

Matematyka obliczeniowa

dr inż. Piotr Piela

Dla danej funkcji rzeczywistej jednej zmiennej znaleźć wartości x , dla której

$$f(x) = 0$$

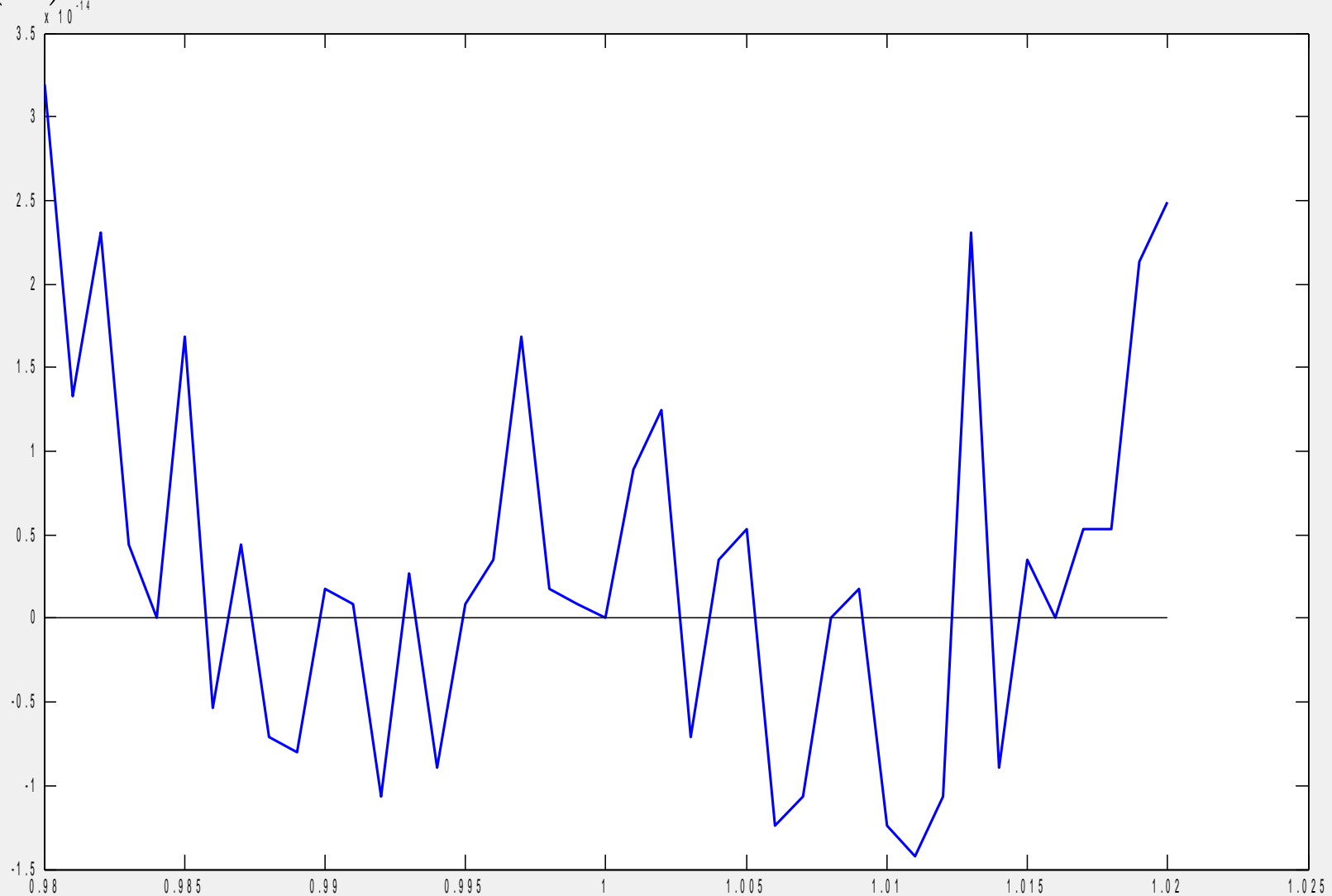
Przykład:

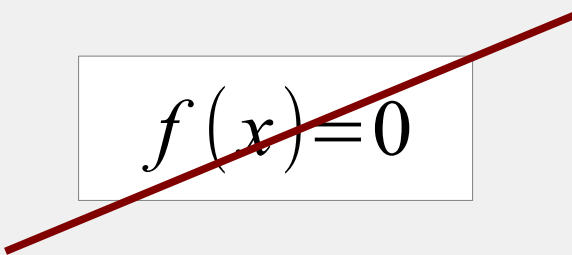
$$f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$

$$f(x) = (x - 1)^8$$

Przykład:

$$f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$




$$f(x) = 0$$

w praktyce:

dopuszczamy pewną tolerancję, uwzględniając precyzję arytmetyki,

np. dla $e = 2^{-24}$

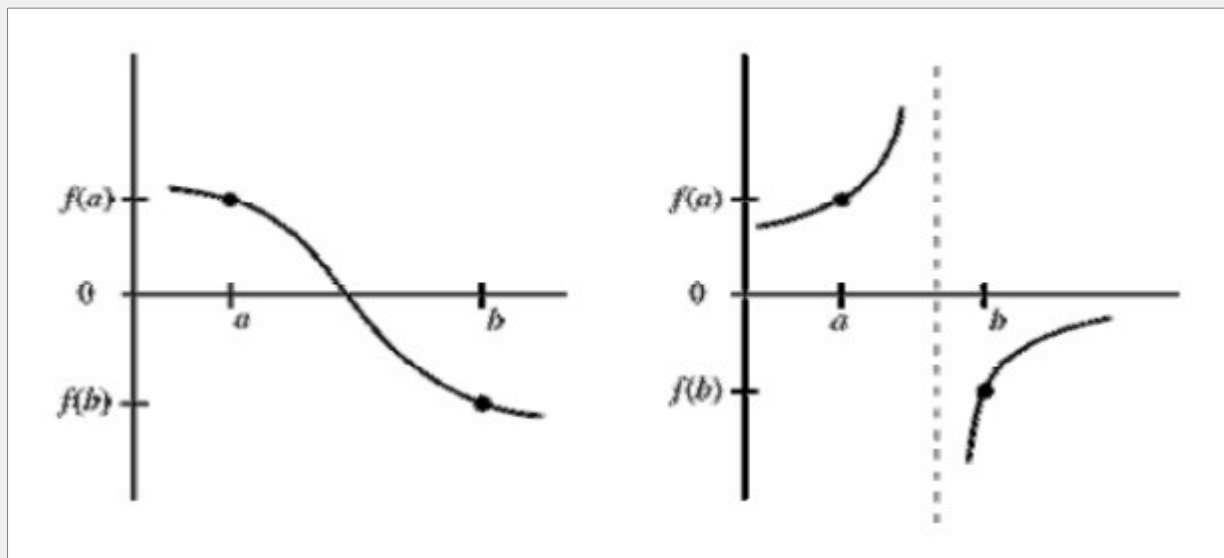
$$|f(x)| < 10^{-5}$$

Metody:

- połowienia (bisekcji),
- reguła falsi,
- siecznych (ulepszenie metody reguła falsi),
- stycznych (metoda Newtona),
- iteracyjne.

Przedział izolacji pierwiastka - jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła i ma na końcach przedziału $[a, b]$ przeciwne znaki, to w przedziale $[a, b]$ leży co najmniej jeden jej pierwiastek.

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$



$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

w praktyce:

rezygnujemy z mnożenia z powodu możliwości wystąpienia nadmiaru
albo niedomiaru i sprawdzamy

$$\operatorname{sgn}(f(a)) \neq \operatorname{sgn}(f(b))$$

Twierdzenie Bolzano

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągłą i oznaczoną w przedziale $[a, b]$ i jej wartości na końcach przedziału mają różne znaki, to istnieje co najmniej jeden punkt c , dla którego $f(c)=0$,

