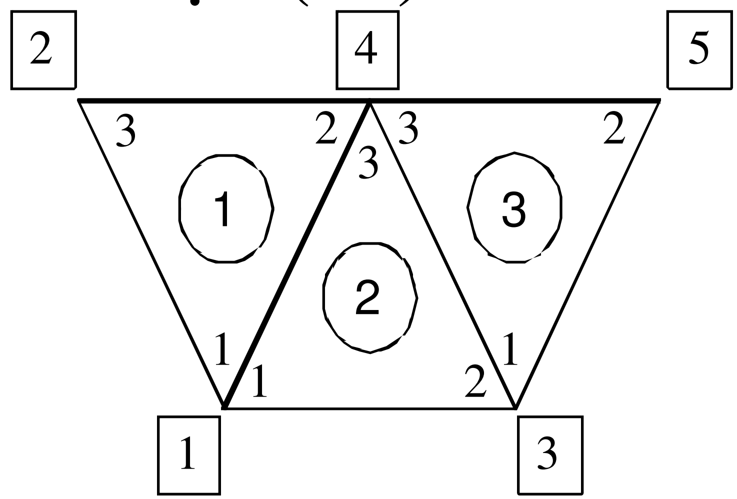
$$W = \sum_{e=1}^{N} W_e = \frac{1}{2}\varepsilon [V]^T [C][V]$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Phương pháp phần tử hữu hạn (11)

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon[V]^T[C][V]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$$



$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}$$

$$C_{22} = C_{33}^{(1)}$$

$$C_{44} = C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)}$$

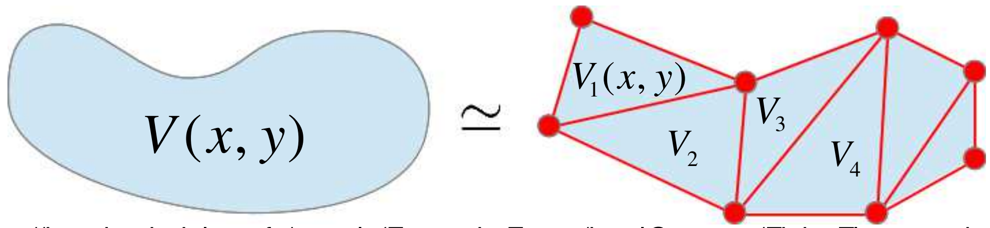
$$C_{14} = C_{41} = C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)}$$

$$C_{23} = C_{32} = 0$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & C_{32}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & 0 & C_{22}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{23}^{(2)} + C_{13}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{32}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} & C_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{23}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Phương pháp phần tử hữu hạn (3)

$$\nabla^2 V = 0$$



http://imagine.inrialpes.fr/people/Francois.Faure/htmlCourses/FiniteElements.html

- Chia vùng nghiệm thành một số lượng hữu hạn các phần tử,
- Xây dựng các phương trình cho một phần tử,
- Kết hợp các phần tử, &
- **Giải hệ phương trình thu được.**

Phương pháp phần tử hữu hạn (12)

$$\nabla^2 V = 0$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon[V]^T[C][V]$$

$$ax + b = 0$$

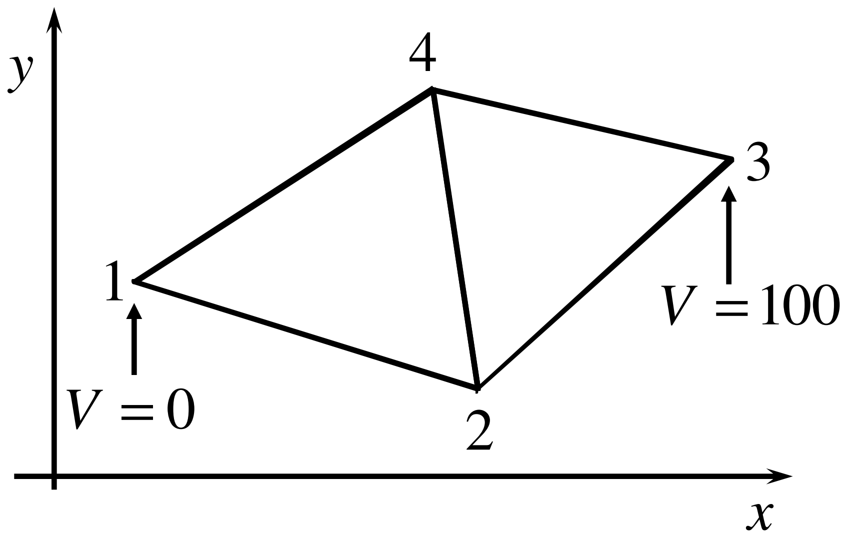
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^2}{2} + bx + c\right) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_1} = \frac{\partial W}{\partial V_2} = \cdots = \frac{\partial W}{\partial V_n} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial V_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\rightarrow \boxed{V_k = -\frac{1}{C_{kk}}\sum_{i=1, i\neq k}^{n} V_i C_{ki}}$$

