Matematyka obliczeniowa

dr inż. Piotr Piela

Wydział Informatyki ZUT w Szczecinie

Macierze

Zastosowania macierzy

Macierze

Macierze

Macierze

Zastosowania macierzy:

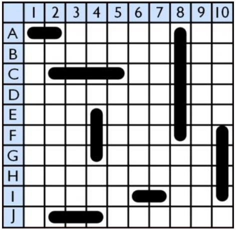
- do rozwiązywania układów równań liniowych,
- w fizyce do opisu ruchu ciał oddziałujących na siebie,
- w meteorologii do opisu zjawisk fizycznych i procesów zachodzących w atmosferze,
- w ekonomii, do opisu zjawisk takich jak inflacja czy wzrost kapitału,
- w każdej dziedzinie w której pojawia się problem optymalizacji (minimalizacji lub maksymalizacji) jakichś wielkości lub występują zjawiska o skomplikowanej naturze (wiele czynników wpływających na zjawisko oraz wiele zależności między tymi czynnikami)

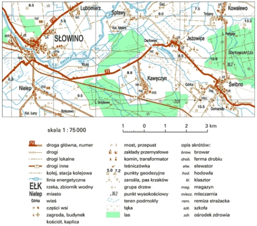
Zastosowania macierzy:

- do zapisywania dużych zbiorów danych, które są we wzajemnej relacji. Szczególnie ważną rolę pełnią macierze w informatyce oraz statystyce, gdzie często występują ogromne zbiory danych (wyniki pomiarów, dane w pamięci komputera itd.),
- do modelowania ekranów/moniotrów, które składają się z milionów pikseli ułożonych w sposób logiczny w wierszach i kolumnach, dzięki temu możemy korzystać z komputera, telewizora czy telefonu.

Wyszukiwarka internetowa Google - algorytm PageRank (PR), który wykorzystuje macierze i wartości i wektory własne macierzy.

Zastosowania:





Wektor

Wektorem $\underline{\boldsymbol{a}}$ określonym w przestrzeni m-wymiarowej $\mathbb{R}^m$ nazywa się uporządkowany zbiór liczb rzeczywistych zwanych składowymi wektora $\underline{\boldsymbol{a}}$.

Wektor kolumnowy:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Wektor wierszowy:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix}$$

Za pomocą operacji transponowania wektor kolumnowy możemy przeprowadzić na wektor wierszowy i na odwrót.

Matlab: a'

Wektor

Wektorem $\underline{\boldsymbol{a}}$ określonym w przestrzeni m-wymiarowej $\mathbb{R}^m$ nazywa się uporządkowany zbiór liczb rzeczywistych zwanych składowymi wektora $\underline{\boldsymbol{a}}$.

Wektor kolumnowy:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Wektor wierszowy:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix}$$

Za pomocą operacji transponowania wektor kolumnowy możemy przeprowadzić na wektor wierszowy i na odwrót.

$\boxed{\text{Matlab: a'}}$

Przykład

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{a}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierz

Macierz A o wymiarach $m \times n$ jest uporządkowaniem elementów w postaci prostokątnej tablicy składającej się z m wierszy i n kolumn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Macierze dzielimy na kwadratowe i prostokątne.

Matlab: A=[1 2; 2 -1]

Macierz

Macierz A o wymiarach $m \times n$ jest uporządkowaniem elementów w postaci prostokątnej tablicy składającej się z m wierszy i n kolumn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Macierze dzielimy na kwadratowe i prostokątne.

Matlab: A=[1 2; 2 -1]

Przykład

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Macierz transponowana A^T

Z macierzy A o wymiarach $m \times n$ otrzymujemy macierz do niej transponowaną A^T o wymiarze $n \times m$ w wyniku wzajemnej zamiany wierszy i kolumn:

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Matlab: transpose() lub A'

Macierz transponowana A^T

Z macierzy A o wymiarach $m \times n$ otrzymujemy macierz do niej transponowaną A^T o wymiarze $n \times m$ w wyniku wzajemnej zamiany wierszy i kolumn:

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Matlab: transpose() lub A'

Przykład

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Macierz zerowa 0

Macierz zerowa jest macierzą, której wszystkie elementy są równe zeru:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wektor zerowy – macierz zerowa składająca się tylko z jednej kolumny.

