# *Matematyka obliczeniowa*

Niech $F : R^{n+1} \supset U \to R$ będzie funkcją ciągłą na zbiorze otwartym U.

Równanie

$$F\left(t, x\left(t\right), x'\left(t\right), x''\left(t\right), \ldots, x^{n}\left(t\right)\right) = 0$$

z niewiadomą $t \to x\left(t\right)$, w którym oprócz niewiadomej *x* występują także jej pochodne nazywamy

**równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu *n*.**

Niech $F : R^{n+1} \supset U \to R$ będzie funkcją ciągłą na zbiorze otwartym U.

Równanie

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n}(t)\right) = 0$$

z niewiadomą $t \to x(t)$ , w którym oprócz niewiadomej *x* występują także jej pochodne nazywamy

**równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu *n*.**

Niech $\Delta \subset R$ będzie przedziałem (z końcami lub bez, ograniczonym lub nieograniczonym). Funkcję

$$u : \Delta \to R$$

nazywamy **rozwiązaniem równania różniczkowego**

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n}(t)\right) = 0$$

jeśli:

- *u* jest *n*-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $\Delta$ (przy czym na końcach przedziału, o ile do niego należą, bierzemy pod uwagę pochodne jednostronne),
- wykres funkcji *u* zawiera się w zbiorze *U*,
- dla dowolnego *t* w zbiorze $\Delta$ zachodzi równość

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{n}(t)\right) = 0$$

Jeśli w równaniu niewiadomą jest funkcja dwóch lub większej liczby zmiennych i równanie zawiera zależność od pochodnych cząstkowych tej funkcji

$$F\left(t, s, x(t, s), \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, \ldots\right) = 0$$

to nazywamy je **równaniem różniczkowym cząstkowym.**

**UWAGA!**

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq \frac{df}{dt}$$

- równania zwyczajne rzędu pierwszego w postaci normalnej

$$x'(t)=f(t,x(t))$$

- dowolne równanie różniczkowe zwyczajne rzędu *n* w postaci normalnej

$$x^{(n)}(t)=f(t,x,x',x'',\dots,x^{(n-1)})$$

można zastąpić układem równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego w postaci normalnej

- układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego w postaci normalnej

$$
\begin{cases}
x = x_0 \\
x_0' = x_1 \\
x_1' = x_2 \\
x_2' = x_3 \\
\vdots \\
x_{n-2}' = x_{n-1} \\
x_{n-1}' = f\left(t, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}\right)
\end{cases}
$$

**Przykład**

$$\ddot{y} + ay = bx$$

**Przykład**

$$\ddot{y}+ay=bx$$

przekształcenie:

$$\ddot{y}=bx-ay$$

podstawienie: $y=y_1$

Różniczkując obustronnie otrzymamy

$$\dot{y}=\dot{y}_1=y_2$$
$$\ddot{y}=\dot{y}_2=\boxed{bx-ay_1}$$

**Przykład**

$$\ddot{y}+ay=bx$$

przekształcenie:

$$\ddot{y}=bx-ay$$

podstawienie: $y=y_1$

Różniczkując obustronnie otrzymamy:

$$\dot{y}=\dot{y}_1=y_2$$

$$\ddot{y}=\dot{y}_2=\boxed{bx-ay_1}$$

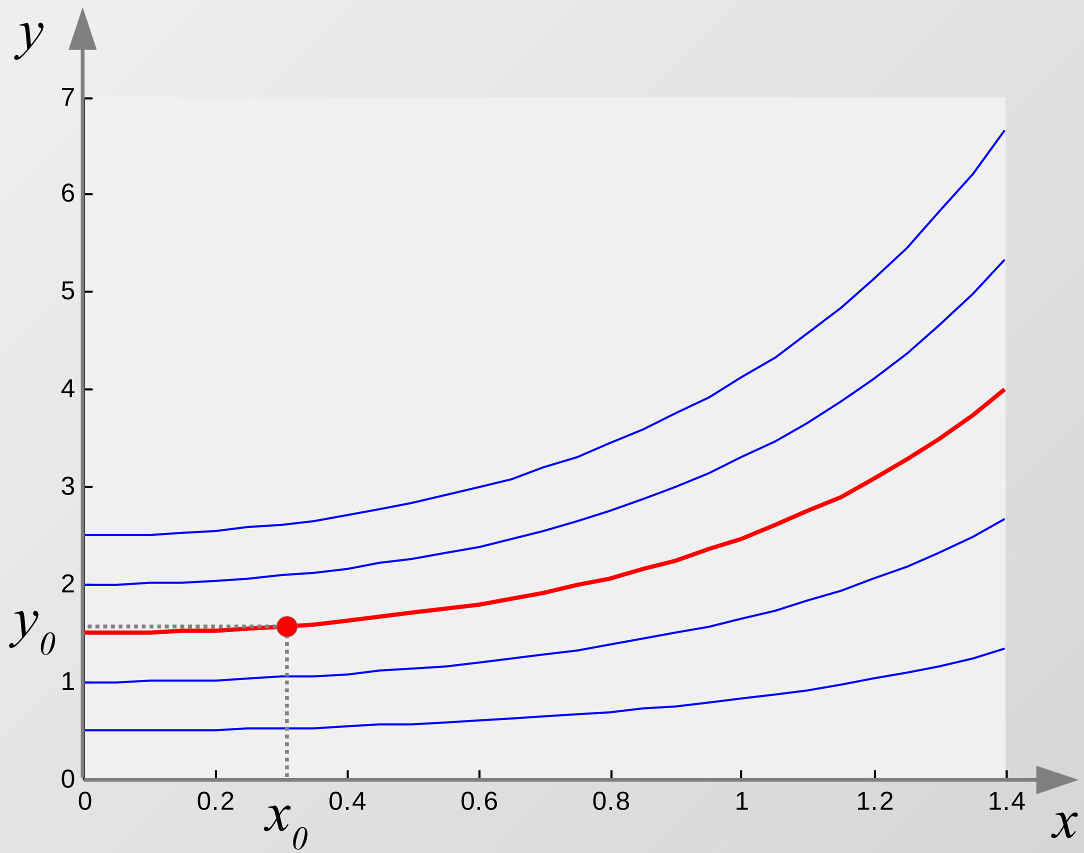
normalna postać równań:

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2\\ \dot{y}_2=bx-ay_1\end{cases}$$

**Rozwiązaniem równania różniczkowego** nazywamy każdą funkcję $y=y(x)$ spełniającą to równanie w pewnym przedziale.

Każde rozwiązanie, które zawiera $n$ dowolnych stałych $c_1$, $c_2$, ... , $c_n$, tak że możemy na nie nałożyć $n$ dodatkowych warunków początkowych, nazywamy **rozwiązaniem ogólnym**. Jeśli ustalimy wartości tych stałych to otrzymamy **rozwiązanie szczególne**.

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$



# Zagadnienie Cauchy'ego (początkowe)

Zagadnienie

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

polegające na znalezieniu takiego rozwiązania równania różniczkowego, które spełnia warunek początkowy (gdzie $x_0$ jest zadaną wartością, którą szukane rozwiązanie ma przyjmować w ustalonej chwili początkowej $t_0$) nazywamy **problemem początkowym Cauchy'ego**.

## Metody rozwiązywania równań różniczkowych:

- ***metody analityczne,***
  - rozwiązania ogólne
  - rozwiązania szczególne
- ***metody numeryczne,***
  - rozwiązania szczególne
- ***metody eksperymentalne***
  - rozwiązania szczególne

**Przykład:** Chcemy rozwiązać równanie: $\ddot{y}+5\,\dot{y}+4\,y=0$

z warunkiem początkowym: $\begin{cases} \dot{y}(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$

**Przykład:** Chcemy rozwiązać równanie: $\ddot{y} + 5\,\dot{y} + 4\,y = 0$

z warunkiem początkowym: $\begin{cases} \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Jest to przypadek równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach

$$\ddot{y} + p\,\dot{y} + qy = 0,$$

którego równanie charakterystyczne ma postać: $r^2 + p\,r + q = 0$

**Przykład:** Chcemy rozwiązać równanie: $\ddot{y}+5\dot{y}+4y=0$

z warunkiem początkowym: $\begin{cases}\dot{y}(0)=0\\ y(0)=1\end{cases}$

Jest to przypadek równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach

$$\ddot{y}+p\dot{y}+qy=0,$$

którego równanie charakterystyczne ma postać: $r^2+pr+q=0$

dla $\Delta>0$ mamy dwa różne pierwiastki: $r_1 \; i \; r_2$

Rozwiązanie ogólne ma zatem postać:

$$\boxed{y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}}$$

W naszym przypadku $r_1 = -1$, $r_2 = -4$

Wobec tego rozwiązanie ogólne ma postać:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$$

W naszym przypadku $r_1$ = - 1, $r_2$ = - 4

Wobec tego rozwiązanie ogólne ma postać:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$$

Z warunków początkowych wyznaczamy $C_1$ i $C_2$

$$\dot{y} = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x}$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 e^{-1\cdot 0} + C_2 e^{-4\cdot 0} = 1 \\ \dot{y}(0) = -C_1 e^{-1\cdot 0} - 4C_2 e^{-4\cdot 0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 4C_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 4/3 \\ C_2 = -1/3 \end{cases}$$

Rozwiązanie szczególne:

$$y = 4/3\, e^{-x} - 1/3\, e^{-4x}$$

**Przykład:** Chcemy rozwiązać równanie $\ddot{\phi}+40\cdot\phi=0$ $\quad \dot{\phi}(0)=0$, $\phi(0)=1$

Jest to przypadek równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach

$$\ddot{y}+p\,\dot{y}+qy=0,$$

którego równanie charakterystyczne ma postać: $r^2+p\,r+q=0$

dla

$$\Delta<0 \Rightarrow \begin{array}{l} r_1=\alpha+j\,\omega \\ r_2=\alpha-j\,\omega \end{array} \Rightarrow y=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x\right)$$

$$\ddot{\phi}+40\cdot\phi=0 \Rightarrow r^2+40=0 \Rightarrow \Delta<0 \quad \begin{array}{l} r_1=j\sqrt{40} \\ r_2=-j\sqrt{40} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \omega=\sqrt{40} \end{array} \Rightarrow \phi=\left(C_1\sin\left(\sqrt{40}\,t\right)+C_2\cos\left(\sqrt{40}\,t\right)\right)$$

rozwiązanie ogólne

Przykład: Chcemy rozwiązać równanie $\ddot{\phi}+40\,\phi=0$

$$\dot{\phi}(0)=0$$
$$\phi(0)=1$$

Rozwiązanie ogólne:

$$\phi=\left(C_1\sin\sqrt{40}\,t+C_2\cos\sqrt{40}\,t\right)$$

Z warunków początkowych wyznaczamy $C_1$ i $C_2$

$$\phi(0)=\left(C_1\sin\left(\sqrt{40}\cdot 0\right)+C_2\cos\left(\sqrt{40}\cdot 0\right)\right)=1 \quad \rightarrow C_2=1$$

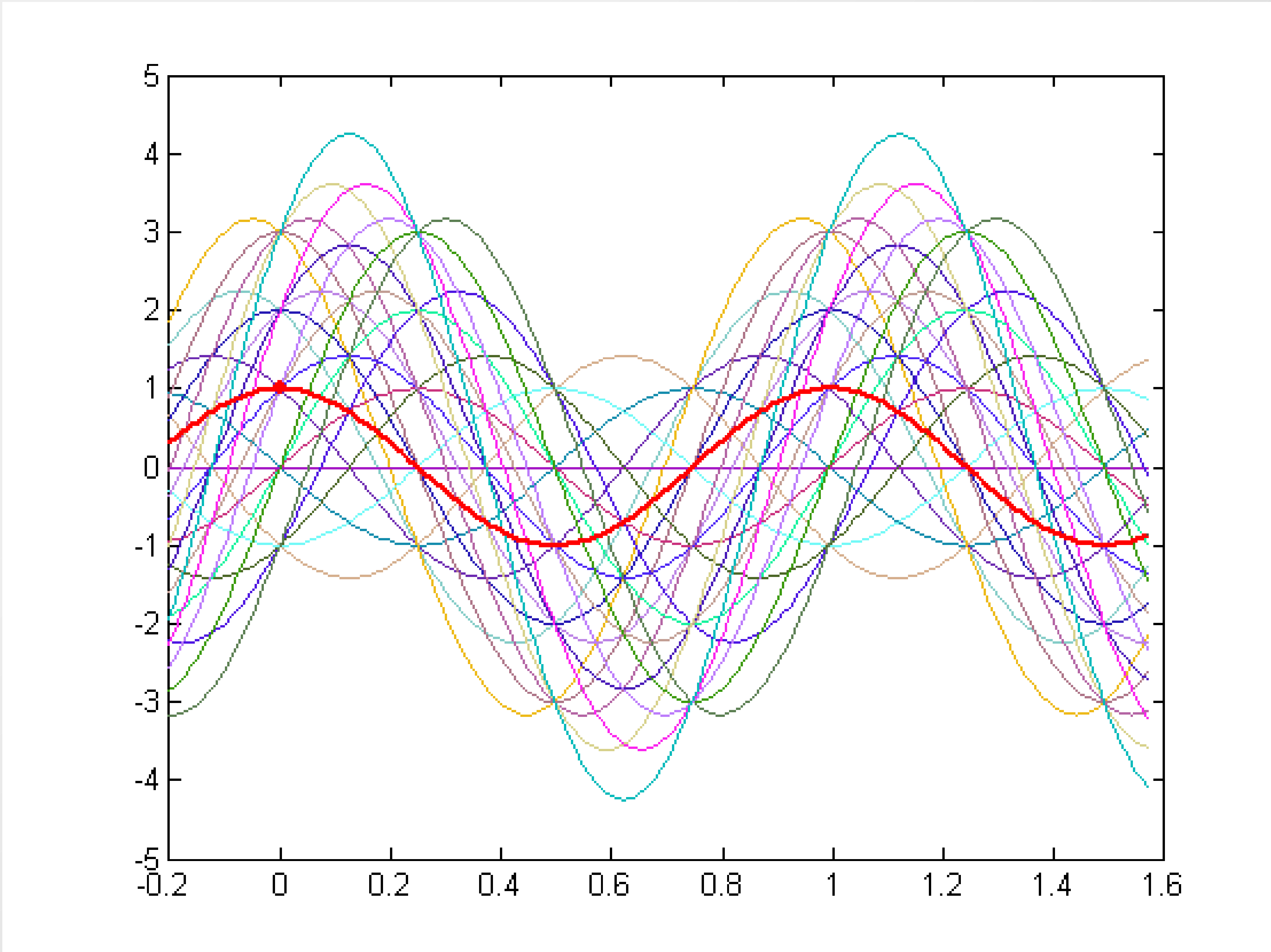
$$\dot{\phi}=\sqrt{40}\cdot C_1\cos\left(\sqrt{40}\,t\right)-\sqrt{40}\cdot C_2\sin\left(\sqrt{40}\,t\right)$$

$$\dot{\phi}(0)=\sqrt{40}\cdot C_1\cos\left(\sqrt{40}\cdot 0\right)-\sqrt{40}\cdot C_2\sin\left(\sqrt{40}\cdot 0\right)=0 \quad \rightarrow C_1=0$$

Rozwiązanie szczególne:

$$\phi=\cos\left(\sqrt{40}\,t\right)$$

# Rozwiązywanie równań różniczkowych (RR)



**Zad.1** Rozwiąż podane równanie różniczkowe wykorzystując rozkład w szereg Taylora.

$$\ddot{y}+5\dot{y}+4y=0 \qquad \begin{cases}\dot{y}(0)=0\\ y(0)=1\end{cases}$$

Rozwiązanie y = y(x) rozkładamy w szereg Taylora np. do czwartego członu włącznie:

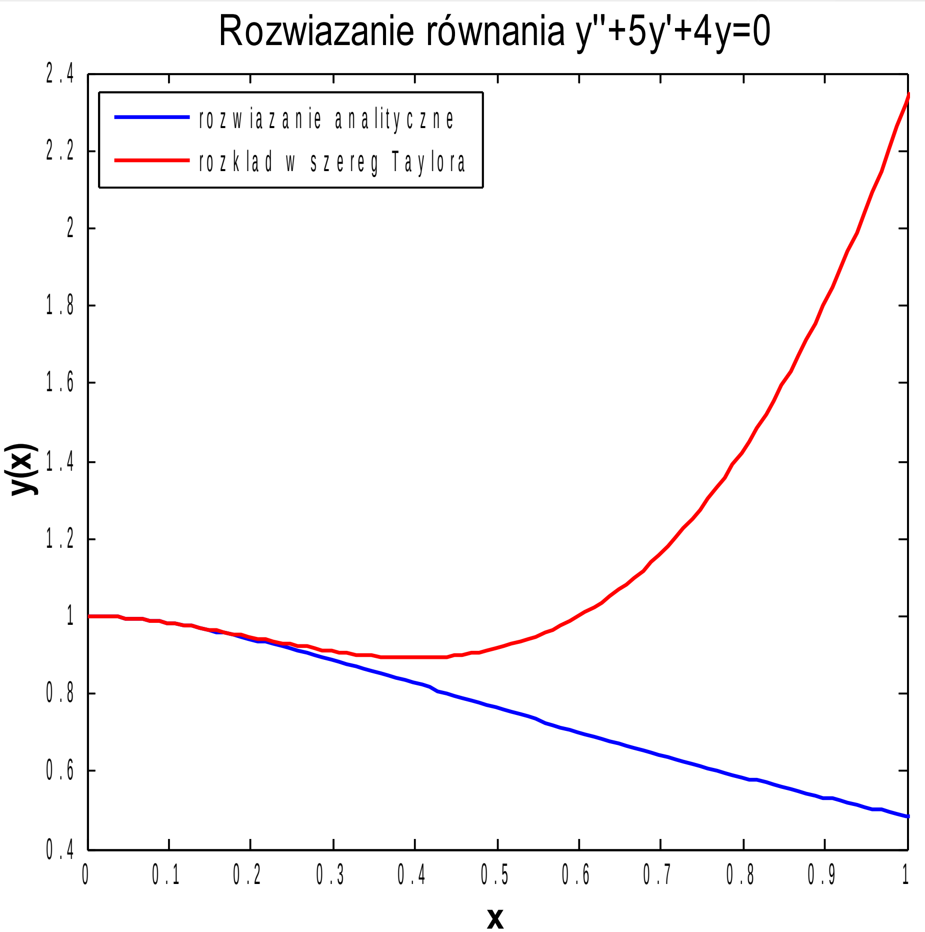
$$y(x)=y(x_0)+\dot{y}(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}\ddot{y}(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}\dddot{y}(x_0)(x-x_0)^3+0(\Delta^4)$$