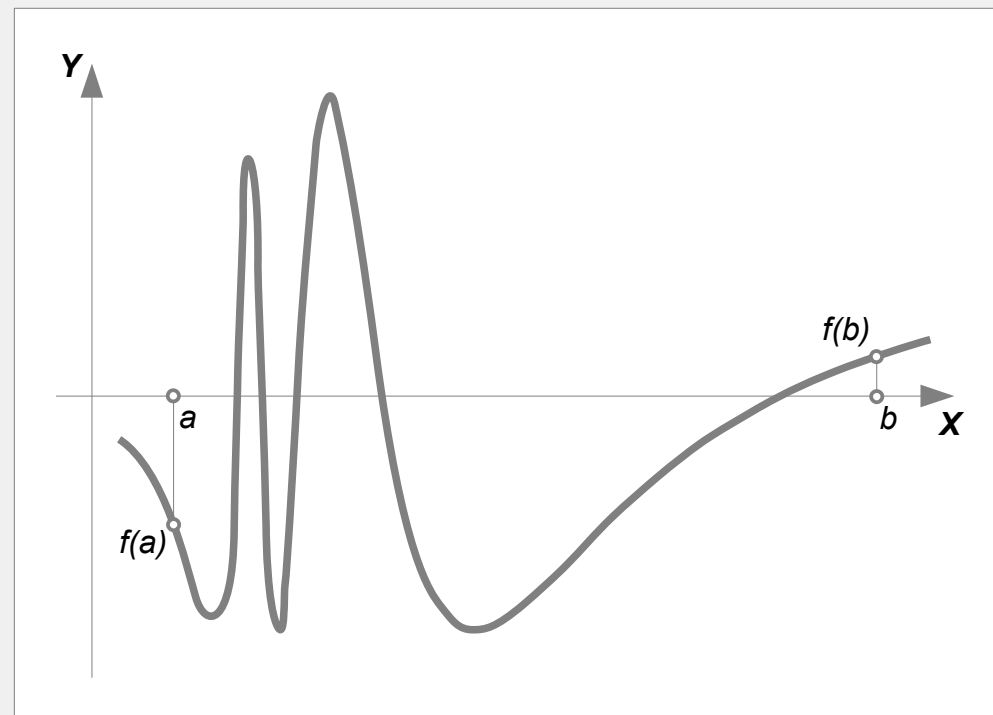
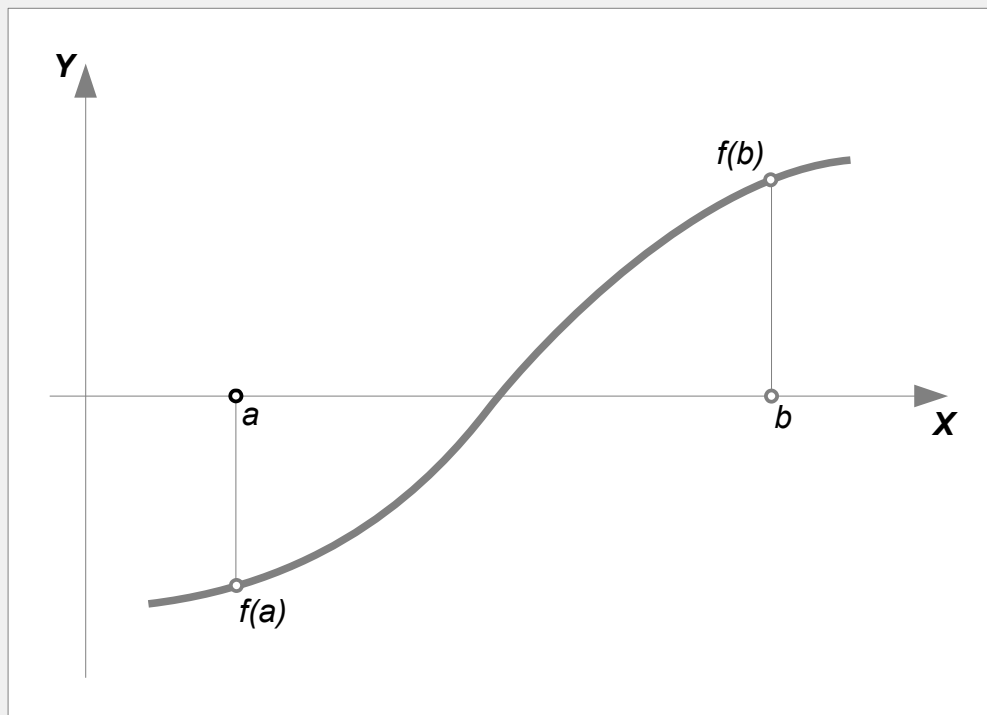
$$f(c)=0 \quad i \quad a < c < b$$

Twierdzenie Bolzano

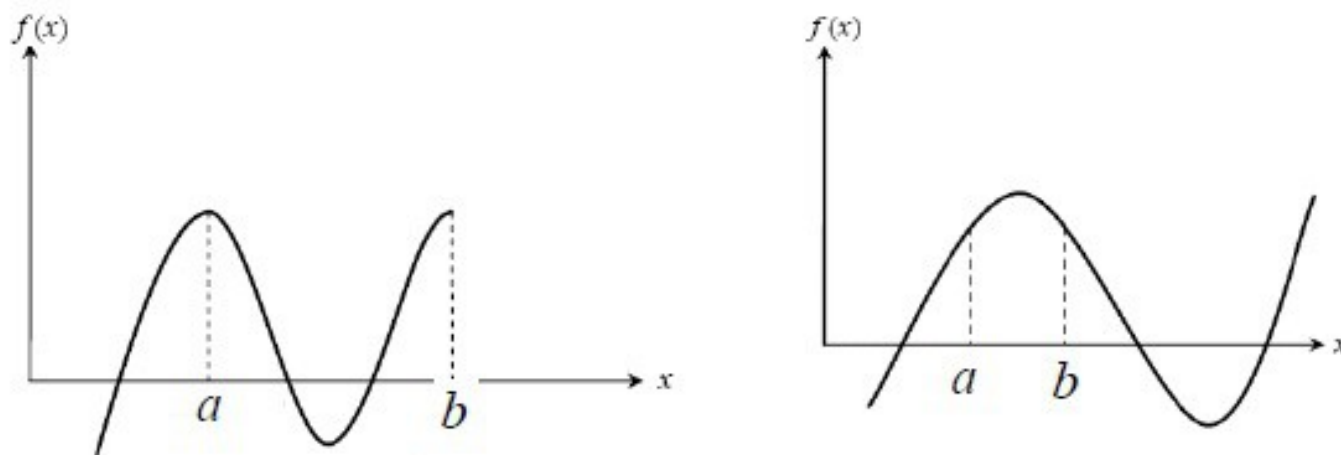
Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągłą i oznaczoną w przedziale $[a, b]$ i jej wartości na końcach przedziału mają różne znaki, to istnieje co najmniej jeden punkt c , dla którego $f(c)=0$,

$$f(c)=0 \quad i \quad a < c < b$$

$$\operatorname{sgn}(f(a)) \neq \operatorname{sgn}(f(b))$$



$$\operatorname{sgn}(f(a)) = \operatorname{sgn}(f(b))$$



$$|f(x)| < \varepsilon$$

$$|x_{k+1} - x_k| < \delta$$

wykonanie przewidzianej liczby iteracji

Metoda iteracyjna ma rząd zbieżności r jeżeli:

$$\left| x_{k+1} - x^* \right| \leq M \cdot \left| x_k - x^* \right|^r$$

gdzie:

$$0 < M < 1$$

Dla dużych wartości k można oszacować rząd zbieżności metody na podstawie zależności:

$$r \approx \frac{\log \left| x_{k+1} - x_k \right|}{\log \left| x_k - x_{k-1} \right|}$$

Metoda połowienia – założenia:

- funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale $[a,b]$,
- przedział $[a,b]$ jest przedziałem izolacji pierwiastka

Metoda polega na dzieleniu przedziału izolacji pierwiastka na połowę i sprawdzaniu znaku iloczynu wartości funkcji na końcach dwóch nowo powstałych podprzedziałów.

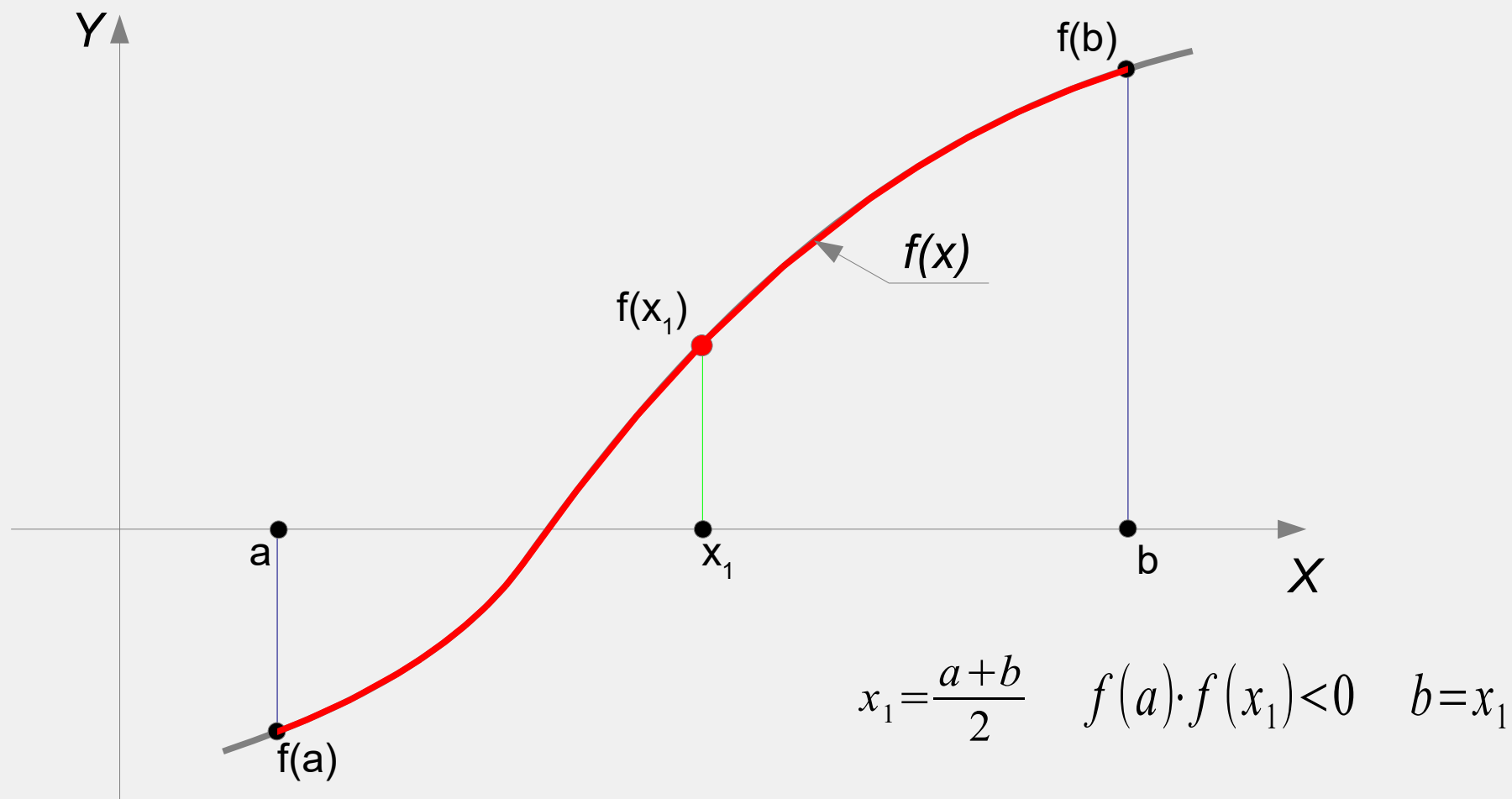
$$x = \frac{a + b}{2}$$

Wybierany jest ten, w którym znajduje się pierwiastek. Czynność ta powtarzana jest aż do znalezienia rozwiązania.

