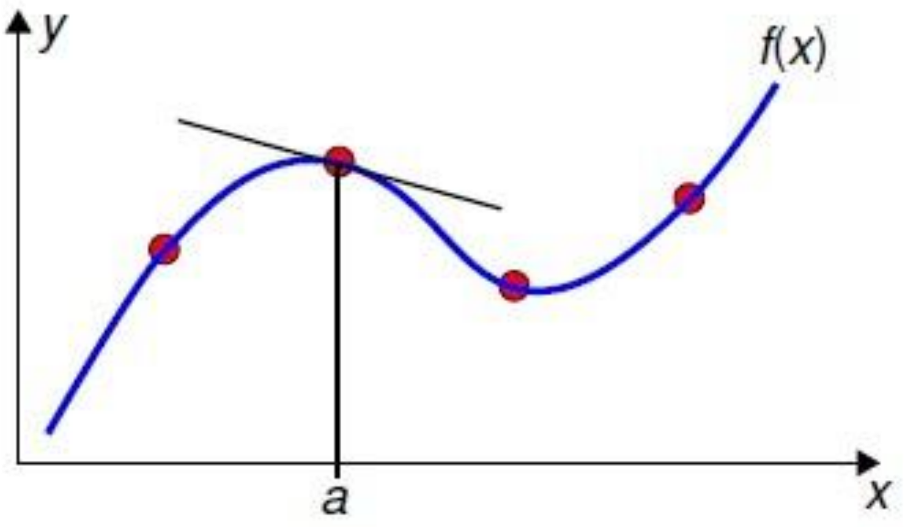
MATEMATYKA OBLICZENIOWA

RÓŻNICZKOWANE I CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

RÓŻNICZKOWANIE – SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Na podstawie znajomości wartości y_i funkcji $f(x)$ w punktach x_i (narzuconych lub wybieranych) wyznaczyć wartość P pochodnej funkcji w punkcie a, czyli nachylenie stycznej do funkcji w punkcie a:



$$P = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

Z definicji pochodnej otrzymujemy:

$$f'(x_k) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

Dla dostatecznie małego h

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$$

Wniosek:

- im mniejsze h, tym lepiej przybliżymy pochodną

Ograniczenia typowe dla arytmetyki zmiennopozycyjnej na maszynach liczących :

- nie da się na komputerze przedstawić dowolnie małej liczby,
- jeżeli h będzie zbyt małe w porównaniu z x, to w argumencie $x + h$ może dojść do zaniedbania składnika,
- dla małych h wartości $f(x + h)$ i $f(x)$ mogą tak nieznacznie różnić się od siebie, ze przy odejmowaniu dojdzie do utraty cyfr znaczących.

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

Wzory pozwalające wyznaczyć przybliżoną wartość pochodnej funkcji:

Założenie:

Na osi x wyznaczamy punkty rozłożone równomiernie w odległości h czyli: $h = x_{k+1} - x_k$

Przybliżenie pochodnej funkcji:

- Wzory dwupunktowe: pochodna prawostronna: $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$

  pochodna lewostronna: $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}$
- Wzór trójpunktowy: $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$
- Wzór pięciopunktowy: $f'(x_k) = \frac{1}{12h} \cdot \left(f(x_{k-2}) - 8 \cdot f(x_{k-1}) + 8 \cdot f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})\right)$

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

WZORY DWUPUNKTOWE

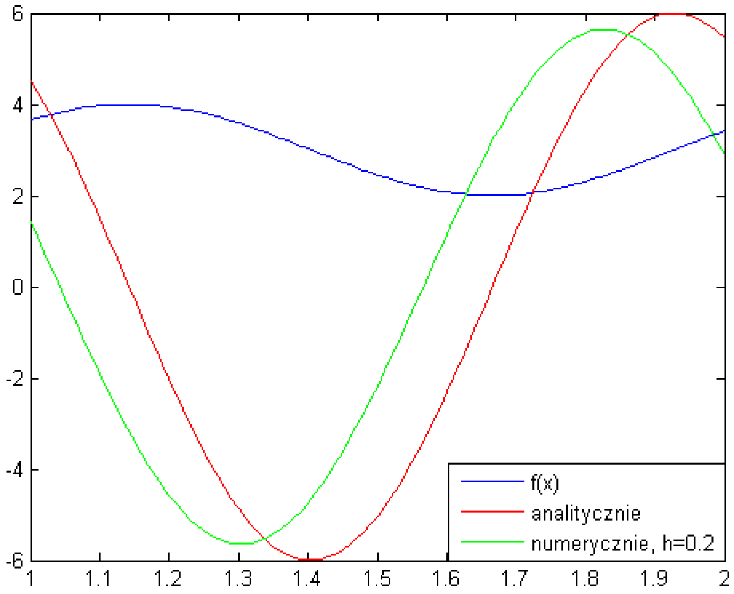
Wzory dwupunktowe:

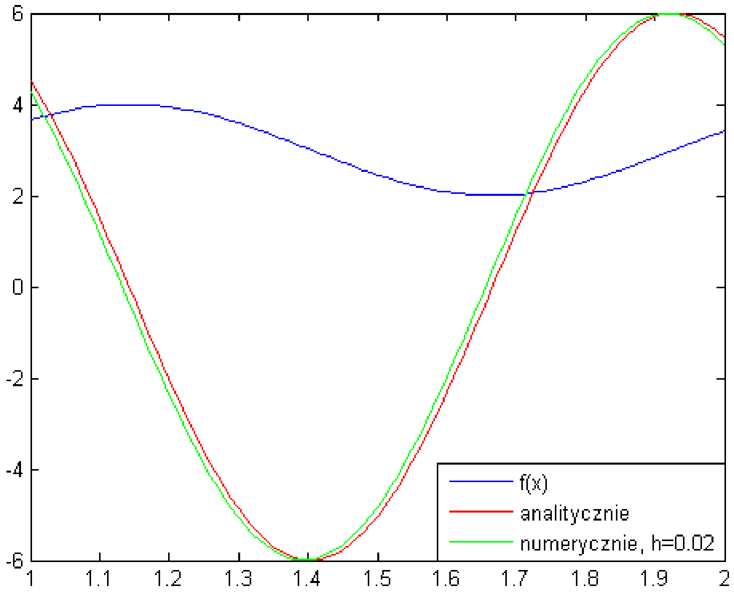
pochodna prawostronna:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$$

pochodna lewostronna:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}$$





RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

WZORY DWUPUNKTOWE

Wzory dwupunktowe – analiza błędu obcięcia

Rozwijamy funkcję $f(x)$ w szereg Taylora i otrzymujemy:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + h \cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) + \cdots$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - h \cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) + \cdots$$

Z powyższego rozwinięcia otrzymujemy wzory na:

pochodną prawostronną: $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} + O(h)$

pochodną lewostronną: $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} + O(h)$

Przy założeniu, że na osi x punkty są rozłożone równomiernie w odległości h czyli: $h = x_{k+1} - x_k$

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

WZORY DWUPUNKTOWE

Wzory dwupunktowe – podsumowanie:

- wolna zbieżność,
- im mniejsze h tym większy koszt obliczeń (aby otrzymać większą dokładność konieczne jest zmniejszanie h)
- aby zminimalizować błąd przybliżenia pochodnej h powinno być liczbą maszynową.