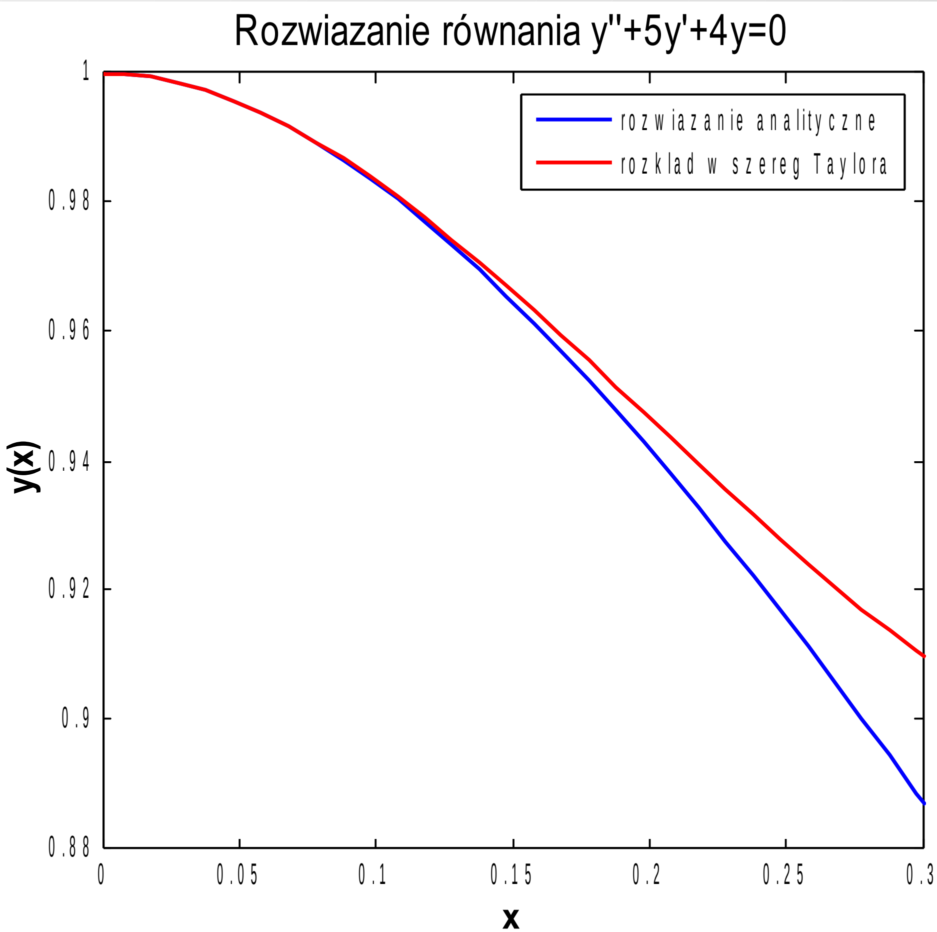
$$\ddot{y}=-5\dot{y}-4y$$
$$\dddot{y}=-5\ddot{y}-4\dot{y}$$

$$x_0=0$$
$$y(0)=1$$
$$\dot{y}(0)=0$$
$$\ddot{y}(0)=-5\dot{y}(0)-4y(0)=-4$$
$$\dddot{y}(0)=-5\ddot{y}(0)-4\dot{y}(0)=20$$

$$y(x)=1-2\mathrm{x}^2+\frac{10}{3}x^3$$

# Rozwiązywanie RR – rozkład w szereg Taylora



## Metody rozwiązywania równań różniczkowych:

- ***metody analityczne,***
  - rozwiązania ogólne
  - rozwiązania szczególne
- ***metody numeryczne,***
  - rozwiązania szczególne
- ***metody eksperymentalne***
  - rozwiązania szczególne

***METODY NUMERYCZNE***

***jednokrokowe*** ***wielokrokowe***

ze stałym krokiem

- I-go rzędu
- II-go rzędu
- ...
- n-tego rzędu

ze zmiennym krokiem

- I-go rzędu
- II-go rzędu
- ...
- n-tego rzędu

| |
|---|
| ✔ przybliżenie początkowe, |
| ✔ krok, |
| ✔ przedział |

- **Zastosowanie wzoru Taylora**

założenie: funkcja jest różniczkowalna i pewne jej pochodne istnieją

$$y(x+h) \approx y(x) + h\,\dot{y}(x) + \frac{1}{2!}h^2\,\ddot{y}(x) + \frac{1}{3!}\dddot{y}(x) + \ldots$$

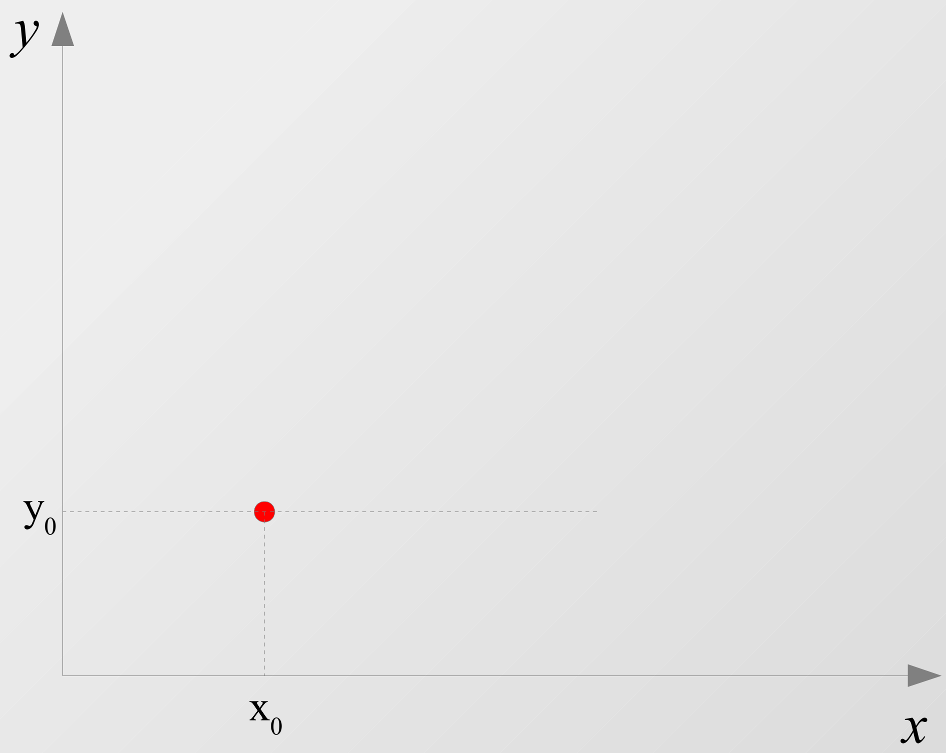
1. określamy liczbę członów we wzorze,
2. przyjmujemy $x=x_0$,
3. obliczamy wartość w kolejnych punktach $x+h$, $x+2h$, ...
4. potęga ostatniego członu określa rząd metody.

- **Rodzina metod Eulera**
  - metody rzędu pierwszego,
  - nie trzeba różniczkować funkcji,
  - bardzo małe h

$$y(x+h) \approx y(x) + h\varphi(x, y)$$

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

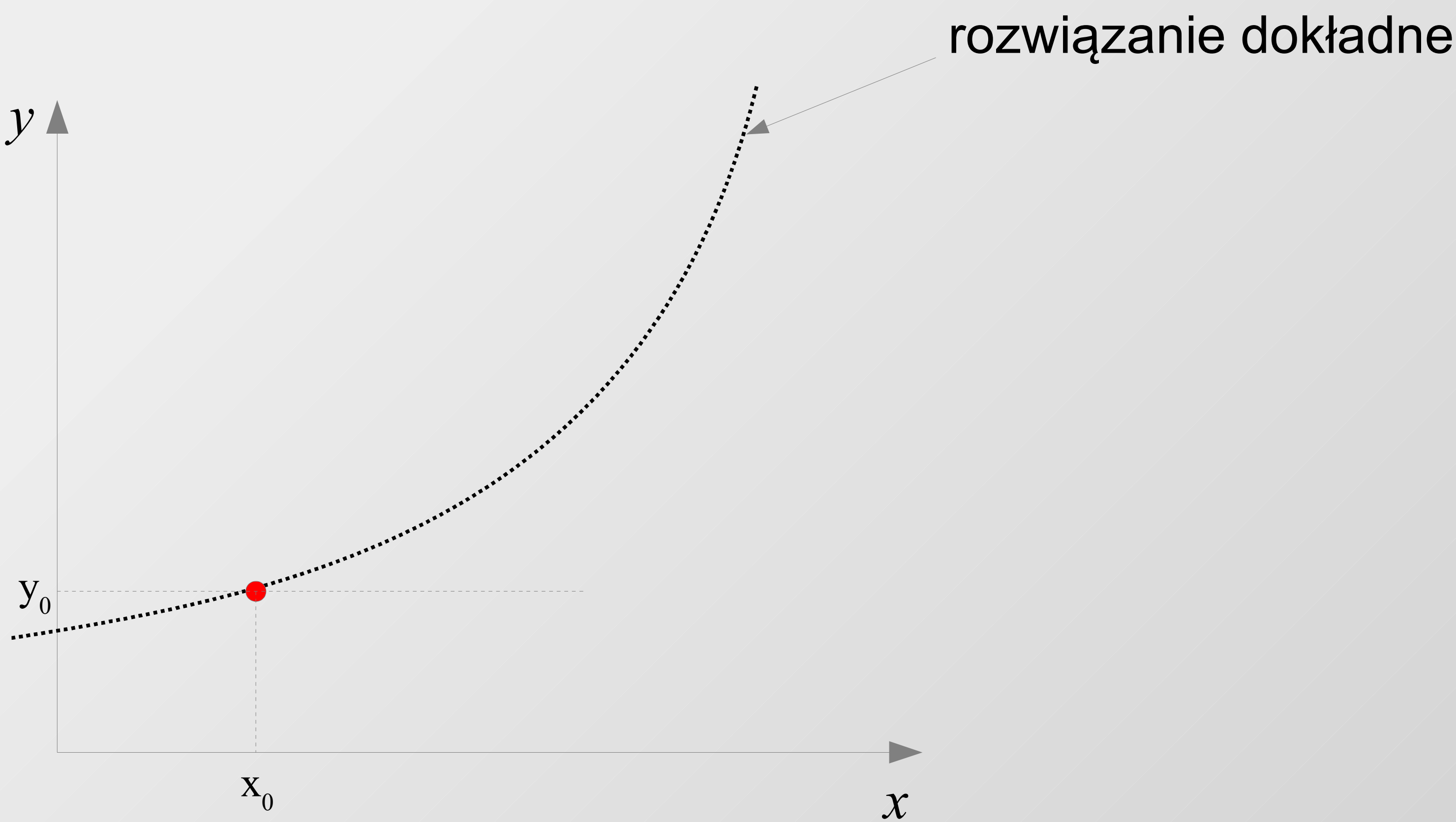
- **Metoda Eulera** $y_{n+1} = y_n + \underbrace{f(x_n, y_n)}_{\varphi} \cdot h, \quad y(x_0) = y_0$



# Rozwiązywanie równań różniczkowych

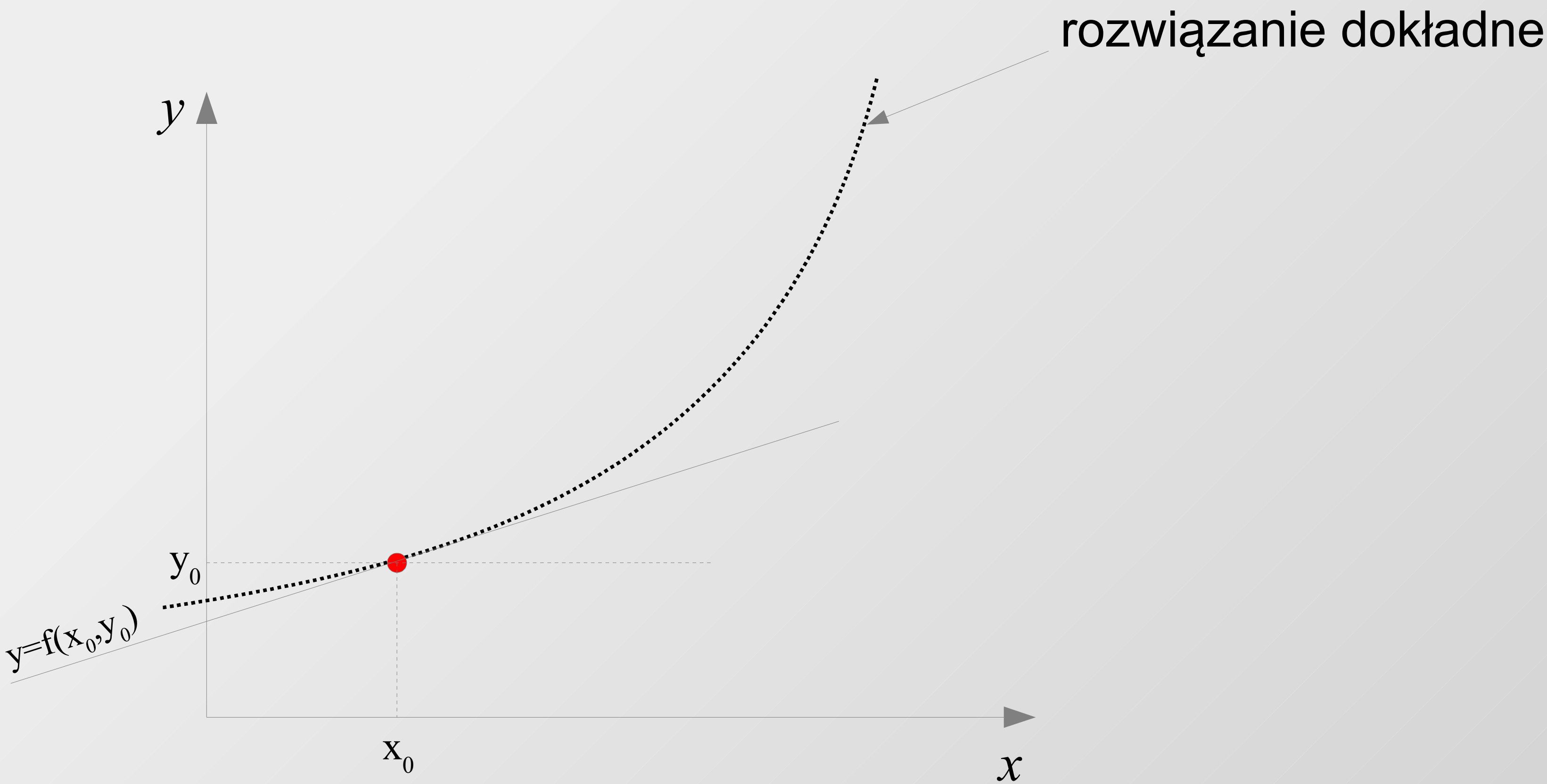
$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- **Metoda Eulera** $\quad y_{n+1} = y_n + \underbrace{f(x_n, y_n)}_{\varphi} \cdot h, \quad y(x_0) = y_0$



$$\dot{y}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

- **Metoda Eulera** $y_{n+1}=y_n+\underbrace{f(x_n,y_n)}_{\varphi}\cdot h,\quad y(x_0)=y_0$