Matlab: zeros()

Macierz kwadratowa

Macierz kwadratowa ma tą samą liczbę wierszy i kolumn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Elementy a_{ii} leżące na głównej przekątnej macierzy A nazywamy elementami diagonalnymi.

Macierz kwadratowa

Macierz kwadratowa ma tą samą liczbę wierszy i kolumn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Elementy a_{ii} leżące na głównej przekątnej macierzy A nazywamy elementami diagonalnymi.

Przykład

Dla macierzy: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ elementami diagonalnymi są: $1, 5, 9$.

Ślad macierzy

Dla każdej macierzy kwadratowej A jej ślad definiujemy jako sumę elementów diagonalnych.

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\boxed{\text{Matlab: trace()}}$

Ślad macierzy

Dla każdej macierzy kwadratowej A jej ślad definiujemy jako sumę elementów diagonalnych.

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\boxed{\text{Matlab: trace()}}$

Przykład

Dla macierzy: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ślad wynosi: $Tr(A) = 15$

Macierz diagonalna

Macierz diagonalna D jest macierzą kwadratową, której wszystkie elementy poza przekątną przyjmują wartość 0:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Macierz diagonalną, której wszystkie elementy diagonalne są równe pewnej stałej c, rzeczywistej lub zespolonej nazywamy macierzą skalarną S.

Matlab: diag()

Macierz diagonalna

Macierz diagonalna D jest macierzą kwadratową, której wszystkie elementy poza przekątną przyjmują wartość 0:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Macierz diagonalną, której wszystkie elementy diagonalne są równe pewnej stałej c, rzeczywistej lub zespolonej nazywamy macierzą skalarną S.

Matlab: diag()

Przykład

Macierz diagonalna: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ Macierz skalarna: $S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Macierz diagonalna

Wyznacznik macierzy diagonalnej D jest równy iloczynowi elementów diagonalnych:

$$det(D) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Macierz odwrotna do macierzy diagonalnej D jest macierzą kwadratową, której elementy diagonalne są odwrotnością elementów diagonalnych macierzy D:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

Macierz diagonalna

Wyznacznik macierzy diagonalnej D jest równy iloczynowi elementów diagonalnych:

$$det(D) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Macierz odwrotna do macierzy diagonalnej D jest macierzą kwadratową, której elementy diagonalne są odwrotnością elementów diagonalnych macierzy D:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

Przykład

Macierz diagonalna: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$

Macierz jednostkowa

Macierz diagonalna o wymiarach $n \times n$,której wszystkie elementy diagonalne przyjmują wartość 1 nosi nazwę n-wymiarowej macierzy jednostkowej:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matlab: eye()

Macierz symetryczna i antysymetryczna

Macierz kwadratowa jest macierzą symetryczną jeśli:

$$A = A^T$$

Macierz kwadratowa jest macierzą antysymetryczną (skośną) jeśli:

$$A = -A^T$$

Macierz symetryczna i antysymetryczna

Macierz kwadratowa jest macierzą symetryczną jeśli:

$$A = A^T$$

Macierz kwadratowa jest macierzą antysymetryczną (skośną) jeśli:

$$A = -A^T$$

Przykład

Macierz symetryczna: $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

Macierz antysymetryczna: $A_{as} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Macierz symetryczna i antysymetryczna

Każdą macierz kwadratową A można rozłożyć na sumę macierzy symetrycznej A_s i macierzy antysymetrycznej A_{as}:

$$A = A_s + A_{as}, \quad \text{gdzie}: \quad A_s = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_{as} = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Macierz symetryczna i antysymetryczna

Każdą macierz kwadratową A można rozłożyć na sumę macierzy symetrycznej A_s i macierzy antysymetrycznej A_{as}:

$$A = A_s + A_{as}, \quad \text{gdzie}: \quad A_s = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_{as} = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Zadanie

Dla macierzy: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

znajdź A_s i A_{as}.

