Lentes gravitacionales
en astrofísica y cosmología

Actividad Práctica 5

1. *Órdenes de magnitud*

a) Obtenga los valores típicos de ϕ/c^2 en galaxias y cúmulos de galaxias (observación: utilice las unidades apropiadas para ϕ, insertando valores de G si es necesario)

b) Obtenga los valores típicos de $(v/c)^2$ en galaxias y cúmulos de galaxias

c) El parámetro de Hubble generalmente se escribe en la forma $H_0 = 100\,h\,\mathrm{Km/s/Mpc}$. A partir de esta cantidad, obtenga el tiempo de Hubble $t_H = H_0^{-1}$, en segundos y en años (en términos de h). También podemos definir una distancia de Hubble mediante la relación $D_H = c/H_0$. Obtenga D_H en kilómetros y en megapársecs (Mpc).

Calcule t_H y D_H suponiendo que $h \simeq 0.7$.

d) La temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF) hoy es $T_0 = 2.725 \pm 0.002$. Recordando la ley de Stephan-Boltzmann (potencia por unidad de área: $P/A = \sigma T^4$, densidad de energía: $\rho = (4/c)\sigma T^4$) calcule i) la densidad de energía de los fotones de la RCF, ii) su densidad de masa (en $\mathrm{g/cm^3}$), iii) su densidad numérica (en cm^{-3}). Note que, para usar la ley de Stephan-Boltzmann, estamos suponiendo que los fotones de la RCF obedecen la distribución de Planck, lo cual se verifica experimentalmente con excelente precisión.

e) Obtenga la densidad crítica $\rho_{\mathrm{crit}} := 3H_0^2/8\pi G$ en $\mathrm{g/cm^3}$ en términos de h. En cosmología, es muy conveniente introducir los parámetros cosmológicos de densidad, definidos por la relación $\Omega_i = \rho_{i0}/\rho_{\mathrm{crit}}$, donde el índice i denota cada componente del contenido energético-material del universo. Calcule Ω_γ (parámetro de densidad de los fotones) en términos de h y para $h = 0.7$.

Observaciones: Los cosmólogos y físicos de partículas suelen utilizar convenciones donde $c = 1$, donde c es la velocidad de la luz (en el vacío). Inserte esta cantidad para obtener las dimensiones correctas en los ejercicios, cuando sea necesario.

El subíndice 0 generalmente denota cantidades calculadas "hoy", es decir, en la edad actual del universo.

En esta lista, por simplicidad, consideramos que toda la radiación está en forma de fotones, de modo que $\Omega_\gamma = \Omega_\mathrm{r}$ (en realidad los neutrinos contribuyen una parte importante de la densidad total bajo forma de radiación en el universo).

2. *Conservación de la energía y evolución de los componentes materiales*

   a) Escriba la ecuación de conservación de la energía usando el factor de escala a como variable:

   $$\frac{d\rho}{da} + (\rho + p)\frac{3}{a} = 0. \tag{1}$$

   Recordando que es válida para un fluido perfecto "adaptado" a las simetrías de un universo espacialmente homogéneo e isótropo.

   b) Resuelva la ecuación de conservación de la energía (1) para la ecuación de estado $p = w\rho$.

   Tip: $p \propto a^m$ puede ser un buen *Ansatz* para encontrar la solución.

   Observación: es fácil mostrar que, en general,

   $$\frac{a}{a_0} = \exp\left(-\frac{1}{3}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho + p}\right) = G(\rho),$$

   de modo que la solución siempre puede escribirse en la forma

   $$\rho = \rho_0 F\left(\frac{a}{a_0}\right), \tag{2}$$

   con $F(1) = 1$ (ya que, por construcción, $\rho(a_0) = \rho_0$). Naturalmente, F puede depender de una serie de parámetros de la ecuación de estado y también de ρ_0. La expresión (2) es muy conveniente para expresar el parámetro de Hubble, ya que la contribución de un componente i para (H/H_0) será dada simplemente por $\Omega_{i0}F_i\left(\frac{a}{a_0}\right) = \Omega_{i0}F_i(z)$. Obtenga F para el caso $p = w\rho$.

d) Muestre que para radiación ($p = \rho/3$), materia ($p = 0$) y "vacío" ($p = -\rho$), las soluciones son, respectivamente, $\rho_{\mathrm{r}} = \rho_{\mathrm{r}0}\left(a_0/a\right)^4$, $\rho_{\mathrm{m}} = \rho_{\mathrm{m}0}\left(a_0/a\right)^3$ y $\rho_{\mathrm{v}} = \rho_{\mathrm{v}0} = const.$

Utilice estos resultados en la ecuación de Friedmann (5), junto con las definiciones de los parámetros cosmológicos (parámetros de densidad y parámetro de Hubble), para obtener (en un universo compuesto por materia, radiación, curvatura y constante cosmológica):

$$H\left(a\right) = H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{r}}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{\mathrm{m}}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{\mathrm{K}}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda} \tag{3}$$

donde Ω_Λ puede denotar tanto la constante cosmológica, como un término del tipo energía de vacío, o una combinación de ambos.

3. *Soluciones de la ecuación de Friedmann*

Resuelva la ecuación de Friedmann para $k = 0$, $\Lambda = 0$ y un único fluido con ecuación de estado $p = w\rho$. Sugerencia: utilice un Ansatz $a\left(t\right) \propto t^n$. En el caso $w = -1$, ¿eso tiene sentido? ¿Cuál es la solución en este caso?

4. *Ecuación de Friedmann y parámetros de densidad*

Recordando que el parámetro de Hubble está dado por

$$H\left(t\right) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{4}$$

(donde a es el factor de escala y el punto denota la derivada temporal), utilice las definiciones de los parámetros de densidad, de la densidad crítica, junto con la ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\sum_i \rho_i + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \tag{5}$$

para obtener:

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1,$$

donde $\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H_0^2)$ y $\Omega_K = -K/(a_0^2 H_0^2)$. Incluyendo la constante cosmológica y la curvatura como "componentes de materia", tenemos simplemente $\sum_j \Omega_j = 1$ donde el índice j denota las componentes materiales (bariones, materia oscura, fotones, etc.), la curvatura y la constante cosmológica.