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA
WZÓR TRÓJPUNKTOWY

Wzór trójpunktowy (pochodna centralna) – analiza błędu obcięcia

Rozwijamy funkcję $f(x)$ w szereg Taylora i otrzymujemy:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + h \cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) + \cdots$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - h \cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) + \cdots$$

Obliczając: $f(x_k + h) - f(x_k - h) = 2h \cdot f'(x_k) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x_k) + \cdots$

Z powyższego rozwinięcia otrzymamy:

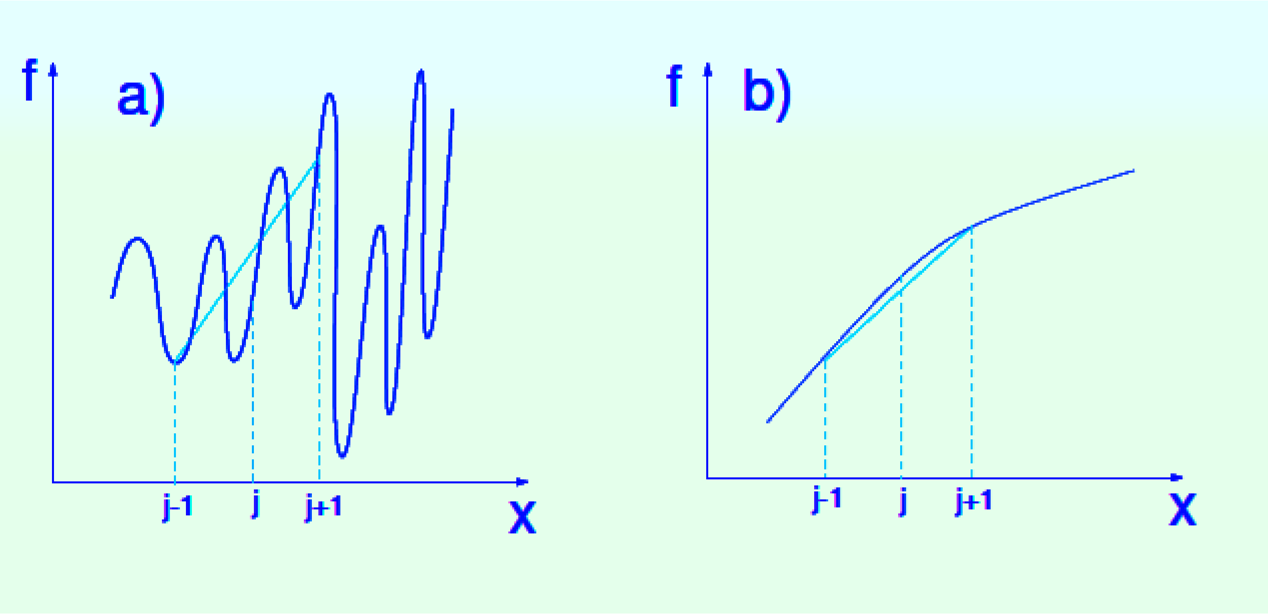
pochodną centralną: $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h} + O(h)$

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

WZÓR TRÓJPUNKTOWY

Wzór trójpunktowy (pochodna centralna)

- Dobór długość kroku h w zależności od charakteru funkcji

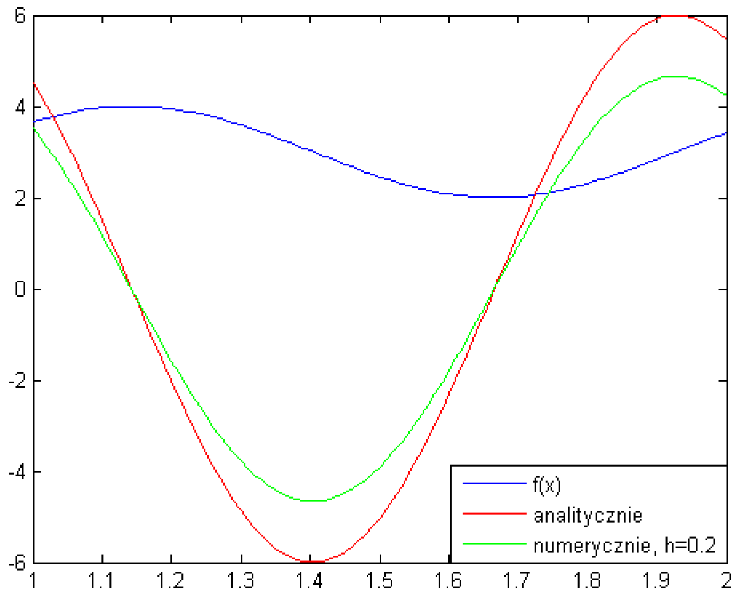


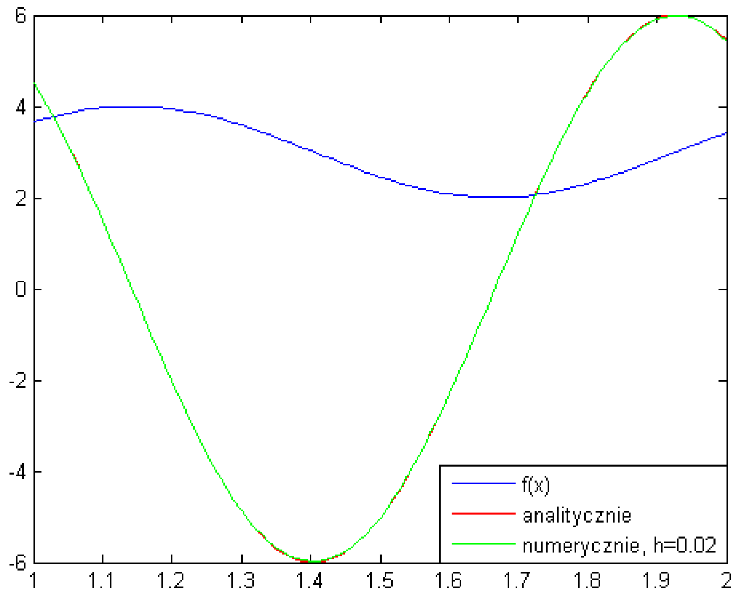
RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

