

LENTES GRAVITACIONALES EN ASTROFÍSICA Y COSMOLOGÍA

SEMANA - 2

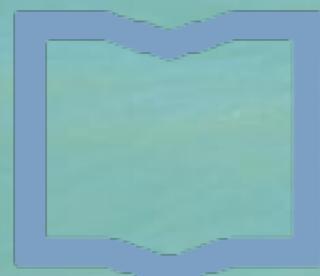
MARTÍN MAKLER

ICAS/IFICI/CONICET & UNSAM Y CBPF

ICAS

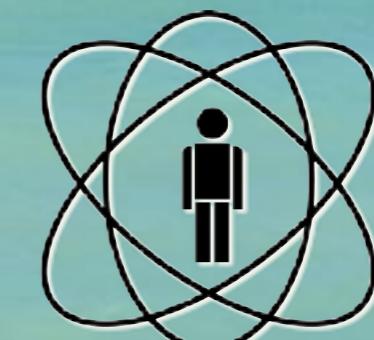


CONICET



Instituto de
Ciencias Físicas

ICIFI-ECYT_UNSAM-CONICET



CBPF

ESTRUCTURA GENERAL DE LA MATERIA

Parte I: Introducción, visión general y microlentes gravitacionales

[GR, SL][lentes puntuales, astrofísica, materia oscura]

- Introducción a las lentes gravitacionales y sus aplicaciones actuales
- Deflexión de la luz y ecuación de la lente
- Lentes puntuales
- Mapeo de lentes, magnificación, cáusticas y curvas críticas
- Lentes binarias
- Curvas de luz de microlentes y microlentes por astrometria
- Mas allá de la curva de Paczynski
(efectos de segunda orden y lentes compuestas)
- Estadística de lentes

Próximas clases microlensing

Revisión de fuente puntual y microlensing astrométrico

Formalismo de números complejos

- Efectos de paralaje

- Movimiento de la Tierra
- $xallara\beta$
- Satélites

- Fuente finita

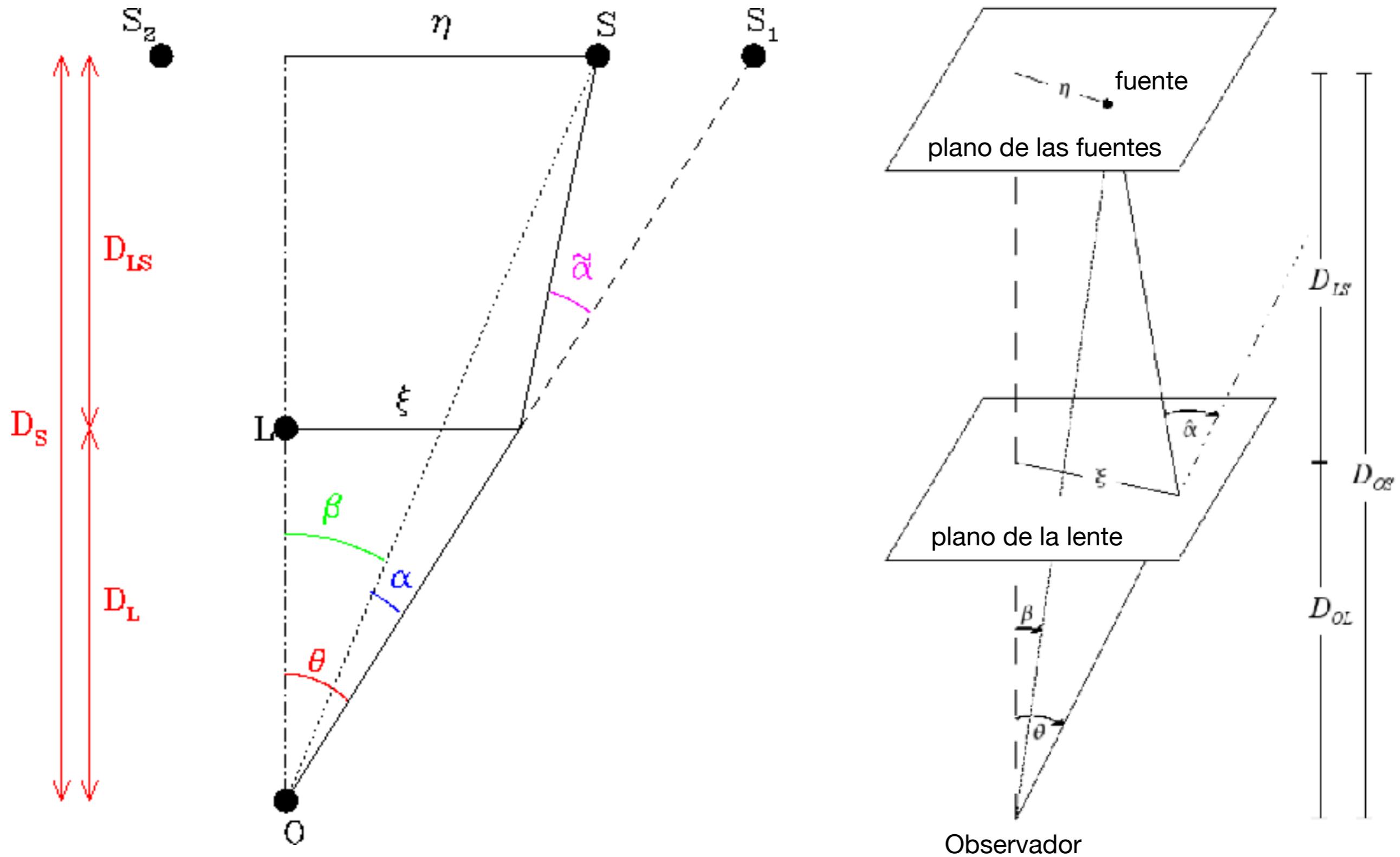
- Fuente uniforme circular
- Oscurecimiento de borde