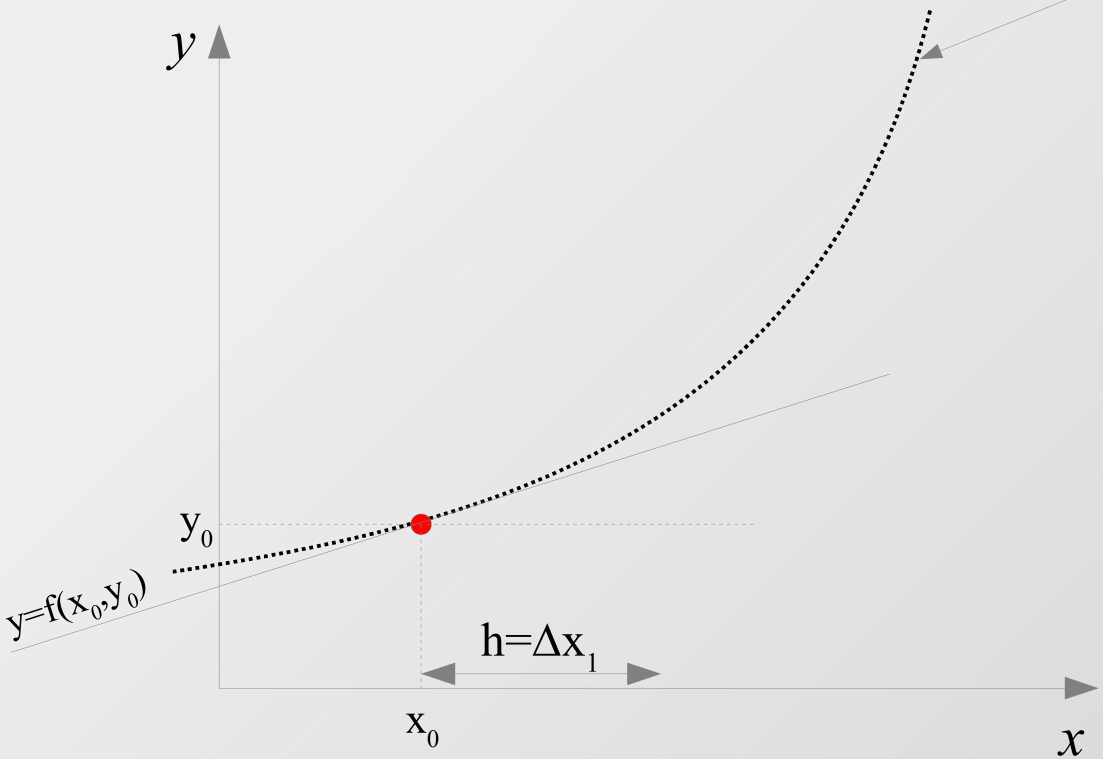


$$\dot{y}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

- **Metoda Eulera** $\quad y_{n+1}=y_n+\underbrace{f(x_n,y_n)}_{\varphi}\cdot h,\quad y(x_0)=y_0$

rozwiązanie dokładne

$$\Delta x_1=h$$

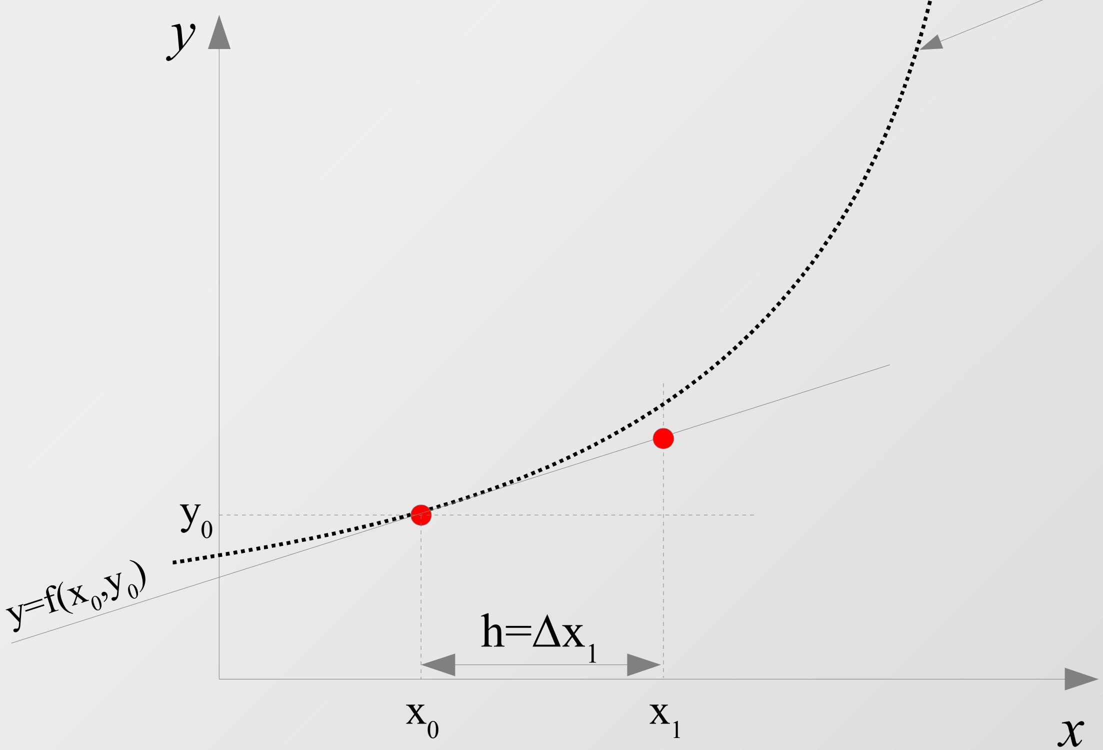


$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- **Metoda Eulera** $\quad y_{n+1} = y_n + \underbrace{f(x_n, y_n)}_{\varphi} \cdot h, \quad y(x_0) = y_0$

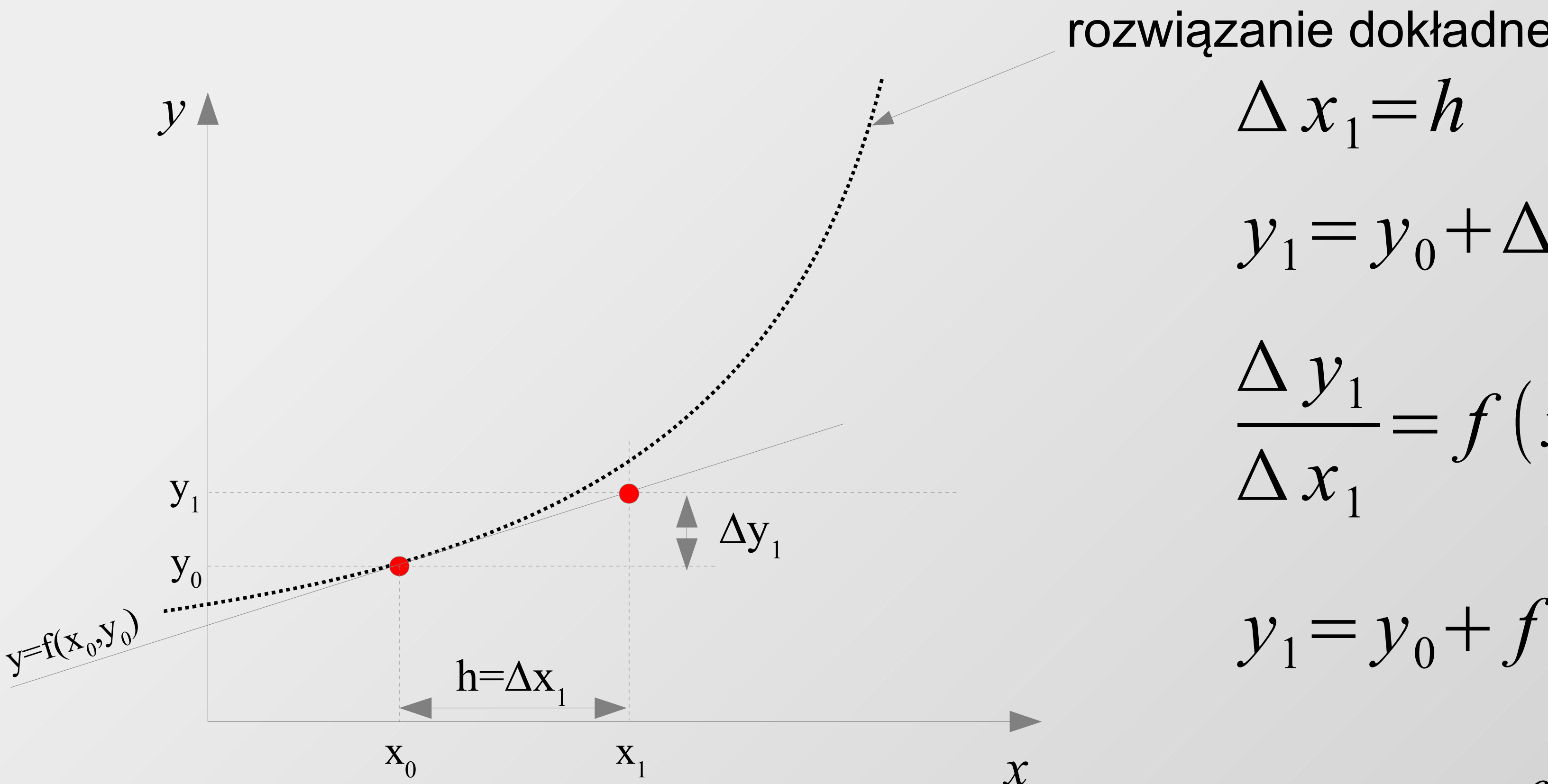
rozwiązanie dokładne

$$\Delta x_1 = h$$



$$\dot{y}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

- **Metoda Eulera** $\quad y_{n+1}=y_n+\underbrace{f(x_n,y_n)}_{\varphi}\cdot h,\quad y(x_0)=y_0$




$$\Delta x_1=h$$

$$y_1=y_0+\Delta y_1$$

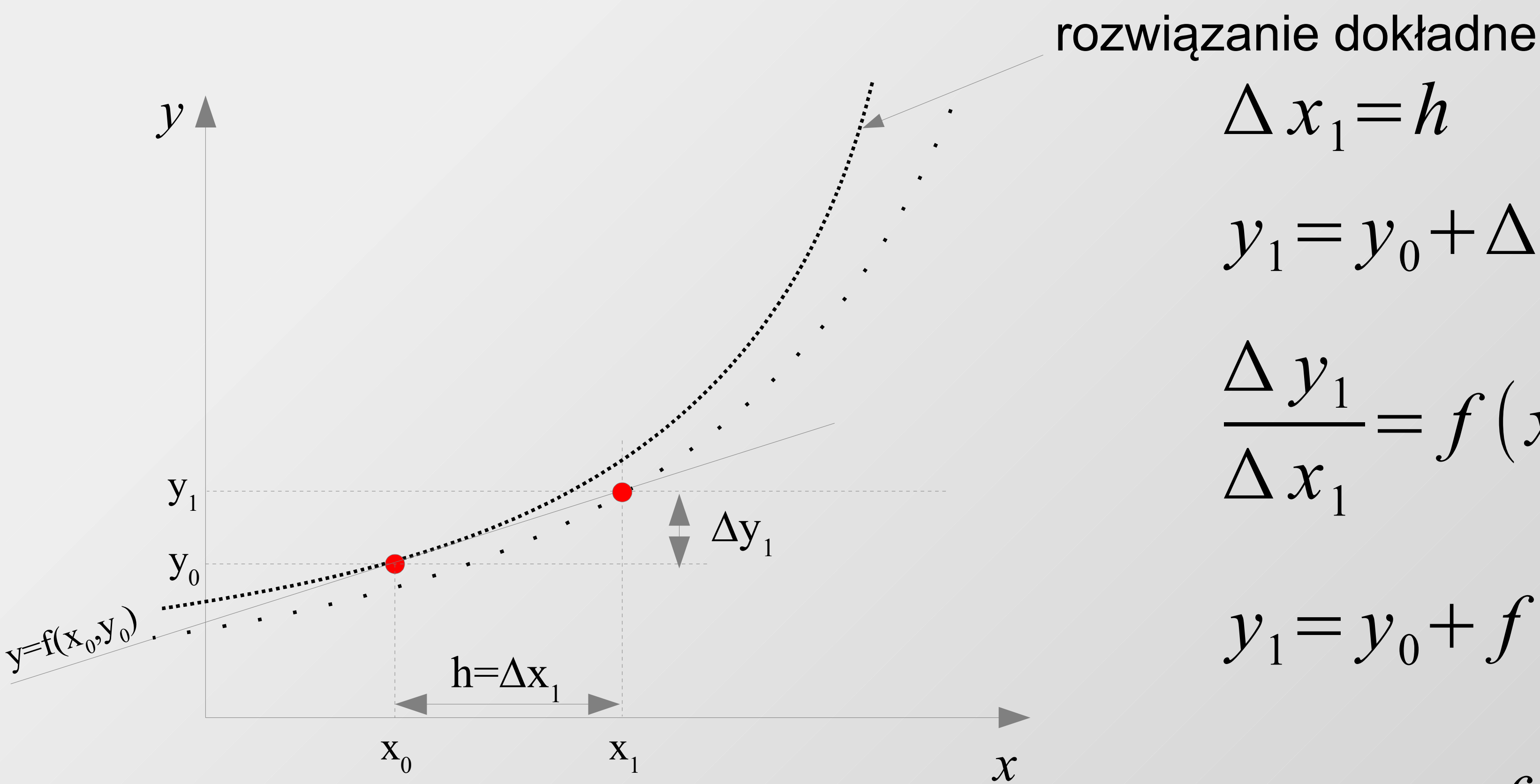
$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=f(x_{0,}y_0)$$

$$y_1=y_0+f(x_{0,}y_0)\Delta x_1$$

$$y_1=y_0+f(x_{0,}y_0)h$$

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- **Metoda Eulera** $\quad y_{n+1} = y_n + \underbrace{f(x_n, y_n)}_{\varphi} \cdot h, \quad y(x_0) = y_0$




$$\Delta x_1 = h$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1$$

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = f(x_{0,} y_0)$$

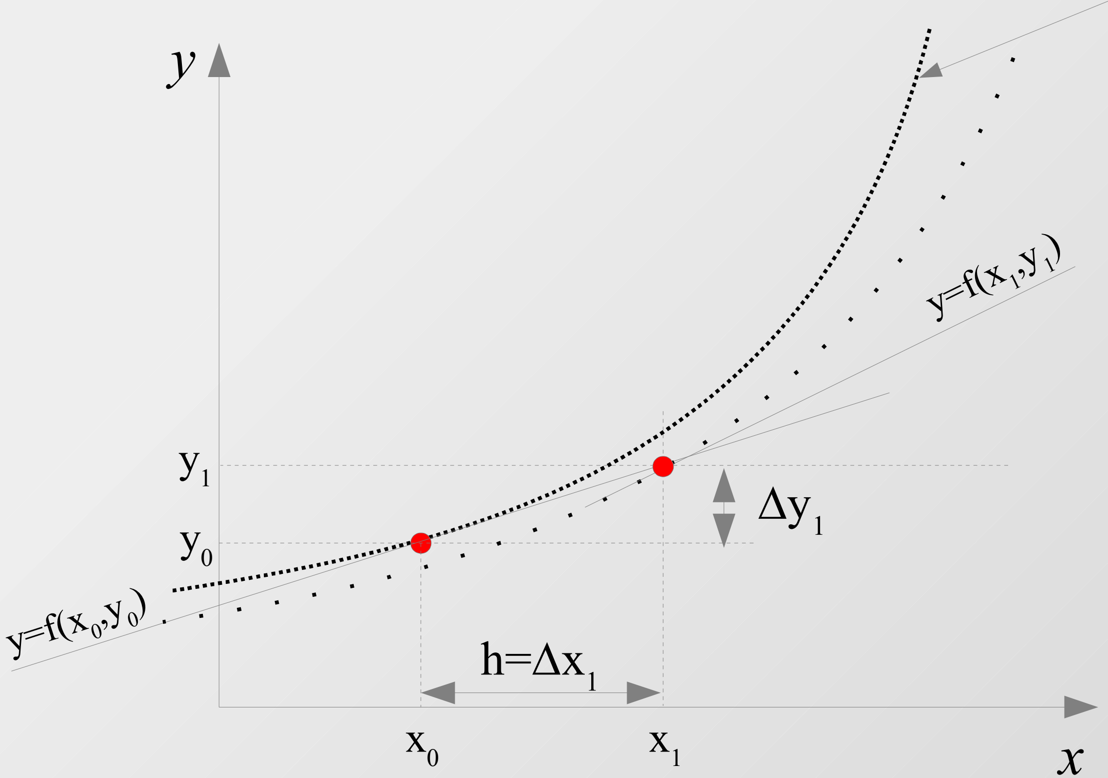
$$y_1 = y_0 + f(x_{0,} y_0)\Delta x_1$$

$$y_1 = y_0 + f(x_{0,} y_0) h$$

$$\dot{y}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

- **Metoda Eulera** $y_{n+1}=y_n+\underbrace{f(x_n,y_n)}_{\varphi}\cdot h,\quad y(x_0)=y_0$

rozwiązanie dokładne




$$\Delta x_1=h$$

$$y_1=y_0+\Delta y_1$$

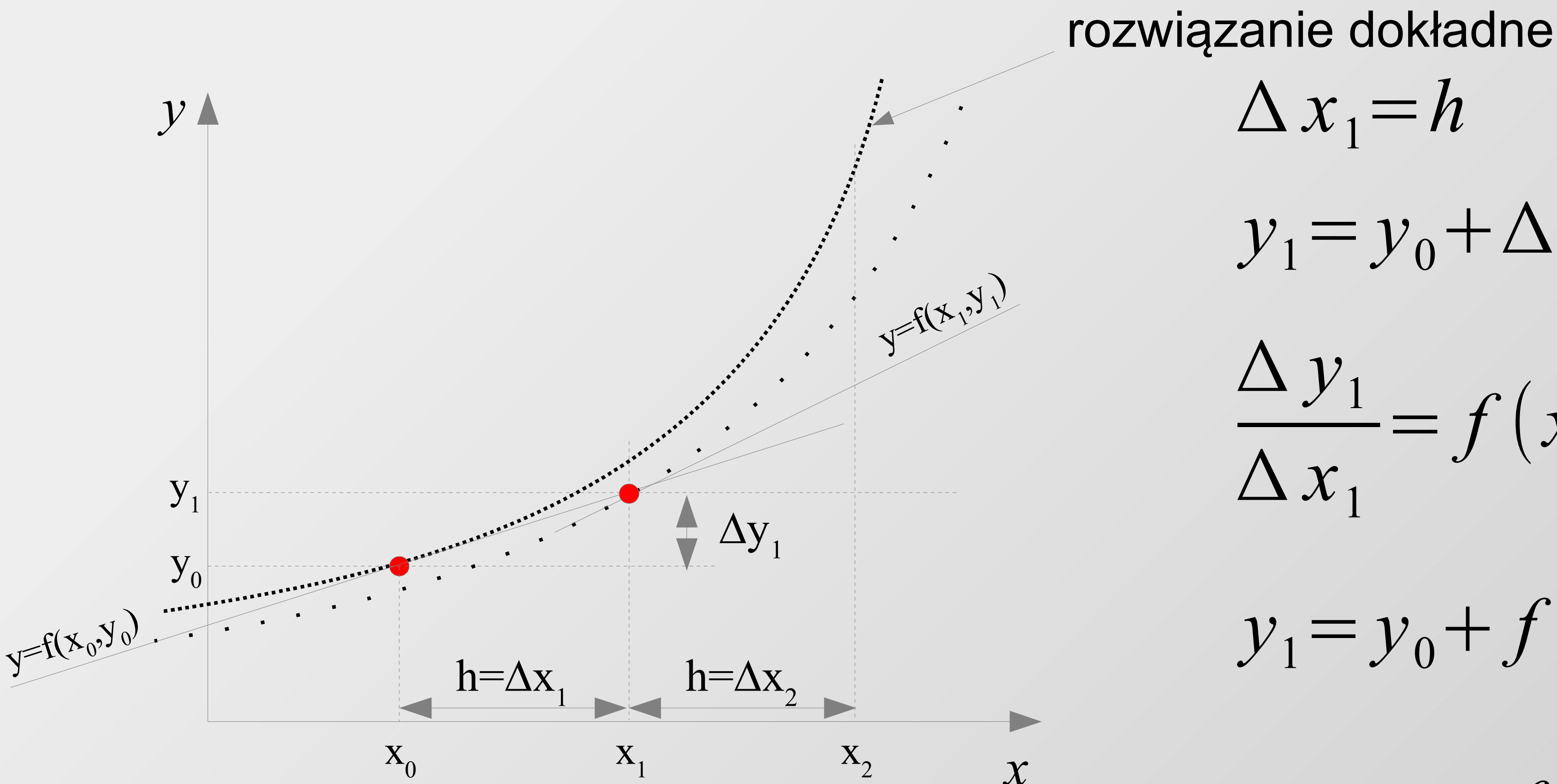
$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=f(x_{0,}y_0)$$