WZÓR TRÓJPUNKTOWY

Wzór trójpunktowy:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$$





RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

WZÓRY TRÓJPUNKTOWE

Wzór trójpunktowy centralny:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$$

Wzór trójpunktowy – pochodna prawostronna:

$$f'(x_k) = \frac{-3f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})}{2h}$$

Wzór trójpunktowy – pochodna lewostronna:

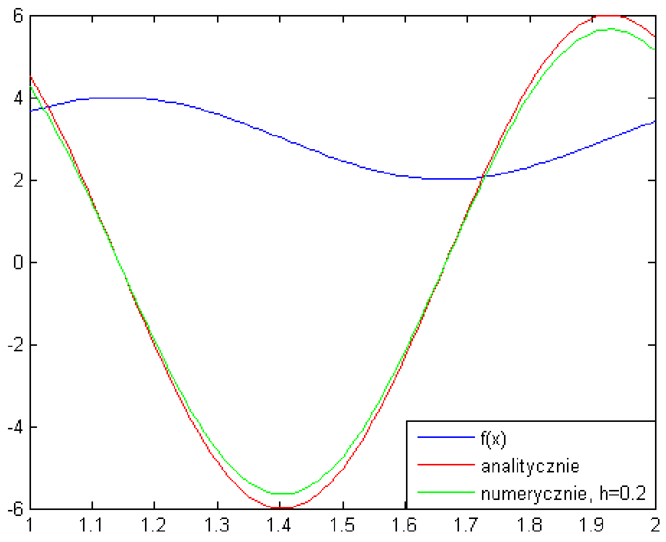
$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k-2}) - 4f(x_{k-1}) + 3f(x_k)}{2h}$$

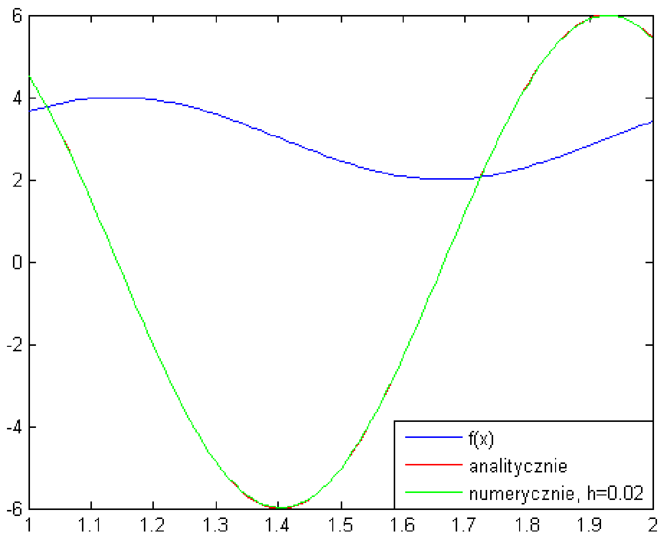
RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

WZÓR PIĘCIOPUNKTOWY

Wzór pięciopunktowy:

$$f'(x_k) = \frac{1}{12h} \cdot \left(f(x_{k-2}) - 8 \cdot f(x_{k-1}) + 8 \cdot f(x_{k+1}) - f(x_{k+2}) \right)$$





RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

Wzory pozwalające wyznaczyć przybliżoną wartość pochodnej funkcji:

- Wzory dwupunktowe:

  pochodna prawostronna: $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$

  pochodna lewostronna: $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}$

  gdzie: $h = x_{k+1} - x_k$

- Wzór trójpunktowy: $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$
- Wzór pięciopunktowy:

$$f'(x_k) = \frac{1}{12h} \cdot \left(f(x_{k-2}) - 8 \cdot f(x_{k-1}) + 8 \cdot f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})\right)$$

ZADANIE 1 Oblicz wartości pochodnej funkcji:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0	4	12	24	40	60	84	112	144

ZADANIE 2 Oblicz wartości pochodnej funkcji:

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	1	8	27	64	125	216

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

ZADANIE 1 Rozwiązanie:

	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	f(x)	0	4	12	24	40	60	84	112	144
PP	$f'(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	X
PL	$f'(x)$	X	4	8	12	16	20	24	28	32
W3	$f'(x)$	X	6	10	14	18	22	26	30	X
W5	$f'(x)$	X	X	10	14	18	22	26	X	X

RÓŻNICZKOWANIE – PIERWSZA POCHODNA

ZADANIE 2 Rozwiązanie:

	x	0	1	2	3	4	5	6
	f(x)	0	1	8	27	64	125	216
PP	$f'(x)$	1	7	19	37	61	91	X
PL	$f'(x)$	X	1	7	19	37	61	91
W3	$f'(x)$	X	4	13	28	49	76	X
W5	$f'(x)$	X	X	12	27	48	X	X

RÓŻNICZKOWANIE – DRUGA POCHODNA

Wzory pozwalające wyznaczyć przybliżoną wartość drugiej pochodnej funkcji:

- Wzór trójpunktowy: $f''(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - 2 \cdot f(x_k) + f(x_{k-1})}{h^2}$

- Wzór pięciopunktowy: $f''(x_k) = \frac{1}{12h^2} \cdot \left(-f(x_{k-2}) + 16 \cdot f(x_{k-1}) - 30 \cdot f(x_k) + 16 \cdot f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})\right)$

RÓŻNICZKOWANIE – DRUGA POCHODNA

ZADANIE 1 Oblicz wartości drugiej pochodnej funkcji:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0	4	12	24	40	60	84	112	144

ZADANIE 2 Oblicz wartości drugiej pochodnej funkcji:

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	1	8	27	64	125	216

RÓŻNICZKOWANIE – DRUGA POCHODNA

ZADANIE 1 Rozwiązanie:

	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	f(x)	0	4	12	24	40	60	84	112	144
W3	$f''(x)$	X	4	4	4	4	4	4	4	X
W5	$f''(x)$	X	X	4	4	4	4	4	X	X

RÓŻNICZKOWANIE – DRUGA POCHODNA

ZADANIE 2 Rozwiązanie:

	x	0	1	2	3	4	5	6
	f(x)	0	1	8	27	64	125	216
W3	$f''(x)$	X	6	12	18	24	30	X
W5	$f''(x)$	X	X	12	18	24	X	X

CAŁKOWANIE – WPROWADZENIE

Chcemy obliczyć całkę oznaczoną:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Problem:

- brak możliwości wyznaczenia dokładnych wartości (całki nieoznaczone wielu funkcji nie mogą być przedstawione w skończonej postaci przez funkcje elementarne).

