

LENTES GRAVITACIONALES EN ASTROFÍSICA Y COSMOLOGÍA

SEMANA - 13

PARTE III:

LENSING A NIVEL COSMOLOGICO

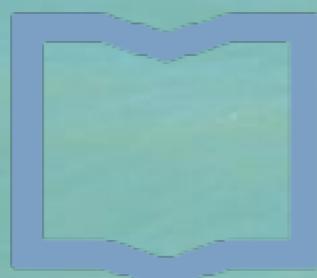
MARTÍN MAKLER

ICAS/IFICI/CONICET&UNSAM Y CBPF

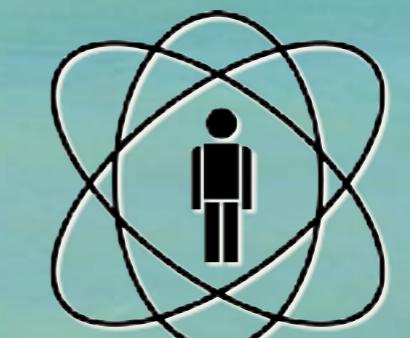
ICAS



CONICET



Instituto de
Ciencias Físicas
ICIFI-ECYT_UNSAM-CONICET



CBPF

ESTRUCTURA GENERAL DE LA MATERIA

Parte III: lensing a nivel cosmológico

[perturbaciones, week lensing]

- ❑ Revisión de cosmología: formación y distribución de las de estructuras en el Universo
- ❑ Mas allá del plano único: lentes y estructura en gran escala
- ❑ Estadísticas de *lensing*
- ❑ *Lensing* de la radiación cósmica de fondo

El domínio de la estadística

- No solo a nivel de la cantidad de datos y de la medida estadística de las formas
- Observables típicamente estadísticos:
 - estimadores conectados a correlaciones
- Función de correlación:
 - espacio real, más directamente relacionado con las observaciones
(aunque espacio de redshift, distorsiones, etc).
- Espacio de Fourier:
 - relacionado al espectro primordial (modelos/teoría)
 - desacople entre modos

El Universo heterogéneo: Fluctuaciones en todas las escalas

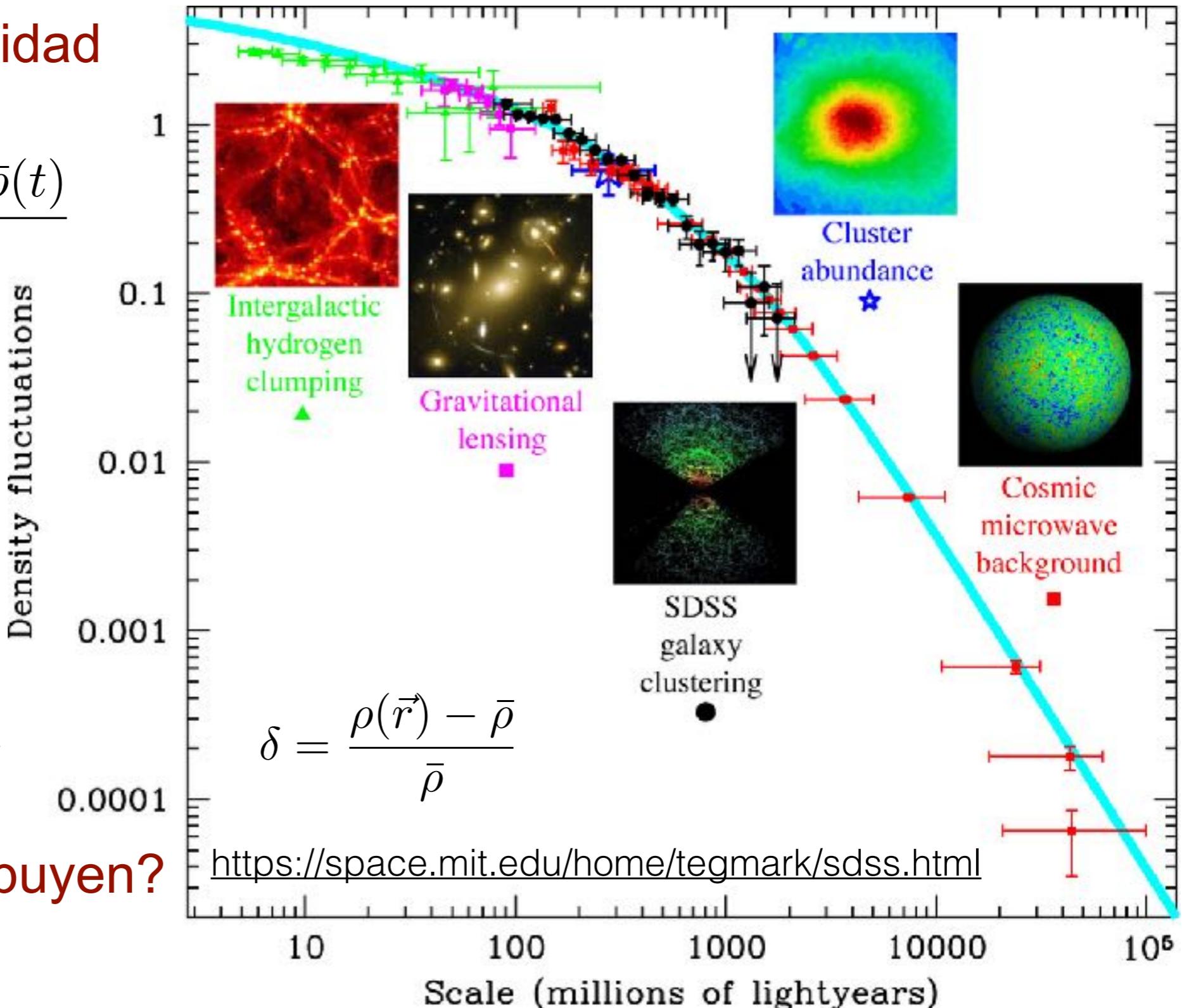
- contraste de densidad de la materia

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$$

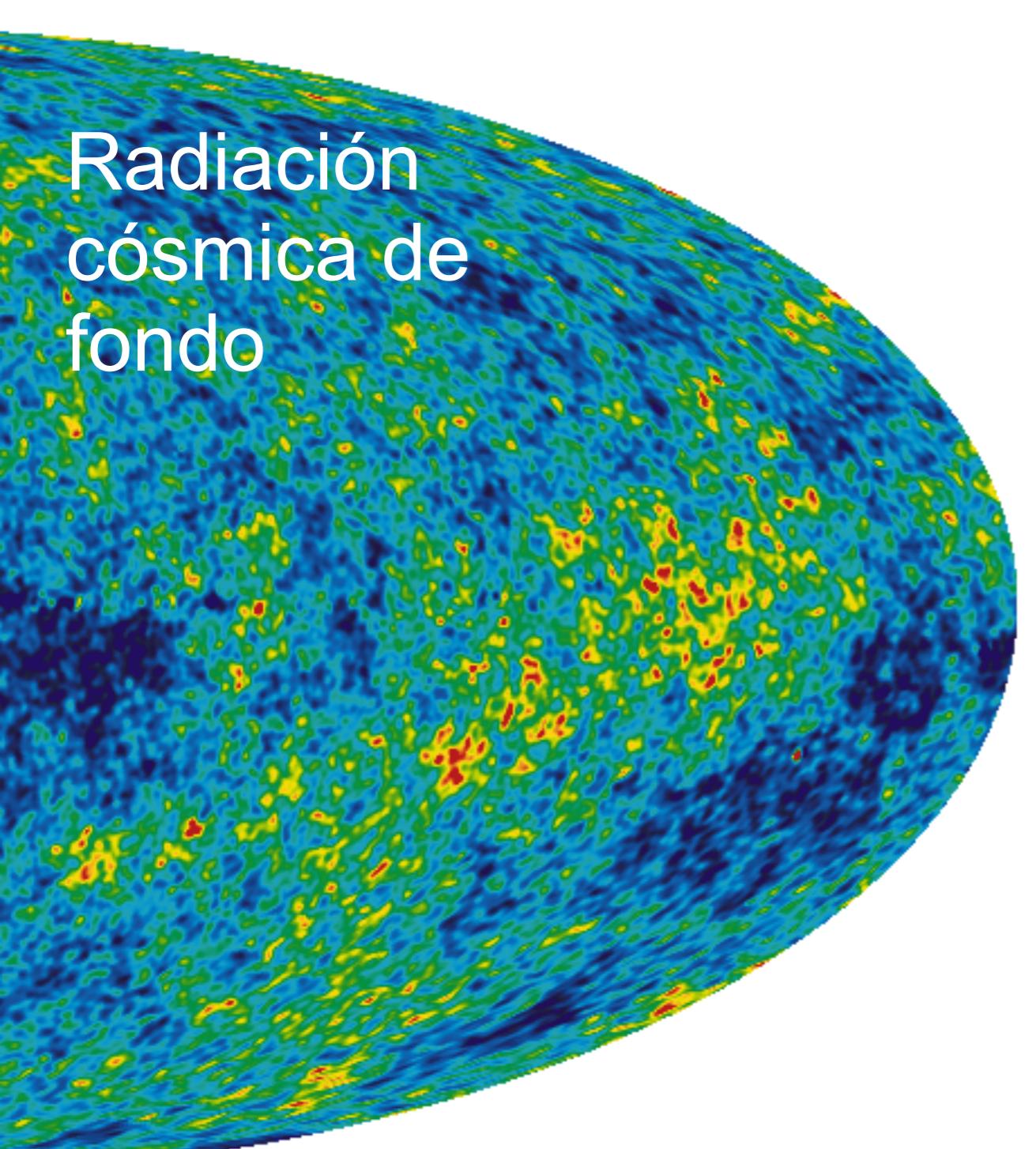
- En el mundo real: contraste de densidad numérica