$$y_1=y_0+f(x_{0,}y_0)\Delta x_1$$

$$y_1=y_0+f(x_{0,}y_0)h$$

$$\dot{y}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

- **Metoda Eulera** $\quad y_{n+1}=y_n+\underbrace{f(x_n,y_n)}_{\varphi}\cdot h,\quad y(x_0)=y_0$




$$\Delta x_1=h$$

$$y_1=y_0+\Delta y_1$$

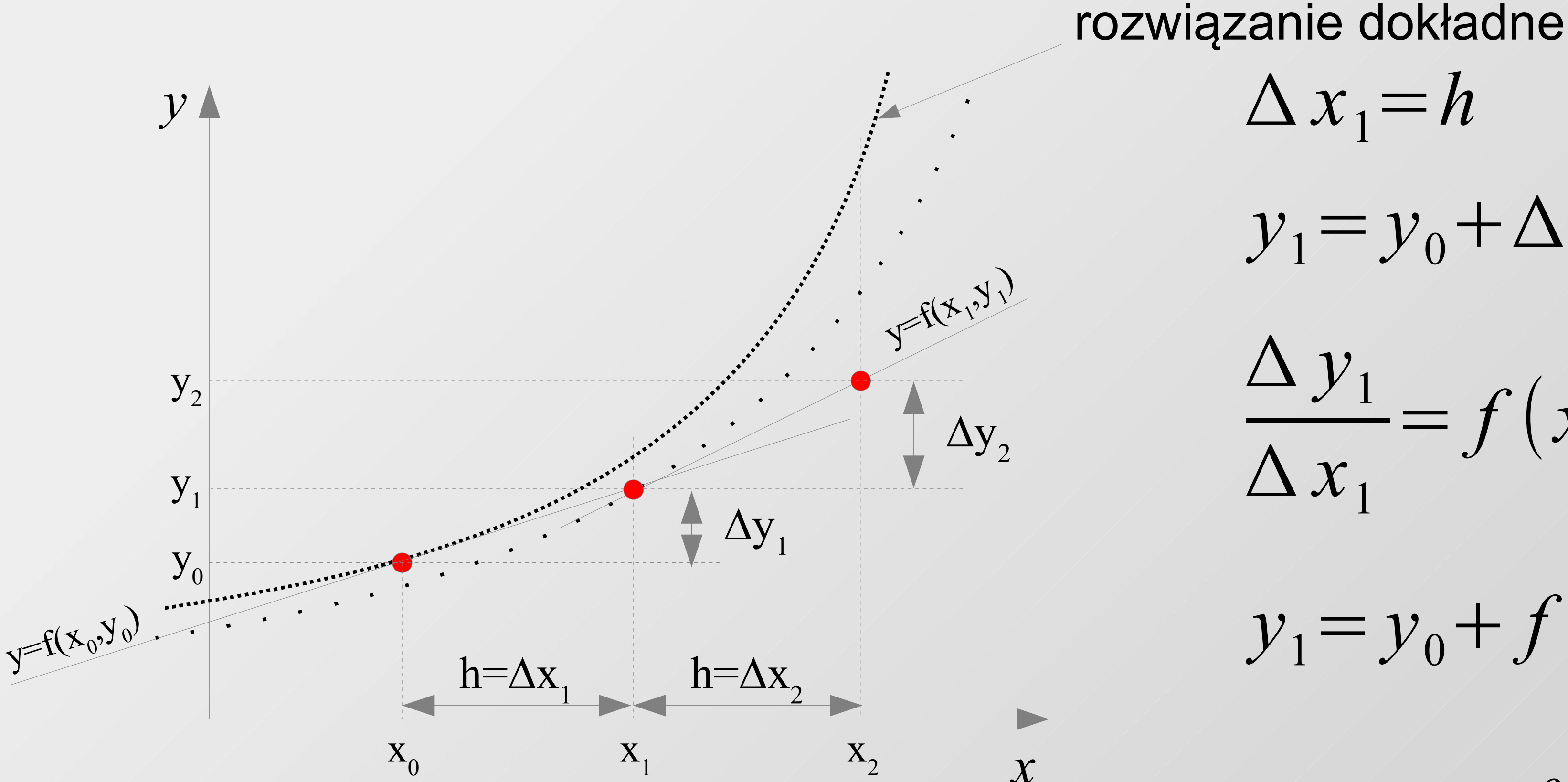
$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=f(x_{0,}y_0)$$

$$y_1=y_0+f(x_{0,}y_0)\Delta x_1$$

$$y_1=y_0+f(x_{0,}y_0)h$$

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- **Metoda Eulera** $y_{n+1} = y_n + \underbrace{f(x_n, y_n)}_{\varphi} \cdot h, \quad y(x_0) = y_0$




$$\Delta x_1 = h$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1$$

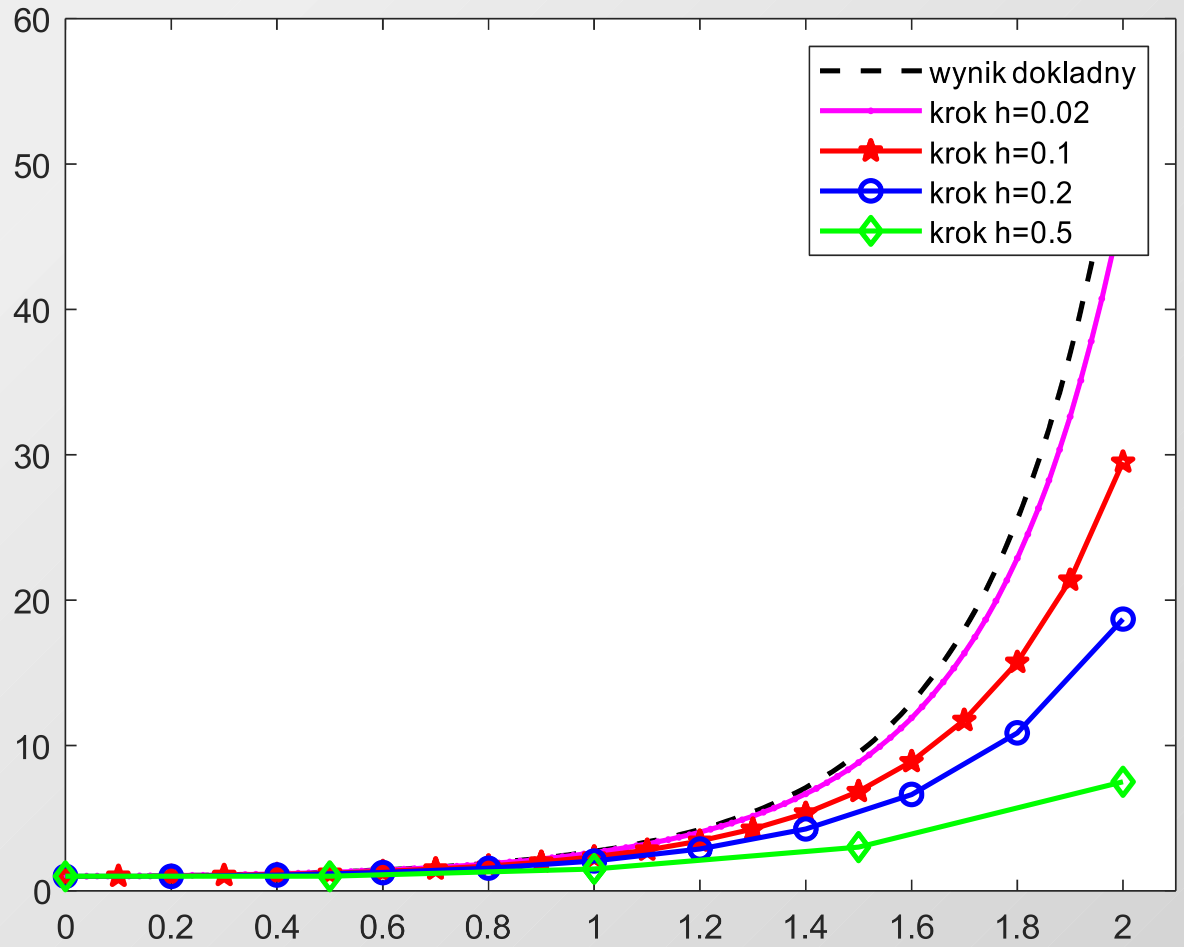
$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = f(x_{0,} y_0)$$

$$y_1 = y_0 + f(x_{0,} y_0) \Delta x_1$$

$$y_1 = y_0 + f(x_{0,} y_0) h$$

# Rozwiązywanie RR – metoda EULERA

$$\dot{y} = 2\,x\,y \qquad\qquad y(0) = 0$$



**Zad.2** Rozwiąż podane równanie różniczkowe z warunkiem początkowym y(1)=1, w przedziale <1,2>, z krokiem h=0.2 za pomocą metody Eulera.

$$\dot{y}=2\cdot y+x \qquad y(1)=1 \qquad h=0.2$$

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,y_n)\cdot h$$

Krok 1

$$x_0=1$$
$$y_0=1$$
$$y_1=y_0+(2y_0+x_0)h=1+(2\cdot 1+1)0.2=1.6$$
$$x_1=x_0+h=1+0.2=1.2$$

Krok 2

$$x_1 = 1.2$$
$$y_1 = 1.6$$
$$y_2 = 1.6 + (2 \cdot 1.6 + 1.2)0.2 = 2.48$$
$$x_2 = 1.2 + 0.2 = 1.4$$

Krok 3

$$y_3 = 2.48 + (2 \cdot 2.48 + 1.4)0.2 = 3.752$$
$$x_3 = 1.4 + 0.2 = 1.6$$

Krok 4

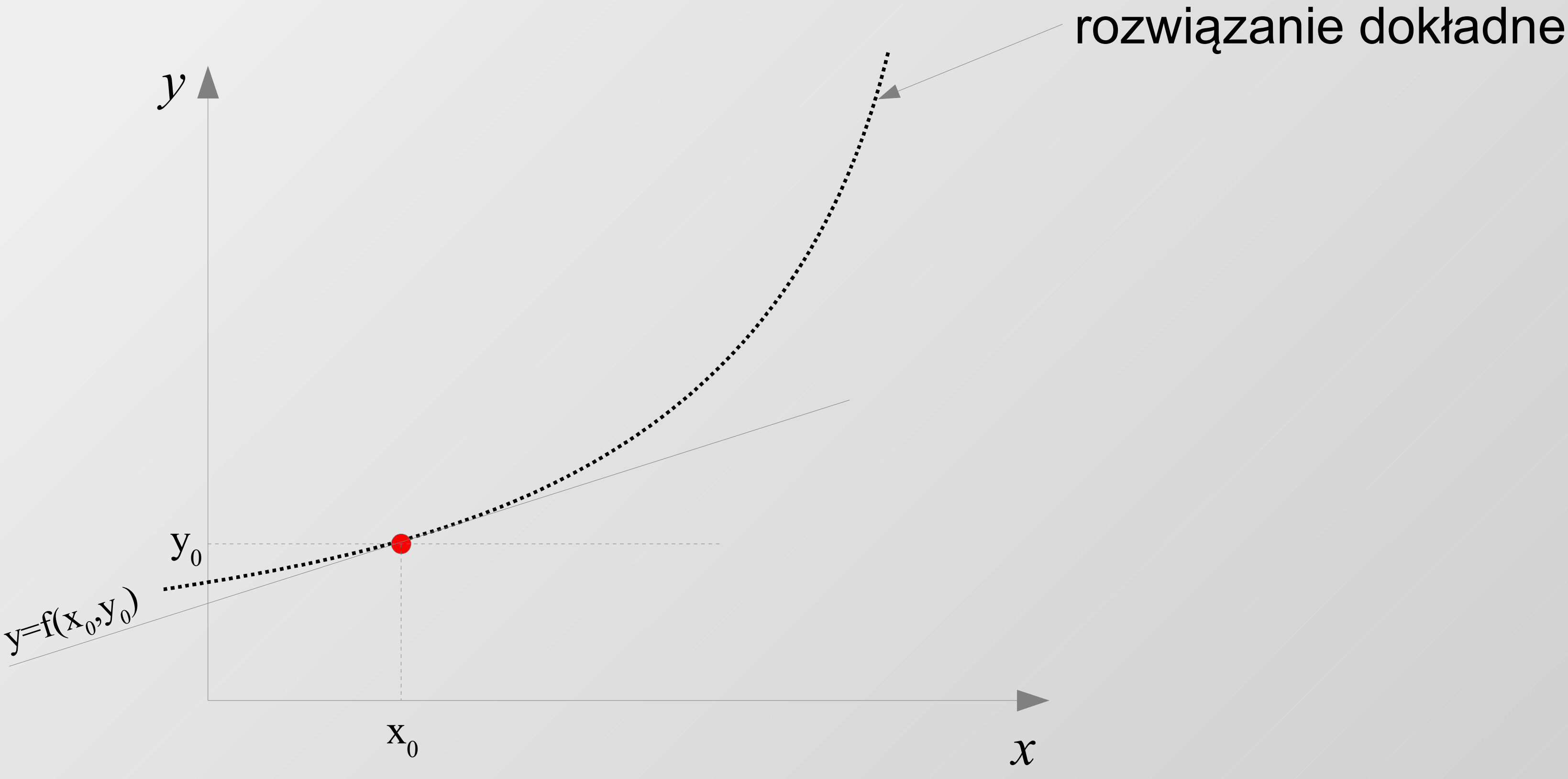
$$y_4 = 3.752 + (2 \cdot 3.752 + 1.6)0.2 = 5.573$$
$$x_4 = 1.6 + 0.2 = 1.8$$

Krok 5

$$y_5 = 5.573 + (2 \cdot 5.573 + 1.8)0.2 = 8.1619$$
$$x_5 = 1.8 + 0.2 = 2$$

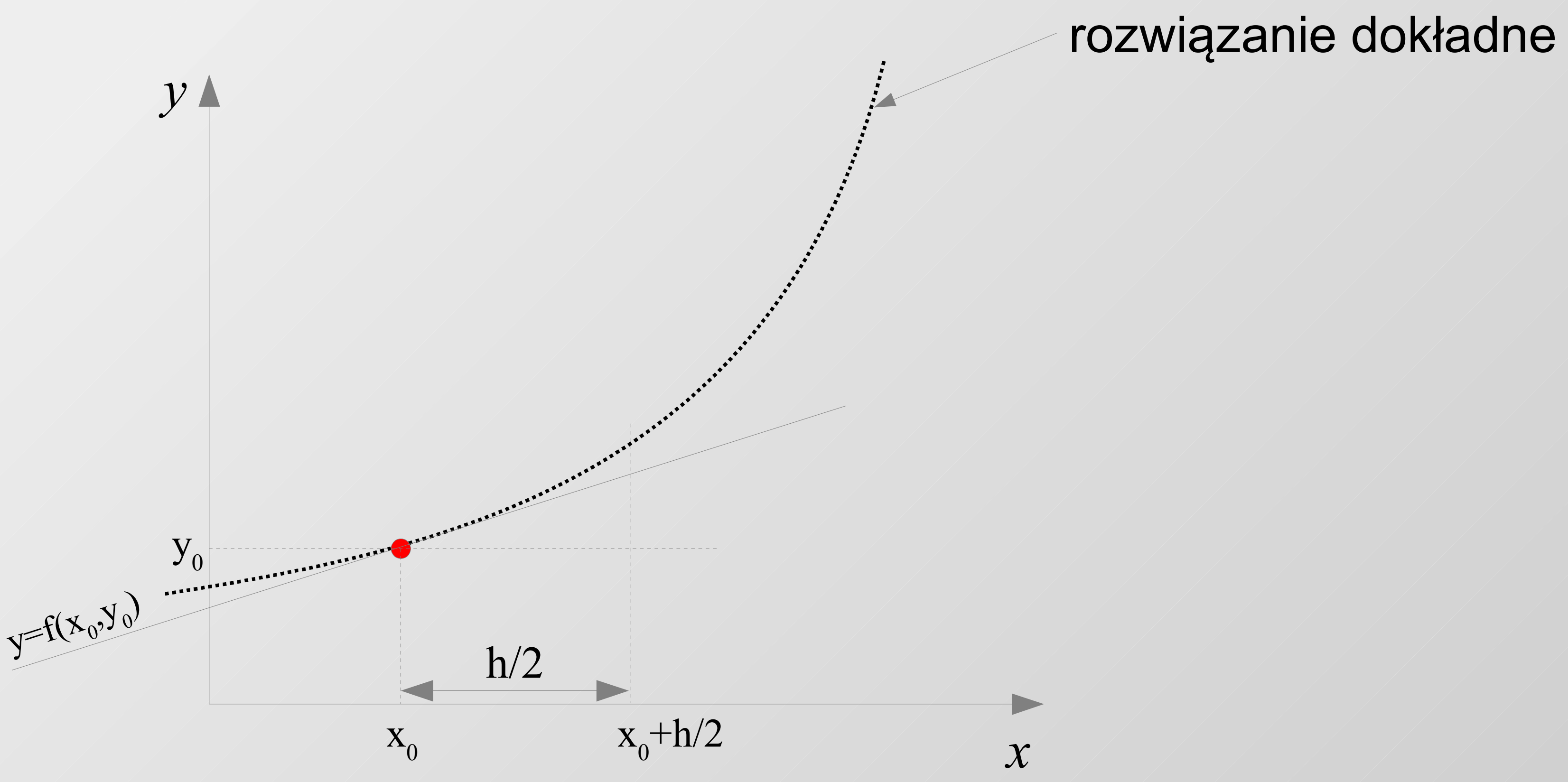
- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n)\cdot\frac{h}{2}}\right)\cdot h$$



