Matematyka obliczeniowa

dr inż. Piotr Piela

Wydział Informatyki ZUT w Szczecinie

Układ równań liniowych

Układem równań liniowych nazywamy układ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ten sam układ zapisany w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Oznaczając przez A macierz układu, x wektor kolumnowy niewiadomych i b wektor kolumnowy wyrazów wolnych otrzymamy:

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

Układ równań liniowych

- Układ równań liniowych $Ax = b$ nazywamy zgodnym (rozwiązalnym) jeśli posiada chociaż jedno rozwiązanie.
- Jeśli układ nie posiada rozwiązania to nazywamy go niezgodnym (nierozwiązalnym, sprzecznym)
- Układ zgodny posiadający dokładnie jedno rozwiązanie nazywamy oznaczonym.
- Jeśli układ ma więcej niż jedno rozwiązanie to nazywamy go nieoznaczonym.

Układ równań liniowych

- Układ równań liniowych $Ax = b$ nazywamy zgodnym (rozwiązalnym) jeśli posiada chociaż jedno rozwiązanie.
- Jeśli układ nie posiada rozwiązania to nazywamy go niezgodnym (nierozwiązalnym, sprzecznym)
- Układ zgodny posiadający dokładnie jedno rozwiązanie nazywamy oznaczonym.
- Jeśli układ ma więcej niż jedno rozwiązanie to nazywamy go nieoznaczonym.

Układ równań liniowych

- Układ równań liniowych $Ax = b$ nazywamy zgodnym (rozwiązalnym) jeśli posiada chociaż jedno rozwiązanie.
- Jeśli układ nie posiada rozwiązania to nazywamy go niezgodnym (nierozwiązalnym, sprzecznym)
- Układ zgodny posiadający dokładnie jedno rozwiązanie nazywamy oznaczonym.
- Jeśli układ ma więcej niż jedno rozwiązanie to nazywamy go nieoznaczonym.

Układ równań liniowych

- Układ równań liniowych $Ax = b$ nazywamy zgodnym (rozwiązalnym) jeśli posiada chociaż jedno rozwiązanie.
- Jeśli układ nie posiada rozwiązania to nazywamy go niezgodnym (nierozwiązalnym, sprzecznym)
- Układ zgodny posiadający dokładnie jedno rozwiązanie nazywamy oznaczonym.
- Jeśli układ ma więcej niż jedno rozwiązanie to nazywamy go nieoznaczonym.

Układy równoważne

Jeśli układ równań wynika z innego układu przez ciąg skończony operacji elementarnych, to te dwa układy są równoważne.

Układy równoważne

Jeśli układ równań wynika z innego układu przez ciąg skończony operacji elementarnych, to te dwa układy są równoważne.

Układy równoważne mają identyczne rozwiązania.

Układy równoważne

Jeśli układ równań wynika z innego układu przez ciąg skończony operacji elementarnych, to te dwa układy są równoważne.

Układy równoważne mają identyczne rozwiązania.

Przykład

Układy $A \cdot x = b$ oraz $B \cdot x = c$ są równoważne ponieważ:

Układ: $A \cdot x = b$ w postaci: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ posiada rozwiązanie: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Układ: $B \cdot x = c$ w postaci: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ posiada rozwiązanie: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Operacje elementarne

Przez pojęcie operacji elementarnych rozumiemy:

- wzajemną zamianę miejscami dwóch równań w układzie,
- przemnożenie obu stron równania przez niezerową stałą,
- dodanie stronami do równania wielokrotności innego równania.

Operacje elementarne

Przez pojęcie operacji elementarnych rozumiemy:

- wzajemną zamianę miejscami dwóch równań w układzie,
- przemnożenie obu stron równania przez niezerową stałą,
- dodanie stronami do równania wielokrotności innego równania.

Operacje elementarne

Przez pojęcie operacji elementarnych rozumiemy:

- wzajemną zamianę miejscami dwóch równań w układzie,
- przemnożenie obu stron równania przez niezerową stałą,
- dodanie stronami do równania wielokrotności innego równania.