Rozwiązanie:

- przybliżenie (interpolacja), w przedziale $[a, b]$, funkcji $f(x)$ prostszą funkcją $g(x)$ dla której można łatwo obliczyć całkę

  Problem:

  - jak dobrać węzły dla funkcji interpolacyjnej,
  - ile powinno być punktów

CAŁKOWANIE – KWADRATURY

Przybliżenie funkcji podcałkowej interpolacją wielomianową pozwala na zapisanie całki w postaci wyrażenia zwanego **kwadraturą:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

gdzie: x_i – węzły kwadratury,

A_i – współczynniki kwadratury.

W zależności od rozłożenia węzłów kwadratury otrzymujemy

- kwadraturę Newtona – Cotesa – przy węzłach równoodległych,
- kwadraturę Gaussa – przy innym rozłożeniu węzłów.

CAŁKOWANIE

- Chcemy obliczyć całkę oznaczoną: $\int_a^b f(x)dx$
- Założenia:

Dzielimy przedział całkowania na n równych części o długości $h = \frac{b-a}{n}$

Wyznaczamy punkty $x_1, x_2, \ldots\ x_{n-1}$

$x_0 = a,\ \ x_n = b$

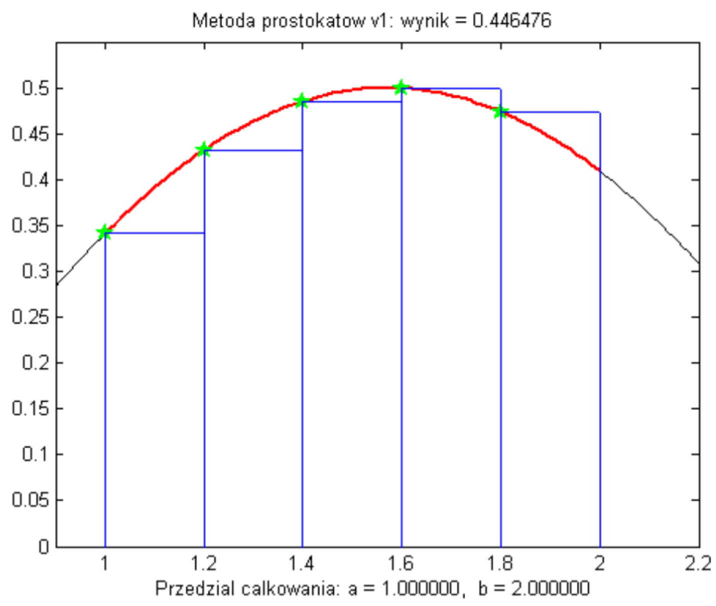
Obliczamy wartość funkcji podcałkowej w wyznaczonych punktach i na krańcach przedziału całkowania

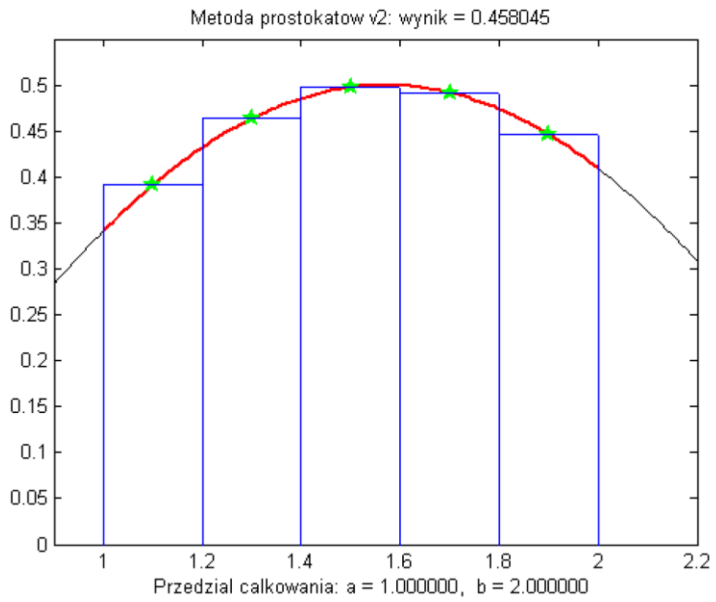
$y_0 = f(a)\,,\quad y_1 = f(x_1),\quad y_2 = f(x_2), \ldots\,,\quad y_{n-1} = f(x_{n-1}),\quad y_n = f(b),$

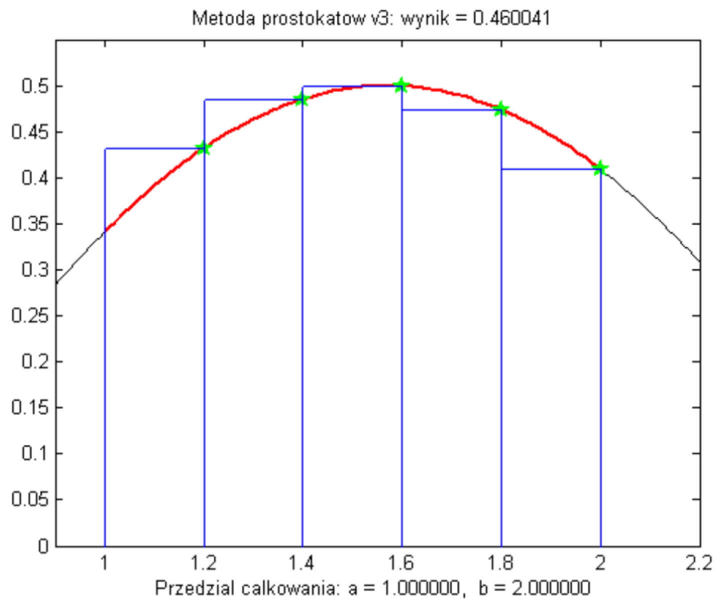
CAŁKOWANIE – METODA PROSTOKĄTÓW

$$I = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$I = h \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$