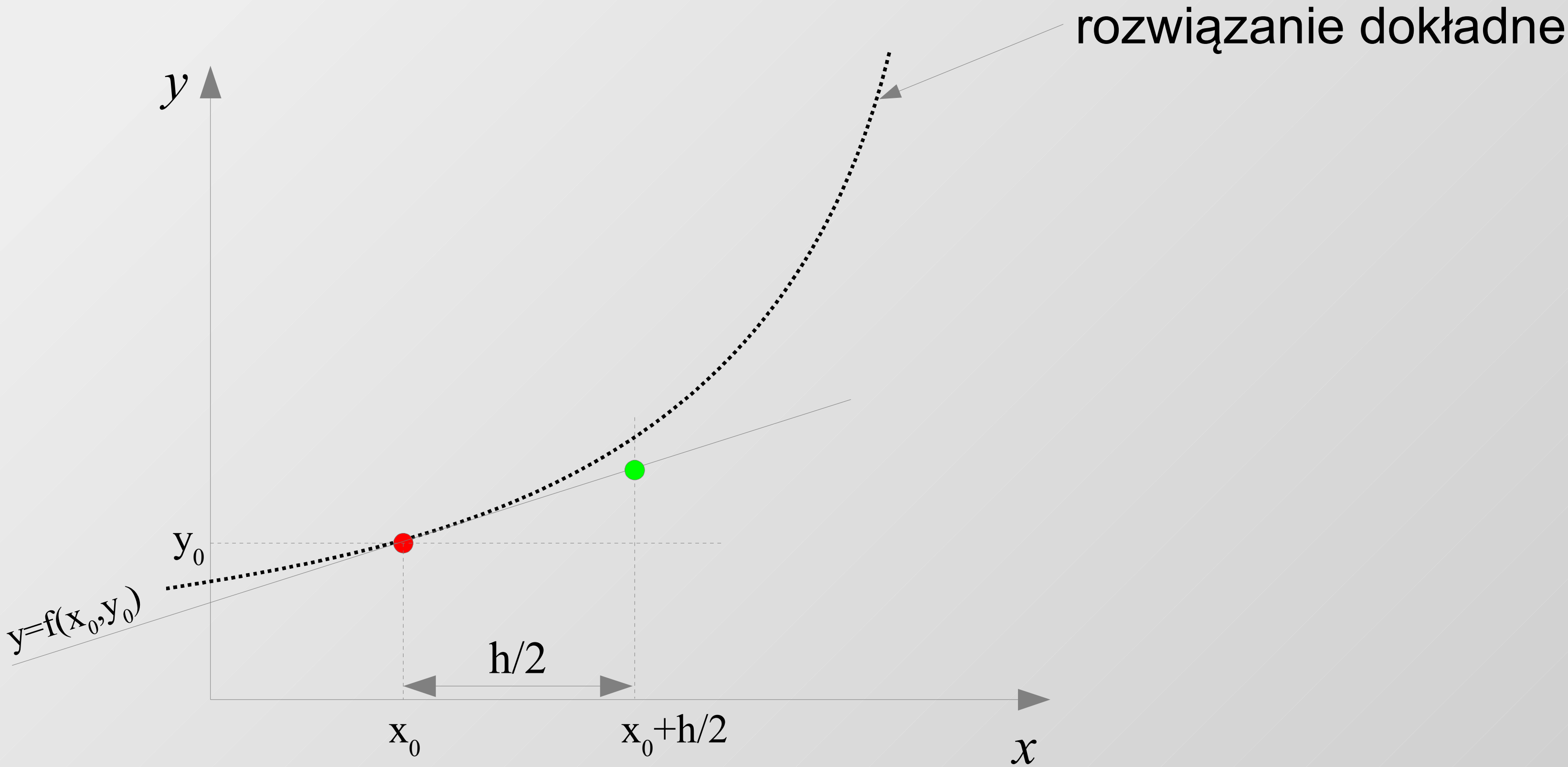
- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

$$y_{n+1}=y_n+f\left(\boxed{x_n+\frac{h}{2}},\boxed{y_n+f(x_n,y_n)\cdot\frac{h}{2}}\right)\cdot h$$



- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

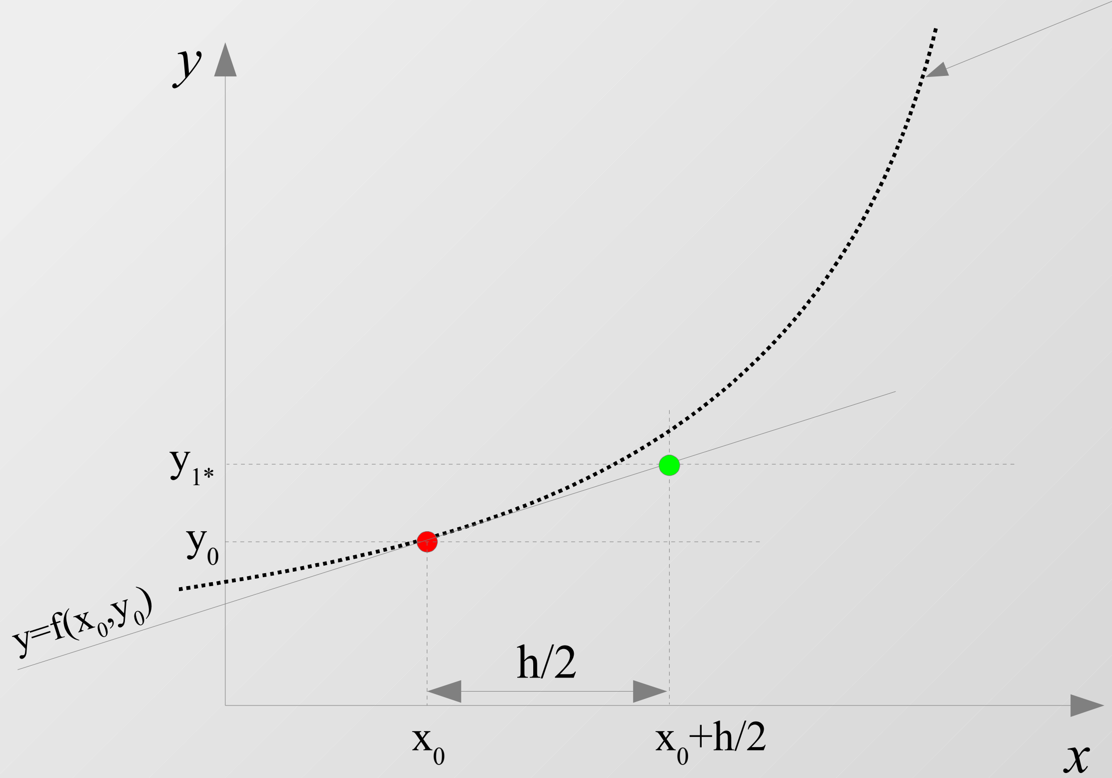
$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}}\right) \cdot h$$



- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

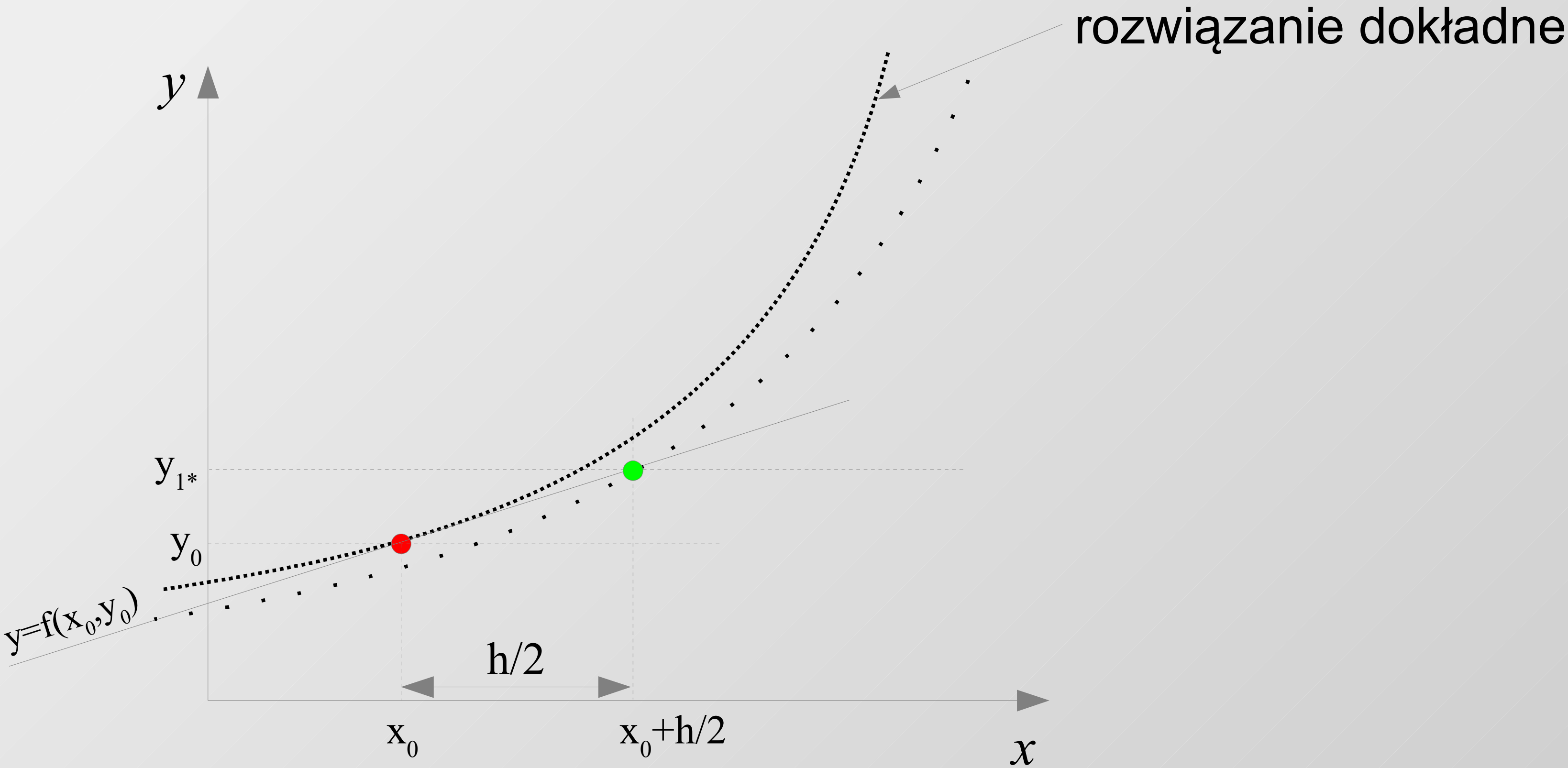
$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n)\cdot\frac{h}{2}}\right)\cdot h$$

rozwiązanie dokładne



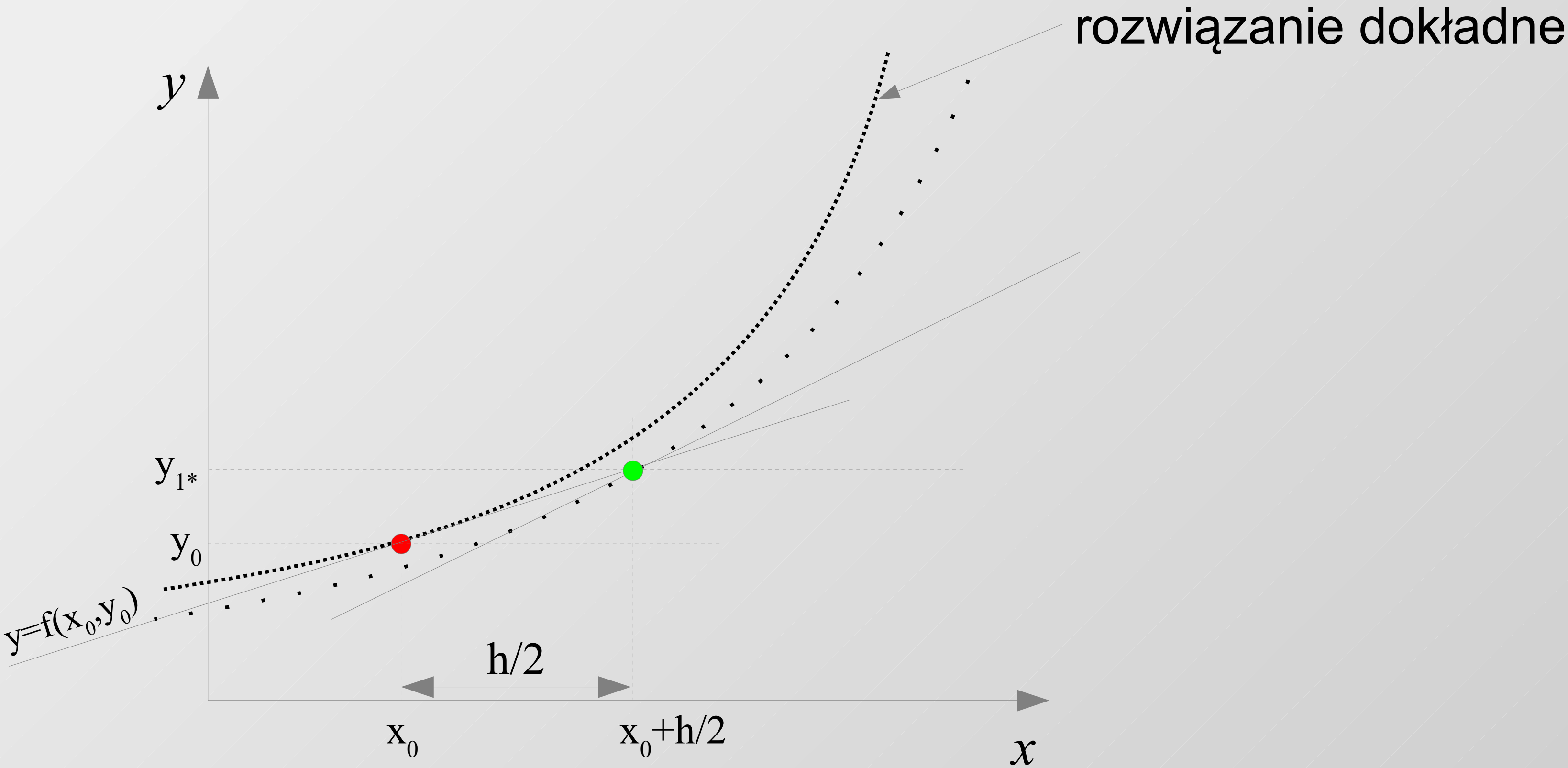
- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n)\cdot\frac{h}{2}}\right)\cdot h$$