VD Phương pháp phần tử hữu hạn (13)

Nút	1	2	3	4
x	0,5	3,1	5,0	2,8
y	1,0	0,4	1,7	2,0



$$C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A}(P_iP_j + Q_iQ_j), \qquad A = \frac{P_2Q_3 - P_3Q_2}{2}$$

$$P_1 = y_2 - y_3,\ P_2 = y_3 - y_1,\ P_3 = y_1 - y_2$$

$$Q_1 = x_3 - x_2,\ Q_2 = x_1 - x_3,\ Q_3 = x_2 - x_1$$

Phần tử 1:

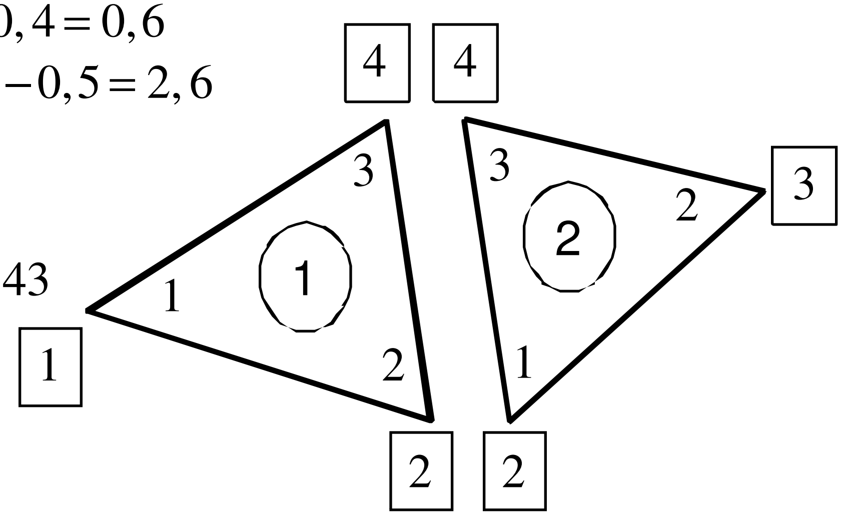
$$P_1 = 0,4 - 2,0 = -1,6;\ \ P_2 = 2,0 - 1,0 = 1,0;\ \ P_3 = 1,0 - 0,4 = 0,6$$

$$Q_1 = 2,8 - 3,1 = -0,3;\ \ Q_2 = 0,5 - 2,8 = -2,3;\ \ Q_3 = 3,1 - 0,5 = 2,6$$

$$A = \frac{1,0.2,6 - 0,6(-2,3)}{2} = 1,99$$

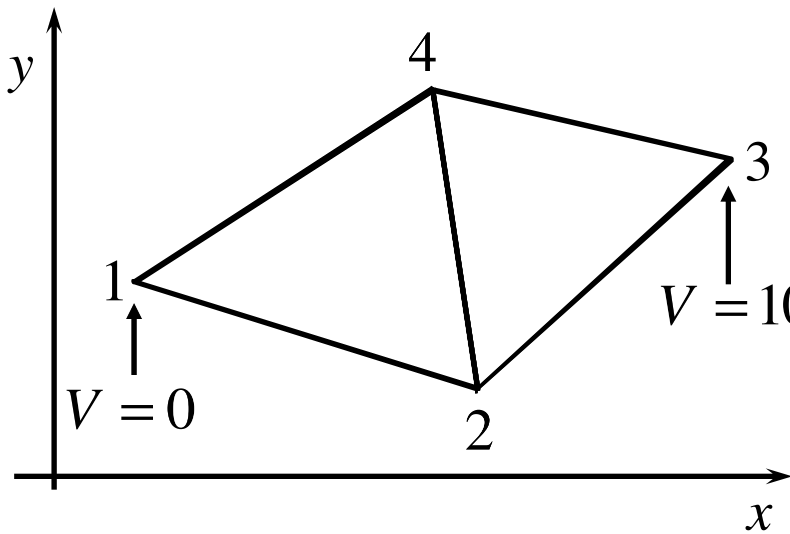
$$C_{12}^{(1)} = \frac{P_1P_2 + Q_1Q_2}{4.1,99} = \frac{(-1,6)1,0 + (-0,3)(-2,3)}{4.1,99} = -0,1143$$

