

Lentes gravitacionales en astrofísica y cosmología

Actividad Práctica 7

1. Ecuación de la lente y variables adimensionales en el caso de la esfera isotérmica singular (EIS)

A partir de la expresión

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi Gr^2}, \quad (1)$$

obtené la densidad superficial de masa $\Sigma(\xi)$ y el ángulo de desvío $\hat{\alpha}$.

Para fines de implementación numérica, simplicidad de los cálculos e interpretación, es útil trabajar las ecuaciones de lente en forma adimensional (ver, por ejemplo, en las notas de Meneghetti). Una dimensión característica de los problemas con simetría axial es el radio de Einstein ξ_E . Mostrá que eligiendo $\xi_0 = \xi_E$, la ecuación de la lente queda

$$\vec{y} = \vec{x} - \hat{\alpha} \frac{D_{LS} D_{OL}}{\xi_0 D_{OS}} = \left(1 - \frac{1}{|x|}\right) \vec{x}.$$

Esta expresión simple facilita el cálculo del jacobiano de la transformación (que es invariante por la elección de ξ_0) y permite resolver numéricamente la ecuación de la lente.

Calculá el jacobiano $|d\vec{y}/d\vec{x}|$. Obtené la convergencia κ , el cizallamiento γ , la magnificación μ y los autovalores (magnificación en las direcciones tangencial y radial). Mostrá que no hay curva crítica radial.

2. Esfera Isotérmica Suavizada

Uno de los aspectos poco realistas de la EIS es la presencia de la singularidad central. Para evitar esta singularidad, se puede modificar el perfil de la EIS introduciendo un “núcleo”, de modo que para $\theta \gg \theta_c$ la distribución se asemeje a la EIS, mientras que para $\theta \ll \theta_c$ la densidad tienda a un valor finito. Existen muchas formas empíricas de realizar este cambio. Algunas modifican la forma del potencial de la EIS, mientras que otras modifican su distribución de densidad.

Un ejemplo del primer tipo es usar $\Psi = \sqrt{x^2 + x_c^2}$ (en lugar de $\Psi = |x|$, que es el caso de la EIS).

Obtené la ecuación de la lente en este caso. Mostrá que $\kappa = \frac{x^2 + 2x_c^2}{2(x^2 + x_c^2)^{3/2}}$.

Una posible generalización del perfil de densidad de la EIS está dada por $\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G(r^2 + r_c^2)}$. Obtené la ecuación de la lente en este caso y mostrá que posee una o tres soluciones.

Tips: Para obtener la ecuación de la lente, primero calculá la densidad de masa proyectada y luego la masa proyectada dentro de un círculo de radio θ para obtener el ángulo de desviación. Usá variables adimensionales tomando como escala angular el radio de Einstein de la EIS con el mismo σ_v (θ_{EIS}). Es fácil ver que la ecuación de la lente puede escribirse como una ecuación de tercer grado. Sin embargo, para ver bajo qué condiciones aparecen 1, 2 o 3 soluciones, es mejor hacer el cambio de variables $z = x - (2/3)y$, de modo que la ecuación queda en la forma $z^2 - 3pz + 2q = 0$, con p y q definidos convenientemente.

Encontrá el radio de Einstein θ_E , que es una curva crítica tangencial.

Obtené la curva crítica radial θ_R , es decir, los puntos para los cuales $dy/dx = 0$.

Calculá el potencial proyectado correspondiente a esta distribución de masa.

3. Mapeo de lentes con simetría axial

A partir de la hipótesis de simetría axial, mostrá explícitamente que

$$|d\vec{y}/d\vec{x}| = \text{diag} [1 - m(x)/x^2, 1 - d(m(x)/x)/dx], \quad (2)$$

donde $m = M/(\pi\xi_0^2\Sigma_{\text{crit}})$, en que ξ_0 es la escala característica elegida para construir las variables adimensionales \vec{y} y \vec{x} .

Mostrá que $\alpha(x) = x\bar{\kappa}(x)$ y que $\gamma(x) = \bar{\kappa}(x) - \kappa(x)$. Esta última expresión será muy útil en los estudios del efecto débil de lentes por galaxias y cúmulos de galaxias.

4. Perturbaciones externas

Calculá la magnificación para la esfera isotérmica suavizada (con potencial $\Psi = \sqrt{x^2 + x_c^2}$) con perturbación de cizallamiento externo.

5. Potencial elíptico

Obtené la distribución de masa superficial para el caso del perfil pseudo-elíptico (o sea, potencial elíptico). La distribución de materia derivada,

¿posee simetría elíptica (o sea, $\kappa(X) = \text{const.}$ sobre elipses)? ¿Para bajas excentricidades, la distribución es elíptica? Sugerencia: calculá $\kappa(X)$ y obtené la forma de los contornos de isovalores de $\kappa(X)$. ¿Esa curva depende de X ?

Para algún perfil específico (a tu elección), hacé una gráfica de las curvas de isodensidad, para varios valores de la elipticidad e .

Sugerencia: utilizá una generalización elíptica del potencial de la esfera isotérmica no singular dado por

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \frac{D_{\text{ds}}}{D_{\text{s}}} 4\pi \frac{\sigma_v^2}{c^2} [\theta_c^2 + (1 - \epsilon)\theta_1^2 + (1 + \epsilon)\theta_2^2]^{1/2}. \quad (3)$$

6. Generando imágenes con soluciones analíticas

Suponé que la distribución del brillo superficial de una fuente (o sea, su intensidad lumínica) es dado por un perfil de Sérsic elíptico. Obtené la distribución del brillo superficial de las imágenes usando la ecuación de la lente, para algún modelo de lente que vimos en el curso. Ilustrá el resultado con gráficas, mostrando la intensidad lumínica en función de la posición en el plano de las imágenes.

Tip: podés utilizar el código `PaintArcs` que genera imágenes siguiendo el método discutido en clase, agregando, además, la pixelización, ruido y el efecto de la PSF. El código, con ejemplos, se puede obtener en: https://github.com/CosmoObs/FoF_lensing_2022 en el fichero `StrongLensing/PaintArcs 2.0`.

7. Soluciones numéricas para cáusticas y curvas críticas

Obtené las cáusticas y curvas críticas (o sea, hacé gráficas de esas curvas) para las siguientes clases de modelos: elípticos, pseudo-elíptico y con cizallamiento externo. Podés elegir los perfiles radiales y los parámetros de los modelos. Pueden obtener las soluciones buscando las raíces de los auto-valores de la jacobiana de la transformación (en el plano de las fuentes y en el plano de las lentes) o usando algún código numérico público de lentes gravitacionales (como el `gravlens`).

Tip: pueden modificar los códigos que están en <https://github.com/maxmen/LensingLectures/> en particular los notebooks de http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching_2016.html: <http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching/notebooks/Lecture2018.ipynb> y

<http://pico.oabo.inaf.it/massimo/teaching/notebooks/Lecture2020.ipynb>

8. Métodos de inversión

A partir de una imagen real de un sistema con arcos gravitacionales/anillos de Einstein en la escala galáctica (dónde la lente es una galaxia individual), obtené los parámetros del modelo de lente y la reconstrucción de la intensidad de la fuente. Para eso, utilizar algún código público, como PyAutoLens, lenstronomy, GLAMER o GIGA-Lens, entre otros.

Tip: mirar los notebooks que están en https://github.com/CosmoObs/FoF_lensing_2022 en el fichero StrongLensing/SL modeling