$$\delta_{obs}(\vec{r}) = \frac{n(\vec{r}) - \bar{n}(\vec{r})}{\bar{n}(\vec{r})}$$

- ¿Cómo se distribuyen?
¡Estadística!



¿Cómo se formaron las estructuras?



Fluctuaciones $\sim 10^{-4}$

Fluctuaciones $\sim 10^3$

Límite newtoniano y teoria de perturbación relativista

- Teoria de perturbación cosmológica: métrica de Robertson-Walker perturbada

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}^{(1)} \right] dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j + h_{\mu\nu}(\vec{x}, \tau) dx^\mu dx^\nu \right], \end{aligned}$$

- Modos tensoriales, vectoriales y escalares
- Desacople entre los modos en el regimen lineal
- Perturbaciones escalares están asociadas a fluctuaciones de densidad:

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-(1 + 2\Psi) d\tau^2 + (1 - 2\phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \right]$$

(para um fluido perfecto $\Phi = \Psi$)

- Nuevamente, límite newtoniano para $\frac{\phi}{c^2} \ll 1$ $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$
- Fluctuaciones de densidad:

$$\rho(\vec{x}, \tau) = \bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(\vec{x}, \tau)$$

Ecuaciones cosmológicas “de fluidos”

- Perturbación (lineal o no) en la densidad: $\delta = \frac{\rho(z, \vec{x}) - \bar{\rho}(z)}{\bar{\rho}(z)}$
- Conservación de la masa (continuidad):

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \vec{\nabla}_x \cdot [(1 + \delta) \vec{v}] = 0$$

- Conservación del momentum (Euler):

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\vec{\nabla}_x \tilde{\phi} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_x p$$

- Ecuación de Poisson cosmológica:

$$\nabla_x^2 \tilde{\phi} = 4\pi G a^2 \bar{\rho}(\tau) \delta(\vec{x}, \tau)$$

Perturbación total de densidad: $\bar{\rho}_{\text{tot}} \delta_{\text{tot}} = \sum_B \bar{\rho}_B \delta_B$

Regimen perturbativo

- Perturbaciones lineales (en la densidad!): $\delta = \frac{\rho(z, \vec{x}) - \bar{\rho}(z)}{\bar{\rho}(z)}$
- Conservación de la masa (continuidad): $\ll 1$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \vec{\nabla}_x \cdot [(1 + \delta) \vec{v}] = 0$$

velocidad peculiar

- Conservación del momentum (Euler):

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\vec{\nabla}_x \tilde{\phi} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_x p$$

potencial peculiar

- Ecuación de Poisson cosmológica:

$$\nabla_x^2 \tilde{\phi} = 4\pi G a^2 \bar{\rho}(\tau) \delta(\vec{x}, \tau)$$

Perturbación total de densidad: $\bar{\rho}_{\text{tot}} \delta_{\text{tot}} = \sum_B \bar{\rho}_B \delta_B$

Fluctuaciones lineares

- Perturbaciones lineales (en la densidad!): $\delta = \frac{\rho(z, \vec{x}) - \bar{\rho}(z)}{\bar{\rho}(z)} \ll 1$
- Conservación de la masa (continuidad):

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \vec{\nabla}_x \cdot [(1 + \delta) \vec{v}] = 0$$

- Conservación del momentum (Euler):

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\vec{\nabla}_x \tilde{\phi} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_x p$$

- Ecuación de Poisson cosmológica: $\nabla_x^2 \tilde{\phi} = 4\pi G a^2 \bar{\rho}(\tau) \delta(\vec{x}, \tau)$
- Combinando las dos ecuaciones

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta + c_s^2 \nabla^2 \delta$$

- donde $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ (fluctuaciones adiabáticas)

Critério de Jeans

- Equação de evolução das perturbações (adiabáticas):

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta + c_s^2 \nabla^2 \delta$$

- Espaço de Fourier:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = (4\pi G \bar{\rho} a^2 - k^2 c_s^2) \delta \equiv (k_J^2 - k^2) c_s^2 \delta ,$$

Número de onda de Jeans

$$k_J := \left(\frac{4\pi G \bar{\rho} a^2}{c_s^2} \right)^{1/2}$$

$$\delta = \delta \left(|\vec{k}|, \tau \right)$$

- Para $k > k_J$: oscilações acústicas

Critério de Jeans

- Equação de evolução das perturbações (adiabáticas):

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta + c_s^2 \nabla^2 \delta$$

- Espaço de Fourier:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = (4\pi G \bar{\rho} a^2 - k^2 c_s^2) \delta \equiv (k_J^2 - k^2) c_s^2 \delta ,$$

- Para $k \ll k_J$ e matéria escura

- fatores de crescimento e decaimento

$$\delta_{\pm}(k, \tau) \rightarrow \delta(\vec{k}, \tau) = \delta_+(k, \tau) \delta_0^+(\vec{k}) + \delta_-(k, \tau) \delta_0^-(\vec{k})$$

Soluções

- Matéria escura fria (ou $k \ll k_J$)

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta$$

- Era dominada pela matéria $a \propto \tau^2$

$$\ddot{\delta} + \frac{2}{\tau}\dot{\delta} = \frac{6}{\tau^2}\delta$$

- Soluções

$$\delta_+ \propto \tau^2 \propto a \quad \text{e} \quad \delta_- \propto \tau^{-3}$$

Importância na formação de estruturas

Caso geral, usar $a(t)$ de Friedmann, modos cres e decresc

Papel da Matéria Escura

- Equação de evolução das perturbações (adiabáticas):

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta + c_s^2 \nabla^2 \delta$$

- Espaço de Fourier:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = (4\pi G \bar{\rho} a^2 - k^2 c_s^2) \delta \equiv (k_J^2 - k^2) c_s^2 \delta ,$$

- Para $k \ll k_J$, matéria escura é “força externa”

$$\ddot{\delta}_{ME} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_{ME} = 4\pi G a^2 (\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME}) \simeq 4\pi G a^2 \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME},$$

$$\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_b = 4\pi G a^2 (\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME}) \simeq 4\pi G a^2 \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME}.$$

Papel da Matéria Escura

- Equação de evolução das perturbações (adiabáticas):

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta + c_s^2 \nabla^2 \delta$$

- Espaço de Fourier:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = (4\pi G \bar{\rho} a^2 - k^2 c_s^2) \delta \equiv (k_J^2 - k^2) c_s^2 \delta ,$$

- Para $k \ll k_J$, matéria escura é “força externa”

solução:
$$\delta_b = \delta_{ME} \left(1 - \frac{b}{a(\tau)} \right)$$

Resultados da análise linear

Necessidade de Matéria Escura

- Matéria bariônica: só pode se aglomerar depois de $t_{\text{dec}} (\sim 380.000 \text{ anos})$ e para $r > \lambda_J$
- CDM se aglomera a partir de $t_{\text{eq}} (\sim 56.000 \text{ anos})$
- Bárions seguem os poços de potencial da matéria escura

Amplitude das Flutuações

- Solução geral para perturbações lineares

$$\delta(\vec{x}, \tau) = \int A_+(\vec{k}) \delta_+(k, \tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k + \int A_-(\vec{k}) \delta_-(k, \tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k$$