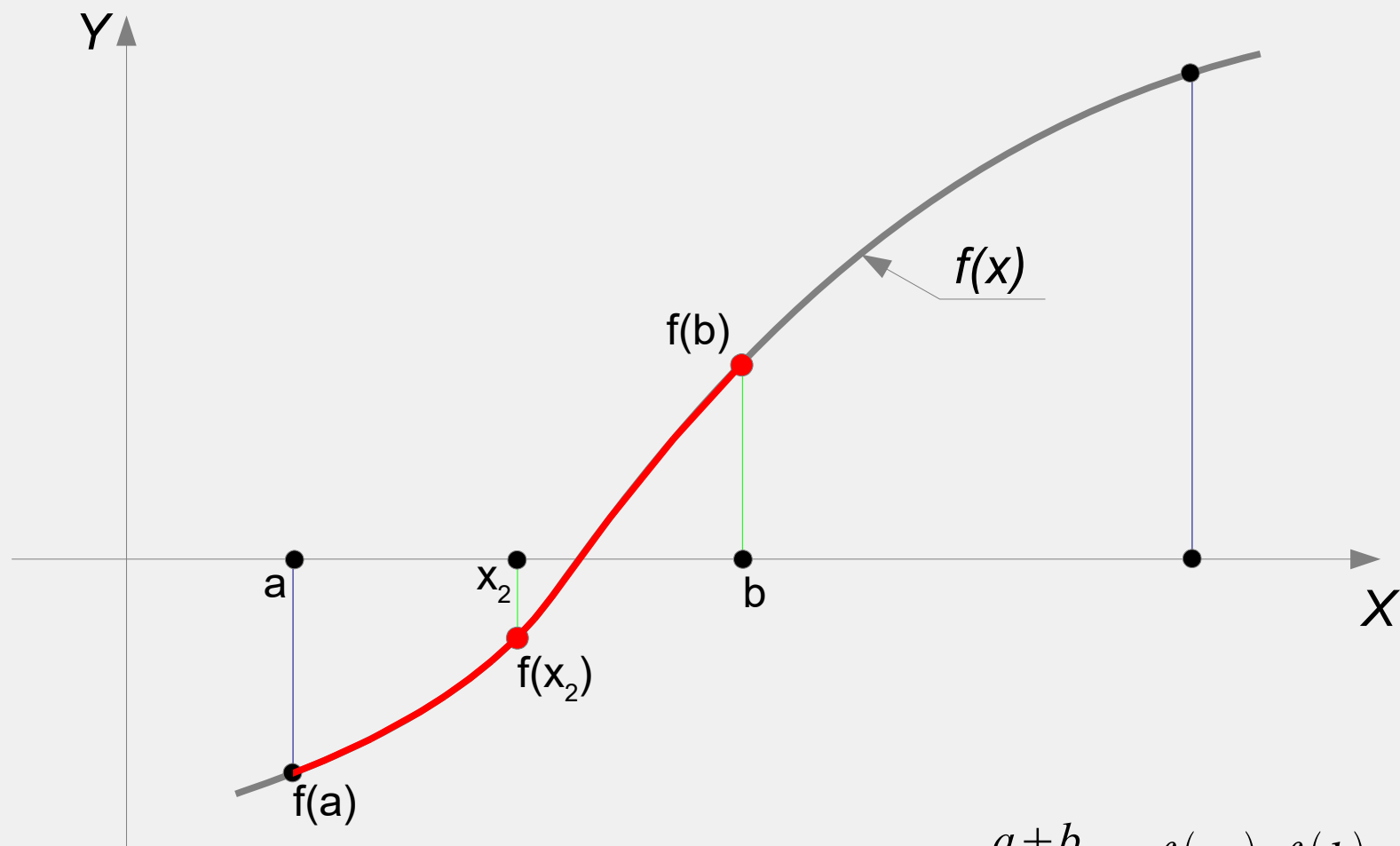
w praktyce:

$$x = a + \frac{b - a}{2}$$

Równania nieliniowe – metoda połowienia (bisekcji)

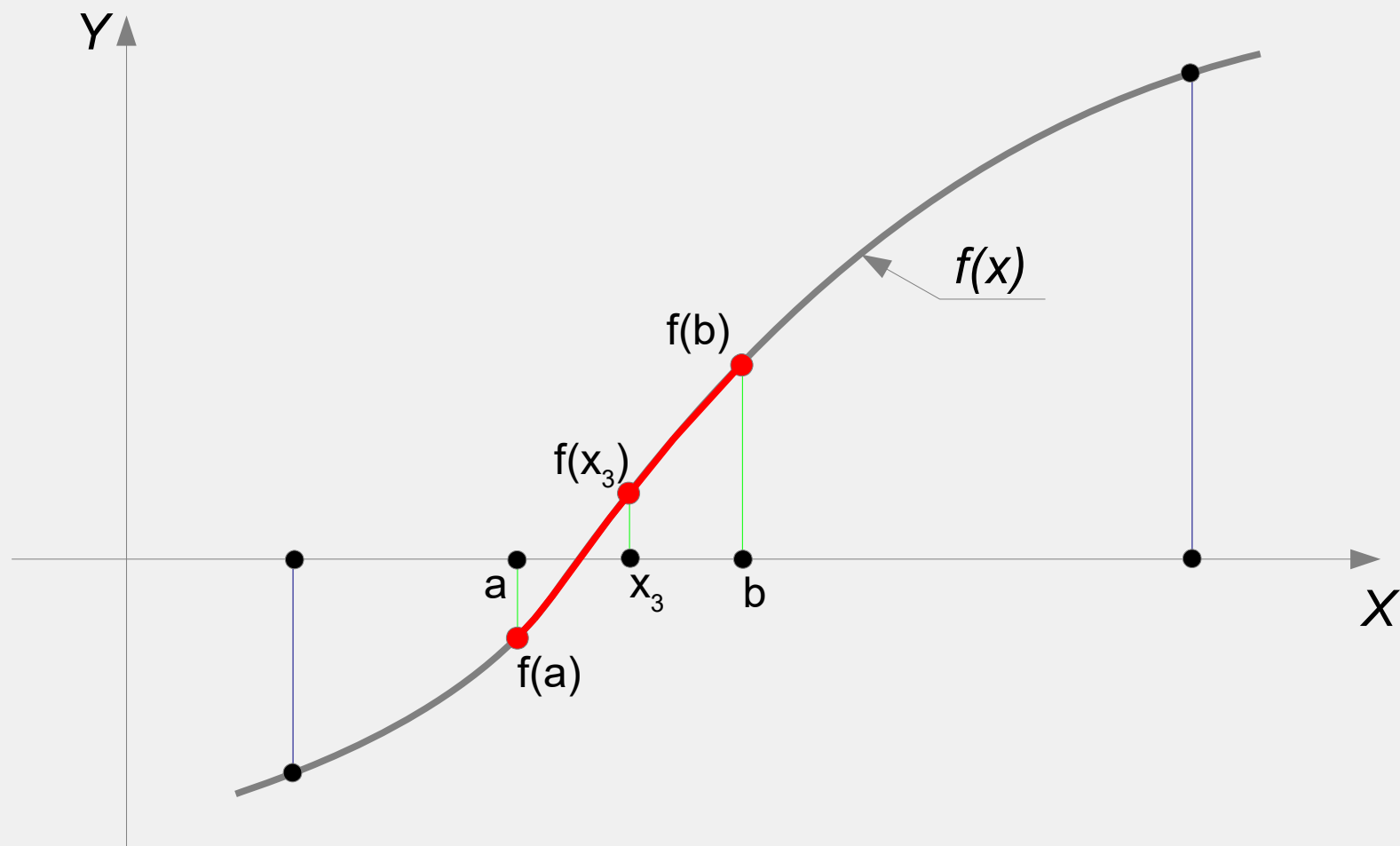


Równania nieliniowe – metoda połowienia (bisekcji)