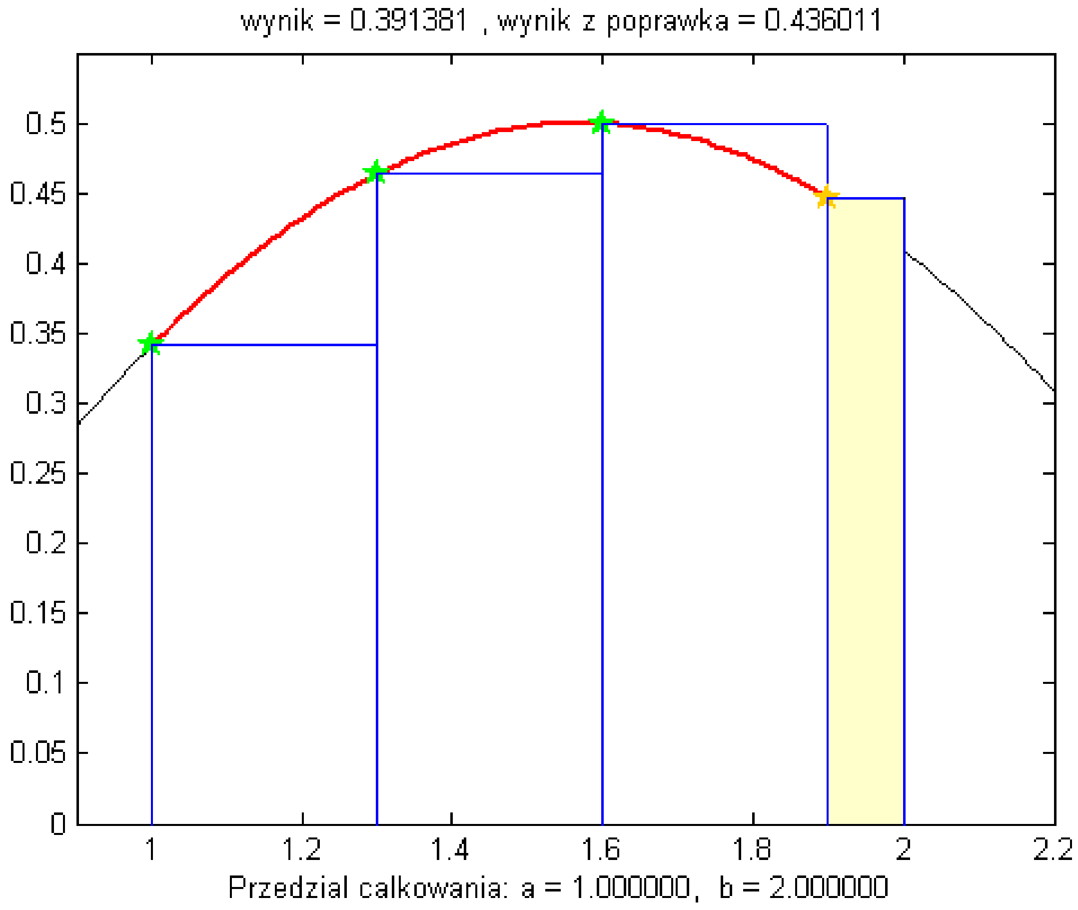


wynik dokładny = 0.4564

CAŁKOWANIE – METODA PROSTOKĄTÓW

- Obliczanie całki z poprawianiem:

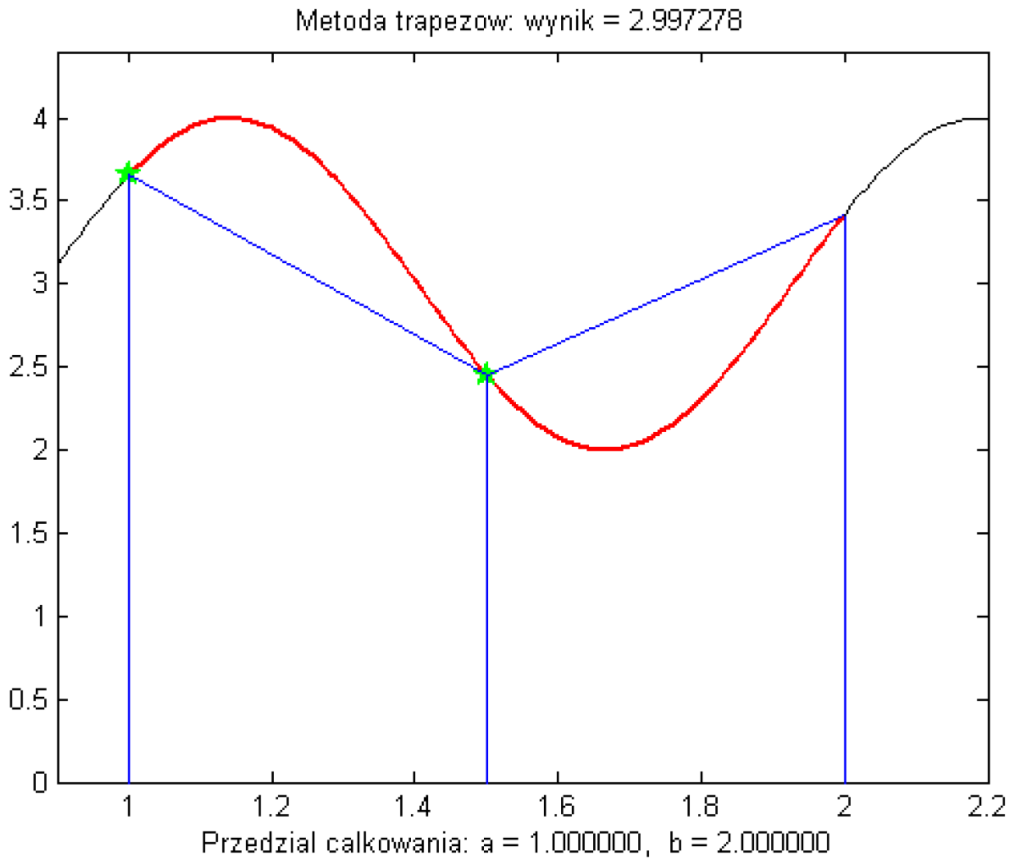
$$I = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i + poprawka$$