- Para $k \ll k_J$, δ_- decai rapidamente
- As propriedades estatísticas de $A_+(\vec{k})$ são codificadas no espectro de potência e determinar sua forma e amplitude é um problema fundamental da cosmologia

Resumo da evolução das perturbações

- 5 modos de perturbação
- Modos isentrópicos (adiabáticos): duas soluções
 - para $k > k_J$ oscilações acústicas
 - para $k < k_J$ modos crescente e decrescente
- Perturbações de isocurvatura: evoluem como adiabáticos
- Vorticidade (2 componentes): não acopla com as outras perturbações, decai com a^{-1} no caso isentrópico
- Geralmente considera-se apenas o modo crescente

Resumo da evolução das perturbações

- 5 modos de perturbação
- Modos isentrópicos (adiabáticos): duas soluções
 - para $k > k_J$ oscilações acústicas
 - para $k < k_J$ modos crescente e decrescente
- Isocurvatura: evoluem como adiabáticos
- Vorticidade: não acopla com as outras perturbações, decai com a^{-1} no caso isentrópico
- Geralmente considera-se apenas o modo crescente

$$\delta(\vec{x}, \tau) = \int A_+(\vec{k}) \delta_+(k, \tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k + \int A_-(\vec{k}) \delta_-(k, \tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k$$

Estatística: Função de Correlação

- Função de correlação (de 2 pontos)

$$\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) := \langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \rangle \quad \delta = \frac{\rho(z, \vec{x}) - \bar{\rho}(z)}{\bar{\rho}(z)}$$

- Homogeneidade e isotropia estatística

$$\xi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \xi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \xi(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = \xi(x)$$

- Número esperado de pares unindo pontos entre dois volumes δV_1 e δV_2

$$\langle n_{\text{pares}} \rangle = \bar{n}^2 [1 + \xi(r)] \delta V_1 \delta V_2$$

→ número médio de galáxias por unidade de volume

Aumento da aglomeração a uma distância r , relativo a uma distribuição uniforme (se $\xi = 0$ número de pares é o produto do número de objetos em cada volume V)

Estatística: Função de Correlação e Espectro de Potência

- Função de correlação (de 2 pontos)

$$\langle \delta(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_2) \rangle = \xi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \xi(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = \xi(x)$$

- Espectro de potência: transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \langle \delta(\vec{k}) \delta^*(\vec{k}') \rangle &= \left\langle \int d^3r e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\vec{r}) \int d^3x e^{-i\vec{k}' \cdot (\vec{r} + \vec{x})} \delta(\vec{r} + \vec{x}) \right\rangle \\ &= \int d^3r e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \underbrace{\langle \delta(\vec{r}) \delta(\vec{r} + \vec{x}) \rangle}_{\xi(x)} \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P(k), \end{aligned}$$

Estatística: Função de Correlação e Espectro de Potência

- Espectro de potência: mais diretamente relacionado com as previsões teóricas
- Função de correlação: mais diretamente ligada com os dados
- Em tese carregam a mesma informação. No mundo ideal:

$$P(k) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \xi(x) = 4\pi \int dx x^2 \sin(kx) \xi(x)$$

- Se o campo possui uma distribuição de probabilidade gaussiana toda a informação está codificada em $\xi(r)$ ou $P(k)$

Estrutura em Grande Escala (EGE)

Estatística: Função de Correlação

- Contraste de densidade:

$$\delta_{obs}(\vec{r}) = \frac{n(\vec{r}) - \bar{n}(\vec{r})}{\bar{n}(\vec{r})}$$

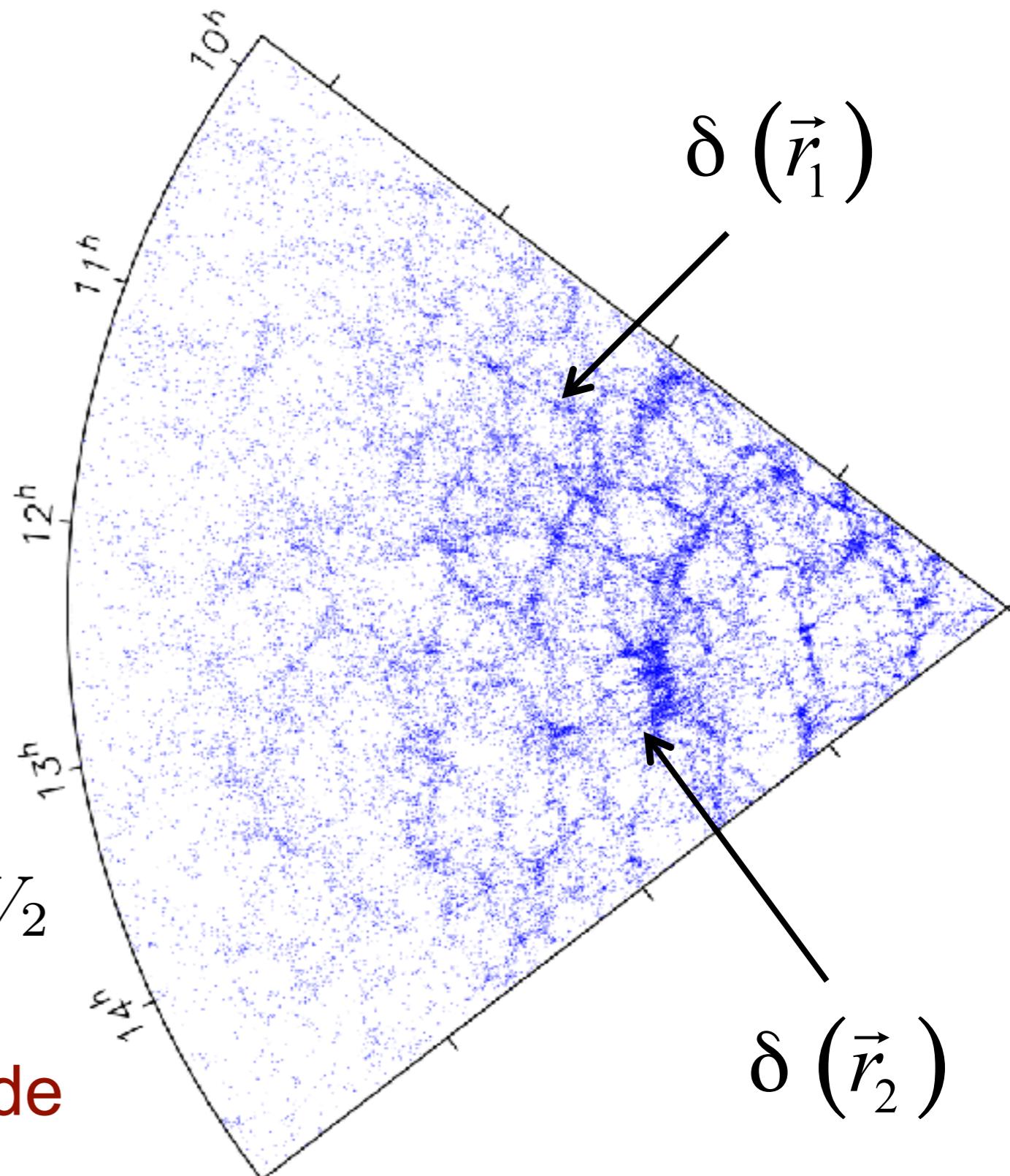
- Função de correlação:

$$\xi(\vec{r}_{12}) = \langle \delta(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_2) \rangle$$

- Sobredensidade de pontos próximo de uma partícula aleatória

$$\langle n_{\text{pares}} \rangle = \bar{n}^2 [1 + \xi(r)] \delta V_1 \delta V_2$$

