Lentes gravitacionales
en astrofísica y cosmología

Actividad Práctica 8

1. Retraso temporal gravitacional:

   El paso del tiempo se altera en presencia del campo gravitacional. Como consecuencia, al pasar por el campo gravitacional de la lente, la luz de la fuente tarda más tiempo en llegar al observador, en comparación con lo que tardaría si no hubiera lente[1]. Mostrá que, en la aproximación de campo débil, el desfasaje está dado por

   $$\delta t_{grav} = -\frac{2}{c^3}\int_{z_O}^{z_S} \varphi(z)dz := -\frac{2}{c^3}\psi, \tag{1}$$

   donde φ es el campo gravitacional de la lente y ψ es el potencial gravitacional proyectado.

   Sugerencia: escribí el elemento de línea ds^2 en la aproximación de campo débil y utilizá el hecho de que la luz se propaga por geodésicas nulas. Elegí el eje z en la dirección observador-fuente (OS). Calculá el intervalo de tiempo que la luz tarda en propagarse de S a O y compará con el intervalo sin la presencia de la lente. El intervalo teniendo en cuenta φ puede obtenerse de forma aproximada integrando sobre una trayectoria no perturbada, con el mismo parámetro de impacto de la trayectoria real. Este procedimiento es conocido como aproximación de Born y es una excelente aproximación en casos reales.

2. Desvío temporal geométrico

   Mostrá que la diferencia de longitud entre la trayectoria no perturbada de la luz y la trayectoria real debida al desvío gravitacional está dada aproximadamente (o sea, para pequeños ángulos) por

   $$\delta L = \frac{D_{OS}D_{OL}}{2D_{LS}}(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 \ . \tag{2}$$

[1] También hay otro "atraso" (que será discutido en el próximo ejercicio) debido a que la trayectoria de la luz es más larga, debido al desvío. En este ejercicio estamos interesados solo en el atraso gravitacional.

De este modo, el retraso temporal debido a la diferencia del camino recorrido por la luz está dado por $\delta t_{\rm geom} = \delta L/c$.

Nota: la expresión (2) puede ser obtenida teniendo en cuenta un fondo de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (secciones espaciales homogéneas e isótropas) y es válida para cualquier curvatura.

3. Principio de Fermat

   En primera aproximación, la diferencia entre el tiempo que la luz tardaría en recorrer el camino no perturbado entre fuente y lente y el tiempo que tarda en presencia de la lente está dado por

$$\delta t_L = \delta t_{\rm geom} + \delta t_{\rm grav}.$$

   Notá que estos desfasajes temporales son generados en las proximidades de la lente. Sin embargo, para distancias cosmológicas (o altas velocidades relativas), es necesario tener en cuenta también la dilatación temporal de Lorentz. En el caso cosmológico, los intervalos de tiempo en la lente y en el observador están relacionados por $\delta_{t_O}/\delta_{t_L} = a_O/a_L = (1 + z_L)$ (donde a es el factor de escala del Universo). De este modo, el desfasaje temporal total estará dado por[2]

$$\delta t_L = (1 + z_L)\frac{D_{OS}D_{OL}}{cD_{LS}}\left(\frac{1}{2}(\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \Psi\right). \tag{3}$$

   Mostrá que la condición $\vec{\nabla}_\theta(\delta t) = 0$ lleva a la ecuación de la lente.

   Pensá en la relación de ese resultado con el princípio de Fermat. La formulación en términos del retraso temporal (o potencial de Fermat) es muy útil para entender muchos resultados de los fenómenos de lentes gravitacionales. Como una aplicación, vean el (brevíssimo) artículo de Burke (Astrophysical Journal Letters, vol. **224**, p. 1, 1981).

   Para fuentes con variabilidad, las diferencias temporales (entre diferentes imágenes) son mensurables y pueden aportar informaciones sobre la lente, la geometría del Universo y los parámetros cosmológicos.

4. (Opcional) Obtené la expresión (3) directamente a partir de la métrica de un universo homogéneo e isótropo con una perturbación escalar.

[2] Recordando que $\Psi = \frac{2}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}\psi$.

5. Superficies de desfasaje temporal y multiplicidad de imágenes

   Hacé gráficos de la superficie de desfasaje temporal para modelos con simetría circular y modelos no circularmente simétricos a elección (sugerencia, agregá un "cisallamiento externo"). Incluí tanto curvas de nivel de δt (isócronas), como la curva "3D" $\delta t(x_1, x_2)$, como, por ejemplo en Mollerach & Roulet (p. 44). Elegí posiciones de las fuentes de modo a obtener diferentes multiplicidades de imágenes, evidenciando el mínimo, el máximo y el "punto de silla". (ver, por ejemplo, SEF p. 180-181). Además de los gráficos, enviá los códigos utilizados para hacerlos.

   Tip: Adaptá el *notebook* en `http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching/notebooks/Lecture 06.ipynb`

6. Obtené una estimación para el desfasaje temporal entre imágenes en una configuración típica de microlensing en la galáxia. Se te ocurre alguna forma/situación en que se podría medir ese desfasaje?

7. Encontrá un artículo reciente sobre la determinación del parámetro de Hubble a través de lentes gravitacionales y discutí los resultados.