Zadania

Sprawdź czy podane układy równań są równoważne:

1. $$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$
2. $$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Podział metod

Metody dokładne:

- **Metoda podstawiania.**
- Metoda przeciwnych współczynników.
- Wzory Cramera.
- Metody eliminacji Gaussa.
- Metoda eliminacji Gaussa-Jordana.
- Metody wykorzystujące rozkłady macierzy A.

Podział metod

Metody dokładne:

- **Metoda podstawiania.**
- Metoda przeciwnych współczynników.
- Wzory Cramera.
- Metody eliminacji Gaussa.
- Metoda eliminacji Gaussa-Jordana.
- Metody wykorzystujące rozkłady macierzy A.

Podział metod

Metody dokładne:

- **Metoda podstawiania.**
- Metoda przeciwnych współczynników.
- Wzory Cramera.
- Metody eliminacji Gaussa.
- Metoda eliminacji Gaussa-Jordana.
- Metody wykorzystujące rozkłady macierzy A.

Podział metod

Metody dokładne:

- **Metoda podstawiania.**
- Metoda przeciwnych współczynników.
- Wzory Cramera.
- Metody eliminacji Gaussa.
- Metoda eliminacji Gaussa-Jordana.
- Metody wykorzystujące rozkłady macierzy A.

Podział metod

Metody dokładne:

- **Metoda podstawiania.**
- Metoda przeciwnych współczynników.
- Wzory Cramera.
- Metody eliminacji Gaussa.
- Metoda eliminacji Gaussa-Jordana.
- Metody wykorzystujące rozkłady macierzy A.

Podział metod

Metody dokładne:

- **Metoda podstawiania.**
- Metoda przeciwnych współczynników.
- Wzory Cramera.
- Metody eliminacji Gaussa.
- Metoda eliminacji Gaussa-Jordana.
- Metody wykorzystujące rozkłady macierzy A.

Metody dokładne

- **rozwiązanie układu równań $Ax = b$ polega na takim przekształcaniu danych A i b, że przy założeniu dokładnie wykonywanych obliczeń arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie,**
- mała liczba obliczeń,
- dla zadań źle uwarunkowanych numerycznie wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem,
- nie dają błędu metody, ale mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń,
- obciążają pamięć.

Metody dokładne

- **rozwiązanie układu równań $Ax = b$ polega na takim przekształcaniu danych A i b, że przy założeniu dokładnie wykonywanych obliczeń arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie,**
- mała liczba obliczeń,
- dla zadań źle uwarunkowanych numerycznie wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem,
- nie dają błędu metody, ale mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń,
- obciążają pamięć.

Metody dokładne

- **rozwiązanie układu równań $Ax = b$ polega na takim przekształcaniu danych A i b, że przy założeniu dokładnie wykonywanych obliczeń arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie,**
- mała liczba obliczeń,
- dla zadań źle uwarunkowanych numerycznie wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem,
- nie dają błędu metody, ale mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń,
- obciążają pamięć.

Metody dokładne

- **rozwiązanie układu równań $Ax = b$ polega na takim przekształcaniu danych A i b, że przy założeniu dokładnie wykonywanych obliczeń arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie,**
- mała liczba obliczeń,
- dla zadań źle uwarunkowanych numerycznie wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem,
- nie dają błędu metody, ale mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń,
- obciążają pamięć.

Metody dokładne

- **rozwiązanie układu równań $Ax = b$ polega na takim przekształcaniu danych A i b, że przy założeniu dokładnie wykonywanych obliczeń arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie,**
- mała liczba obliczeń,
- dla zadań źle uwarunkowanych numerycznie wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem,
- nie dają błędu metody, ale mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń,
- obciążają pamięć.

Rozwiązanie układu równań liniowych

W szczególnym przypadku, gdy liczba niewiadomych równa się liczbie równań $n = m$ otrzymamy:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Macierz A jest wówczas macierzą kwadratową o wymiarze $n \times n$. Jeśli macierz

ta jest nieosobliwa ($det(A) \neq 0$), to rozwiązanie układu $Ax = b$ jest oczywiście postaci:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Rozwiązanie układu równań liniowych

W szczególnym przypadku, gdy liczba niewiadomych równa się liczbie równań $n = m$ otrzymamy:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Macierz A jest wówczas macierzą kwadratową o wymiarze $n \times n$. Jeśli macierz ta jest nieosobliwa ($det(A) \neq 0$), to rozwiązanie układu $Ax = b$ jest oczywiście postaci:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Przykład

Dla układu: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ otrzymamy rozwiązanie $x = A^{-1} \cdot b$ w postaci:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Układy równań źle uwarunkowanych

Przy rozwiązywaniu układów równań liniowych postaci $Ax = b$ można mieć do czynienia z przypadkiem $det(A) \approx 0$.