$$\left[C^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0,3329 & -0,1143 & -0,2186 \\ -0,1143 & 0,7902 & -0,6759 \\ -0,2186 & -0,6759 & 0,8945 \end{bmatrix}$$



VD Phương pháp phần tử hữu hạn (14)

Nút	1	2	3	4
x	0,5	3,1	5,0	2,8
y	1,0	0,4	1,7	2,0



$$C_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A}(P_iP_j + Q_iQ_j), \qquad A = \frac{P_2Q_3 - P_3Q_2}{2}$$

$$P_1 = y_2 - y_3,\ P_2 = y_3 - y_1,\ P_3 = y_1 - y_2$$

$$Q_1 = x_3 - x_2,\ Q_2 = x_1 - x_3,\ Q_3 = x_2 - x_1$$

Phần tử 2:

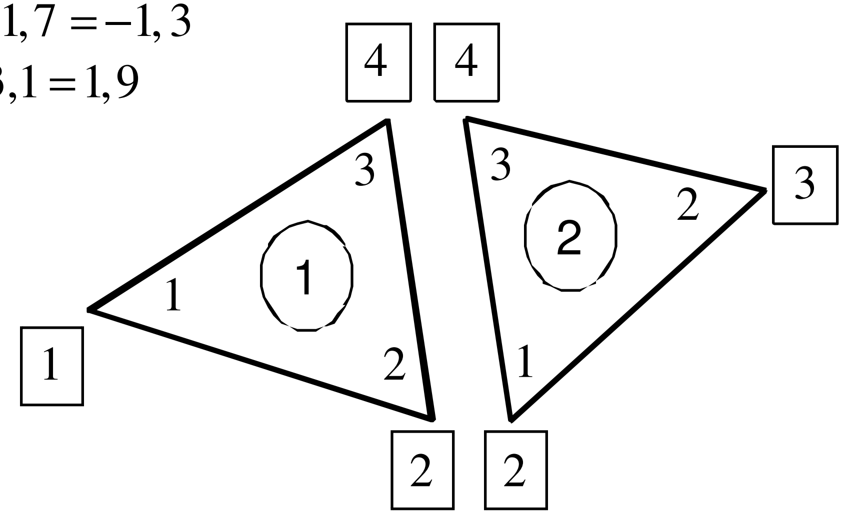
$$P_1 = 1,7 - 2,0 = -0,3;\ \ P_2 = 2,0 - 0,4 = 1,6;\ \ P_3 = 0,4 - 1,7 = -1,3$$

$$Q_1 = 2,8 - 5 = -2,2;\ \ Q_2 = 3,1 - 2,8 = 0,3;\ \ Q_3 = 5,0 - 3,1 = 1,9$$

$$A = \frac{1,6.1,9 - (-1,3)0,3}{2} = 1,715$$

$$C_{22}^{(2)} = \frac{P_2P_2 + Q_2Q_2}{4.1,715} = \frac{1,6.1,6 + 0,3.0,3}{4.1,715} = 0,3863$$

$$\left[C^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0,7187 & -0,1662 & -0,5525 \\ -0,1662 & 0,3863 & -0,2201 \\ -0,5525 & -0,2201 & 0,7726 \end{bmatrix}$$