- Definição usada na prática para estimar essa quantidade



Estrutura em Grandes Escalas: Linear

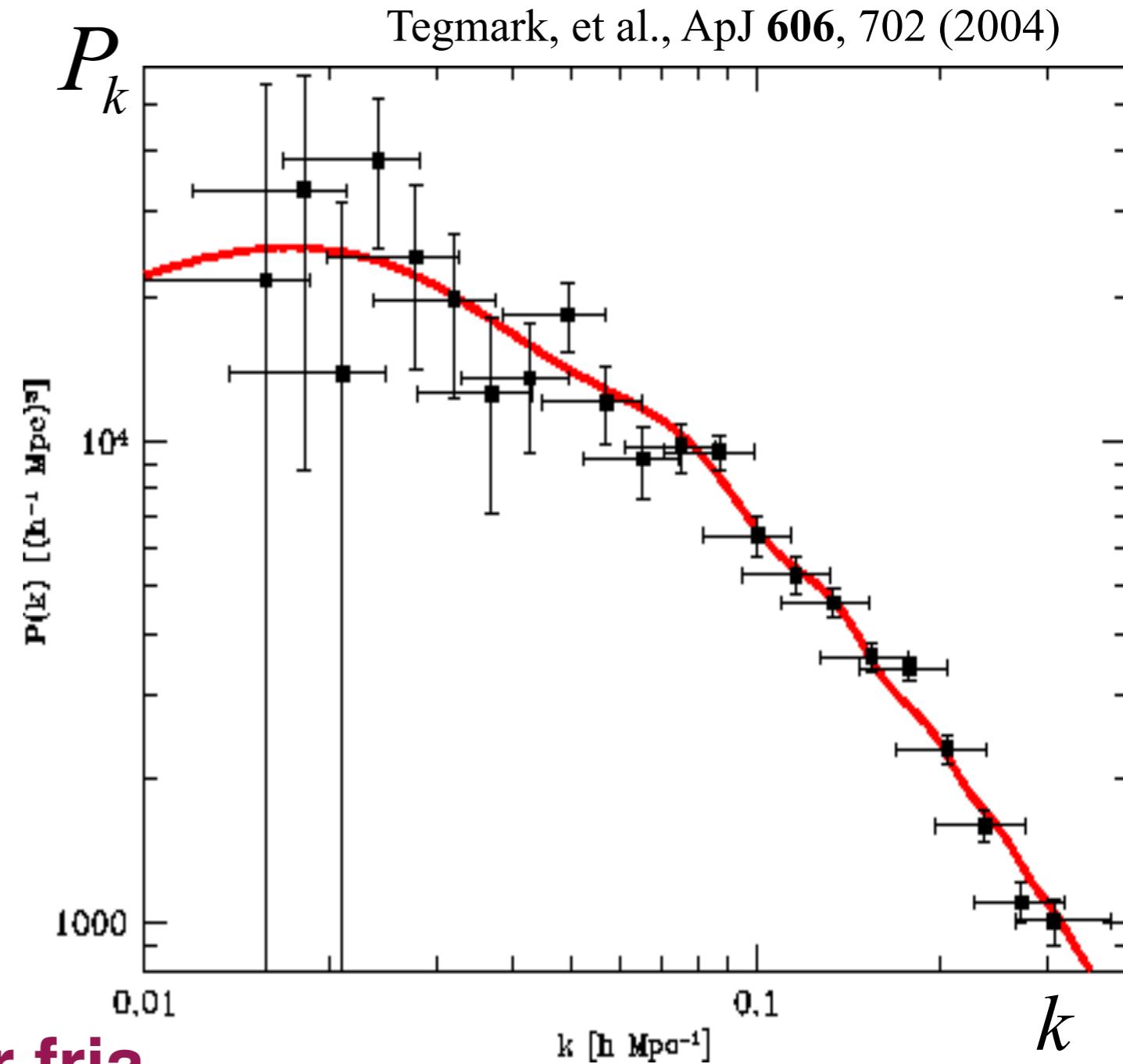
Espectro de Potência:

- Forma das flutuações primordiais
- Matéria escura
- Massa dos neutrinos
- Quantidade de bárions

Exemplo (do SDSS):

$$\Omega_m = 0.30 \pm 0.03$$

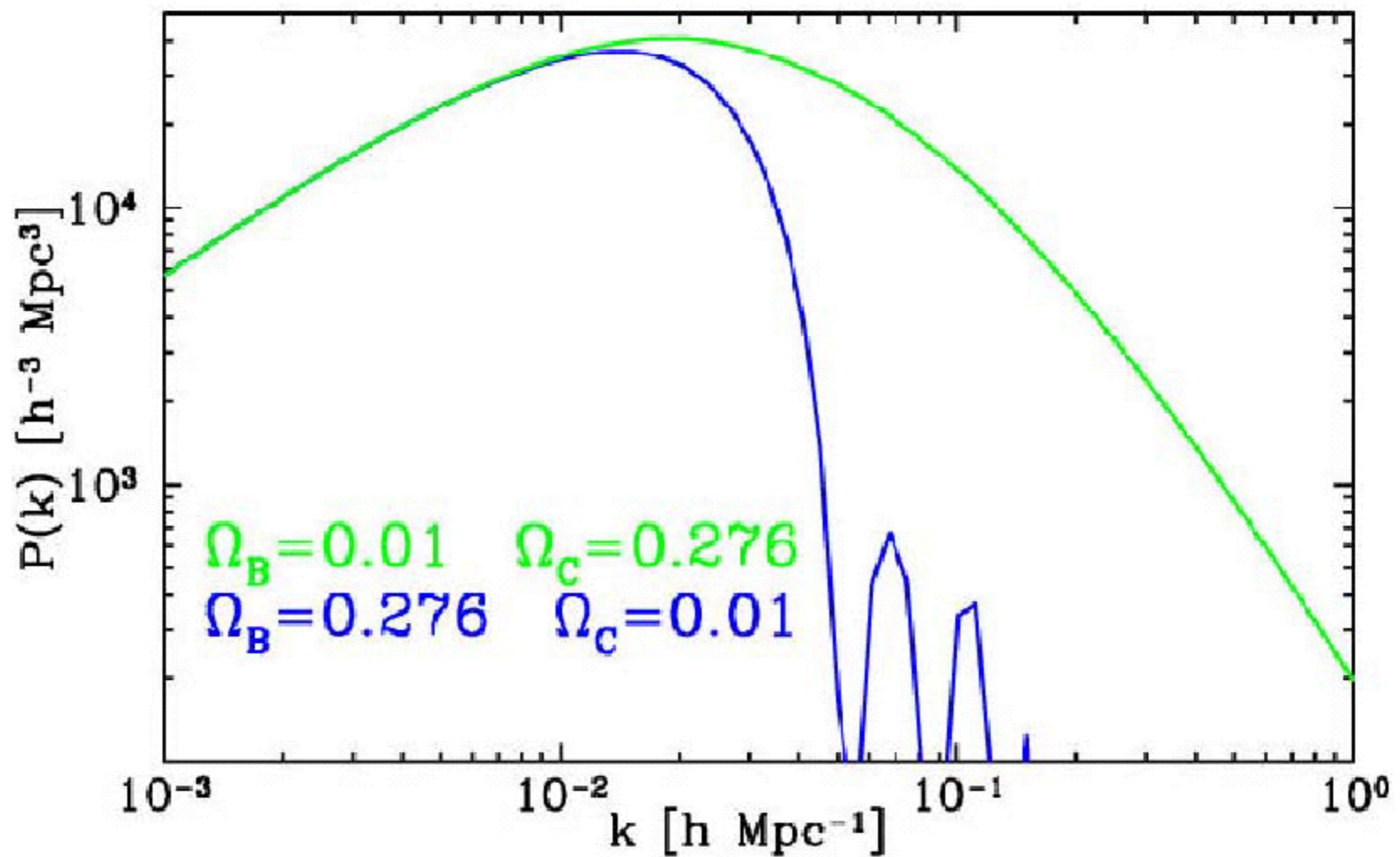
**Matéria escura precisa ser fria
(pequeno livre caminho médio)**