Jest to układ źle uwarunkowany. Bardzo małe zmiany w wyrazach macierzy współczynników mogą spowodować duże zmiany w rozwiązaniu.

Aby określić stopień uwarunkowania układu równań oblicza się tzw. wskaźnik uwarunkowania k – liczbę o takiej własności, że

- $k = 1$ - idealne uwarunkowanie,
- $k = \infty$ - układ osobliwy.

$$k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Wzory Cramera

W szczególnym przypadku układu $Ax = b$, gdy liczba niewiadomych równa się liczbie równań: $n = m$ macierz A jest macierzą kwadratową o wymiarze $n \times n$. Jeśli macierz ta jest nieosobliwa to rozwiązanie x układu $Ax = b$ można przedstawić w postaci wzorów Cramera:

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \qquad x_2 = \frac{W_2}{W}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{W_n}{W}$$

gdzie:
$W = det(A) \neq 0$,
W_j jest wyznacznikiem powstałym z W przez zastąpienie elementów a_{ij} j-tej kolumny wyrazami wolnymi b_i
Przykładowo:

$$W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Zadania

Rozwiąż podany układ równań stosując wzory Cramera oraz odwracanie macierzy A (ustaw format wyświetlania danych na: format long e):

1. $$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Zadania

Rozwiąż podany układ równań stosując wzory Cramera oraz odwracanie macierzy A (ustaw format wyświetlania danych na: format long e):

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Fragment kodu:

```
W=det(A);
for i=1:max(size(A));
A1=A;
A1(:,i)=b;
W1=det(A1);
x(i,1)=W1/W;
end
x
x1=inv(A)*b
```

Rozwiązanie:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x1 = \begin{pmatrix} 9.999999999999991e-001 \\ 9.999999999999997e-001 \\ 1.000000000000000e+000 \\ 1.000000000000000e+000 \end{pmatrix}$$

Błędy

Przyczyny błędów:

- **błąd wejściowy** – błąd spowodowany niedokładnymi wartościami współczynników układu równań,
- **błąd zaokrągleń** – błąd powstający na skutek popełniania błędów podczas numerycznego wykonywania działań arytmetycznych,
- **błąd metody** – błąd wyznaczania rozwiązania spowodowany sposobem działania metody.

Błędy

Przyczyny błędów:

- **błąd wejściowy** – błąd spowodowany niedokładnymi wartościami współczynników układu równań,
- **błąd zaokrągleń** – błąd powstający na skutek popełniania błędów podczas numerycznego wykonywania działań arytmetycznych,
- **błąd metody** – błąd wyznaczania rozwiązania spowodowany sposobem działania metody.

W przypadku stosowania metod dokładnych rozwiązywania układów równań liniowych mamy do czynienia z błędem wejściowym i błędem zaokrągleń.

Błędy

Przyczyny błędów:

- **błąd wejściowy** – błąd spowodowany niedokładnymi wartościami współczynników układu równań,
- **błąd zaokrągleń** – błąd powstający na skutek popełniania błędów podczas numerycznego wykonywania działań arytmetycznych,
- **błąd metody** – błąd wyznaczania rozwiązania spowodowany sposobem działania metody.

W przypadku stosowania metod dokładnych rozwiązywania układów równań liniowych mamy do czynienia z błędem wejściowym i błędem zaokrągleń.

Błędy

Przyczyny błędów:

- **błąd wejściowy** – błąd spowodowany niedokładnymi wartościami współczynników układu równań,
- **błąd zaokrągleń** – błąd powstający na skutek popełniania błędów podczas numerycznego wykonywania działań arytmetycznych,
- **błąd metody** – błąd wyznaczania rozwiązania spowodowany sposobem działania metody.

W przypadku stosowania metod dokładnych rozwiązywania układów równań liniowych mamy do czynienia z błędem wejściowym i błędem zaokrągleń.