wynik dokładny = 0.4564

CAŁKOWANIE – METODA TRAPEZÓW

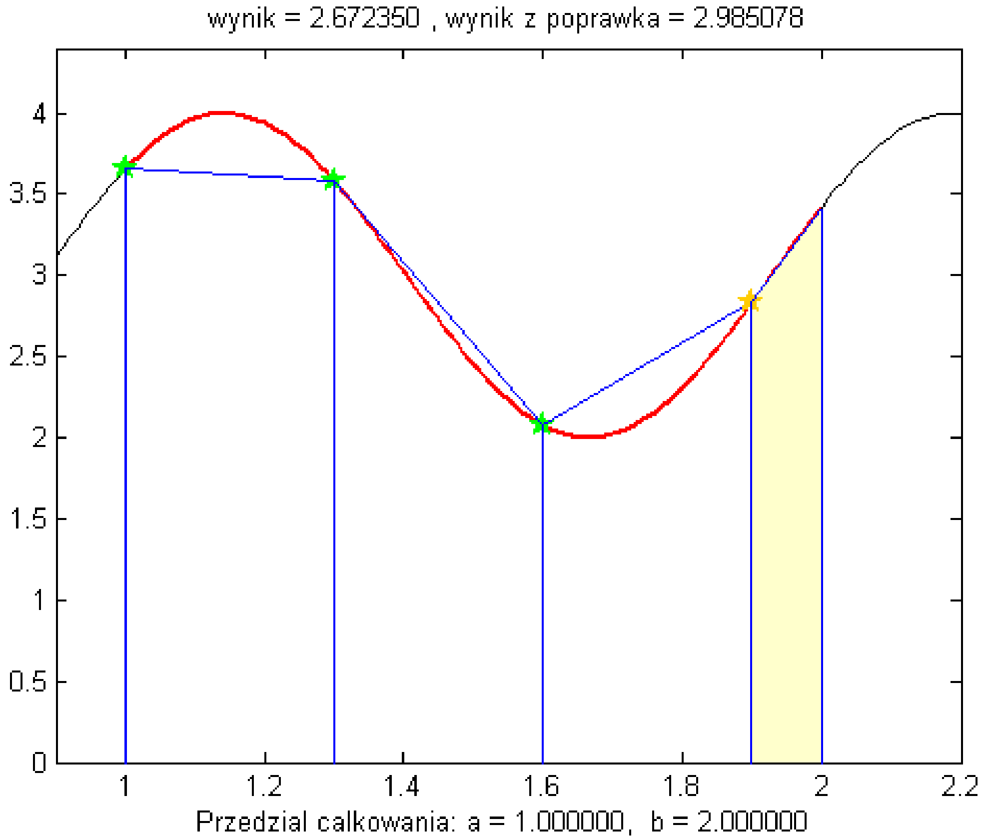
$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$



wynik dokładny = 2.9744

CAŁKOWANIE – METODA TRAPEZÓW

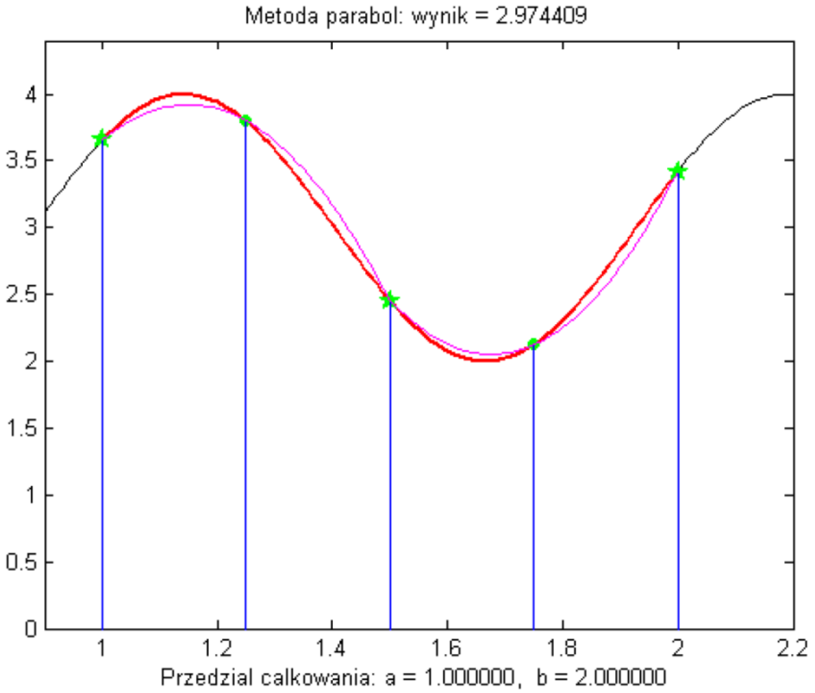
$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) + poprawka$$



wynik dokładny = 2.9744

CAŁKOWANIE – METODA PARABOL (SIMPSONA)

$$I = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-2} y_{2i} \right)$$



CAŁKOWANIE

ZADANIE:

Oblicz całkę $\int_0^4 (x^2 + 2x)dx$ w przedziale $(0,4)$ z krokiem $h = 1$ następującymi metodami:

- prostokątów (wszystkie warianty metody),
- trapezów,
- parabol.

$a = 0,$

$b = 4,$

$h = 1,$

$n = 4$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	8	15	24

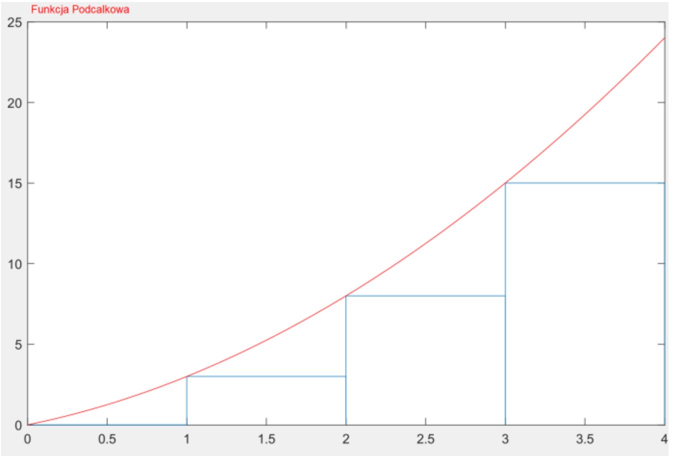
CAŁKOWANIE

ZADANIE: Oblicz całkę $\int_0^4 (x^2 + 2x)dx$ w przedziale $(0{,}4)$ z krokiem $h = 1$ metodą prostokątów (wszystkie warianty).