205.443 galáxias do SDSS

Resultados da análise linear

Necessidade de Matéria Escura



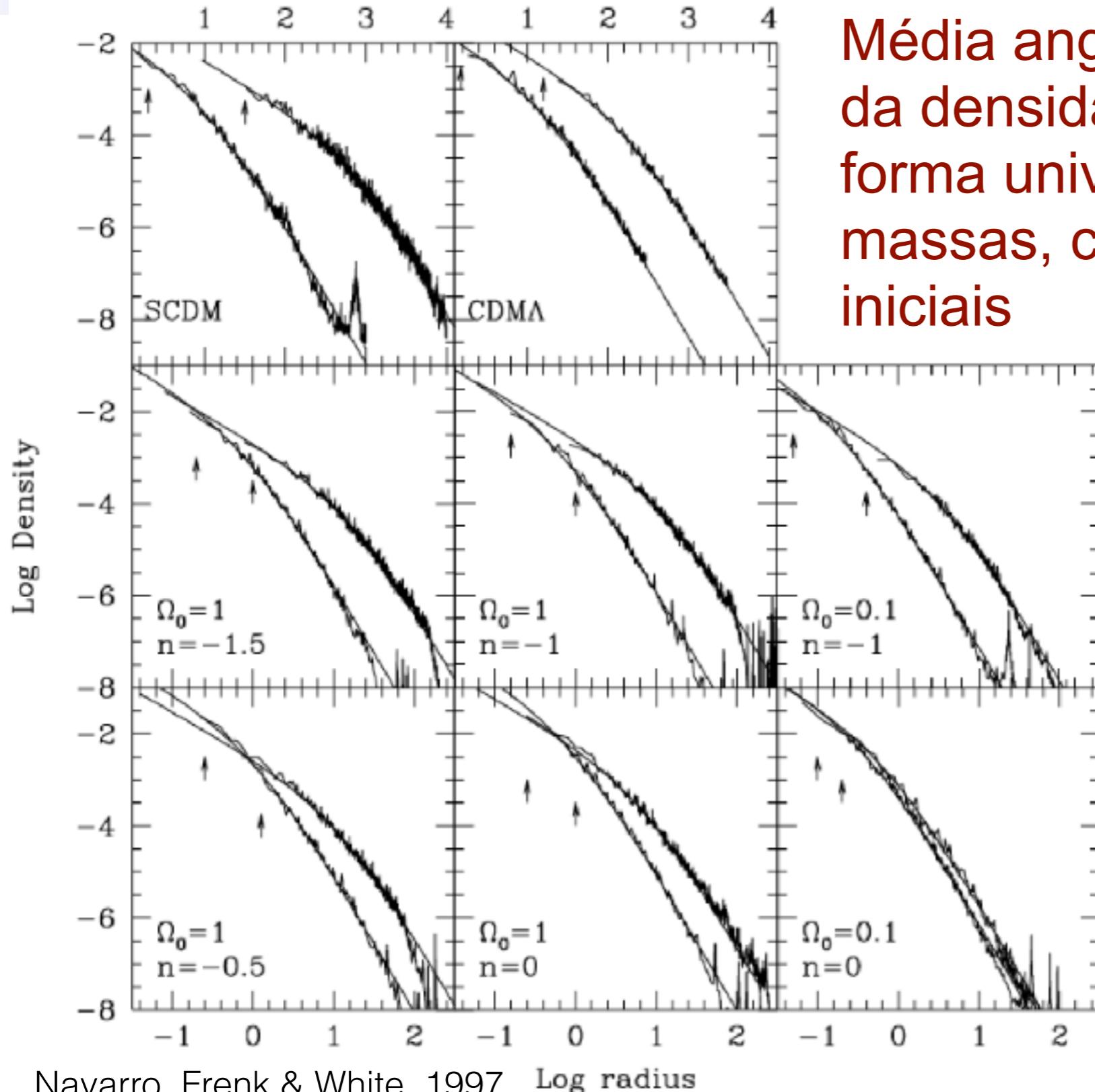
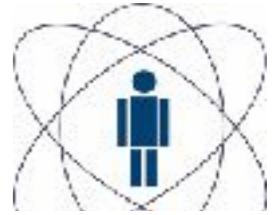
Aspectos del mundo real

- No medimos directamente la materia (campo continuo), sino que contamos galaxias.
- Catálogos de galaxias, discretización, sesgo b : $\delta_M = b \delta_g$
- El espectro de potencia **no** es la transformada de Fourier de la función de correlación: incompletitud (agujeros, etc.)
- Mediciones en el espacio de *redshift*
- Los catálogos tienen densidad variable en *r/z* (magnitud límite, etc.), agujeros y tamaño finito
- Estimadores estadísticos
- Barras de error (Poisson, variancia cósmica, etc.).
- ¡Correlacionadas! ("barras de error" solo para visualización).
- Todo puede ser tenido en cuenta...

Mas allá de la evolución lineal

- Simulaciones computacionales
- Mayores escalas:
 - Solo interacciones gravitacionales: Vlasov/N-cuerpos
- Pequeñas escalas, formación de galáxias:
 - Hidrodinámicas, con toda la “gastrofísica” (incluyendo feedback de SN, AGN, química y termodinámica, magneto-hidrodinámica, etc.)
- Muy costosas computacionalmente, no se pueden hacer para muchas cosmologías
- Relaciones empíricas, combinadas con motivaciones teóricas: permiten interpolar los resultados de simulaciones para modelos e parámetros cosmológicos
- Ejemplo: modelo de halos (galáxias y cúmulos de galáxias)
 - Distribución de halos (espacial+masa) + estructura interna

Perfis (radiais) de densidade



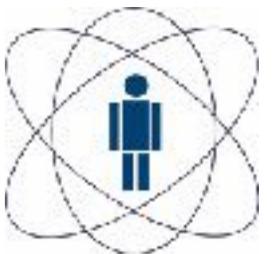
Média angular (cascas esféricas) da densidade em halos possui uma forma universal para diferentes massas, cosmologias e condições iniciais

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}$$

Pode ser expresso em termos da massa M_Δ e da concentração $c = r_\Delta/r_s$

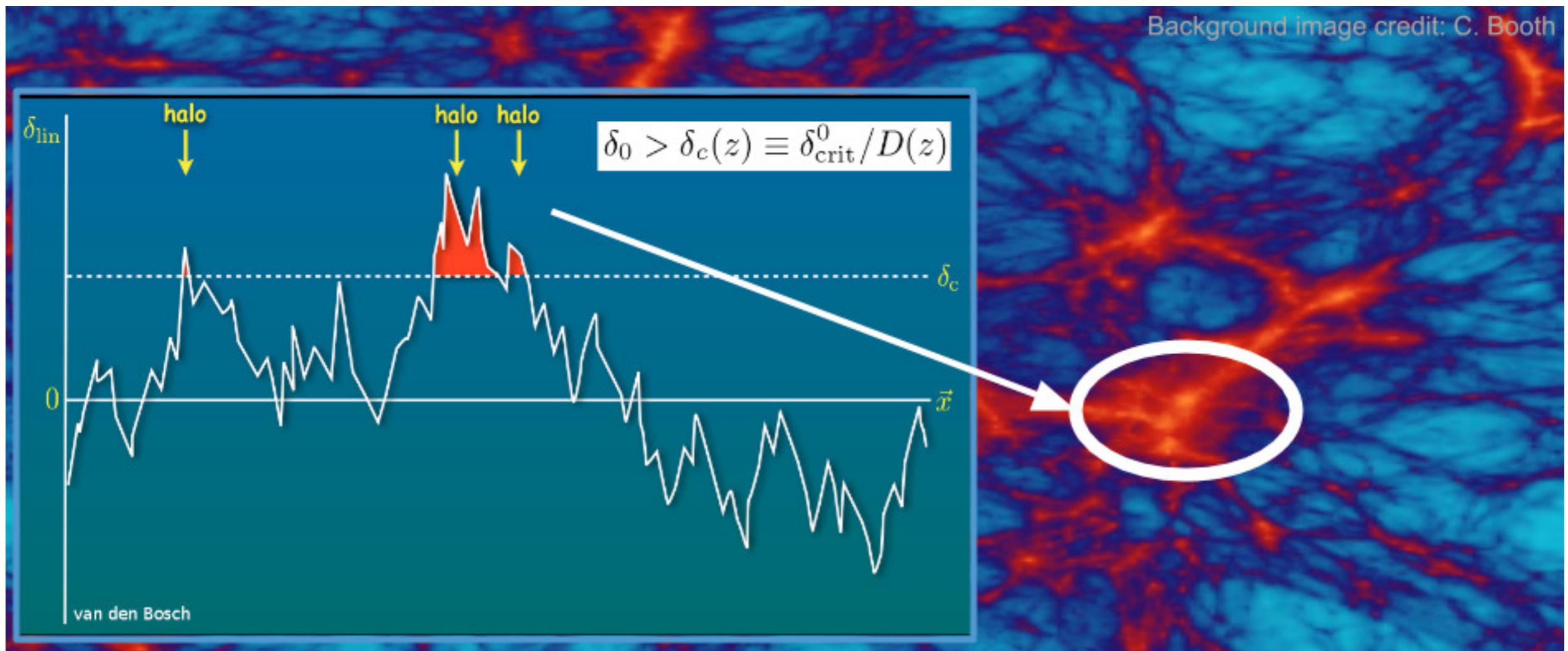
Valores dos parâmetros dependem da massa e da história de formação dos halos

Exercício: relações entre parâmetros e outras quantidades físicas



Press & Schechter (1974)

- Picos de densidade se tornarão estruturas virializadas



Aglomerados de Galáxias e Energia Escura

- Função de Massa:

$$\frac{d^2N}{dzd\Omega}(z) = \frac{d^2V}{dzd\Omega}(z) n_{com}(z) = \frac{c}{H(z)} D_A^2 (1+z)^2 F(D_z(z), \sigma_M)$$