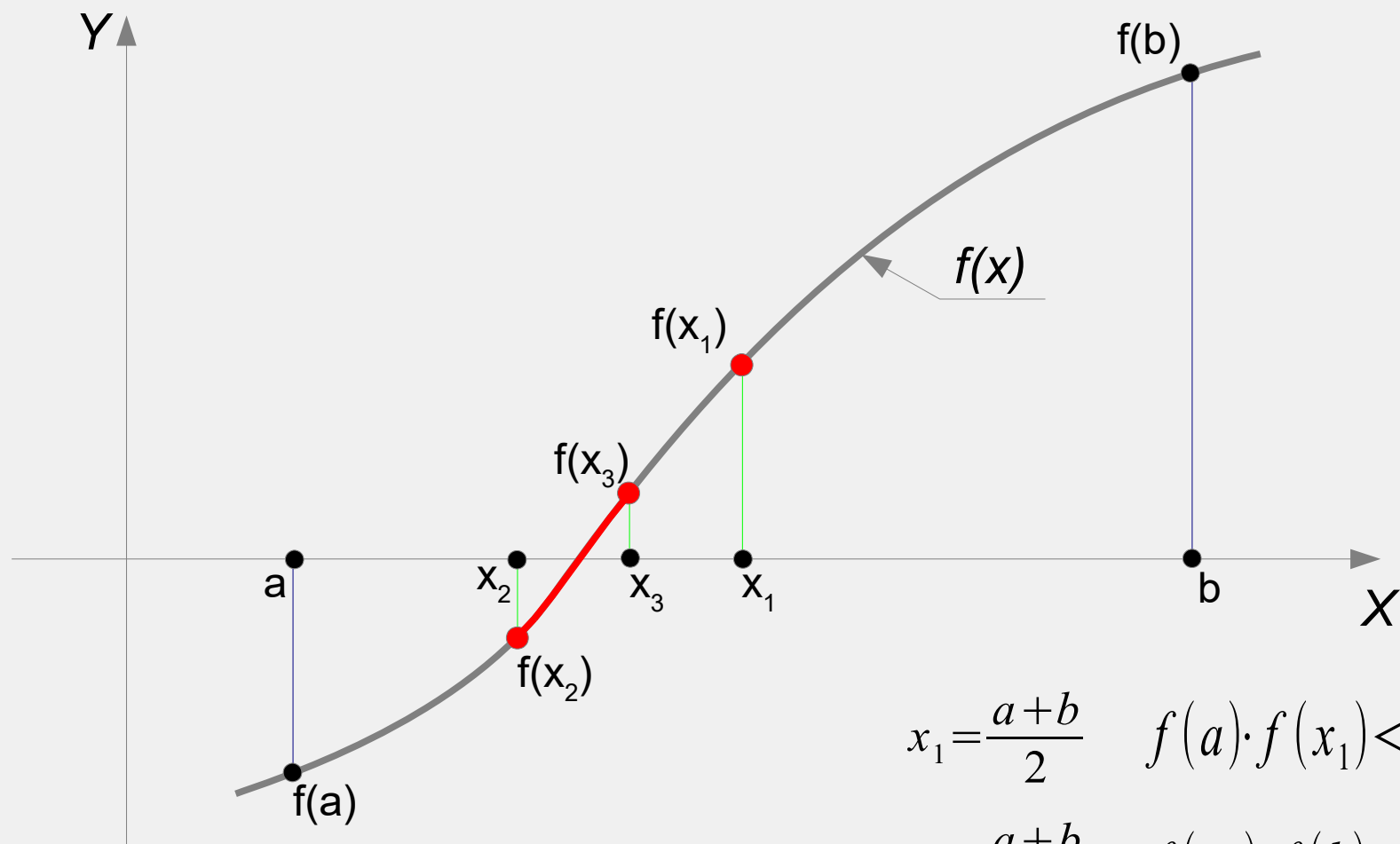
$$x_2 = \frac{a+b}{2} \quad f(x_2) \cdot f(b) < 0 \quad a = x_2$$

Równania nieliniowe – metoda połowienia (bisekcji)



$$x_3 = \frac{a+b}{2} \quad f(a) \cdot f(x_3) < 0 \quad b = x_3$$

Równania nieliniowe – metoda połowienia (bisekcji)



$$x_1 = \frac{a+b}{2} \quad f(a) \cdot f(x_1) < 0 \quad b = x_1$$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} \quad f(x_2) \cdot f(b) < 0 \quad a = x_2$$

$$x_3 = \frac{a+b}{2} \quad f(a) \cdot f(x_3) < 0 \quad b = x_3$$

Z konstrukcji metody wynika, że po obliczeniu **(k+2)** wartości funkcji otrzymujemy x , które odległe jest od pewnego rozwiązania x^* o co najwyżej

$$|x - x^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (b - a)$$

Metoda bisekcji jest zbieżna liniowo ze współczynnikiem **1/2**.

Zalety metody połowienia:

- prosta,
- uniwersalna,
- zbieżność jest globalna,
- dla zbieżności wystarcza jedynie ciągłość funkcji,
- można łatwo kontrolować błąd bezwzględny aproksymacji miejsca zerowego,
- w każdym kroku zyskujemy jedną dokładną cyfrę dwójkową,
- jedną cyfrę dziesiętną zyskuje się średnio co 3,3 kroków.

Dla znalezienia zera x^* z dokładnością $\epsilon > 0$ wystarczy obliczyć

$$k = k(\epsilon) = \left\lceil \log_2 \frac{(b-a)}{\epsilon} \right\rceil - 1$$

wartości funkcji.

Metoda fałszywego założenia liniowości funkcji.

Założenia:

- w przedziale $[a,b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy,
- $f(a)f(b) < 0$
- $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ jest funkcją klasy C^2 ,
- pierwsza i druga pochodna mają stały znak na przedziale $[a,b]$

Punkt stały x_s – punkt, w którym $f(x)$ i $f''(x)$ mają ten sam znak.

$$x_s = a \rightarrow x_0 = b$$

$$x_s = b \rightarrow x_0 = a$$

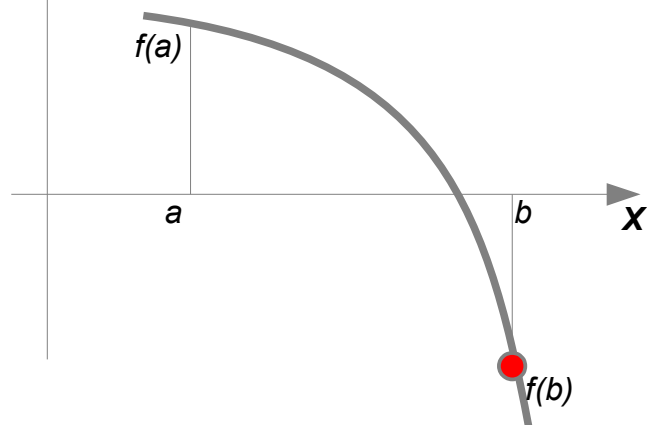
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_s) - f(x_k)} \cdot (x_s - x_k)$$

Ciąg $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ jest rosnący i ograniczony, a więc jest zbieżny. Jego granicą jest szukany pierwiastek.

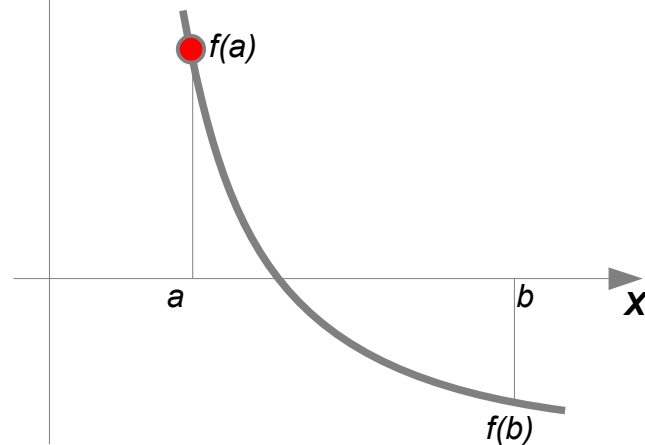
- zbieżność liniowa.