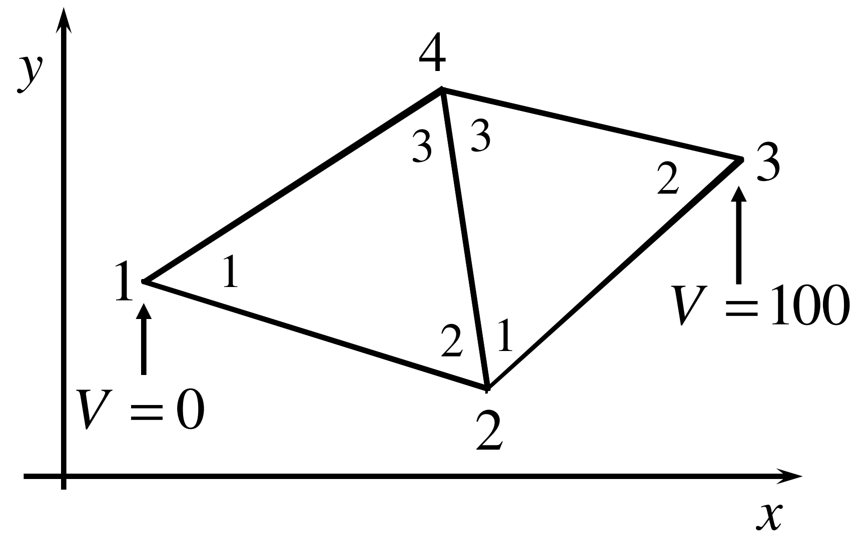


VD

Phương pháp phần tử hữu hạn (15)

$$\left[C^{(1)}\right]=\begin{bmatrix}0,3329 & -0,1143 & -0,2186\\ -0,1143 & 0,7902 & -0,6759\\ -0,2186 & -0,6759 & 0,8945\end{bmatrix}$$

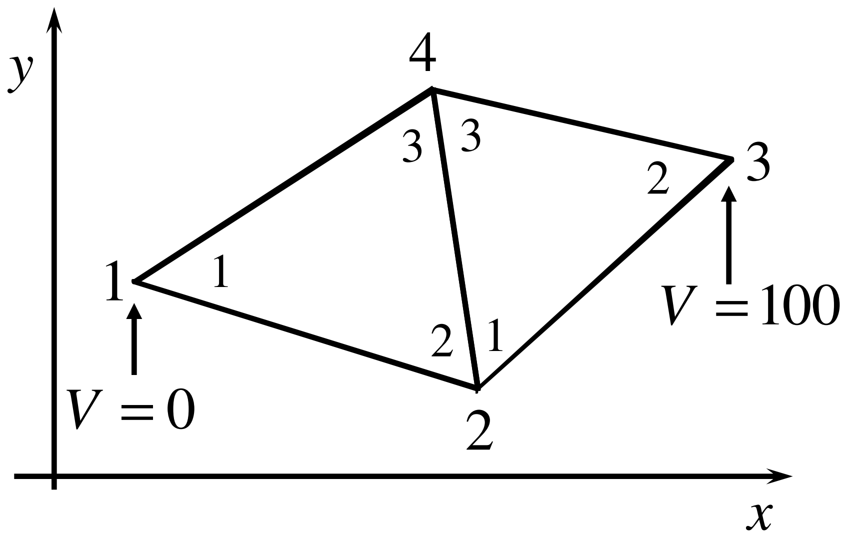
$$\left[C^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}0,7187 & -0,1662 & -0,5525\\ -0,1662 & 0,3863 & -0,2201\\ -0,5525 & -0,2201 & 0,7726\end{bmatrix}$$



$$[C]=\begin{bmatrix}C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & 0 & C_{13}^{(1)}\\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)}+C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{23}^{(1)}+C_{13}^{(2)}\\ 0 & C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)}\\ C_{31}^{(1)} & C_{32}^{(1)}+C_{31}^{(2)} & C_{32}^{(2)} & C_{33}^{(1)}+C_{33}^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,3329 & -0,1143 & 0 & -0,2186\\ -0,1143 & 1,5089 & -0,1662 & -1,2284\\ 0 & -0,1662 & 0,3863 & -0,2201\\ -0,2186 & -1,2284 & -0,2201 & 1,6671\end{bmatrix}$$