- Sensível à Energia Escura!
- Medidas da massa em altos z :
 - $M > 2 \times 10^{14} M_\odot$: efeito SZ, weak lensing
 - $M < 2 \times 10^{14} M_\odot$: weak lensing, riqueza (estatístico)
- Espectro de potência de aglomerados: aglomeração de aglomerados e viés
- Erros sistemáticos completamente independentes

Função de Massa

- Função de massa :

$$\frac{dn(M, z)}{d \ln M} = -\frac{\rho_m(z)}{M} f(\sigma_M, z) \frac{1}{\sigma_M} \frac{d\sigma_M}{d \ln M}.$$

- $f(\sigma_M, z)$ é a função multiplicidade *universal* a qual contém as informações do regime não linear.
- σ_M é o desvio padrão do contraste de densidade de matéria

$$\sigma^2(R, z) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 \underbrace{P(k, z)}_{\substack{\text{• Espectro de Potências} \\ \hbox{\hspace{100pt}} \uparrow}} \underbrace{|W(k, R)|^2}_{P(k, z) = A k^{n_s} T(k)^2 D(z)^2}$$

Função de Massa

- Função de massa :

$$\frac{dn(M, z)}{d \ln M} = -\frac{\rho_m(z)}{M} f(\sigma_M, z) \frac{1}{\sigma_M} \frac{d\sigma_M}{d \ln M}.$$

- $f(\sigma_M, z)$ é a função multiplicidade *universal* a qual contém as informações do regime não linear.
- σ_M é o desvio padrão do contraste de densidade de matéria

$$\sigma^2(R, z) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k, z) |W(k, R)|^2$$

- Espectro de Potências

$$P(k, z) = A k^{n_s} T(k)^2 D(z)^2$$

- Função Janela (Cartola)

$$W(k, R) = \frac{3}{(kR)^3} (\sin kR - (kR) \cos kR)$$

$$M_\Delta = \frac{4\pi}{3} \Delta \rho_{ref} R_\Delta^3$$

Função de Massa

A distribuição da abundância de aglomerados em função do desvio para o vermelho é dada por

$$\frac{dN}{dz} = \underbrace{A_{\text{survey}} \frac{c}{H(z)} \left(\int_0^z dz'' \frac{c}{H(z'')} \right)^2}_{\text{volume}} \int_{M_{\text{min}}}^{\infty} \underbrace{\frac{dn(M, z)}{d \ln M}}_{\text{função de massa}}.$$

- Função de Hubble:

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_{DE} (1+z)^{3(1+w_0+w_1)} e^{-3w_1 \frac{z}{1+z}} \right]^{1/2}$$

- considerando universo plano ($\Omega_k = 0$) e a equação de estado da energia escura

$$p = \left(w_0 + \frac{z}{1+z} w_1 \right) \rho.$$

Função de Massa

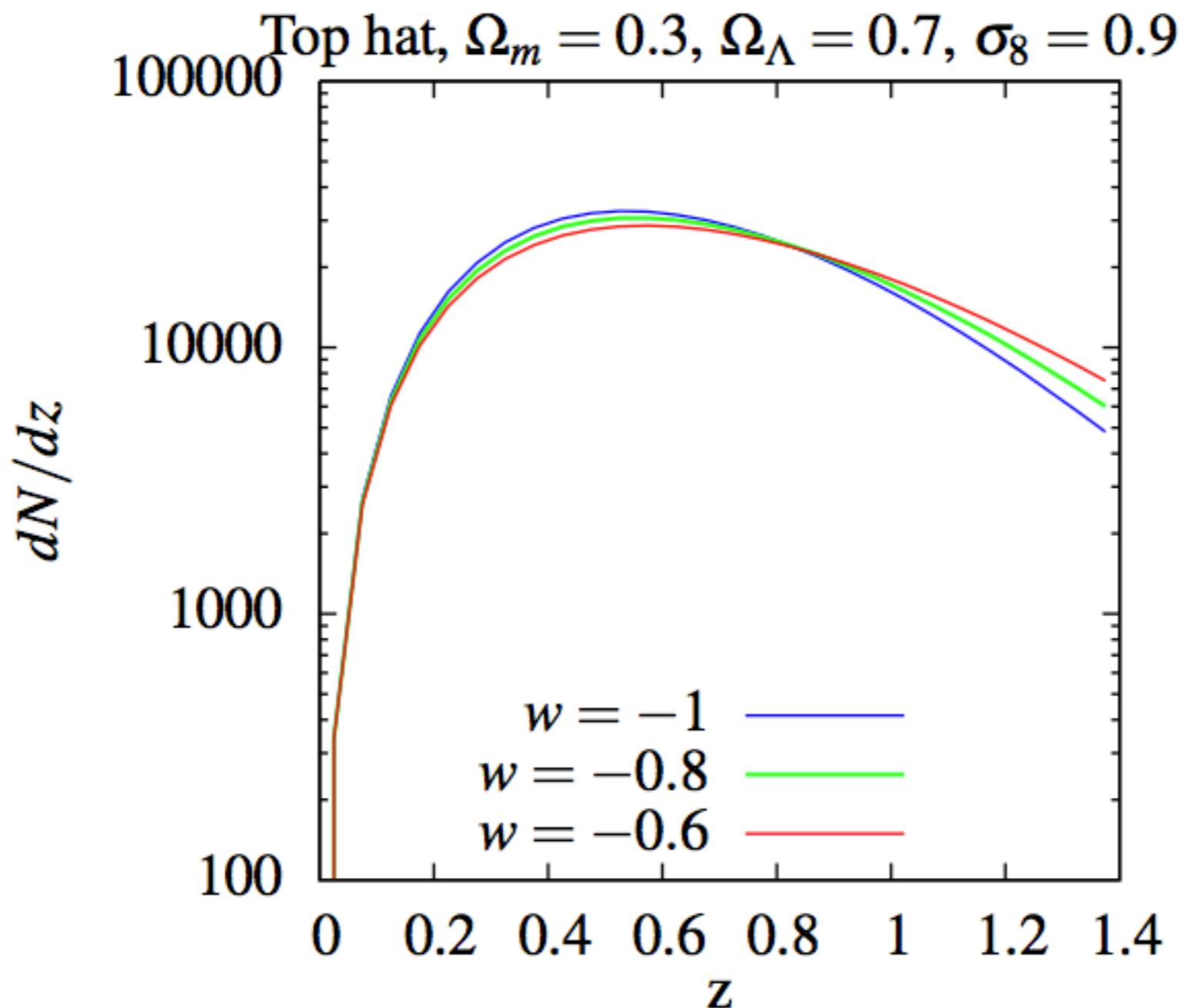
- usamos a função multiplicidade de Tinker et al. (2008) que foi obtida a partir de simulações de N-corpos, a saber,

$$f(\sigma_M(z), z) = A \left[\left(\frac{\sigma_M(z)}{b} \right)^{-a} + 1 \right] \exp(-c\sigma_M^{-2}(z)).$$