Równania nieliniowe – metoda regula falsi

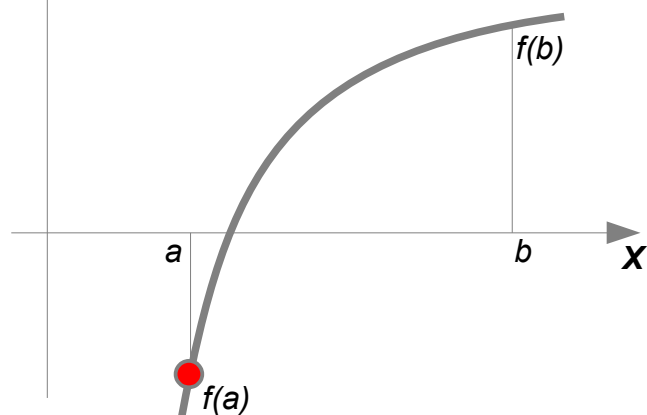
$$y \quad f < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$$



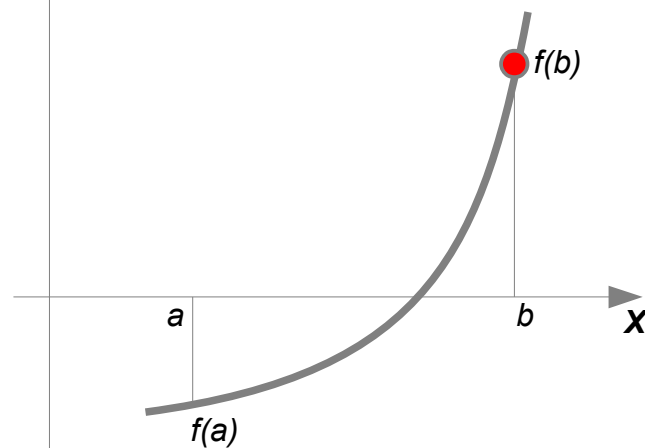
$$y \quad f > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$$



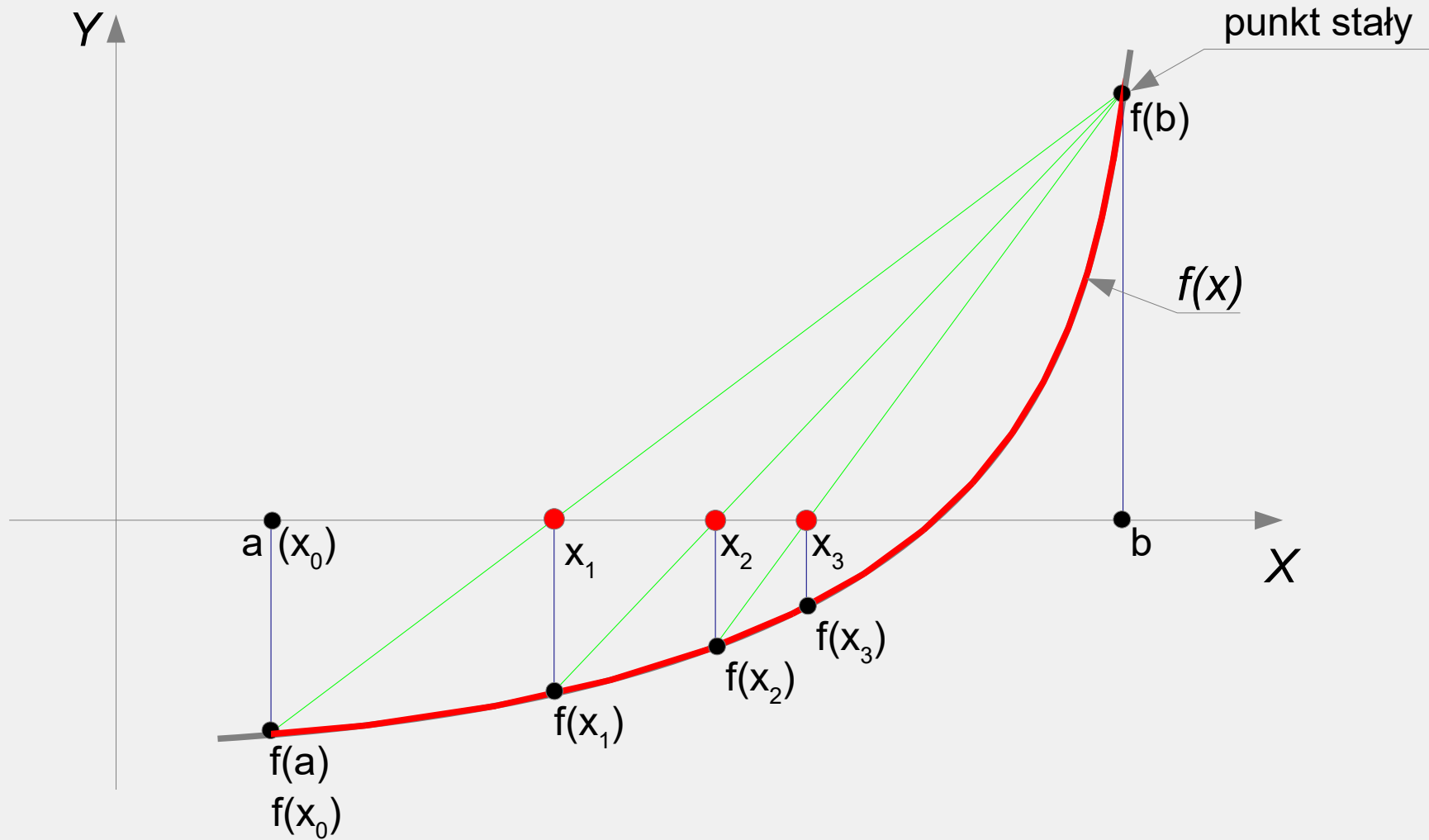
$$y \quad f < 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$$



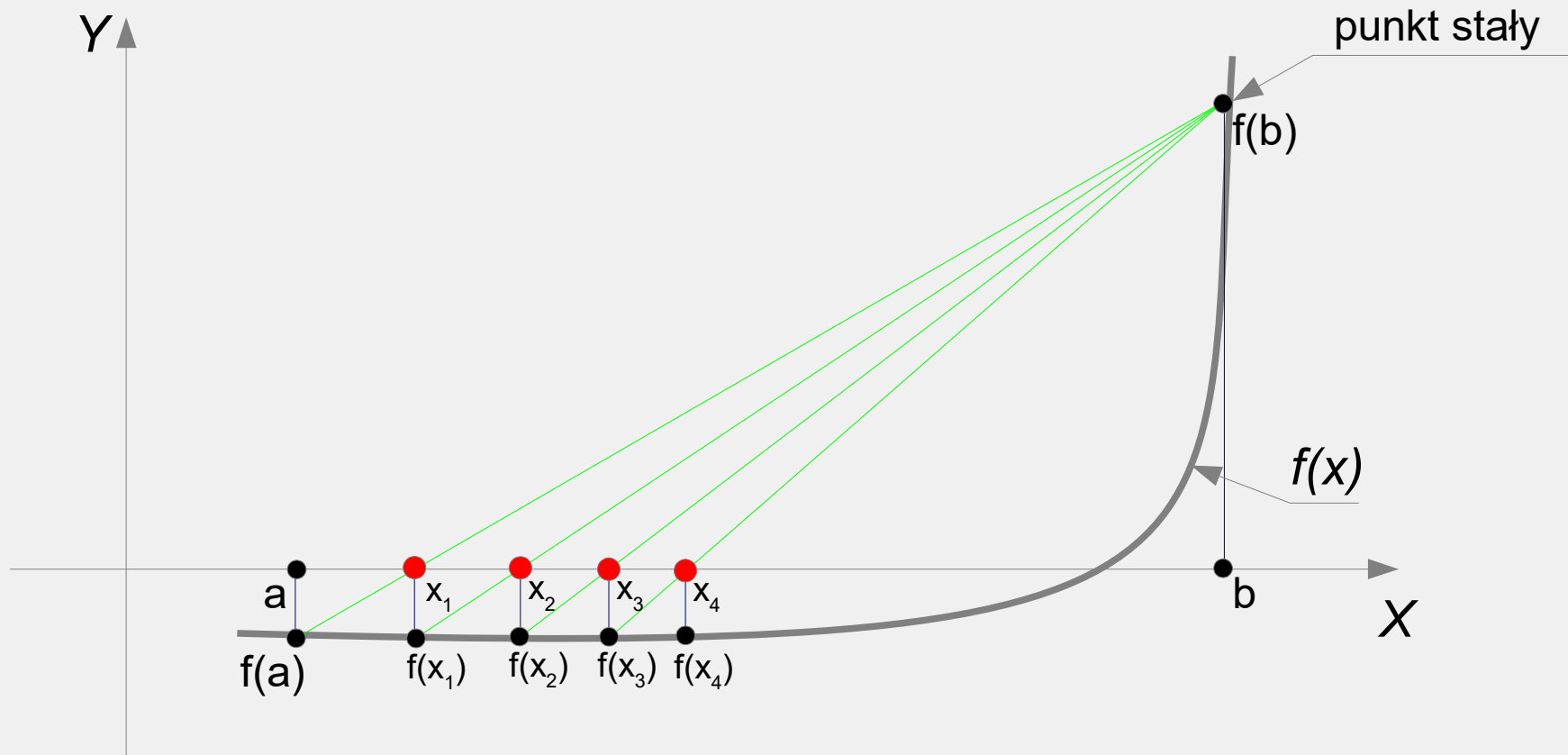
$$y \quad f > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$$