Rozwiązanie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Macierz symetryczna: $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

Macierz antysymetryczna: $A_{as} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Macierz górnotrójkątna

Macierz górnotrójkątna U jest macierzą, której wszystkie elementy poniżej przekątnej są równe zeru:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy górnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej:

$$det(U) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Matlab: triu()

Macierz górnotrójkątna

Macierz górnotrójkątna U jest macierzą, której wszystkie elementy poniżej przekątnej są równe zeru:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy górnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej:

$$det(U) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Matlab: triu()

Przykład

Macierz górnotrójkątna: $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad det(U) = 45$

Macierz dolnotrójkątna

Macierz dolnotrójkątna L jest macierzą, której wszystkie elementy powyżej przekątnej są równe zeru:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy dolnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej:

$$det(L) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$\boxed{\text{Matlab: tril()}}$

Macierz dolnotrójkątna

Macierz dolnotrójkątna L jest macierzą, której wszystkie elementy powyżej przekątnej są równe zeru:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy dolnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej:

$$det(L) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Matlab: tril()

Przykład

Macierz dolnotrójkątna: $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad det(L) = 2$

Macierz dwudiagonalna

Macierz dwudiagonalna B jest macierzą, która ma elementy nieznikające położone na głównej przekątnej i na przekątnej leżącej bezpośrednio powyżej niej:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Macierz dwudiagonalna

Macierz dwudiagonalna B jest macierzą, która ma elementy nieznikające położone na głównej przekątnej i na przekątnej leżącej bezpośrednio powyżej niej:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Przykład

Macierz dwudiagonalna: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Macierz trójdiagonalna

Macierz trójdiagonalna B jest macierzą, która ma elementy nieznikające położone na głównej przekątnej i na przekątnych leżących bezpośrednio powyżej i poniżej niej:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Macierz trójdiagonalna

Macierz trójdiagonalna B jest macierzą, która ma elementy nieznikające położone na głównej przekątnej i na przekątnych leżących bezpośrednio powyżej i poniżej niej:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Przykład

Macierz trójdiagonalna: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ q_1 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ q_1 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

- ponad dwukrotny wzrost liczby działań arytmetycznych,
- ponad 60% wzrost obciążenia pamięci,
- pogorszenie oszacowania błędów zaokrągleń.

Równość macierzy

Dwie macierze A i B są równe jeśli mają te same wymiary i ich odpowiadające sobie elementy są równe:

$$A = B, \quad \text{jeśli} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \text{dla} \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$$

Równość macierzy

Dwie macierze A i B są równe jeśli mają te same wymiary i ich odpowiadające sobie elementy są równe:

$$A = B, \quad \text{jeśli} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \text{dla} \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$$

Przykład

Macierze równe: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Przekształcenia elementarne

Przez pojęcie przekształcenia elementarnego rozumiemy:

- wzajemną zamianę miejscami dwóch wierszy lub kolumn,
- przemnożenie wiersza lub kolumny przez niezerową stałą,
- dodanie wiersza do innego wiersza lub kolumny do innej kolumny.

Przekształcenia elementarne

Przez pojęcie przekształcenia elementarnego rozumiemy:

- wzajemną zamianę miejscami dwóch wierszy lub kolumn,
- przemnożenie wiersza lub kolumny przez niezerową stałą,
- dodanie wiersza do innego wiersza lub kolumny do innej kolumny.

Przekształcenia elementarne

Przez pojęcie przekształcenia elementarnego rozumiemy:

- wzajemną zamianę miejscami dwóch wierszy lub kolumn,
- przemnożenie wiersza lub kolumny przez niezerową stałą,
- dodanie wiersza do innego wiersza lub kolumny do innej kolumny.

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Dodawanie i odejmowanie dwóch macierzy A i B jest możliwe jeśli obie mają ten sam wymiar. Dodajemy lub odejmujemy elementy stojące na tym samym miejscu.

$$A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Dodawanie i odejmowanie dwóch macierzy A i B jest możliwe jeśli obie mają ten sam wymiar. Dodajemy lub odejmujemy elementy stojące na tym samym miejscu.

$$A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

Przykład

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

Macierz A o wymiarowości $m \times n$ można pomnożyć przez liczbę α mnożąc przez α każdy jej element:

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

W tym przypadku zachodzą następujące prawa:

- prawo przemienności: $\alpha A = A\alpha$,
- prawo łączności: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- prawo rozdzielności: $(\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A, \quad \alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$.

Mnożenie macierzy przez liczbę

Macierz A o wymiarowości $m \times n$ można pomnożyć przez liczbę α mnożąc przez α każdy jej element:

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

W tym przypadku zachodzą następujące prawa:

- prawo przemienności: $\alpha A = A\alpha$,
- prawo łączności: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- prawo rozdzielności: $(\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A, \quad \alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$.