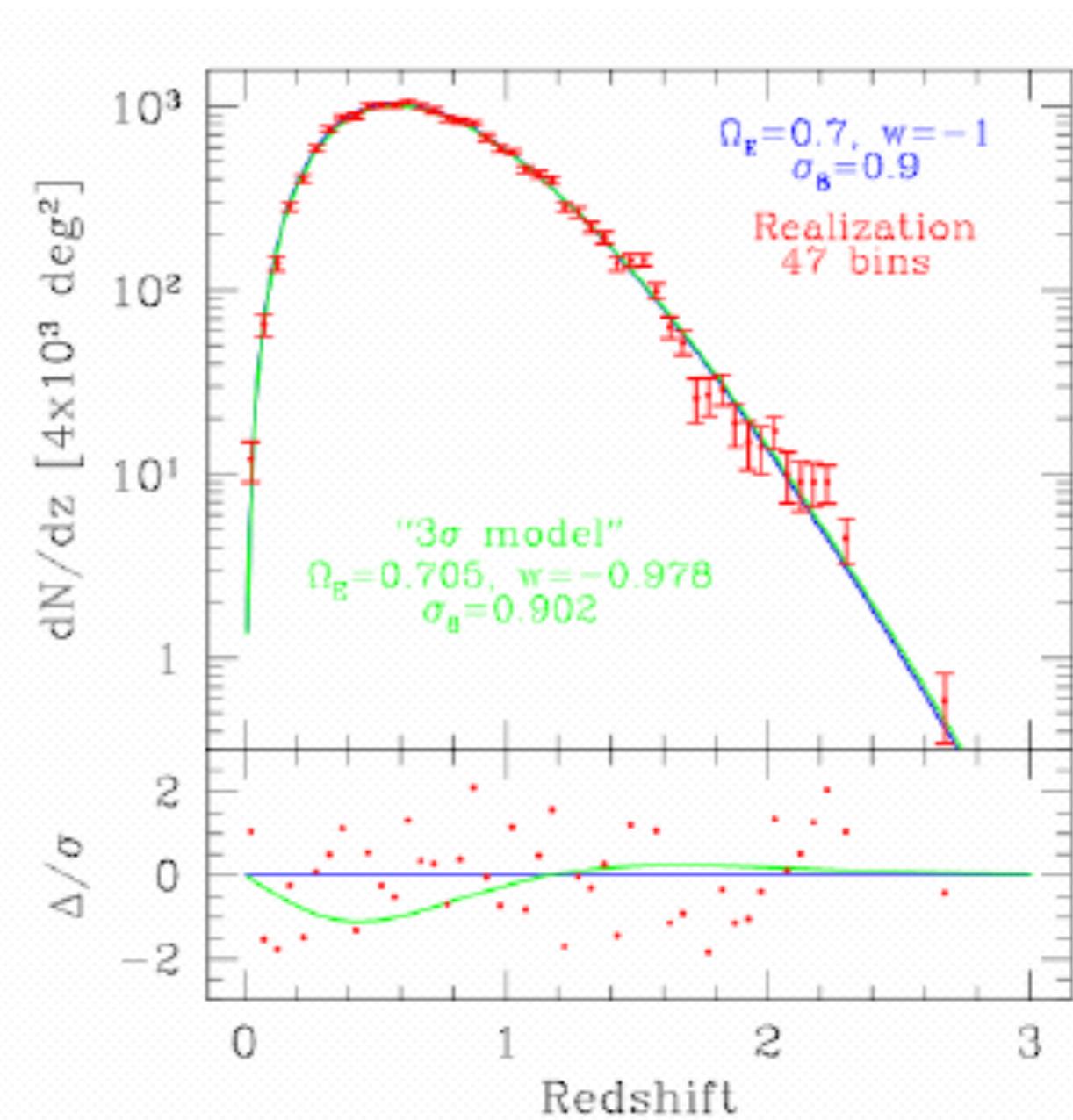
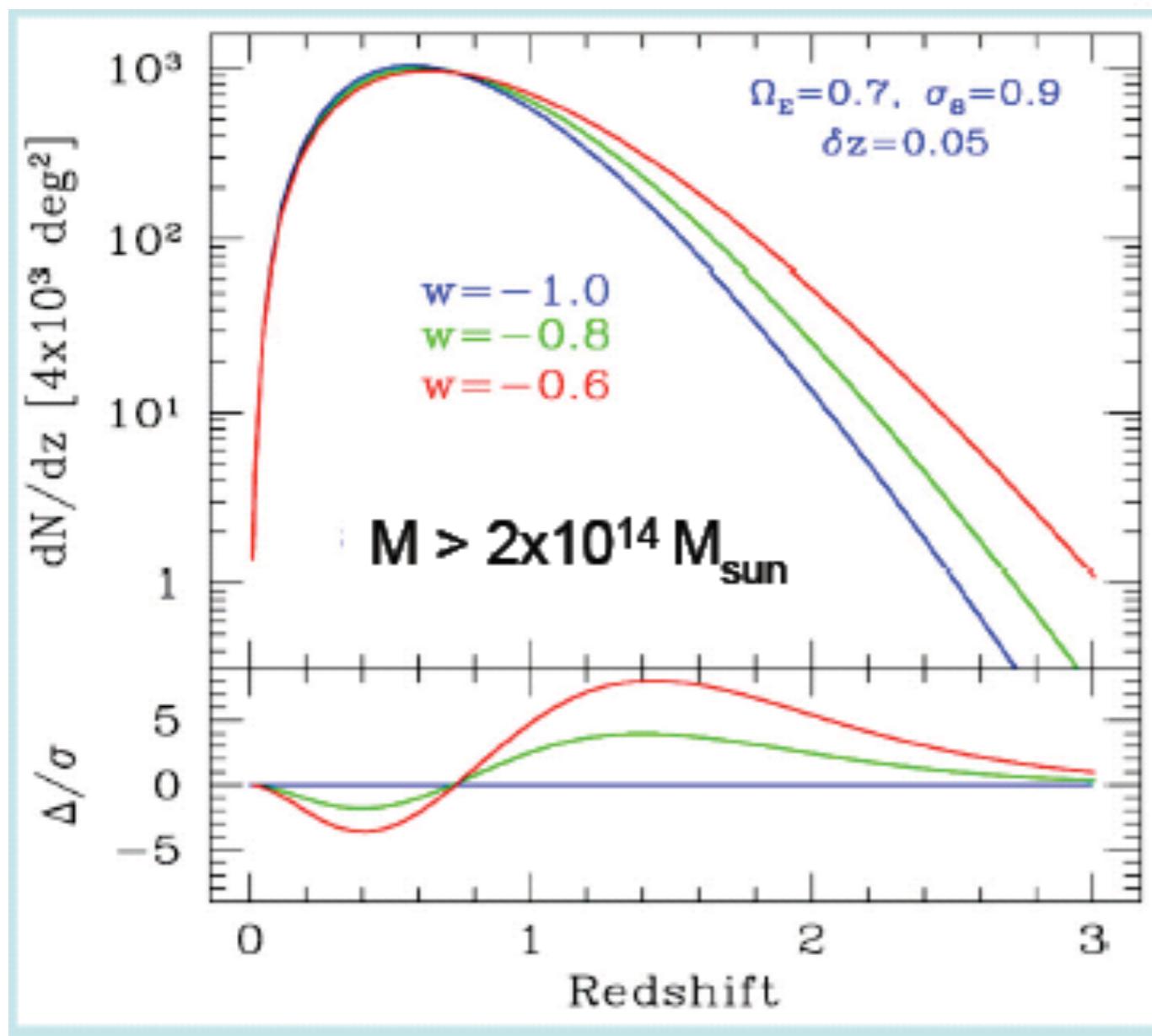
A abundância de aglomerados depende do modelo cosmológico através da **função de Hubble**, a partir do volume, e da **função crescimento** $D(z)$, já que $\sigma(M, z) = D(z)\sigma(M, 0)$.

Função de Massa

A abundância de aglomerados é sensível à equação de estado da energia escura.



Aglomerados de Galáxias e Energia Escura



Modeling the mass profile

Interpretation with the halo model: halos x galaxies correlation

- 1-halo term: matter density in the halo

Exemple: NFW $\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s) (1 + r/r_s)^2}$ compute $\Sigma(r)$

- 2-halo term: correlation with other halos
(large scale structure) $\rho(r) = b\bar{\rho}_m \xi(r)$ where

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} \quad b(\nu) = 1 - A \frac{\nu^a}{\nu^a + \delta_c^a} + B\nu^b + C\nu^c$$

$$\nu = \delta_c/\sigma(M) = 1.686/\sigma(M) \quad \sigma(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P(k, z) \hat{W}^2(k, R)$$

$$R = (3M/4\pi\bar{\rho}_m)^{1/3} \quad (\text{mass function, peak-background split})$$

- Term for the offset of the profile with respect to other center
- Central potential (central galaxy, e.g. SIS)