Równania nieliniowe – metoda regula falsi



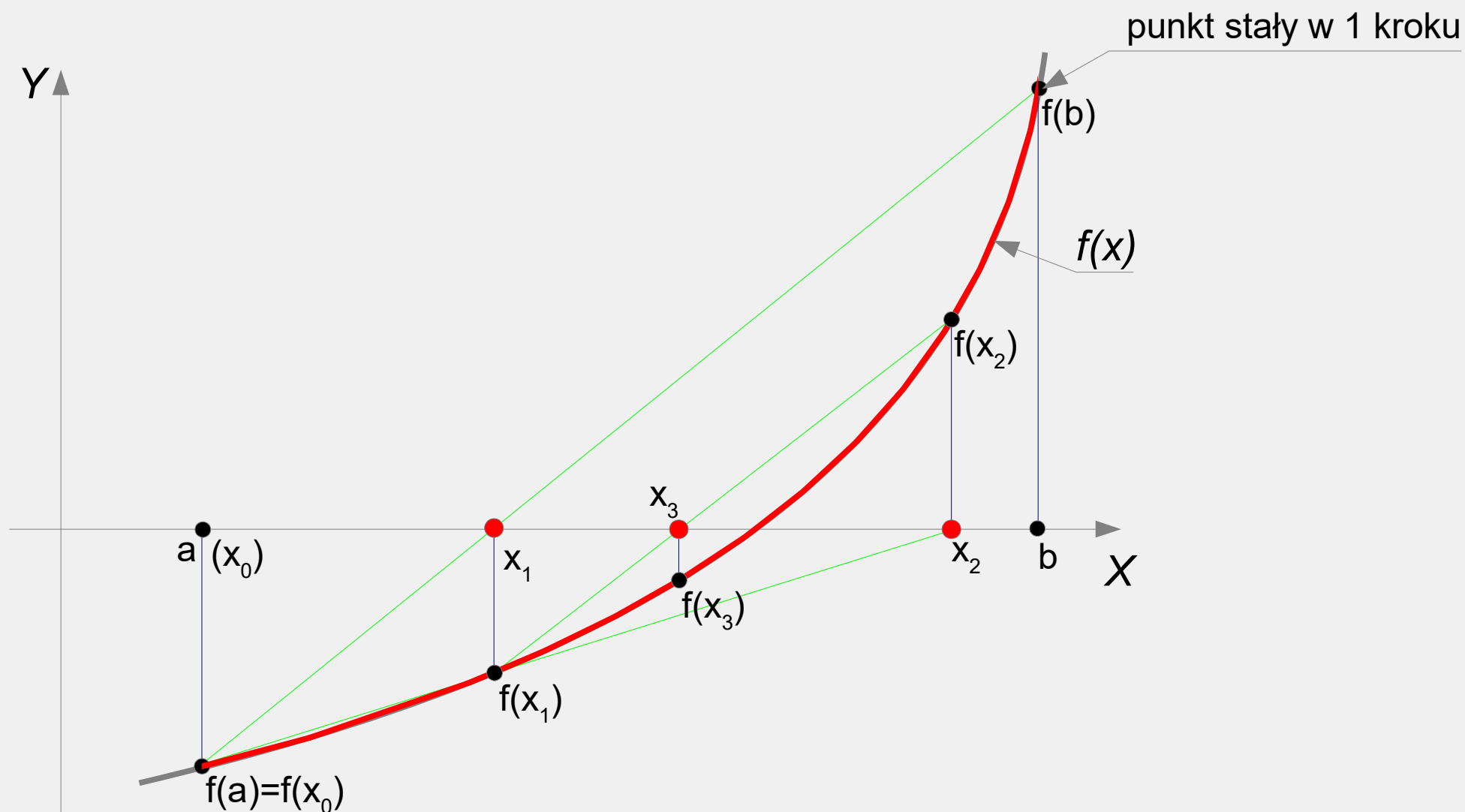
Równania nieliniowe – metoda regula falsi



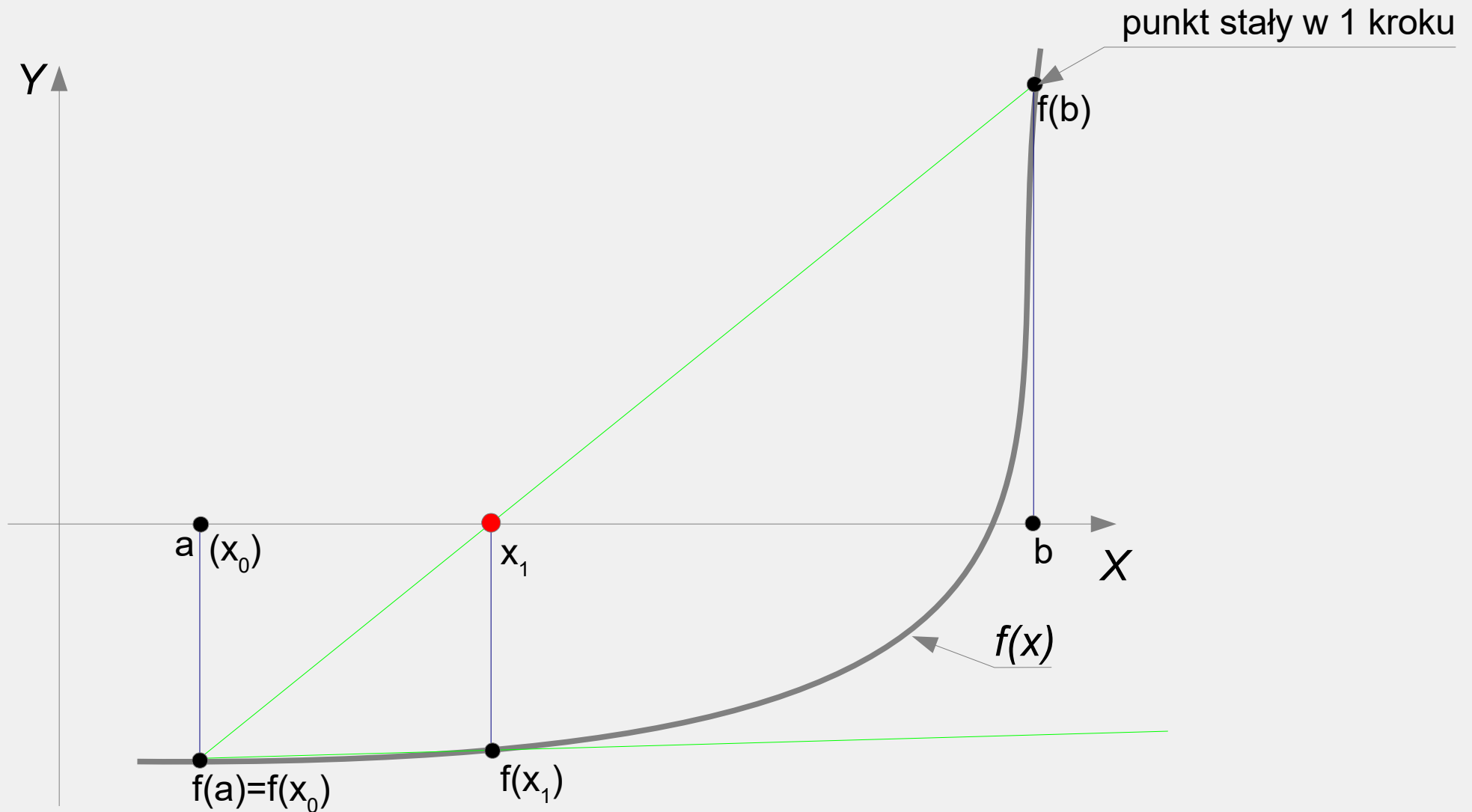
Założenia:

- w przedziale $[a,b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy,
- $f(a)f(b) < 0$
- $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ jest funkcją klasy C^2 ,
- pierwsza i druga pochodna mają stały znak na przedziale $[a,b]$,

Równania nieliniowe – metoda siecznych



Równania nieliniowe – metoda siecznych



Pierwszy krok obliczamy na podstawie metody regula falsi.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

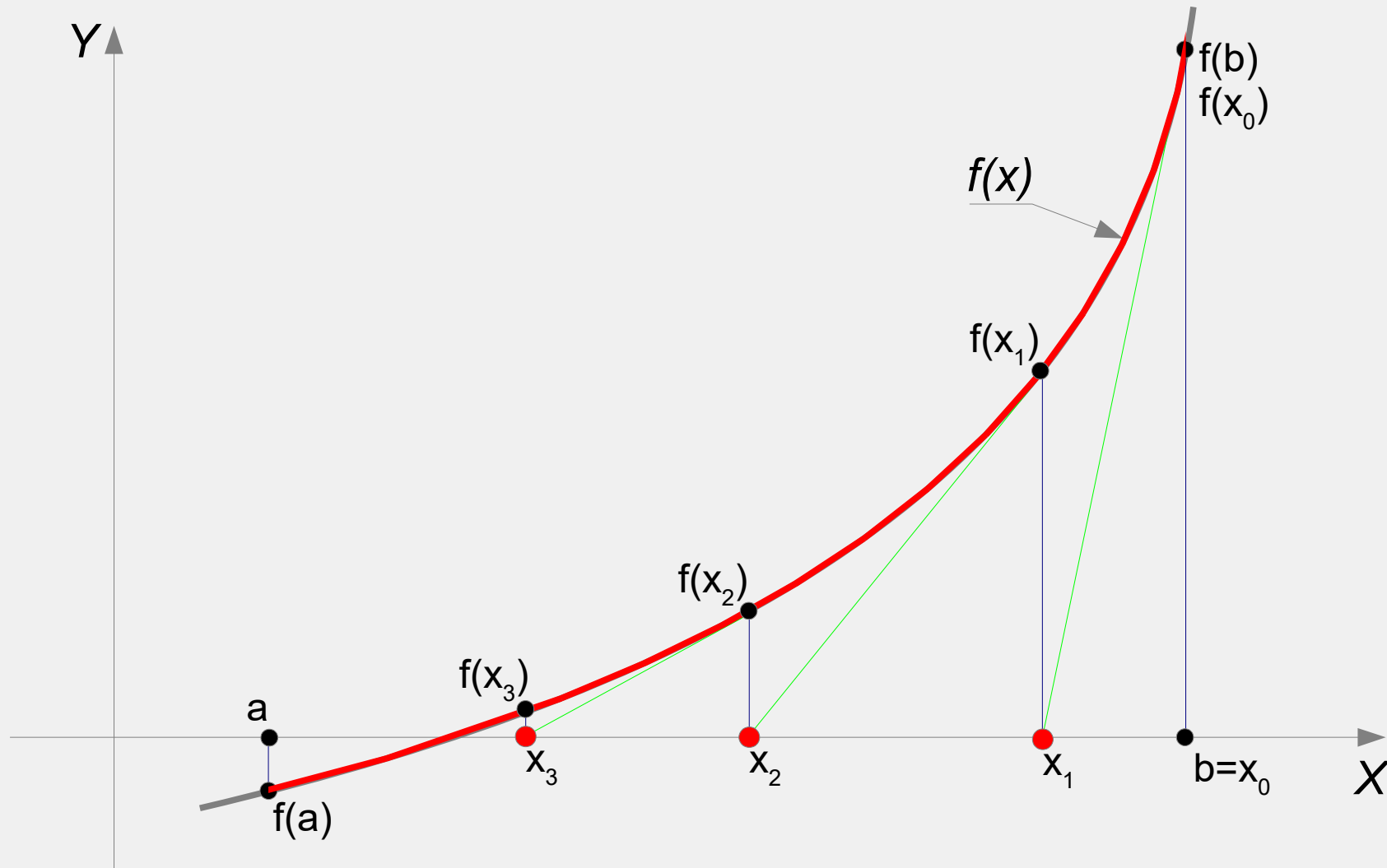
Ciąg $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ jest rosnący i ograniczony, a więc jest zbieżny. Jego granicą jest szukany pierwiastek.