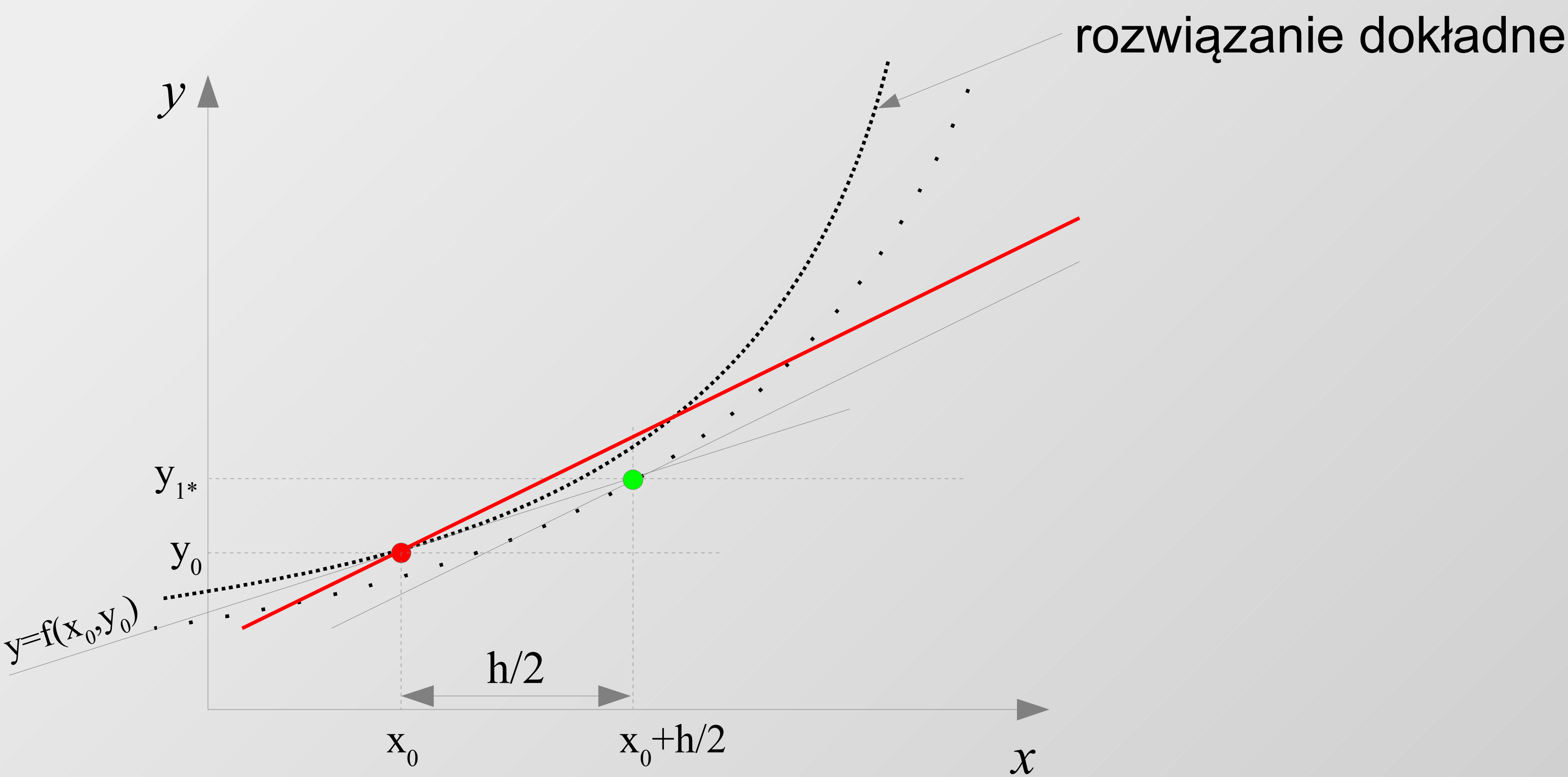
## Zmodyfikowana metoda Eulera

$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}}\right) \cdot h$$



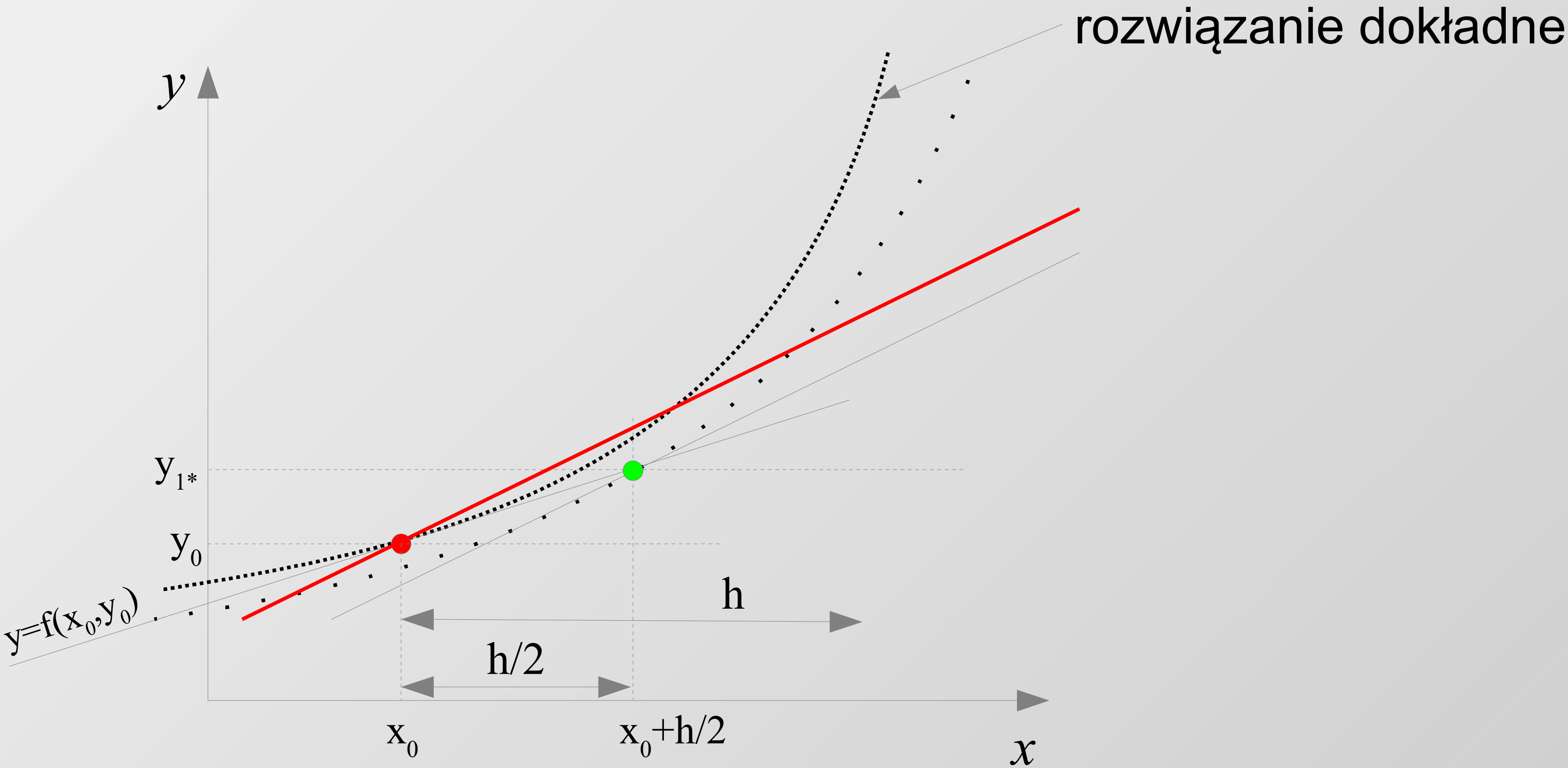
- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n)\cdot\frac{h}{2}}\right)\cdot h$$



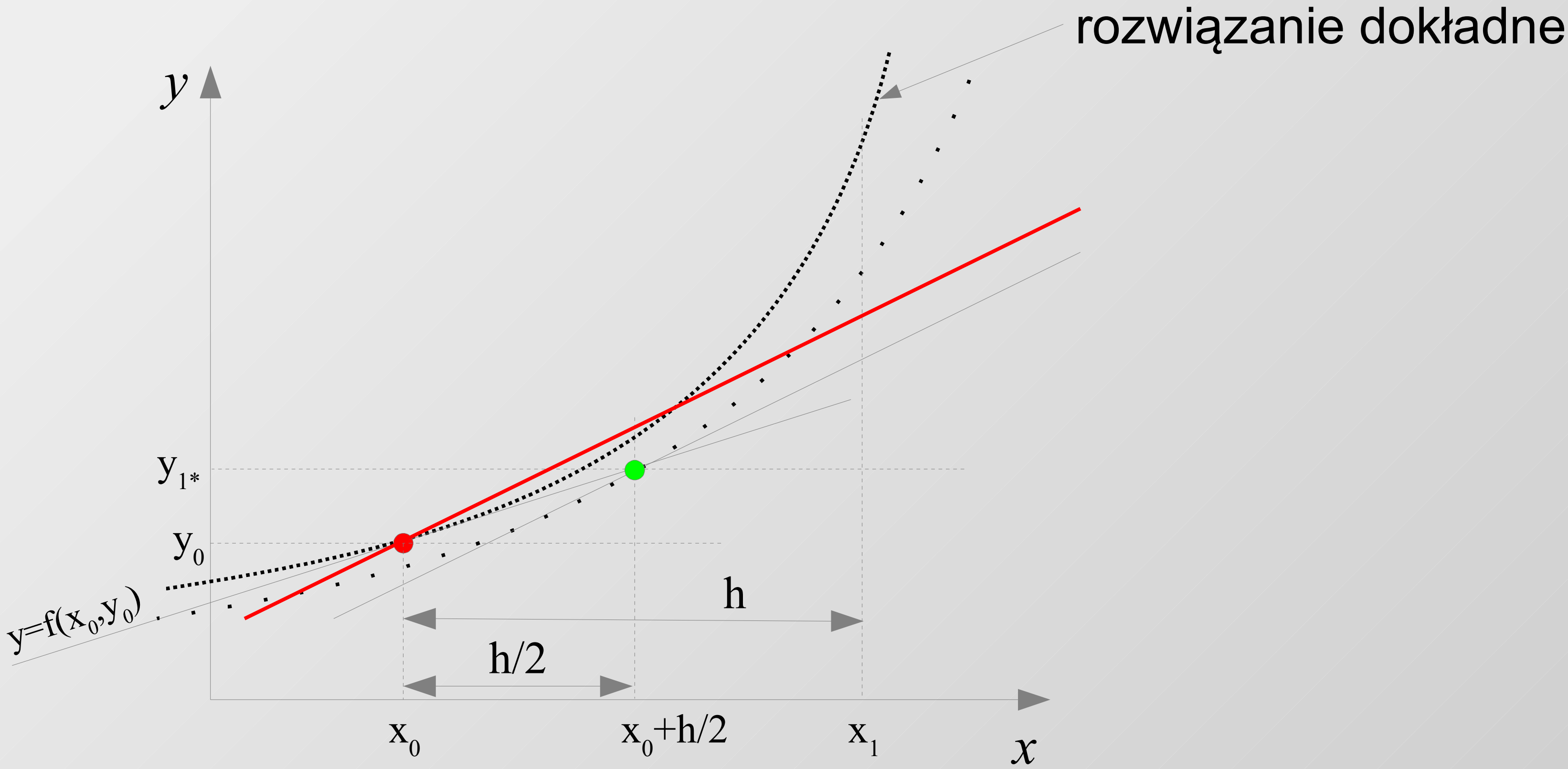
- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

$$y_{n+1} = y_n + f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + f(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot h$$



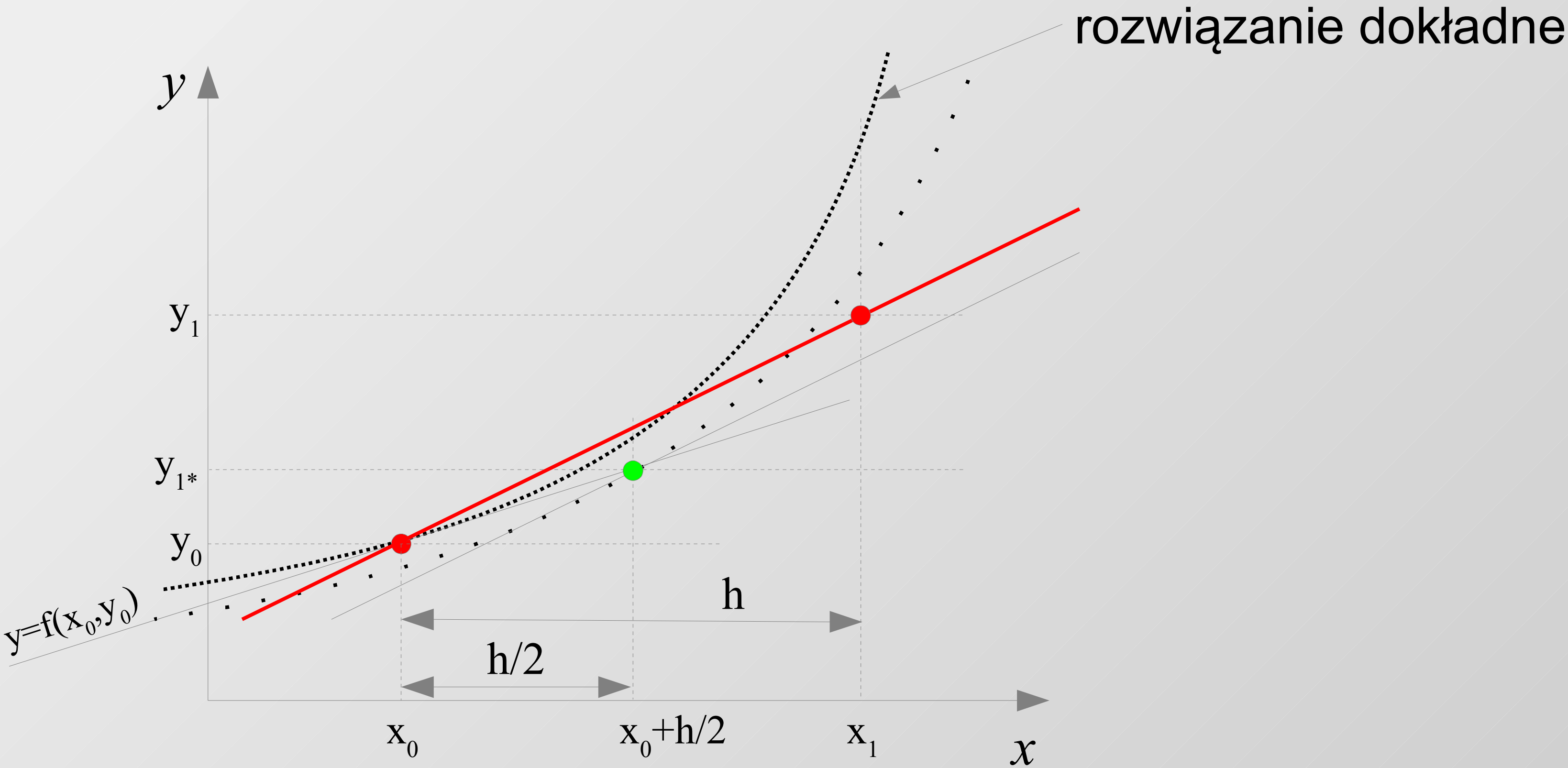
## Zmodyfikowana metoda Eulera

$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}}\right) \cdot h$$



- **Zmodyfikowana metoda Eulera**

$$y_{n+1} = y_n + f\left(\boxed{x_n + \frac{h}{2}}, \boxed{y_n + f(x_n, y_n)\cdot\frac{h}{2}}\right)\cdot h$$



**Zad.3** Rozwiąż podane równanie różniczkowe z warunkiem początkowym y(1)=1, w przedziale <1,2>, z krokiem h=0.2 za pomocą zmodyfikowanej metody Eulera.

$$\dot{y}=2\cdot y+x \qquad y(1)=1 \qquad h=0.2$$

$$y_{n+1}=y_n+f\left(\boxed{x_n+\frac{h}{2}},\boxed{y_n+f(x_n,y_n)\cdot\frac{h}{2}}\right)\cdot h$$

Krok 1

$$x_0=1$$

$$y_0=1$$

$$x_0^*=x_0+h/2=1+0.1=1.1$$

$$y_0^*=y_0+(2y_0+x_0)\cdot h/2=1+(2\cdot 1+1)0.1=1.3$$

$$y_1=y_0+(2y_0^*+x_0^*)h=1+(2\cdot 1.3+1.1)0.2=1.74$$

$$x_1=x_0+h=1+0.2=1.2$$

# Rozwiązywanie RR – zmodyfikowana metoda EULERA

Krok 2

$$x_1 = 1.2$$
$$y_1 = 1.74$$
$$x_1^* = 1.2 + 0.1 = 1.3$$
$$y_1^* = 1.74 + \left(2 \cdot 1.74 + 1.2\right)0.1 = 2.208$$
$$y_2 = 1.74 + \left(2 \cdot 2.208 + 1.3\right)0.2 = 2.883$$
$$x_2 = 1.2 + 0.2 = 1.4$$

Krok 3

$$x_2^* = 1.4 + 0.1 = 1.5$$
$$y_2^* = 2.883 + \left(2 \cdot 2.883 + 1.4\right)0.1 = 3.599$$
$$y_3 = 2.883 + \left(2 \cdot 3.599 + 1.5\right)0.2 = 4.623$$
$$x_3 = 1.4 + 0.2 = 1.6$$