Back to weak lensing

2 Regimes and Methods

Lensing by galaxies and clusters

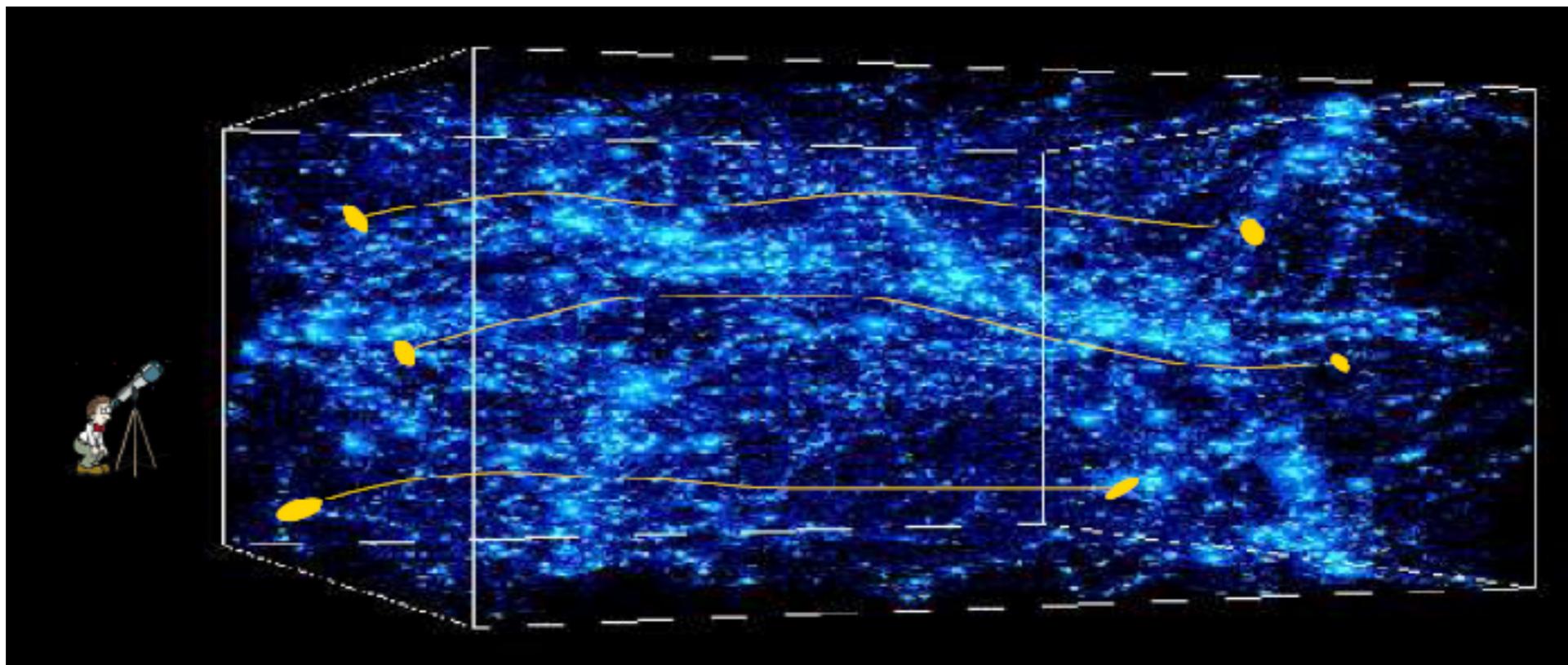
- Larger signal
- Center of reference
- Model/profile fitting
- Individual objects or *Stacking* of the signal

Large-scale structure

- Convergence maps (also in clusters)
- Correlations:
 - power spectrum, correlation function
 - among different probes, z-bins, CMB, etc.

Cosmic shear

- Large-scale structure of the Universe
- Tomography



Límite newtoniano y teoria de perturbación relativista

- Límite newtoniano: $\frac{\phi}{c^2} \ll 1$ e $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$
- Correcciones relativistas: formalismo pos-newtoniano (e.g. sistema solar)
- Teoria de perturbación cosmológica: métrica de Robertson-Walker perturbada

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}^{(1)} \right] dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j + h_{\mu\nu}(\vec{x}, \tau) dx^\mu dx^\nu \right], \end{aligned}$$

- Desacople entre los modos en el regimen lineal
- Perturbaciones escalares:

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-(1 + 2\Psi) d\tau^2 + (1 - 2\phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \right]$$

(para um fluido perfecto $\phi = \Psi$)

- Nuevamente, límite newtoniano para $\frac{\phi}{c^2} \ll 1$ $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$

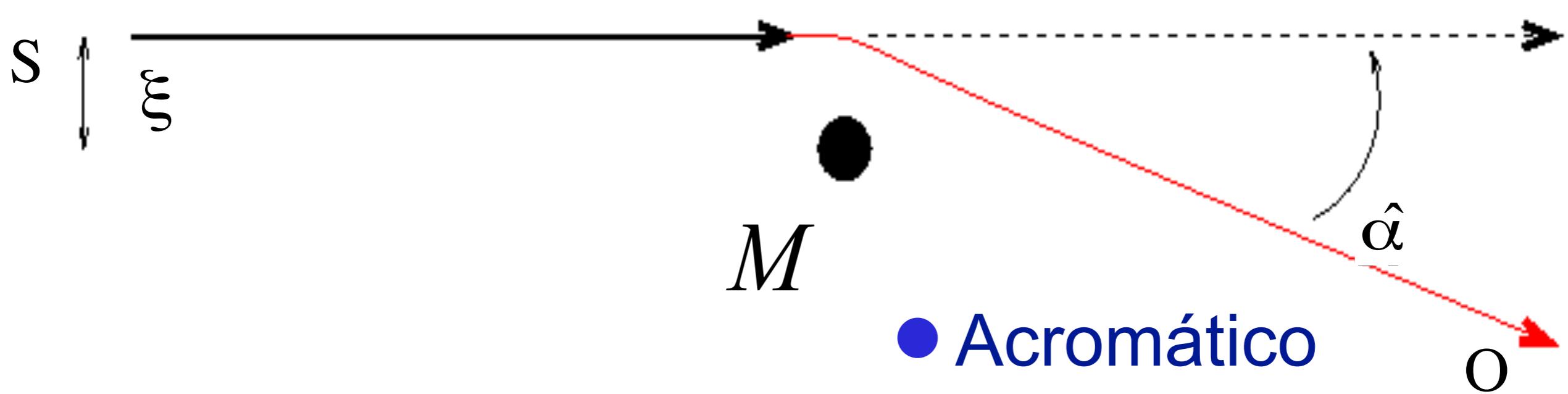
DESVIACIÓN DE LA LUZ POR LA GRAVEDAD

Geodésica nula,
Principio de Fermat

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) d\sigma^2$$

$$\frac{d\sigma}{dt} := c' = \sqrt{\frac{1 + 2\phi/c^2}{1 - 2\phi/c^2}} \simeq c \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$$

Parte espacial
de la métrica
de FLRW



Desvío causado
por una lente
puntual:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{\xi}$$

(factor 2 en
comparación con
“Newton”)

Space-time Geometry of the Homogeneous Universe

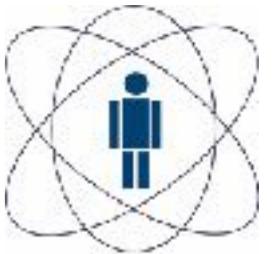
- Invariant: $ds^2 = dt^2 - (d\vec{x})^2$
- All scales expand with $a(t)$:

$$(d\vec{x})^2 = a^2(t)(d\vec{r})^2 = a^2(t) \left(\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right)$$

→
$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right)$$



Friedmann metric (Robertson-Walker)



Otros sistemas de coordenadas

- Forma “usual” de la métrica de FLRW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right)$$

- Forma más usada en lentes y otros contextos cosmológicos

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (d\chi^2 + F(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))$$

Lenteamento pela estrutura em grade escala: além da aproximação de lente fina

Métrica de Friedmann com perturbação escalar

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ (1 + 2\frac{\varphi}{c^2}) d\tau^2 - (1 - 2\frac{\varphi}{c^2}) [d\chi^2 + r^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \right\}$$

↑ geometria del fondo
(FLRW)

Equação de geodésica

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} = -g^{ik} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^m}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda}$$

Ângulo de desvio

$$\theta_\sigma(\chi) = \theta_\sigma^0 - \frac{2}{c^2} \int_0^\chi \frac{d\chi'}{r^2(\chi')} \int_0^{\chi'} d\chi'' \varphi_{,\sigma}(\vec{\theta}r(\chi''), \chi'')$$

↑ fonte ↑ lente

Funções de lente

Ângulo de desvio

$$\theta_\sigma(\chi) = \theta_\sigma^0 - \frac{2}{c^2} \int_0^\chi \frac{d\chi'}{r^2(\chi')} \int_0^{\chi'} d\chi'' \varphi_{,\sigma}(\vec{\theta} \vec{r}(\chi''), \chi'')$$

Se reduz a uma integral ao longo da trajetória do fóton

$$\theta_\sigma(\chi) = \theta_\sigma^0 - \frac{2}{c^2} \int_0^\chi d\chi' \varphi_{,\sigma}(\vec{\theta} \vec{r}(\chi'), \chi') \frac{r(\chi - \chi')}{r(\chi)r(\chi')}$$

Potencial de lente

$$\Psi = \frac{2}{c^2 r(\chi)} \int_0^\chi d\chi' \varphi(\vec{\theta} \vec{r}(\chi'), \chi') \frac{r(\chi - \chi')}{r(\chi')}$$

Convergência

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} \nabla_\theta^2 \Psi = \frac{1}{c^2} \int_0^\chi d\chi' \nabla_\perp^2 \varphi(\vec{x}_\perp, \chi') \frac{r(\chi - \chi') r(\chi')}{r(\chi)}$$