VD Phương pháp phần tử hữu hạn (16)

$$[C]=\begin{bmatrix} 0,3329 & -0,1143 & 0 & -0,2186 \\ -0,1143 & 1,5089 & -0,1662 & -1,2284 \\ 0 & -0,1662 & 0,3863 & -0,2201 \\ -0,2186 & -1,2284 & -0,2201 & 1,6671 \end{bmatrix}$$



$$V_k=-\frac{1}{C_{kk}}\sum_{i=1,i\neq k}^{n}V_iC_{ki}$$

$$\rightarrow\begin{cases} V_2=-\dfrac{1}{C_{22}}(V_1C_{12}+V_3C_{32}+V_4C_{42}) \\ V_4=-\dfrac{1}{C_{44}}(V_1C_{14}+V_2C_{24}+V_3C_{34}) \end{cases}$$

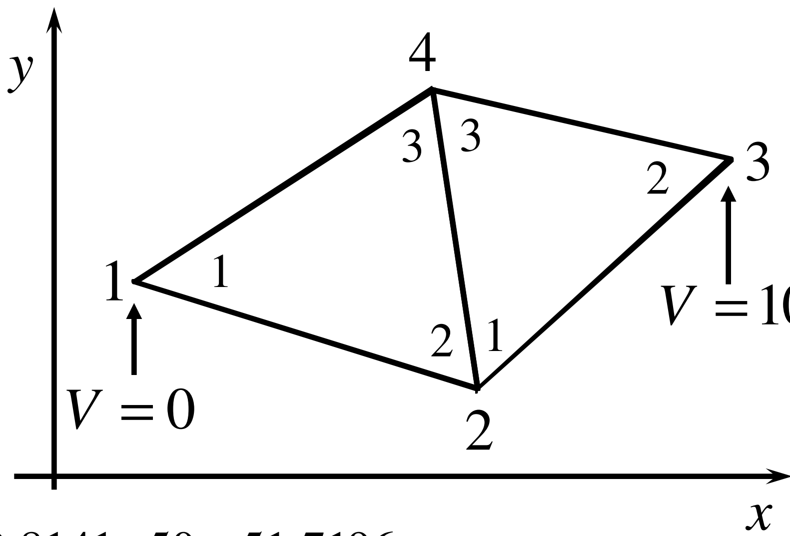
$$\rightarrow\begin{cases} V_2^{(k+1)}=-\dfrac{1}{1,5089}[(0(-0,1143)+100(-0,1662)+V_4^{(k)}(-1,2284)]=11,0146+0,8141V_4^{(k)} \\ V_4^{(k+1)}=-\dfrac{1}{1,6671}[0(-0,2186)+V_2^{(k)}(-1,2284)+100(-0,2201)]=13,2026+0,7368V_2^{(k)} \end{cases}$$

VD

Phương pháp phần tử hữu hạn (17)

$$\begin{cases} V_2^{(k+1)} = 11,0146 + 0,8141 V_4^{(k)} \\ V_4^{(k+1)} = 13,2026 + 0,7368 V_2^{(k)} \end{cases}$$

$$V_2^{(0)} = V_4^{(0)} = \frac{0+100}{2} = 50$$



$$\begin{cases} V_2^{(1)} = 11,0146 + 0,8141 V_4^{(0)} = 11,0146 + 0,8141 \times 50 = 51,7196 \\ V_4^{(1)} = 13,2026 + 0,7368 V_2^{(0)} = 13,2026 + 0,7368 \times 50 = 50,0426 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2^{(2)} = 11,0146 + 0,8141 V_4^{(1)} = 11,0146 + 0,8141 \times 50,0426 = 51,7543 \\ V_4^{(2)} = 13,2026 + 0,7368 V_2^{(1)} = 13,2026 + 0,7368 \times 51,7196 = 51,3096 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2^{(3)} = 11,0146 + 0,8141 V_4^{(2)} = 11,0146 + 0,8141 \times 51,3096 = 52,7857 \\ V_4^{(3)} = 13,2026 + 0,7368 V_2^{(2)} = 13,2026 + 0,7368 \times 51,7543 = 51,3352 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r] \arrow[dd] & \mathbf{F} = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{a}_R \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{a}_R \arrow[r] & \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\
 & W = -Q\int \mathbf{E}.d\mathbf{L} \arrow[r] & V = -\int \mathbf{E}.d\mathbf{L} \arrow[r] \arrow[d] & C = \dfrac{Q}{V} \\
I = \dfrac{dQ}{dt} \arrow[r] & R = \dfrac{V}{I} & \nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon} &
\end{tikzcd}$$