Przykład

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad 2\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Mnożenie dwóch macierzy

Iloczyn dwóch macierz A i B jest dobrze określony jedynie wtedy gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Jeśli A jest wymiaru $m \times n$ to B musi być wymiaru $n \times p$. Iloczyn AB będzie wówczas macierzą C o wymiarze $m \times p$.

$$C = AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) = (c_{ik})$$

Jeśli dwa iloczyny AB i BA są dobrze określone to w ogólności nie zachodzi prawo przemienności:

$$\boxed{AB \neq BA}$$

Mnożenie dwóch macierzy

Iloczyn dwóch macierz A i B jest dobrze określony jedynie wtedy gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Jeśli A jest wymiaru $m \times n$ to B musi być wymiaru $n \times p$. Iloczyn AB będzie wówczas macierzą C o wymiarze $m \times p$.

$$C = AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) = (c_{ik})$$

Jeśli dwa iloczyny AB i BA są dobrze określone to w ogólności nie zachodzi prawo przemienności:

$$\boxed{AB \neq BA}$$

Przykład

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = AB = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 11 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Operacje arytmetyczne na macierzach

Zestawienie możliwych operacji arytmetycznych dla macierzy A i B o różnych wymiarach:

$dim(A)$	$dim(B)$	$dim(C)$		
		$+$	$-$	$\cdot$
$n \times n$	$n \times n$	$n \times n$	$n \times n$	$n \times n$
$n \times p$	$m \times q$	X	X	X
$n \times p$	$n \times p$	$n \times p$	$n \times p$	X
$n \times p$	$p \times n$	X	X	$n \times n$
$n \times p$	$p \times m$	X	X	$n \times m$

Działania na macierzach

Przy działaniach na macierzach mają zastosowanie następujące reguły:

- $AE = EA = A$
- $A0 = 0A = 0$
- $(AB)C = A(BC)$
- $(A+B)^T = A^T + B^T, \ \ (AB)^T = B^T A^T, \ \ (A^T)^T = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Zadania

Wykonaj obliczenia:

1. $\boxed{\text{oblicz } AB \text{ i } BA \text{ dla } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

Iloczynem skalarnym wektora wierszowego $\underline{\boldsymbol{a}}^T$ o wymiarze $1 \times n$ i wektora kolumnowego $\underline{\boldsymbol{b}}$ o wymiarze $n \times 1$ jest liczba (skalar)

$$\underline{\boldsymbol{a}}^T \underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{b}}^T \underline{\boldsymbol{a}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = c$$

Wektory $\underline{\boldsymbol{a}}^T$ i $\underline{\boldsymbol{b}}$ są wzajemnie ortogonalne, gdy ich iloczyn skalarny zanika.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

Iloczynem skalarnym wektora wierszowego $\underline{\boldsymbol{a}}^T$ o wymiarze $1 \times n$ i wektora kolumnowego $\underline{\boldsymbol{b}}$ o wymiarze $n \times 1$ jest liczba (skalar)

$$\underline{\boldsymbol{a}}^T \underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{b}}^T \underline{\boldsymbol{a}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = c$$

Wektory $\underline{\boldsymbol{a}}^T$ i $\underline{\boldsymbol{b}}$ są wzajemnie ortogonalne, gdy ich iloczyn skalarny zanika.

Przykład

$$\underline{\boldsymbol{a}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{a}}^T \underline{\boldsymbol{b}} = 1$$

Iloczyn tensorowy dwóch wektorów

Iloczynem tensorowym wektora kolumnowego $\underline{\boldsymbol{a}}$ o wymiarze $n \times 1$ i wektora wierszowego $\underline{\boldsymbol{b}}^T$ o wymiarze $1 \times m$ jest macierz o wymiarze $n \times m$

$$\underline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

Iloczyn tensorowy dwóch wektorów

Iloczynem tensorowym wektora kolumnowego $\underline{\boldsymbol{a}}$ o wymiarze $n \times 1$ i wektora wierszowego $\underline{\boldsymbol{b}}^T$ o wymiarze $1 \times m$ jest macierz o wymiarze $n \times m$

$$\underline{\boldsymbol{ab}}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

Przykład

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{b}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{ab}}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Rząd macierzy

Definicja

Dla każdej macierzy A maksymalna liczba r niezależnych liniowo kolumn jest równa maksymalnej liczbie niezależnych liniowo wierszy. Liczbę r nazywamy rzędem macierzy:

$$rank(A) = r$$

Rząd macierzy - największy rząd różnych od zera minorów macierzy A

Matlab: rank()