- zbieżność nadliniowa

Założenia:

- w przedziale $[a,b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy,
- $f(a)f(b) < 0$
- $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ jest funkcją klasy C^2 ,
- pierwsza pochodna różna od zera na przedziale $[a,b]$,
- druga pochodna ma stały znak na przedziale $[a,b]$

Równania nieliniowe – metoda stycznych (Newtona)



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

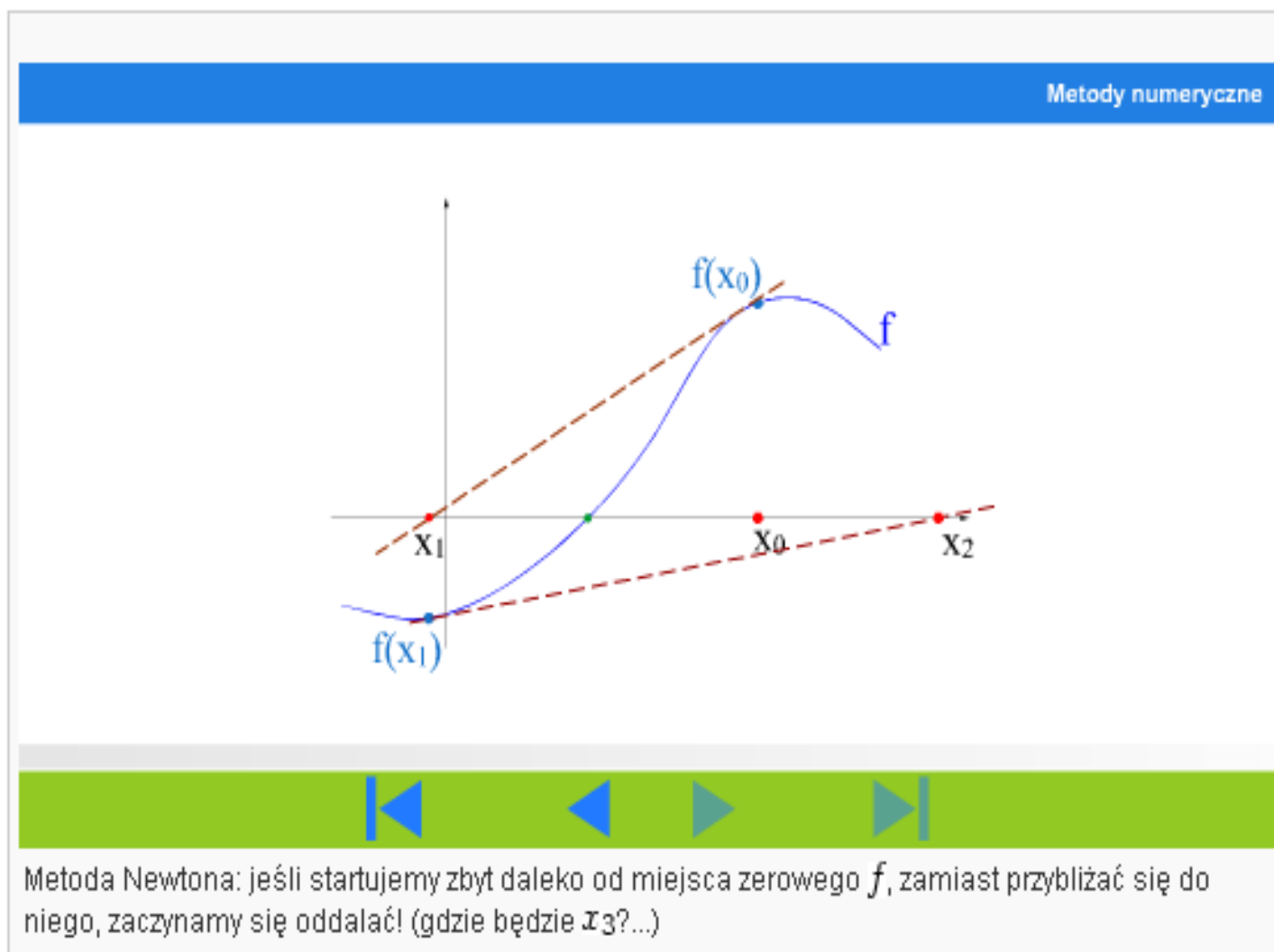
x_0 – punkt, w którym $f(x)$ i $f''(x)$ mają ten sam znak.

Twierdzenie

Jeśli f należy do $C^2(R)$, jest rosnąca, wypukła i ma zero, to jest ono jedyne, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego punktu początkowego.

Zbieżność lokalna!

Równania nieliniowe – metoda stycznych (Newtona)



<http://osilek.mimuw.edu.pl/index.php?title=MN02>

Dla

$f'(x^*) \neq 0$ zbieżność kwadratowa

$f'(x^*) \neq 0$ i $f''(x^*) = 0$ zbieżność szybsza niż kwadratowa

$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^m(x^*) = 0, \quad m > 1$

zbieżność liniowa z ilorazem: $\left(1 - \frac{1}{m}\right)$

Przykład

Znajdź wzór na obliczanie pierwiastka kwadratowego z dowolnej dodatniej liczby c .

$$x = \sqrt{c} \rightarrow x^2 = c \rightarrow x^2 - c = 0$$

$$f(x) = x^2 - c, \quad f'(x) = 2 \cdot x$$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{c}{x_k} \right)$$

- wzór Herona, greckiego inżyniera i architekta, żył między 100 rokiem p.n.e i 100 rokiem n.e

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

- a_k i zmienna z mogą być zespolone

Twierdzenie

Każdy wielomian różny od stałej ma co najmniej jeden pierwiastek w ciele C liczb zespolonych.

Niech p będzie wielomianem stopnia co najmniej drugiego i niech e będzie jednym z jego pierwiastków. Metoda Newtona startująca z punktu z płaszczyzny zespolonej tworzy ciąg

$$z_0 = z, \quad z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad n \geq 0$$

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e$ to punkt początkowy z jest **przyciągany** przez e .

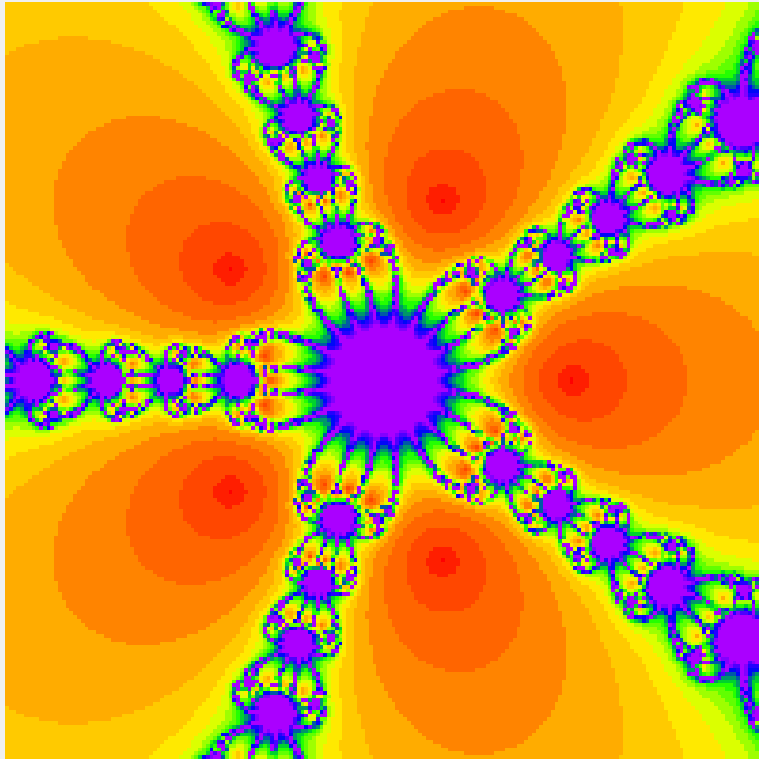
Zbiór wszystkich punktów z przyciąganych przez e nazywamy **zbiorem przyciągania** dla e .