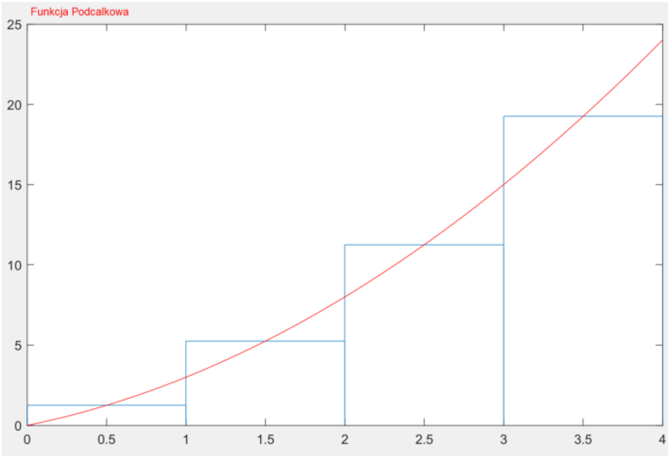
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	8	15	24

x	0.5	1.5	2.5	3.5
$f(x)$	1.25	5.25	11.25	19.25

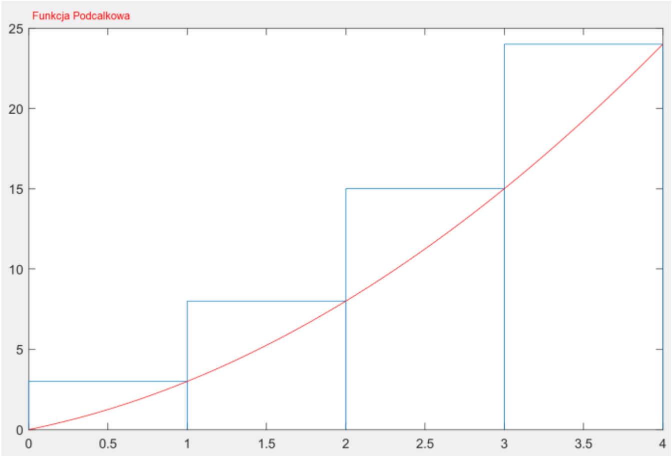
$I = 26$



$I = 37$



$I = 50$



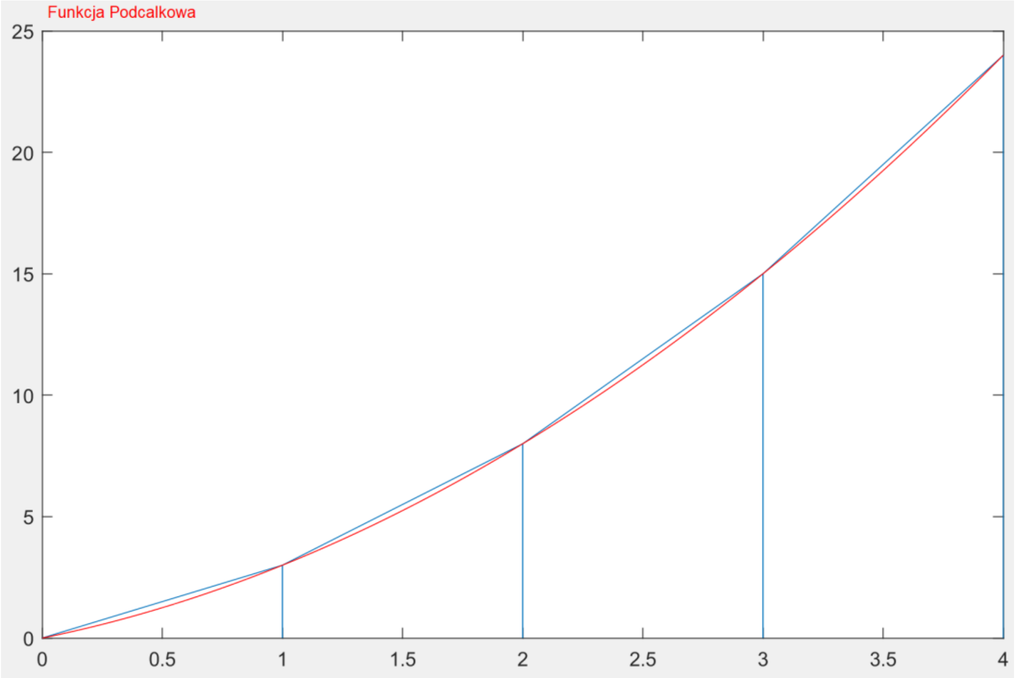
CAŁKOWANIE

ZADANIE: Oblicz całkę $\int_0^4 (x^2 + 2x)dx$ w przedziale $(0,4)$ z krokiem $h = 1$ metodą trapezów.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	8	15	24

$$I = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

$$I = 1 \cdot \left(\frac{0 + 24}{2} + 3 + 8 + 15 \right) = 38$$



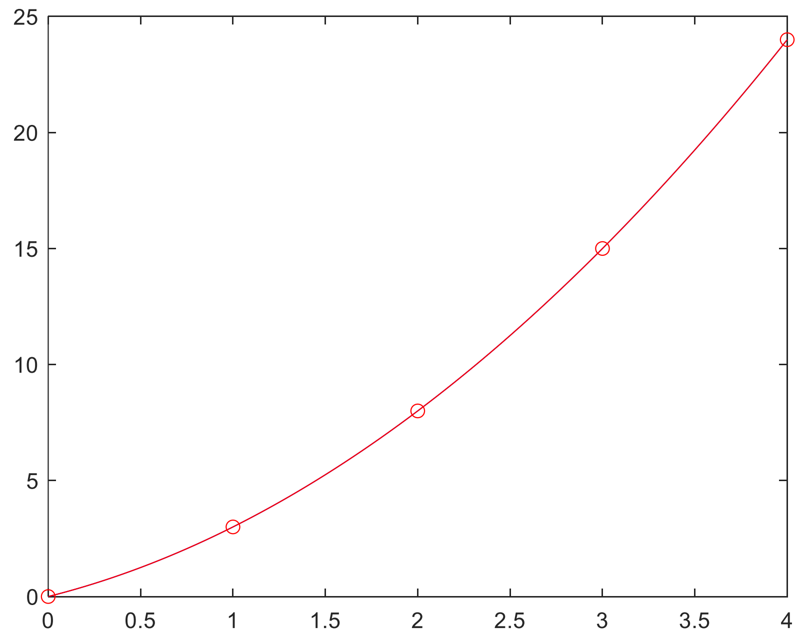
CAŁKOWANIE

ZADANIE: Oblicz całkę $\int_0^4 (x^2 + 2x)dx$ w przedziale $(0,4)$ z krokiem $h = 1$ metodą simpsona.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	8	15	24