Rząd macierzy

Twierdzenia o rzędzie macierzy:

- dla macierzy A o wymiarze $m \times n$:

$$rank(A_{m \times n}) = r \leqslant min(m, n)$$

- dla nieosobliwej macierzy A ($det(A) \neq 0$) o wymiarze $n \times n$:

$$rank(A_{n \times n}) = r = n$$

- dla osobliwej macierzy A ($det(A) = 0$) o wymiarze $n \times n$:

$$rank(A_{n \times n}) = r < n$$

- dla macierzy zerowej:

$$rank(0) = r = 0$$

Rząd macierzy

Twierdzenia o rzędzie macierzy:

- dla macierzy A o wymiarze $m \times n$:

$$rank(A_{m \times n}) = r \leqslant min(m, n)$$

- dla nieosobliwej macierzy A ($det(A) \neq 0$) o wymiarze $n \times n$:

$$rank(A_{n \times n}) = r = n$$

- dla osobliwej macierzy A ($det(A) = 0$) o wymiarze $n \times n$:

$$rank(A_{n \times n}) = r < n$$

- dla macierzy zerowej:

$$rank(0) = r = 0$$

Rząd macierzy

Twierdzenia o rzędzie macierzy:

- dla macierzy A o wymiarze $m \times n$:
$$rank(A_{m\times n}) = r \leqslant min(m, n)$$
- dla nieosobliwej macierzy A $(det(A) \neq 0)$ o wymiarze $n \times n$:
$$rank(A_{n\times n}) = r = n$$
- dla osobliwej macierzy A $(det(A) = 0)$ o wymiarze $n \times n$:
$$rank(A_{n\times n}) = r < n$$
- dla macierzy zerowej:
$$rank(0) = r = 0$$

Rząd macierzy

Twierdzenia o rzędzie macierzy:

- dla macierzy A o wymiarze $m \times n$:

$$rank(A_{m \times n}) = r \leqslant min(m, n)$$

- dla nieosobliwej macierzy A $(det(A) \neq 0)$ o wymiarze $n \times n$:

$$rank(A_{n \times n}) = r = n$$

- dla osobliwej macierzy A $(det(A) = 0)$ o wymiarze $n \times n$:

$$rank(A_{n \times n}) = r < n$$

- dla macierzy zerowej:

$$rank(0) = r = 0$$

Zadania

Oblicz rząd oraz wyznacznik macierzy A:

1. $$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

Macierz odwrotna

Dla każdej macierzy nieosobliwej A istnieje macierz do niej odwrotna A^{-1}. Iloczyn macierzy i macierzy do niej odwrotnej jest równy macierzy jednostkowej:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Macierz odwrotną wyznaczamy ze wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\hat{A}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \hat{a}_{n2} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

$\hat{A}$ - transponowana macierz dopełnień algebraicznych, elementy tej macierzy $\hat{a}_{ij}$ to algebraiczne dopełnienia elementów a_{ij} macierzy A.

Matlab: inv()

Sposoby obliczania macierzy odwrotnej

- Korzystamy ze wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\hat{A}$$

  Dla macierzy kwadratowej o wymiarze $n \times n$ otrzymamy:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Wykorzystujemy zależność $AA^{-1} = E$. Stosując operacje elementarne na macierzy $(A|E)$ doprowadzamy ją do postaci $(E|A^{-1})$.

Sposoby obliczania macierzy odwrotnej

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ znajdź macierz odwrotną.

Sposoby obliczania macierzy odwrotnej

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ znajdź macierz odwrotną.

- $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Sposoby obliczania macierzy odwrotnej

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ znajdź macierz odwrotną.