- każdy pierwiastek ma swój zbiór przyciągania,
- zbiory są parami rozłączne,
- pewne liczby zespolone nie należą do żadnego zbioru przyciągania – punkty początkowe, dla których metoda Newtona nie jest zbieżna,
- punkty początkowe tworzą zbiór Julii wielomianu p

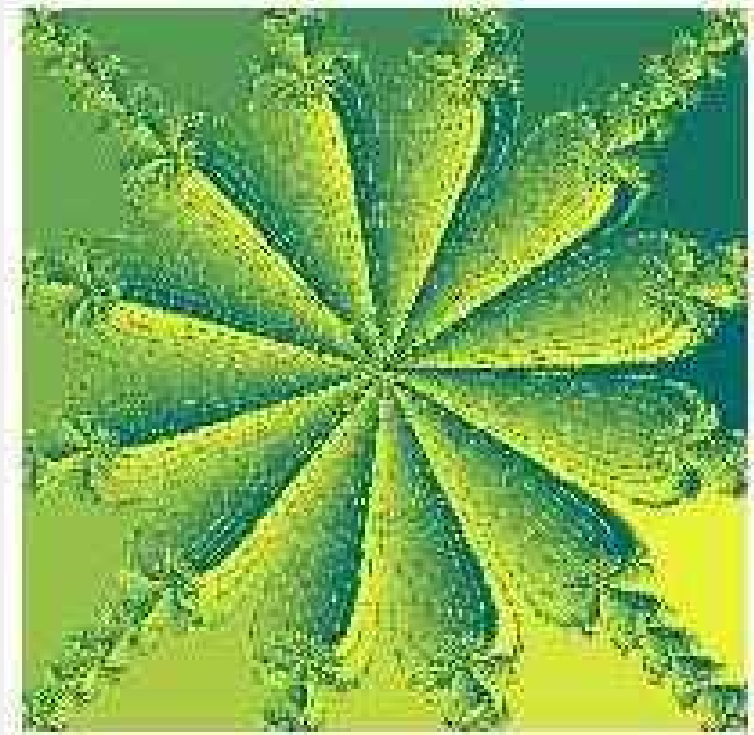
(Gaston Julia, francuski matematyk)

Ogólny schemat postępowania

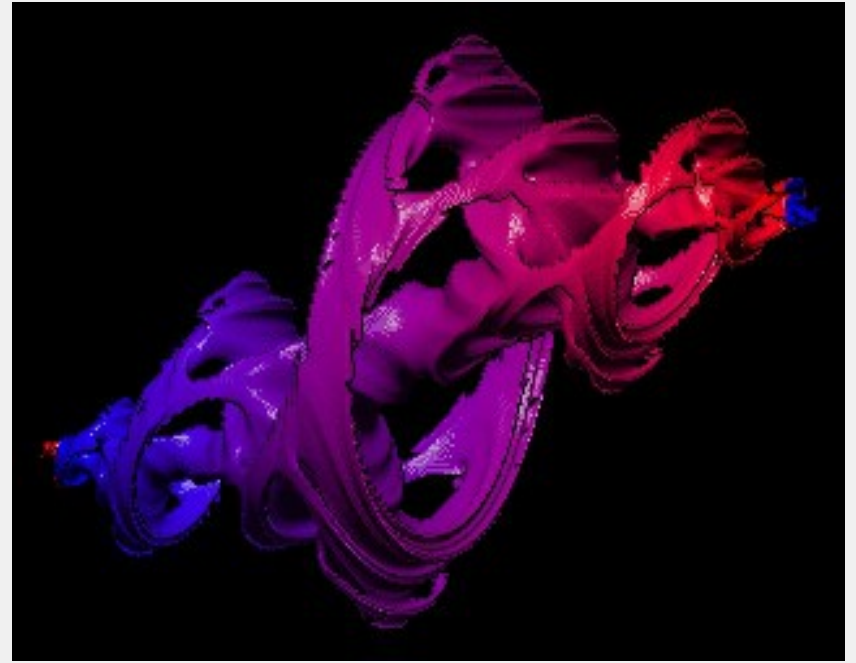
- generujemy dużą liczbę punktów siatki pokrywającej pewien kwadratowy obszar na płaszczyźnie zespolonej,
- określamy do którego zbioru przyciągania należy każdy z wygenerowanych punktów
 - obliczamy np. 20 początkowych przybliżeń w metodzie Newtona i sprawdzamy, czy któreś z nich leży w odległości nie większej od 0,25 od jednego z pierwiastków.



$$z^5 - 1 = 0$$



$$z^{12} - 1 = 0$$



Metoda Mullera (interpolacji kwadratowej)

Przy dużej krzywiźnie funkcji $f(x)$ w okolicy pierwiastka zbieżność przy zastosowaniu interpolacji liniowej jest powolna. Rozwiązaniem jest zastosowanie do przybliżania funkcji kwadratowej.

Nowe oszacowanie pierwiastka

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2 \cdot c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}$$

gdzie a, b, c są współczynnikami paraboli

$$g(x) = a(x - x_k)^2 + b(x - x_k) + c$$

Metoda Mullera (interpolacji kwadratowej)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2 \cdot c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}$$

$$a = \frac{(f_{k-1} - f_k)(x_{k-2} - x_k) - (f_{k-2} - f_k)(x_{k-1} - x_k)}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})}$$

$$b = \frac{(f_{k-2} - f_k)(x_{k-1} - x_k)^2 - (f_{k-1} - f_k)(x_{k-2} - x_k)^2}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})}$$

$$c = f_k$$

- zbieżność superliniowa.
- problem – parabola $g(x)$ nie musi przechodzić przez pierwiastek i może mieć pierwiastki zespolone,
 - rozwiązanie – zastosowanie odwrotnej interpolacji kwadratowej (*IQI – Inverse Quadratic Interpolation*)

- rozwiniecie metody siecznych polegajace na przyblizaniu parabola funkcji

$$x = f^{-1}(y)$$

- przewrocona parabola zawsze przechodzi przez pierwiastek,
- dla trzech punktow przeprowadzamy interpolacje metoda Lagrange'a

$$(x_k, f_k), (x_{k-1}, f_{k-1}), (x_{k-2}, f_{k-2})$$

$$\begin{aligned}x_{k+1} = & \frac{f_{k-1} \cdot f_k}{(f_{k-2} - f_{k-1})(f_{k-2} - f_k)} \cdot x_k \\ & + \frac{f_{k-2} \cdot f_k}{(f_{k-1} - f_{k-2})(f_{k-1} - f_k)} \cdot x_{k-1} \\ & + \frac{f_{k-2} \cdot f_{k-1}}{(f_k - f_{k-2})(f_k - f_{k-1})} \cdot x_{k-2}\end{aligned}$$

- punkty muszą być różne,
- przy starcie w pobliżu pierwiastka zbieżność jest szybka.

Procedury szukania pierwiastków najczęściej wykorzystują kombinację podanych metod, zapewniając po pierwsze gwarancję znalezienia wyniku, po drugie możliwie dużą zbieżność:

- algorytm Brenta – Dekkera, w Matlabie `fzero`, to połączenie metody siecznych, bisekcji i odwrotnej interpolacji kwadratowej.

- Dane: funkcja $f(x)$, przedział izolacji pierwiastka $[a,b]$
- Metodą siecznych wyznaczamy pierwsze przybliżenie c pomiędzy a i b
- Powtarzamy do osiągnięcia kryterium zatrzymania

$$|a-b| < \varepsilon \quad \text{lub} \quad f(c) = 0$$

- Ułóż punkty a, b, c tak aby a i b otaczały pierwiastek, $|f(a)| \leq |f(b)|$, c przyjmuje wartość b z poprzedniej iteracji,
- Jeżeli $c \neq a$ oblicz nowe c metodą IQI, jeśli $c = a$ zastosuj metodę siecznych,
- Jeżeli obliczone c należy do $[a,b]$ to je zachowaj, jeśli jest poza przedziałem to oblicz nowe c metodą bisekcji.

Dane jest n nieliniowych funkcji $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$, każda o n zmiennych x_1, \dots, x_n .

Rozwiązanie układu równań nieliniowych

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

polega na znalezieniu takiego punktu $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, dla którego wszystkie te funkcje są jednocześnie równe zero.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)})$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Aby uniknąć w każdej iteracji odwracania macierzy J , przekształcamy równanie do postaci:

$$\left[J \left(x^{(k)} \right) \right]^{-1} f \left(x^{(k)} \right) = d^{(k)}$$

$$d^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k+1)}$$

Algorytm

1. obliczenie wartości funkcji i macierzy J w aktualnym punkcie
2. rozwiązanie układu równań liniowych $J(x^{(k)})d^{(k)} = f(x^{(k)})$ w celu wyznaczenia $d^{(k)}$
3. wyznaczenie kolejnego oszacowania rozwiązania $x^{(k+1)} = x^{(k)} - d^{(k)}$