Błąd zaokrągleń

Chcemy rozwiązać podany układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}$$

- dysponujemy komputerem z arytmetyką zmiennopozycyjną, której słowo składa się z 2 cyfr dziesiętnych,
- mnożenie jest wykonywane w akumulatorze z podwójną precyzją, ale każdy wynik przed przesłaniem do pamięci jest zaokrąglany,

Błąd zaokrągleń

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Stosując wzory Cramera otrzymamy:

$$W = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} &= 0.99 \cdot 0.50 = 0.4950 \qquad fl(a_{11}a_{22}) = 0.50 \\ a_{12}a_{21} &= 0.70 \cdot 0.70 = 0.4900 \qquad fl(a_{12}a_{21}) = 0.49 \\ fl(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= 0.50 - 0.49 = 0.10 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Błąd zaokrągleń

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Stosując wzory Cramera otrzymamy:

$W = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$a_{11}a_{22} = 0.99 \cdot 0.50 = 0.4950 \qquad fl(a_{11}a_{22}) = 0.50$
$a_{12}a_{21} = 0.70 \cdot 0.70 = 0.4900 \qquad fl(a_{12}a_{21}) = 0.49$
$fl(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.50 - 0.49 = 0.10 \cdot 10^{-1}$

$W_1 = b_1 a_{22} - a_{12}b_2$

$b_1 a_{22} = 0.2700 \qquad fl(b_1 a_{22}) = 0.27$
$a_{12}b_2 = 0.2660 \qquad fl(a_{12}b_2) = 0.27$
$fl(b_1 a_{22} - a_{12}b_2) = 0.27 - 0.27 = 0$

Błąd zaokrągleń

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Stosując wzory Cramera otrzymamy:

$$W = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{array}{ll} a_{11}a_{22} = 0.99 \cdot 0.50 = 0.4950 & fl(a_{11}a_{22}) = 0.50 \\ a_{12}a_{21} = 0.70 \cdot 0.70 = 0.4900 & fl(a_{12}a_{21}) = 0.49 \\ fl(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.50 - 0.49 = 0.10 \cdot 10^{-1} & \end{array}$$

$$W_1 = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$\begin{array}{ll} b_1 a_{22} = 0.2700 & fl(b_1 a_{22}) = 0.27 \\ a_{12} b_2 = 0.2660 & fl(a_{12} b_2) = 0.27 \\ fl(b_1 a_{22} - a_{12} b_2) = 0.27 - 0.27 = 0 & \end{array}$$

$$W_2 = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

$$\begin{array}{ll} a_{11} b_2 = 0.3762 & fl(a_{11} b_2) = 0.38 \\ b_1 a_{21} = 0.3780 & fl(b_1 a_{21}) = 0.38 \\ fl(a_{11} b_2 - b_1 a_{21}) = 0.38 - 0.38 = 0 & \end{array}$$

Błąd zaokrągleń

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Stosując wzory Cramera otrzymamy:

$W = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$a_{11}a_{22} = 0.99 \cdot 0.50 = 0.4950 \qquad fl(a_{11}a_{22}) = 0.50$
$a_{12}a_{21} = 0.70 \cdot 0.70 = 0.4900 \qquad fl(a_{12}a_{21}) = 0.49$
$fl(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.50 - 0.49 = 0.10 \cdot 10^{-1}$

$W_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$

$b_1a_{22} = 0.2700 \qquad fl(b_1a_{22}) = 0.27$
$a_{12}b_2 = 0.2660 \qquad fl(a_{12}b_2) = 0.27$
$fl(b_1a_{22} - a_{12}b_2) = 0.27 - 0.27 = 0$

$W_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$

$a_{11}b_2 = 0.3762 \qquad fl(a_{11}b_2) = 0.38$
$b_1a_{21} = 0.3780 \qquad fl(b_1a_{21}) = 0.38$
$fl(a_{11}b_2 - b_1a_{21}) = 0.38 - 0.38 = 0$

Rozwiązanie numeryczne:

$$fl(x_1) = \frac{fl(W_1)}{fl(W)} = \frac{0.00}{0.10 \cdot 10^{-1}} = 0.00$$

$$fl(x_2) = \frac{fl(W_2)}{fl(W)} = \frac{0.00}{0.10 \cdot 10^{-1}} = 0.00$$

Błąd zaokrągleń

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Stosując wzory Cramera otrzymamy:

$W = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$a_{11}a_{22} = 0.99 \cdot 0.50 = 0.4950 \qquad fl(a_{11}a_{22}) = 0.50$
$a_{12}a_{21} = 0.70 \cdot 0.70 = 0.4900 \qquad fl(a_{12}a_{21}) = 0.49$
$fl(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.50 - 0.49 = 0.10 \cdot 10^{-1}$

$W_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$

$b_1a_{22} = 0.2700 \qquad fl(b_1a_{22}) = 0.27$
$a_{12}b_2 = 0.2660 \qquad fl(a_{12}b_2) = 0.27$
$fl(b_1a_{22} - a_{12}b_2) = 0.27 - 0.27 = 0$

$W_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$

$a_{11}b_2 = 0.3762 \qquad fl(a_{11}b_2) = 0.38$
$b_1a_{21} = 0.3780 \qquad fl(b_1a_{21}) = 0.38$
$fl(a_{11}b_2 - b_1a_{21}) = 0.38 - 0.38 = 0$

Rozwiązanie numeryczne:

$$fl(x_1) = \frac{fl(W_1)}{fl(W)} = \frac{0.00}{0.10 \cdot 10^{-1}} = 0.00$$

$$fl(x_2) = \frac{fl(W_2)}{fl(W)} = \frac{0.00}{0.10 \cdot 10^{-1}} = 0.00$$

Rozwiązanie dokładne:
$x_1 = 0.80$
$x_2 = -0.36$

Błąd zaokrągleń

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Metoda eliminacji zmiennych:

- eliminujemy x_1 z drugiego równania:

$$fl\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) = fl(0.7070) = 0.71$$

Błąd zaokrągleń

$$\boxed{\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.70x_1 + 0.50x_2 = 0.38 \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}}$$

Metoda eliminacji zmiennych:

- eliminujemy x_1 z drugiego równania:

$$fl\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) = fl(0.7070) = 0.71$$

- od drugiego wiersza odejmujemy pierwszy wiersz pomnożony przez $fl\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$:

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ fl(0.70 - 0.99 \cdot 0.71)x_1 + fl(0.50 - 0.70 \cdot 0.71)x_2 = fl(0.38 - 0.54 \cdot 0.71) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.99x_1 + 0.70x_2 = 0.54 \\ 0.00x_2 = 0.00 \end{cases}$$

układ nieoznaczony

Metoda eliminacji Gaussa

Etap pierwszy – eliminacja zmiennych(prosty przebieg metody Gaussa).
Stosując przekształcenia elementarne rozwiązywany układ równań liniowych sprowadzamy do układu równoważnego z macierzą trójkątną górną:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n \end{cases}$$

Element podstawowy: element za pomocą którego eliminujemy zmienną z dalszych równań.

Etap drugi – wyznaczanie zmiennych (odwrotny przebieg metody Gaussa).

$$\begin{cases} x_n = b_n \\ x_{n-1} = b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n \\ \ldots \\ x_1 = b_1 - a_{1n}x_n - \ldots - a_{12}x_2 \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Przykład

Dla układu $\boxed{\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}}$

otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Metoda eliminacji Gaussa

Przykład

Etap pierwszy:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_1/-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2-w_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3-2w_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2/(3/2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3-4w_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & -7/3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3/(7/3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Etap drugi:

$$x_3 = -1$$
$$x_2 = 4/3 - 2/3 \cdot x_3 = 2$$
$$x_1 = -1 + 2 \cdot x_3 - 1/2 \cdot x_2 = -2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zadania

Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa (ustaw format wyświetlania danych na: format long e):

1. $$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Zadania

Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa (ustaw format wyświetlania danych na: format long e):

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie:

1. $$x = \begin{pmatrix} 9.999999999999996e-001 \\ 1.000000000000000e+000 \\ 1.000000000000000e+000 \\ 1.000000000000000e+000 \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta

Metoda Gaussa-Crouta - metoda eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego.