- $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
- $(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_1/-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_2+w_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_2/2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_1+2w_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Interpretacja graficzna odwracania macierzy

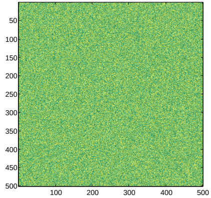
1.
```
n = 500;
A = rand(n);
imagesc(A);
colormap(summer);
axis square;
```

2.
```
B = inv(A);
figure
imagesc(B);
colormap(summer);
axis square;
```

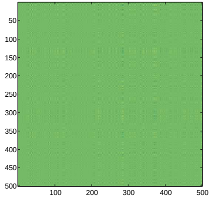
3.
```
figure
imagesc(A*B);
colormap(summer);
axis square;
```

Interpretacja graficzna odwracania macierzy

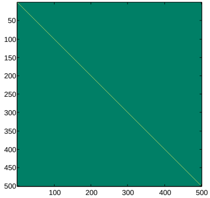
A



$B = inv(A)$



$A \cdot B$



Macierz ortogonalna

Macierz Q jest macierzą ortogonalną jeśli spełnia relację:

$$Q^T = Q^{-1}, \text{ lub } QQ^T = Q^TQ = E$$

Własności macierzy ortogonalnych:

- macierz transponowana i macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej jest macierzą ortogonalną,
- wyznacznik macierzy ortogonalnej: $det(Q) = \pm 1$,
- iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną

Macierz ortogonalna

Macierz Q jest macierzą ortogonalną jeśli spełnia relację:

$$Q^T = Q^{-1}, \text{ lub } QQ^T = Q^TQ = E$$

Własności macierzy ortogonalnych:

- macierz transponowana i macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej jest macierzą ortogonalną,
- wyznacznik macierzy ortogonalnej: $det(Q) = \pm 1$,
- iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną

Przykład

Przykład macierzy ortogonalnej - macierz obrotu: $Q = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Macierz ortogonalna - przykład

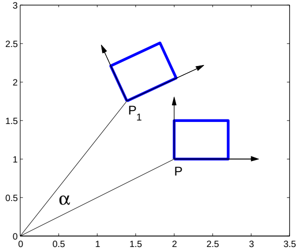
Niech będzie dany obiekt posiadający punkt zaczepienia $\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ chcemy go obrócić o kąt $\alpha = 25$ względem początku układu współrzędnych.

Wykorzystując macierz obrotu $R = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$ otrzymamy

$$\boxed{P_1 = R \cdot P = \begin{pmatrix} 1.2321 \\ 1.8660 \end{pmatrix}}$$

Mając punkt $P1$ oraz macierz obrotu R możemy znaleźć punkt pierwotny:

$$P = R^{-1} \cdot P_1 = R^T \cdot P_1$$



Macierze podobne

Macierze A i B nazywamy podobnymi jeśli są one powiązane zależnością:

$$AT = TB$$

gdzie: T jest dowolną macierzą nieosobliwą zwaną macierzą przejścia. Macierze podobne mają takie same wyznaczniki oraz widma.

Macierze podobne

Macierze A i B nazywamy podobnymi jeśli są one powiązane zależnością:

$$AT = TB$$

gdzie: T jest dowolną macierzą nieosobliwą zwaną macierzą przejścia.
Macierze podobne mają takie same wyznaczniki oraz widma.

Przykład

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad det(A) = -4, \quad det(B) = -4$$

Aksjomaty normy

Każdemu wektorowi $\underline{\boldsymbol{x}}$ i każdej macierzy A można przyporządkować liczbę $\|\underline{\boldsymbol{x}}\|$ (normę x) oraz $\|A\|$ (normę A).

Normy macierzy mają następujące własności:

- $\|A\| > 0, \quad A \neq 0; \quad \|A\| = 0, \quad A = 0$
- $\alpha\|A\| = |\alpha|\|A\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$

Normy na wektorach

Najczęściej stosowane normy wektora $\underline{\mathbf{x}} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^T$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

- Norma euklidesowa:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

  Wektor $\underline{\mathbf{x}}$ mający normę $\|\underline{\mathbf{x}}\|_2 = 1$ nazywamy wektorem jednostkowym.

- Norma maksimum:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

- Norma - suma wartości bezwzględnych współrzędnych:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Normy na macierzach

Najczęściej stosowane normy macierzy:

- Norma spektralna:

$$\|A\| = \|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}.$$

$\lambda_{max}(A^T A)$ - największa wartość własna macierzy $A^T A$.

- Norma wierszowa:

$$\|A\| = \|A\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Norma kolumnowa:

$$\|A\| = \|A\|_1 := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Matlab: norm()

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Macierz A nazywamy źle uwarunkowaną jeśli jej wyznacznik $det(A)$ jest bliski zeru. Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Macierz jest źle uwarunkowana jeśli wskaźnik uwarunkowania jest duży. W przeciwnym przypadku macierz jest dobrze uwarunkowana.