Krok 4

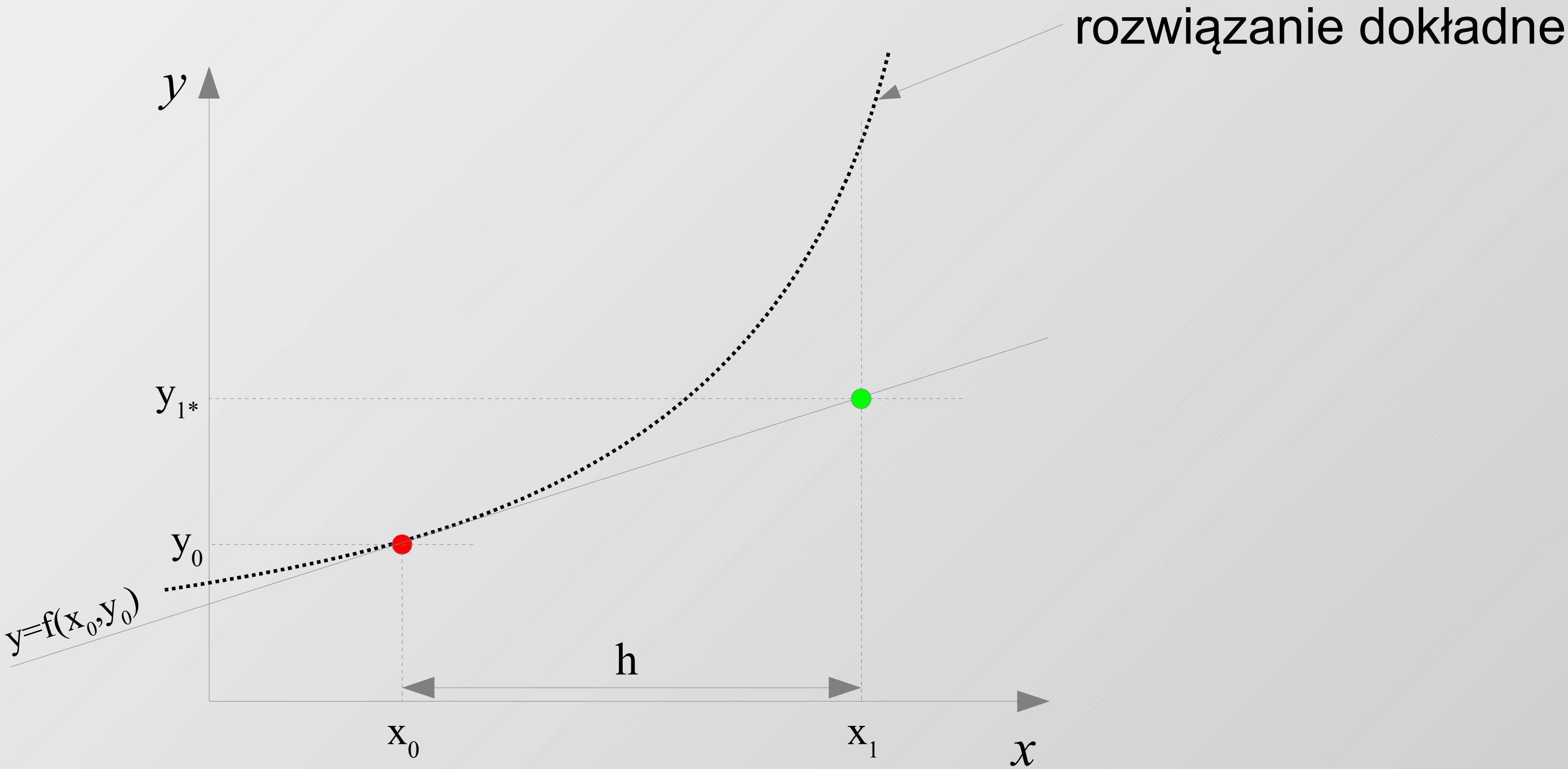
$$y_4 = 7.246$$
$$x_4 = 1.8$$

Krok 5

$$y_5 = 11.176$$
$$x_5 = 2$$

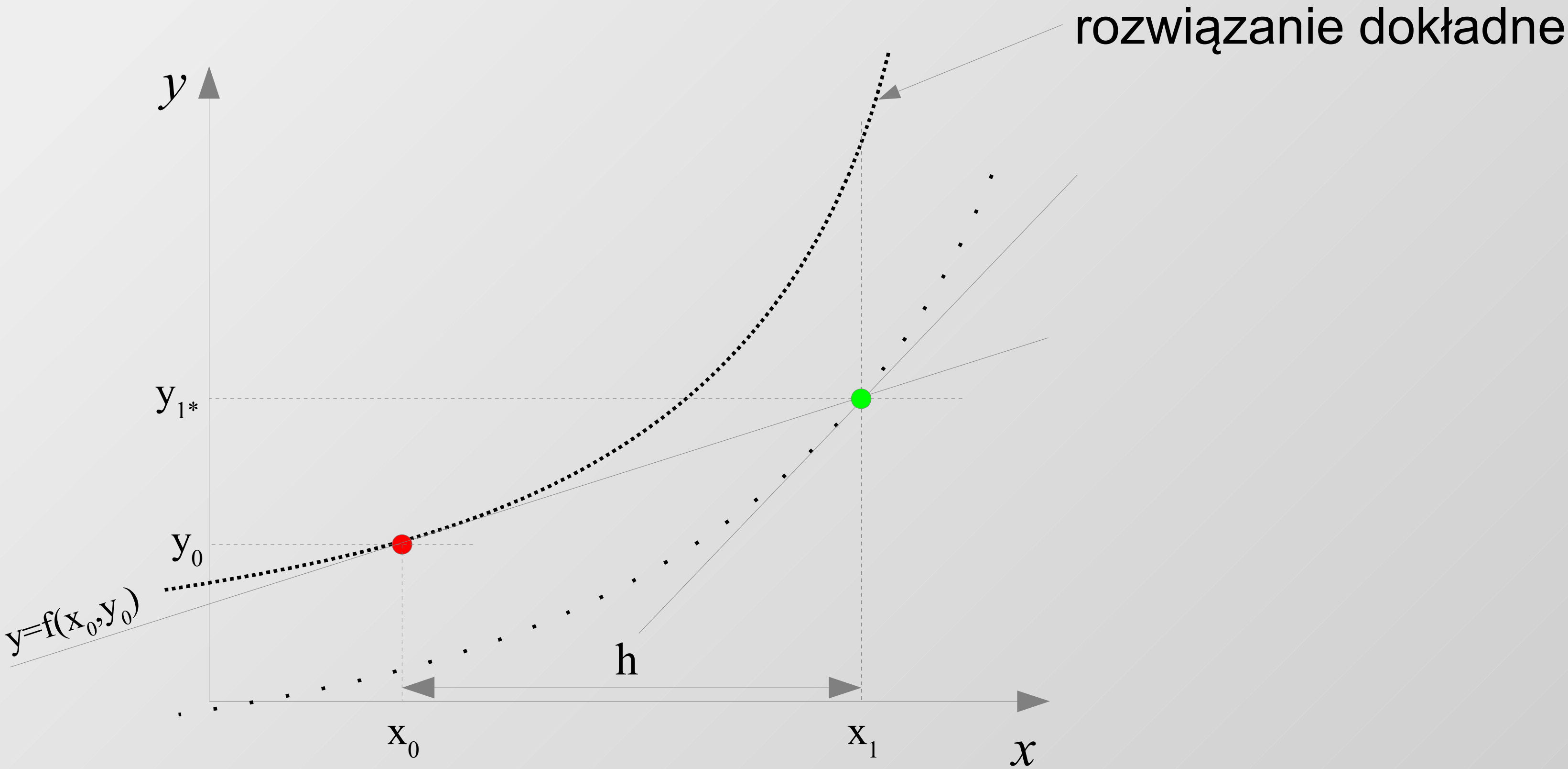
- **Udoskonalona metoda Eulera**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{f(x_n,y_n)+f\left(\boxed{x_n+h},\boxed{y_n+f(x_n,y_n)\cdot h}\right)}{2}\cdot h$$



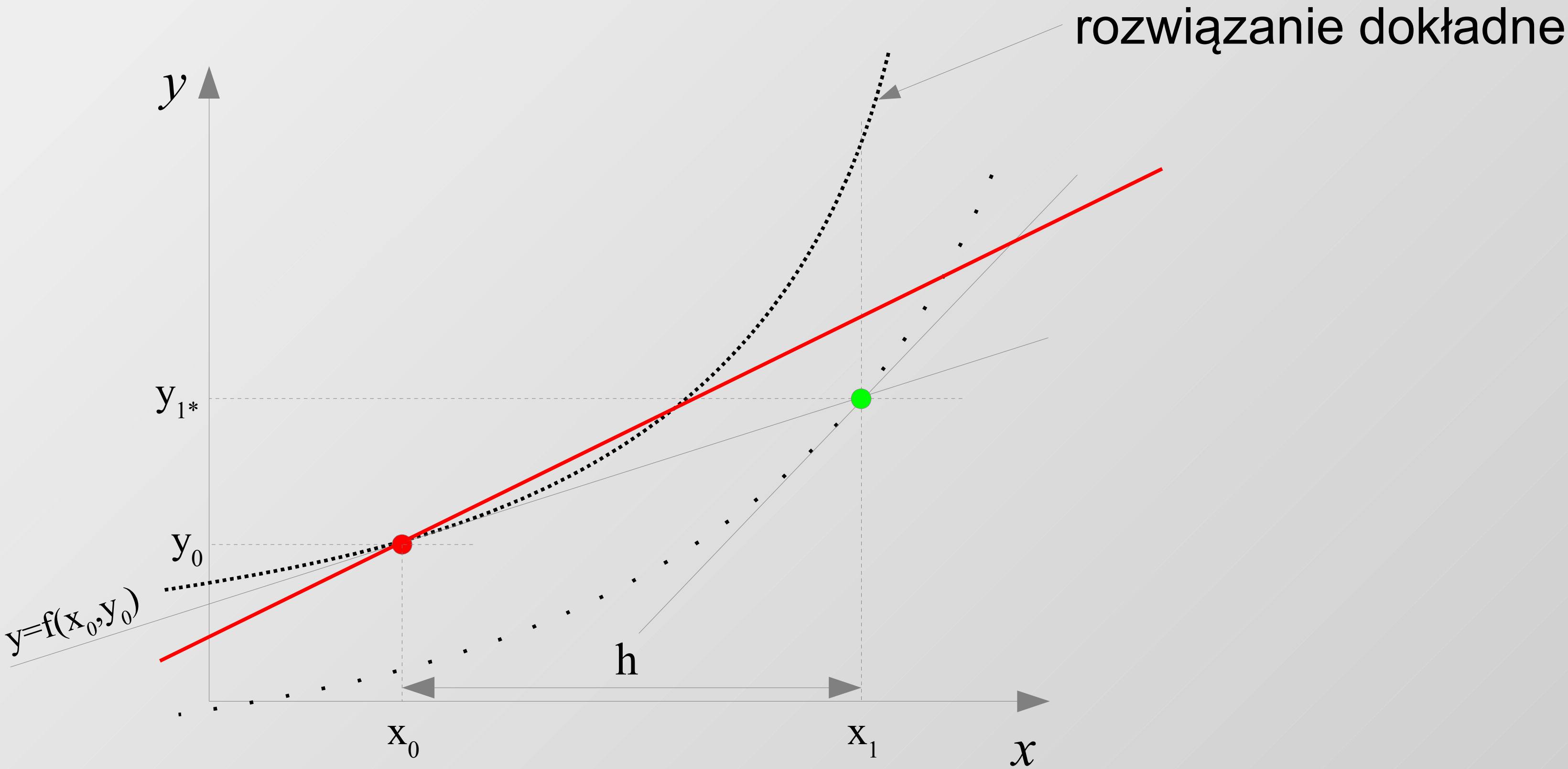
- **Udoskonalona metoda Eulera**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{f(x_n,y_n)+f(x_n+h,\,y_n+f(x_n,y_n)\cdot h)}{2}\cdot h$$



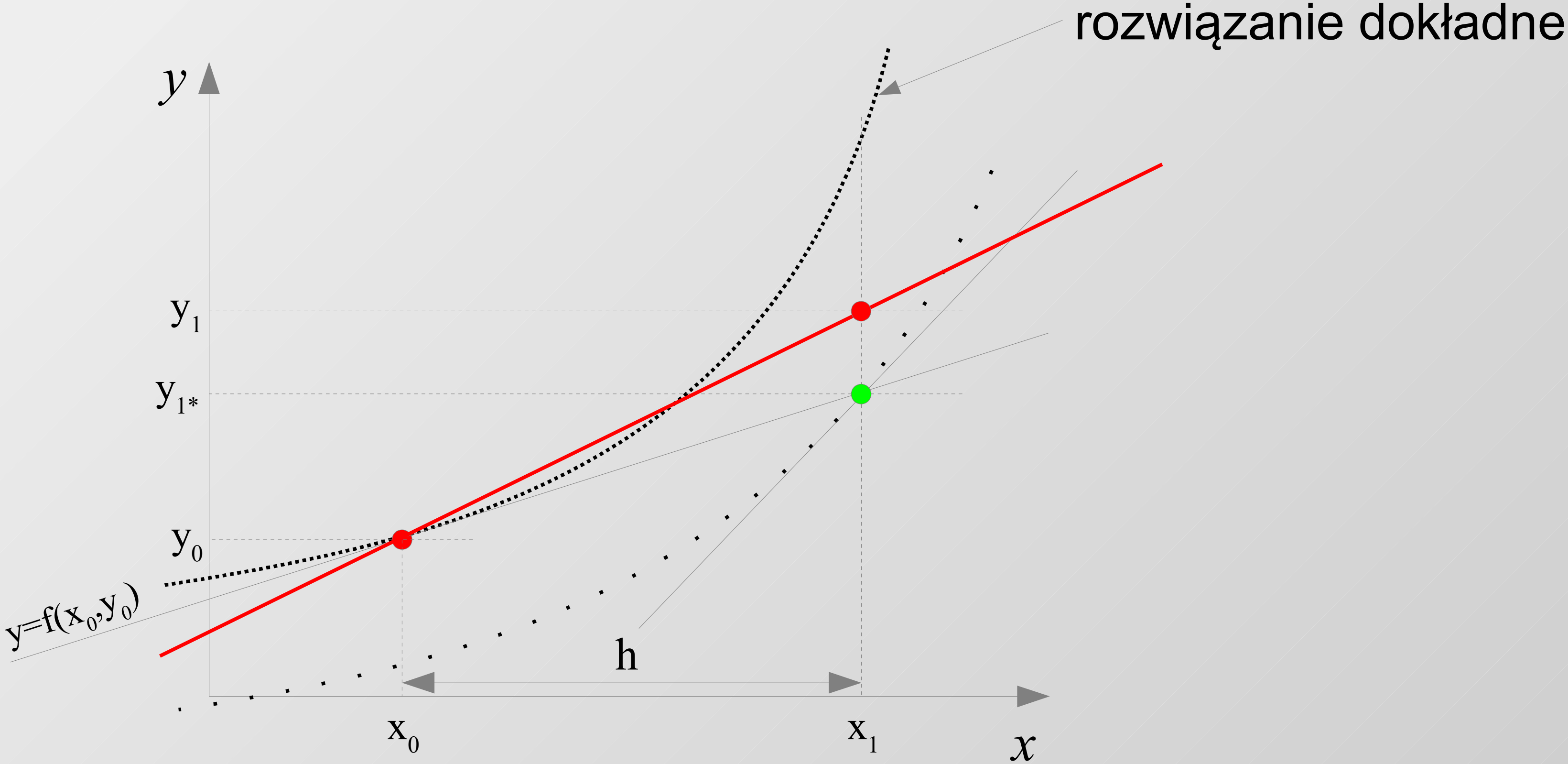
- **Udoskonalona metoda Eulera**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{f(x_n,y_n)+f(x_n+h,\,y_n+f(x_n,y_n)\cdot h)}{2}\cdot h$$



- **Udoskonalona metoda Eulera**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{f(x_n,y_n)+f\left(x_n+h,\,y_n+f(x_n,y_n)\cdot h\right)}{2}\cdot h$$



**Zad.4** Rozwiąż podane równanie różniczkowe z warunkiem początkowym y(1)=1, w przedziale <1,2>, z krokiem h=0.2 za pomocą udoskonalonej metody Eulera.

$$\dot{y}=2\cdot y+x \qquad y(1)=1 \qquad h=0.2$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{f(x_n,y_n)+f(x_n+h,\,y_n+f(x_n,y_n)\cdot h)}{2}\cdot h$$

Krok 1

$$x_0=1$$
$$y_0=1$$
$$x_0^*=x_0+h=1+0.2=1.2$$
$$y_0^*=y_0+(2y_0+x_0)\cdot h=1+(2\cdot 1+1)0.2=1.6$$
$$y_1=y_0+1/2((2y_0+x_0)+(2y_0^*+x_0^*))h=1+1/2((2\cdot 1+1)+(2\cdot 1.6+1.2))0.2=1.74$$
$$x_1=x_0+h=1+0.2=1.2$$

$$y_2 = 2.883$$
$$x_2 = 1.4$$

$$y_3 = 4.623$$
$$x_3 = 1.6$$

$$y_4 = 7.246$$
$$x_4 = 1.8$$

$$y_5 = 11.176$$
$$x_5 = 2$$

- **Rodzina metod Rungego-Kutty**

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{s} w_i K_i$$

$$K_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$K_i = h f\left(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j\right), \quad i > 1$$

$$w_i, a_i, b_{ij} \ - \ \text{stałe}$$

- **Metoda Rungego-Kutty II rzędu (s=2)***

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(K_1 + K_2\right)$$
$$K_1 = f\left(x_n, y_n\right) \cdot h$$
$$K_2 = f\left(x_n + h, y_n + K_1\right) \cdot h$$

- **Metoda Rungego-Kutty dla s=1 →**

**zmodyfikowana metoda Eulera**

**(dla jakich** $w_i, a_i, b_{ij}$ **?)**

* znana jako metoda Heuna

- **Metoda Rungego-Kutty IV rzędu (s=4)**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}\left(K_1+2\mathrm{K}_2+2\mathrm{K}_3+K_4\right)$$

$$K_1=f\left(x_n, y_n\right)\cdot h$$

$$K_2=f\left(x_n+h/2, y_n+1/2\cdot K_1\right)\cdot h$$

$$K_3=f\left(x_n+h/2, y_n+1/2\cdot K_2\right)\cdot h$$

$$K_4=f\left(x_n+h, y_n+K_3\right)\cdot h$$

**Zad.5** Rozwiąż podane równanie różniczkowe z warunkiem początkowym y(1)=1, w przedziale <1,2>, z krokiem h=0.2 za pomocą metody Rungego-Kutty IV rzędu.

$$\dot{y}=2\cdot y+x \qquad y(1)=1 \qquad h=0.2$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right)$$

$$K_1=f\left(x_n,y_n\right)\cdot h$$

$$K_2=f\left(x_n+h/2,y_n+1/2\cdot K_1\right)\cdot h$$

$$K_3=f\left(x_n+h/2,y_n+1/2\cdot K_2\right)\cdot h$$

$$K_4=f\left(x_n+h,y_n+K_3\right)\cdot h$$

# Rozwiązywanie RR – metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu

Krok 1

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 1$$
$$K_1 = 0.6$$
$$K_2 = 0.74$$
$$K_3 = 0.768$$
$$K_4 = 0.947$$
$$y_1 = 1.7605$$
$$x_1 = 1.2$$

Krok 2

$$x_1 = 1.2$$
$$y_1 = 1.7605$$
$$K_1 = 0.944$$
$$K_2 = 1.153$$
$$K_3 = 1.195$$
$$K_4 = 1.462$$
$$y_2 = 2.944$$
$$x_2 = 1.4$$

- **Metoda Eulera**
  - Metoda niedokładna, używana raczej w przypadkach zależności liniowych lub w prostych zagadnieniach, które nie wymagają dużej dokładności obliczeniowej,
- **Metoda punktu środkowego**
  - Metoda II rzędu, dokładność II rzędu uzyskuje się bez oscylacji rozwiązania. Bardzo użyteczna, daje dość dokładne rozwiązania w krótkim czasie,
- **Metoda Rungego-Kutty IV**
  - Najdokładniejsza, ale wolna. Posiada prosty schemat działania i można ją stosować w prostych zagadnieniach, gdy nie wpływa to znacząco na czas rozwiązania.