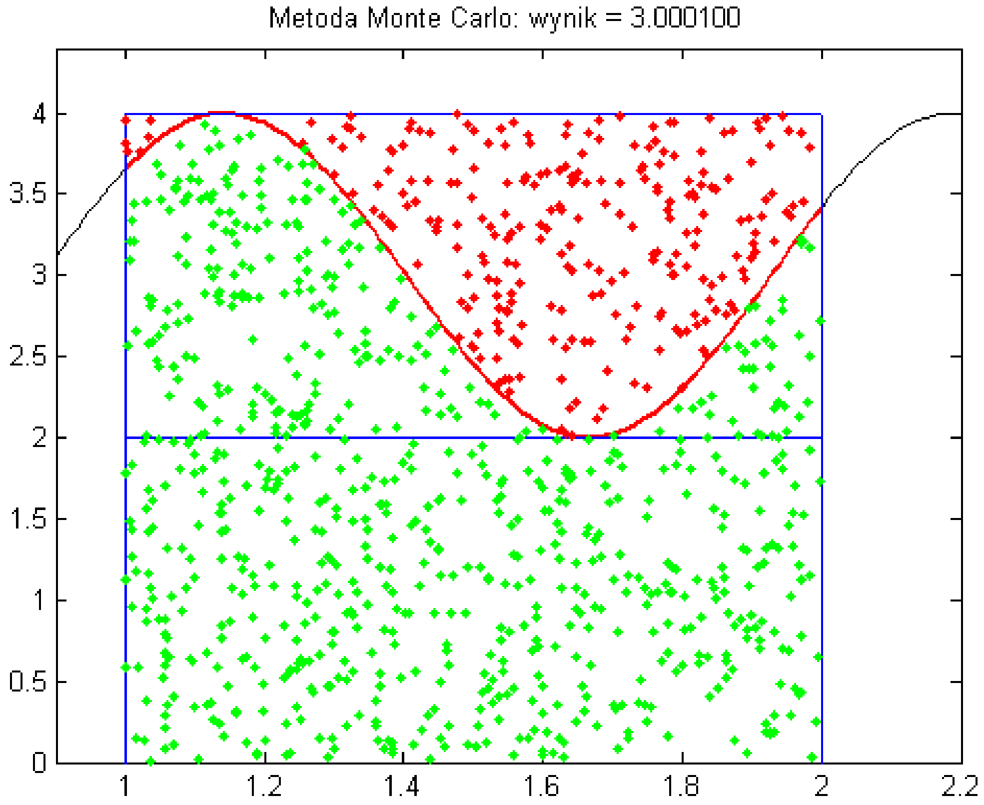
$$I = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-2} y_{2i} \right)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \big(0 + 24 + 4 \cdot (3 + 15) + 2 \cdot (8)\big) = 37.3333$$



CAŁKOWANIE – METODA MONTE CARLO

$$I = \frac{strzały\ celne}{liczba\ strzałów} \cdot pole\ obszaru$$



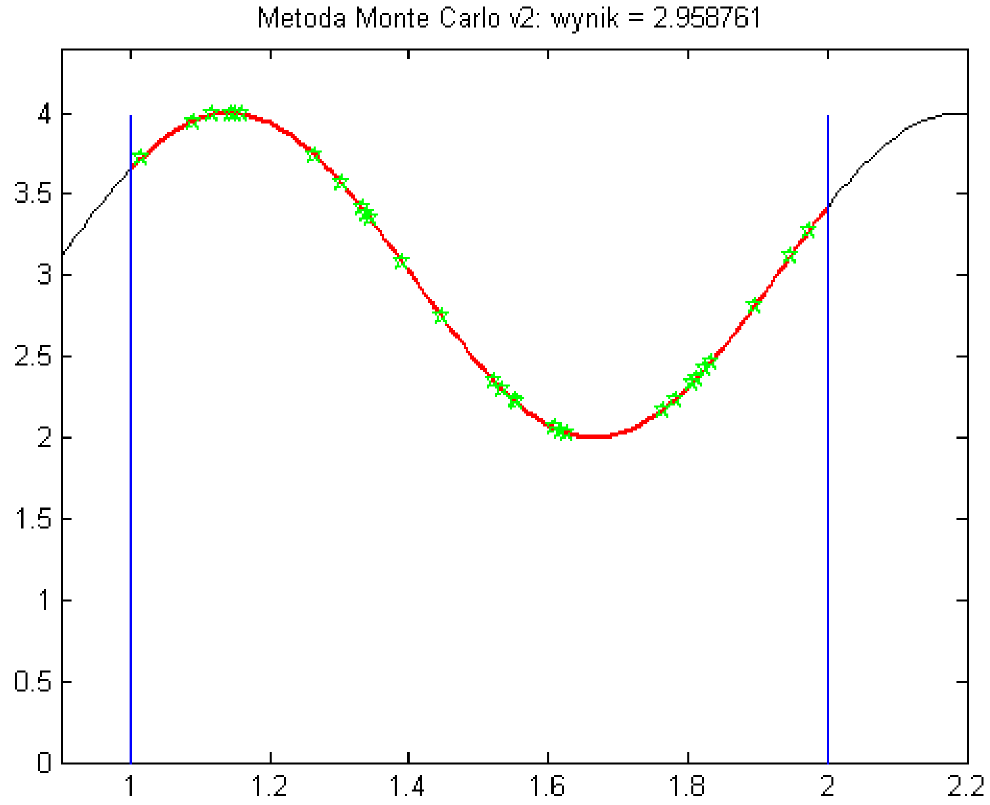
wynik dokładny = 2.9744

CAŁKOWANIE – METODA MONTE CARLO

INNY WARIANT METODY

$$I = \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i$$

gdzie: $N - liczba\ strzałów$



wynik dokładny = 2.9744

CAŁKOWANIE – METODA MONTE CARLO

Metoda Monte Carlo – podsumowanie:

- im większa liczba użytych punktów tym większa dokładność uzyskanego wyniku,
- możliwość rozwiązywania trudnych problemów,
- prosta forma zastąpienia rozwiązań analitycznych,
- rosnąca moc obliczeniowa komputerów i możliwość zrównoleglania obliczeń pozwala na uzyskiwanie dokładnych wyników (wykorzystując dużą liczbę punktów).