Matlab: cond()

Wyznacznik macierzy

Dowolnej macierzy A o wymiarze $n \times n$ można jednoznacznie przypisać liczbę zwaną wyznacznikiem tej macierzy:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik n-tego stopnia macierzy A definiujemy rekursywnie za pomocą rozwinięcia Laplace'a względem dowolnie wybranego wiersza lub kolumny macierzy A. Dla rozwinięcia względem elementów ustalonego wiersza i otrzymamy:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{a}_{ij}$$

gdzie: $\hat{a}_{ij}$ to algebraiczne dopełnienia elementów a_{ij} macierzy A.

$\boxed{\text{Matlab: det()}}$

Wyznacznik macierzy

Wyznaczniki stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego zdefiniowane są wzorami:

- $det(A) = |a_{11}| = a_{11}$
- $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- reguła Sarrusa

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} + \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{array}$$

Wyznacznik macierzy

Wyznaczniki wyższych rzędów możemy policzyć za pomocą rozwinięcia Laplace'a.
Rozwinięcie wyznacznika czwartego stopnia względem elementów trzeciego wiersza:

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&- a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&- a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Wyznacznik macierzy

Obliczenie wyznacznika z wykorzystaniem przekształceń elementarnych.

Wykorzystując własność: jeżeli macierz B powstaje z macierzy A przez pomnożenie wszystkich elementów pewnego wiersza (kolumny) przez liczbę α, to $det(B) = \alpha \cdot det(A)$,

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ wyznacznik wynosi:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(w_2 - w_1)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(w_3 - w_2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot \tfrac{7}{3}) = 7$$

Wyznacznik macierzy

Obliczanie wyznacznika n-tego stopnia macierzy A – algorytm Chio.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$det(A) = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

Obliczenie wyznacznika – algorytm Chio.

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ wyznacznik wynosi:

$$det(A) = \frac{1}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Minor

Minorem elementu a_{ij} wyznacznika stopnia n nazywamy wyznacznik stopnia $n-1$ macierzy powstałej przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Dopełnieniem algebraicznym $\hat{a}_{ij}$ elementu a_{ij} macierzy A jest mnożony przez czynnik $(-1)^{i+j}$ minor wyznaczony przez element a_{ij}.

Działania na wyznacznikach

Przy działaniach na wyznacznikach mają zastosowanie następujące reguły:

- $det(A) = det(A)^T$
- $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- przy zamianie miejscami dwóch wierszy znak wyznacznika zmienia się na przeciwny,
- jeśli w macierzy dwa wiersze (dwie kolumny) są identyczne , to wyznacznik tej macierzy wynosi zero,
- jeżeli macierz B powstaje z macierzy A przez pomnożenie wszystkich elementów pewnego wiersza (kolumny) przez liczbę α, to $det(B) = \alpha \cdot det(A)$,
- dodanie do wiersza (kolumny) macierzy kwadratowej wielokrotności innego wiersza (kolumny) nie zmienia wyznacznika tej macierzy.

Wybrane funkcje Matlaba

- ones() - tworzenie macierzy wypełnionej jedynkami,
- magic() – tworzenie "kwadratu magicznego" o zadanym wymiarze,
- rand() – tworzenie macierzy wypełnionej liczbami losowymi o rozkładzie równomiernym w przedziale $(0, 1)$,
- cat() – łączenie macierzy wzdłuż określonego wymiaru,
- horzcat() – łączenie macierzy poziomo (dodawanie kolumn),
- vertcat() – dołączanie macierzy pionowo (dodawanie wierszy),
- repmat() – wielokrotne powtórzenie macierzy pionowo i poziomo,
- blkdiag() – konstrukcja macierzy, w której kolejne macierze dołączane są diagonalnie,
- length() – największy z wymiarów macierzy,
- ndims() – ilość wymiarów,
- numel() – ilość elementów,
- size() – wymiary macierzy,

Wybrane funkcje Matlaba

- reshape() – zmiana wymiarów macierzy. W macierzy wynikowej elementy umieszczane są w kolejności indeksu liniowego macierzy wejściowej,
- rot90() – obrót macierzy w taki sposób, że ostatnia kolumna staje się pierwszym wierszem,
- fliplr() – obrót macierzy wokół osi pionowej,
- flipud() – obrót macierzy wokół osi poziomej,
- flipdim() – obrót macierzy wokół wybranej osi.