- **Metody jednokrokowe**
  - przechodząc od punktu *x* do x+*h* musimy znać tylko jedną wartość rozwiązania - y*(x)*
- **Metody wielokrokowe**
  - wartość funkcji w nowym punkcie wyrażamy przez jej wartości w kilku punktach

- **Metody wielokrokowe – wzór ogólny**

$$y_{n+1}=\sum_{i=1}^{k} a_i y_{n+1-i}+h\sum_{i=0}^{k} b_i f_i\left(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}\right), \qquad n\geqslant k-1$$

  - *h* – krok całkowania
  - $a_i$, $b_i$ – liczby rzeczywiste, zakładamy że $|a_k|+|b_k|\neq 0$
  - jeżeli $b_0=0$ to metodę nazywamy jawną (ekstrapolacyjną),
  - jeżeli $b_0\neq 0$ to metodę nazywamy niejawną (uwikłaną/interpolacyjną)

| | Wzór | $p$ |
|---|---|---|
| 1 | $y_{n+1} = y_n + hy'_n$ | 1 |
| 2 | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1})$ | 2 |
| 3 | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2})$ | 3 |
| 4 | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$ | 4 |
| 5 | $y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$ | 4 |
| 6 | $y_{n+1} = y_n + hy'_{n+1}$ | 1 |
| 7 | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n)$ | 2 |
| 8 | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1})$ | 3 |
| 9 | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2})$ | 4 |
| 10 | $y_{n+1} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8}h(y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})$ | 4 |

**Zad.6** Rozwiąż podane równanie różniczkowe z warunkiem początkowym y(1)=1, w przedziale <1,2>, z krokiem h=0.2 za pomocą dwukrokowej metody Adamsa. Brakujące punkty wyznacz stosując metodę Eulera

$$\dot{y}=2\cdot y+x \qquad y(1)=1 \qquad h=0.2$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(3f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1})\right)$$

# Rozwiązywanie RR – dwukrokowa metoda Adams'a-Bashfort'a

Krok 1 – metoda Eulera

$$x_0=1$$
$$y_0=1$$
$$y_1=y_0+(2y_0+x_0)h=1+(2\cdot 1+1)0.2=1.6$$
$$x_1=x_0+h=1+0.2=1.2$$

Krok 2 – metoda Adamsa

$$x_0=1$$
$$y_0=1$$
$$x_1=1.2$$
$$y_1=1.6$$
$$y_2=y_1+0.1(3\cdot(2y_1+x_1)-(2y_0+x_0))=1.6+0.1(3\cdot(2\cdot 1.6+1.2)-(2\cdot 1+1))=2.62$$
$$x_2=1.4$$

# Rozwiązywanie RR – zestawienie wyników

$$\dot{y} = 2 \cdot y + x \qquad y(1) = 1 \qquad h = 0.2$$

xy_E =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000 | 1.2000 | 1.4000 | 1.6000 | 1.8000 | 2.0000 | 2.2000 |
| 1.0000 | 1.6000 | 2.4800 | 3.7520 | 5.5728 | 8.1619 | 11.8267 |

xy_ZE =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000 | 1.2000 | 1.4000 | 1.6000 | 1.8000 | 2.0000 | 2.2000 |
| 1.0000 | 1.7400 | 2.8832 | 4.6231 | 7.2462 | 11.1764 | 17.0411 |

xy_UE =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000 | 1.2000 | 1.4000 | 1.6000 | 1.8000 | 2.0000 | 2.2000 |
| 1.0000 | 1.7400 | 2.8832 | 4.6231 | 7.2462 | 11.1764 | 17.0411 |

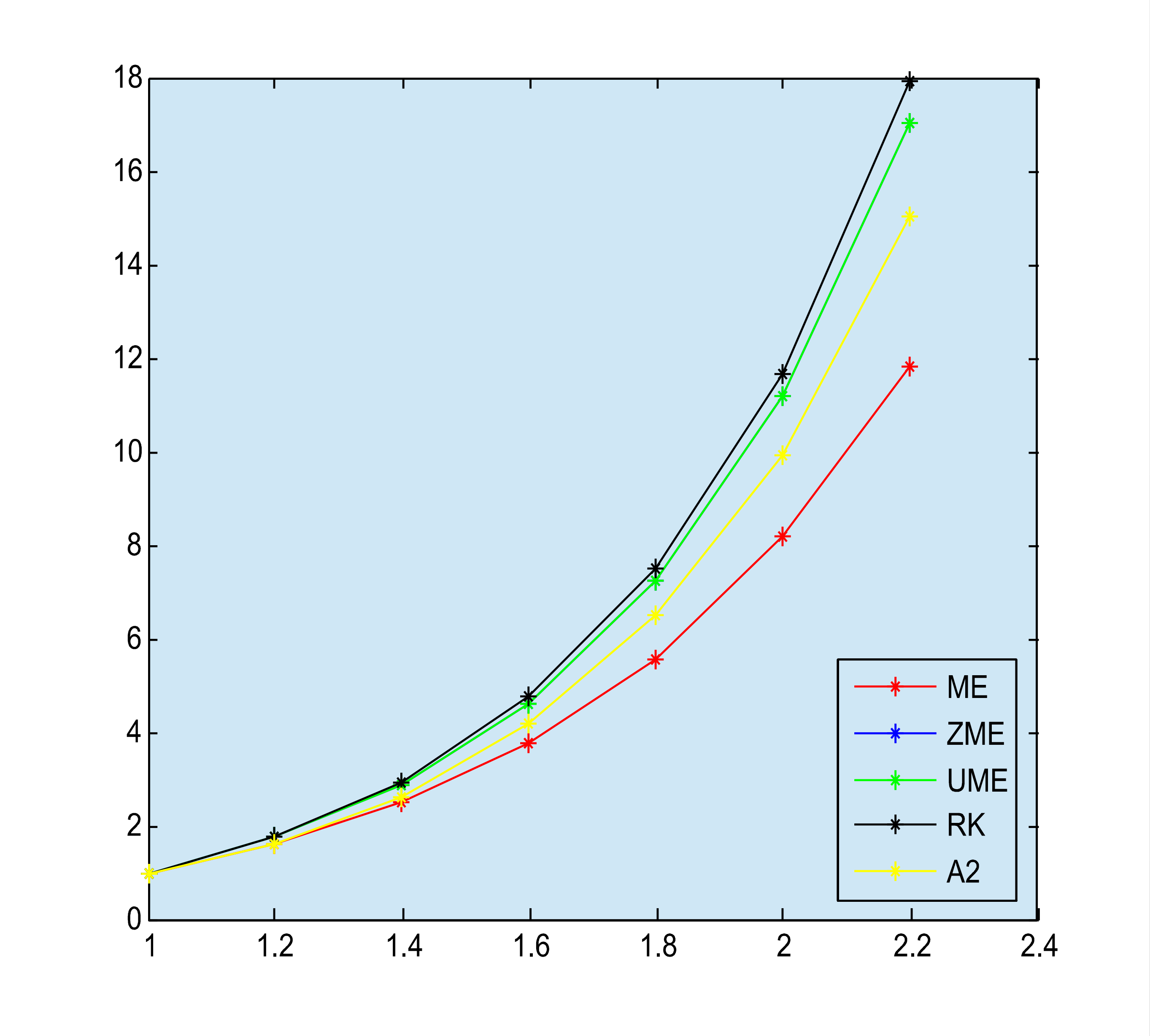
xy_RK =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000 | 1.2000 | 1.4000 | 1.6000 | 1.8000 | 2.0000 | 2.2000 |
| 1.0000 | 1.7605 | 2.9442 | 4.7591 | 7.5157 | 11.6769 | 17.9335 |

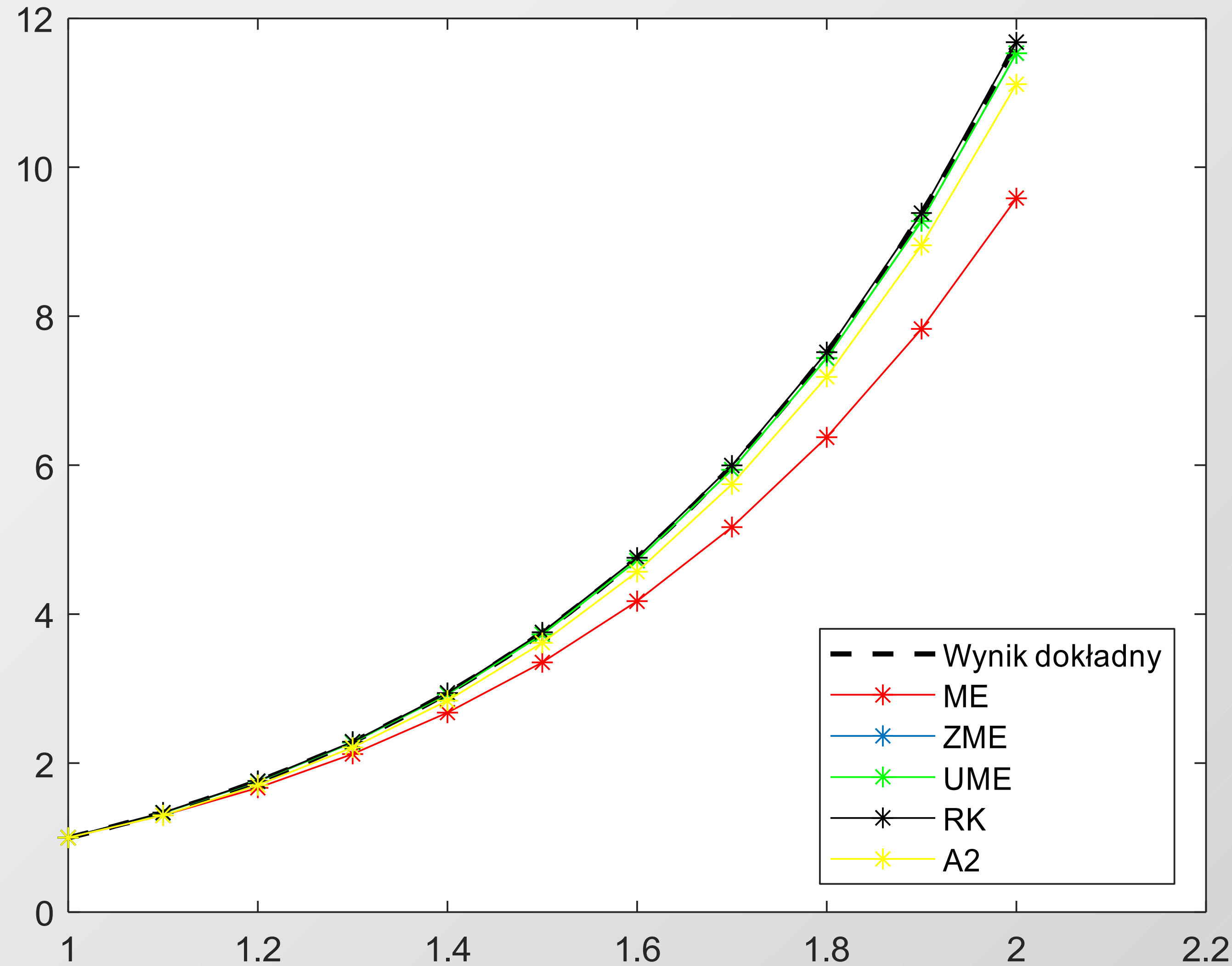
xy_A2 =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000 | 1.2000 | 1.4000 | 1.6000 | 1.8000 | 2.0000 | 2.2000 |
| 1.0000 | 1.6000 | 2.6200 | 4.1720 | 6.4912 | 9.9315 | 15.0122 |

# Rozwiązywanie RR – porównanie wyników

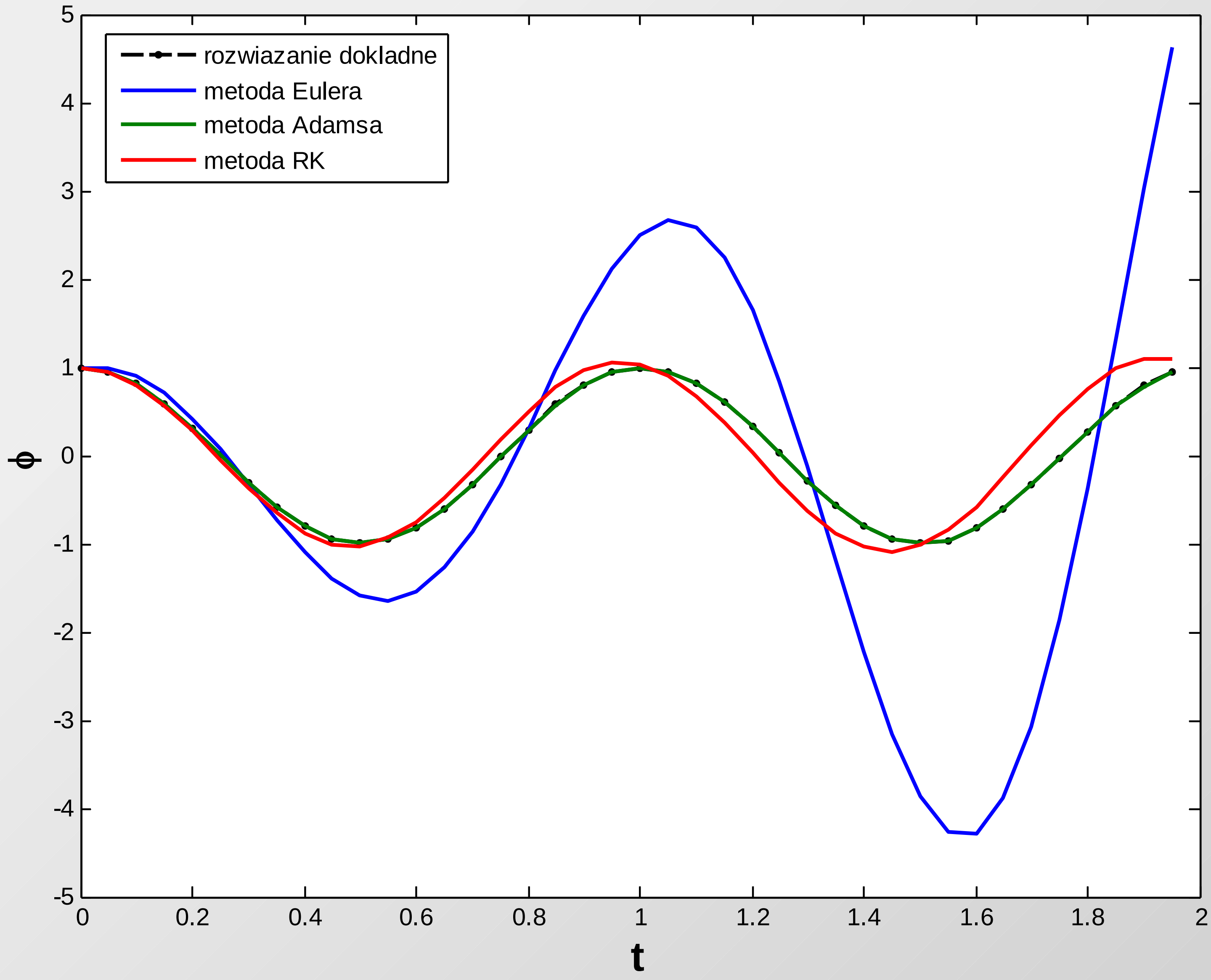


# Rozwiązywanie RR – porównanie wyników



# Rozwiązywanie RR – porównanie metod

Równanie: $\ddot{\phi}+40\cdot\phi=0,\quad h=0.05,\quad \dot{\phi}(0)=0,\quad \phi(0)=1$



**Zad.7** Rozwiąż podany układ równań różniczkowych z podanymi warunkami początkowymi, w przedziale <0,0.4>, z krokiem h=0.2 za pomocą metody Eulera.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = x + 2y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \end{cases} \qquad h = 0.2$$

Krok 1

$$x_0 = 0$$
$$y_{10} = 1$$
$$y_{20} = 2$$
$$y_{11} = 1 + (0 + 2\cdot 2)0.2 = 1.8$$
$$y_{21} = 2 + (1 + 2)0.2 = 2.6$$
$$x_1 = 0.2$$

Krok 2

$$x_1 = 0.2$$
$$y_{11} = 1.8$$
$$y_{21} = 2.6$$
$$y_{12} = 1.8 + (0.2 + 2\cdot 2.6)0.2 = 2.88$$
$$y_{22} = 2.6 + (1.8 + 2.6)0.2 = 3.48$$
$$x_2 = 0.4$$

**Zad.8** Rozwiąż podane równanie różniczkowe z podanymi warunkami początkowymi w przedziale <0,0.3>, z krokiem h=0.1 za pomocą metody Eulera

$$\ddot{y}+5\dot{y}+4y=0 \qquad \begin{cases} \dot{y}(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad h=0.1$$

podstawiamy:

$$y=y_1$$
$$\dot{y}=\dot{y}_1=y_2$$
$$\ddot{y}=\dot{y}_2=-5y_2-4y_1$$

otrzymamy:

$$\begin{cases} \dot{y}_1=y_2 \\ \dot{y}_2=-5y_2-4y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_2(0)=0 \end{cases}$$

## Zad.8 - wyniki

```
xy_E =
         0    0.1000    0.2000    0.3000
    1.0000    1.0000    0.9600    0.9000
         0   -0.4000   -0.6000   -0.6840
xy_ZE =
         0    0.1000    0.2000    0.3000
    1.0000    0.9800    0.9379    0.8835
         0   -0.3000   -0.4755   -0.5690
xy_UE =
         0    0.1000    0.2000    0.3000
    1.0000    0.9800    0.9379    0.8835
         0   -0.3000   -0.4755   -0.5690
xy_RK =
         0    0.1000    0.2000    0.3000
    1.0000    0.9830    0.9418    0.8873
         0   -0.3126   -0.4924   -0.5860
```