Przy założeniu dokładnych działań arytmetycznych w przypadku gdy istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu Metoda Gaussa-Crouta jest metodą niezawodną (nie nastąpi zatrzymanie procesu obliczeń z powodu dzielenia przez zero).

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta

Przykład

Dla układu $\boxed{\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \end{cases}}$

otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta

Przykład

Etap pierwszy:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_1/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3 - w_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 & -5/2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 3 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/6 & -5/6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3 - w_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 11/6 & 11/6 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3/(11/6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Etap drugi:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= -5/6 - 1/6 \cdot x_3 = -1 \\ x_1 &= 3/2 - 1/2 \cdot x_3 - x_2 = 2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta

Jeżeli macierz A jest nieosobliwa i diagonalnie dominująca kolumnowo, to przy eliminacji metodą Gaussa-Crouta nie ma potrzeby przestawiania wierszy.

Macierz A nazywamy diagonalnie dominującą, jeżeli moduły elementów na diagonali są nie mniejsze od sumy modułów pozostałych elementów stojących w tym samym wierszu:

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k \neq i$$

Macierz A nazywamy diagonalnie dominującą kolumnowo, jeżeli A^T jest diagonalnie dominująca.

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta

Jeżeli macierz A jest nieosobliwa i diagonalnie dominująca kolumnowo, to przy eliminacji metodą Gaussa-Crouta nie ma potrzeby przestawiania wierszy.

Macierz A nazywamy diagonalnie dominującą, jeżeli moduły elementów na diagonali są nie mniejsze od sumy modułów pozostałych elementów stojących w tym samym wierszu:

$$|a_{ii}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k \neq i$$

Macierz A nazywamy diagonalnie dominującą kolumnowo, jeżeli A^T jest diagonalnie dominująca.

Przykład

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Jordana

Stosując przekształcenia elementarne rozwiązywany układ równań liniowych sprowadzamy do układu równoważnego z macierzą jednostkową otrzymując gotowe rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \qquad \dots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Jordana

Przykład

Dla układu
$$\boxed{\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}}$$

otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Metoda eliminacji Jordana

Przykład

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_1/-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2-w_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3-2w_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2/(3/2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_1+(1/2)w_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3-4w_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 7/3 & -7/3 \end{array}\right) \xrightarrow{w_3/(7/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_1+(5/3)w_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2-(2/3)w_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

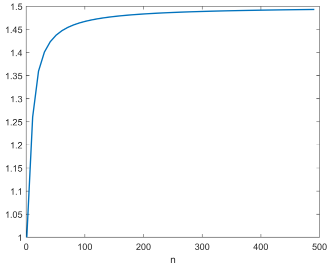
Rozwiązanie:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Koszt obliczeń dla metod eliminacji

- Wyznaczenie rozwiązania metodą Gaussa wymaga wykonania:
  - $M = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ operacji mnożenia i dzielenia
  - $D = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ operacji dodawania i odejmowania
- Wyznaczenie rozwiązania metodą Jordana wymaga wykonania:
  - $M = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2$
  - $D = \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n^2$

Nakład obliczeń w metodzie eliminacji Jordana jest ~ 1.5 razy większy niż w metodzie eliminacji Gaussa.



Metoda Thomasa dla układów z macierzą trójdiagonalną

Macierz trójdiagonalna B jest macierzą, która ma elementy nieznikające położone na głównej przekątnej i na przekątnych leżących bezpośrednio powyżej i poniżej niej:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Metoda Thomasa dla układów z macierzą trójdiagonalną

Macierz trójdiagonalna B jest macierzą, która ma elementy nieznikające położone na głównej przekątnej i na przekątnych leżących bezpośrednio powyżej i poniżej niej:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Przykład

Macierz trójdiagonalna: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Metoda Thomasa dla układów z macierzą trójdiagonalną

Układ równań z macierzą trójdiagonalną:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Przyjmujemy, że $a_1 = 0$ i $c_n = 0$

Metoda Thomasa dla układów z macierzą trójdiagonalną - przykład

Rozwiąż podany układ równań z macierzą trójdiagonalną:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Algorytm rozwiązania układu:

1. Wyznaczamy współczynniki β i γ przyjmując, że $a_1 = 0$ i $c_n = 0$
   $\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1}$ $\gamma_1 = \frac{d_1}{b_1}$
   $\beta_i = -\frac{c_i}{a_i\beta_{i-1}+b_i}$ $\gamma_i = \frac{d_i - a_i\gamma_{i-1}}{a_i\beta_{i-1}+b_i}$ dla $i = 2, 3, \ldots, n$
2. Następnie obliczamy x
   $x_n = \gamma_n$
   $x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i)$ dla $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

Metoda Thomasa dla układów z macierzą trójdiagonalną - przykład

Dla naszego przykładu otrzymamy:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Szukane współczynniki wyniosą:

$$\beta = \begin{pmatrix} -0.5 & -2 & 0.2 & 2.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 0.8 & -1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

A rozwiązanie

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Rozkład LU

Dowolna macierz kwadratową A o wymiarze $n \times n$, której wszystkie mniory główne są nieosobliwe może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy dolnotrójkątnej L i macierzy górnotrójkątnej U:

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Rozkład jest jednoznaczny jeśli zostaną ustalone elementy na głównej przekątnej macierzy L lub U.

Matlab: lu()

Rozkład LU

Dowolna macierz kwadratową A o wymiarze $n \times n$, której wszystkie mniory główne są nieosobliwe może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy dolnotrójkątnej L i macierzy górnotrójkątnej U:

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Rozkład jest jednoznaczny jeśli zostaną ustalone elementy na głównej przekątnej macierzy L lub U.

Matlab: lu()

Przykład

Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ otrzymamy: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Rozkład LU

Przykład

Rozwiąż podany układ równań stosując rozkład LU macierzy A

$$\boxed{\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 4 \\ 1x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}}$$

Zapisując podany układ w postaci macierzowej otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Rozkład LU

Przykład

Rozwiąż podany układ równań stosując rozkład LU macierzy A

$$\boxed{\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 4 \\ 1x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}}$$

Zapisując podany układ w postaci macierzowej otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Rozkład macierzy A metodą Crouta

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozkład LU

Algorytm 1

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b \\ &L\cdot U\cdot x = b \\ &x = U^{-1}\cdot L^{-1}\cdot b \end{aligned}}$$

Algorytm 2

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b \\ &L\cdot U\cdot x = b \\ &U\cdot x = y \\ &L\cdot y = b \end{aligned}}$$

Rozkład LU

Algorytm 1

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b \\ &L\cdot U\cdot x = b \\ &x = U^{-1}\cdot L^{-1}\cdot b \end{aligned}}$$

Algorytm 2

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b \\ &L\cdot U\cdot x = b \\ &U\cdot x = y \\ &L\cdot y = b \end{aligned}}$$

$$A = L\cdot U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L\cdot y = b$

Rozkład LU

Algorytm 1

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b \\ &L\cdot U\cdot x = b \\ &x = U^{-1}\cdot L^{-1}\cdot b \end{aligned}}$$

Algorytm 2

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b \\ &L\cdot U\cdot x = b \\ &U\cdot x = y \\ &L\cdot y = b \end{aligned}}$$

$$A = L\cdot U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L\cdot y = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$U\cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Rozkład QR

Dowolna nieosobliwa macierz kwadratową A o wymiarze $n \times n$ może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy ortogonalnej Q i nieosobliwej macierzy górnotrójkątnej R:

$$A = Q \cdot R = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Rozkład jest jednoznaczny jeśli zostaną ustalone elementy na głównej przekątnej macierzy R.

Macierzy Q jest macierzą ortogonalną jeśli spełnia relację:

$$Q^T = Q^{-1}, \quad \text{lub} \quad QQ^T = Q^T Q = E$$

Matlab: qr()

Rozkład QR

Przykład

Rozwiąż podany układ równań stosując rozkład QR macierzy A

$$\boxed{\begin{cases} 3x_1 = -3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}}$$

Zapisując podany układ w postaci macierzowej otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Rozkład macierzy A:

$$A = Q \cdot R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozkład QR

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b\\ &Q\cdot R\cdot x = b\\ &x = R^{-1}\cdot Q^{-1}\cdot b\\ &x = R^{-1}\cdot Q^{T}\cdot b \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b\\ &Q\cdot R\cdot x = b\\ &R\cdot x = y\\ &Q\cdot y = b \end{aligned}}$$

Rozkład QR

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b\\ &Q\cdot R\cdot x = b\\ &x = R^{-1}\cdot Q^{-1}\cdot b\\ &x = R^{-1}\cdot Q^{T}\cdot b \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A\cdot x = b\\ &Q\cdot R\cdot x = b\\ &R\cdot x = y\\ &Q\cdot y = b \end{aligned}}$$

$$A = Q\cdot R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$Q\cdot y = b$
$y = Q^{T}\cdot b$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$R\cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Zwiększenie dokładności rozwiązania układów równań liniowych

Uzyskane za pomocą metod eliminacji przybliżone (na skutek błędów zaokrągleń) rozwiązanie x_0 układu $A \cdot x = b$ można poprawić zakładając, że rozwiązanie dokładne można zapisać jako:

$$x = x_0 + \delta$$

gdzie δ - wektor małych poprawek dla przybliżonego rozwiązania x_0

Podstawiając tak zdefiniowane rozwiązanie do układu $A \cdot x = b$ otrzymamy:

$$A(x_0 + \delta) = b$$

Aby znaleźć wektor poprawek δ należy rozwiązać układ równań:

$$A \cdot \delta = b - A \cdot x_0$$

Zwiększenie dokładności rozwiązania układów równań liniowych

Przykład

Pewną metodą znaleziono przybliżone rozwiązanie x_0 podanego układu równań. Należy poprawić to rozwiązanie.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 8 \\ 1x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A \cdot \delta = b - A \cdot x_0}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie dokładne:

$x = x_0 + \delta$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pseudorozwiązanie układu równań liniowych

Niech będzie dany układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \approx b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \approx b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \approx b_m \end{cases}$$

Ten sam układ zapisany w postaci macierzowej:

$$A \cdot x \approx b$$

gdzie: A macierz układu o wymiarze $(m \times n)$, $x \in R^n$, $b \in R^m$

Znak równości przybliżonej $(\approx)$ oznacza, że układ równań jest sprzeczny. Istnieje jednak nieskończenie wiele wektorów x których podstawienie pozwala zapisać układ w postaci:

$$A \cdot x - b = \xi$$

gdzie: ξ - oznacza wektor odchyłki.

Pseudorozwiązanie układu równań liniowych

Niech będzie dany układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \approx b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \approx b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \approx b_m \end{cases}$$

Ten sam układ zapisany w postaci macierzowej:

$$A \cdot x \approx b$$

gdzie: A macierz układu o wymiarze $(m \times n)$, $x \in R^n$, $b \in R^m$

Znak równości przybliżonej $(\approx)$ oznacza, że układ równań jest sprzeczny. Istnieje jednak nieskończenie wiele wektorów x których podstawienie pozwala zapisać układ w postaci:

$$A \cdot x - b = \xi$$

gdzie: ξ - oznacza wektor odchyłki.

Pseudorozwiązanie układu równań liniowych

Poszukujemy takiego rozwiązania x, które po wstawieniu do równania $A \cdot x - b = \xi$ daje odchyłkę ξ o jak najmniejszej normie euklidesowej $\|\xi\|$.

$$\|\xi\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2}$$

Takie rozwiązanie jest najlepsze w sensie metody najmniejszych kwadratów i nazywa się pseudorozwiązaniem normalnym. Pseudorozwiązanie znajdziemy rozwiązując normalny układ równań metody najmniejszych kwadratów:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$
$$x = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$$
$$x = A^+ \cdot b$$

Macierz $A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$ - nazywa się macierzą pseudoodwrotną do macierzy A.

Pseudorozwiązanie jest jednoznaczne jeśli układ równań jest nadokreślony $(m > n)$.

Pseudorozwiązanie układu równań liniowych – przykład

Rozwiąż podany układ równań:

1.
$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \rightarrow \begin{cases} -x_2 &= -1 \\ x_1 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{cases}$$

$A = A_{(4\times 2)}; m = 4; n = 2; n < m; rank(A) = 2$
Układ nadokreślony.

Pseudorozwiązanie układu równań liniowych – przykład

$$x = A^{+} \cdot b;\ A^{+} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$$

$$(A^T \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/6 & 0 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/6 & 0 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$