Lentes compuestas: exoplanetas y QSO *microlensing*

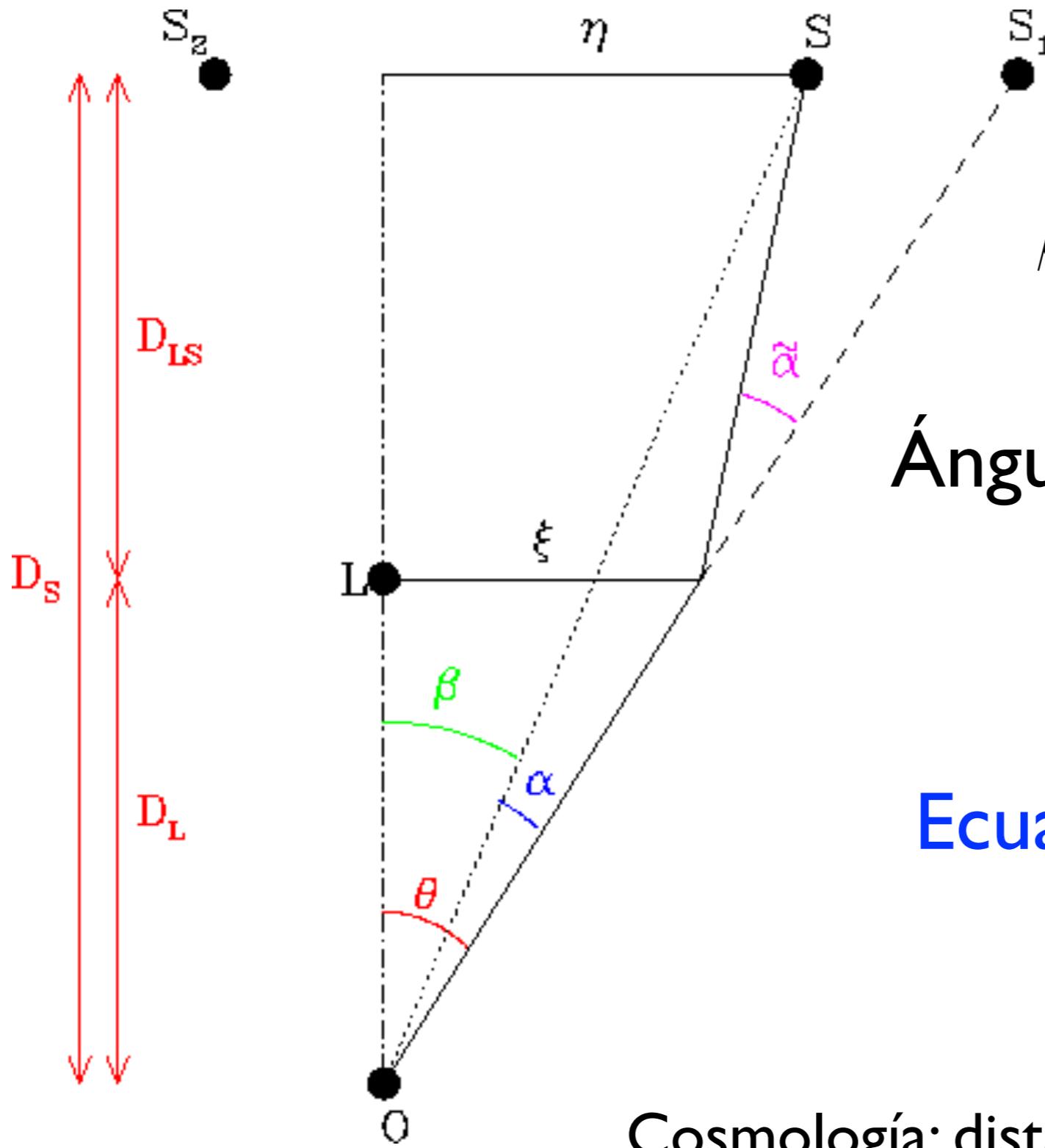
Aplicaciones

Estadística de lentes y materia oscura

Geometría del efecto de lentes por plano único



La ecuación de la lente



$$\vec{\beta} D_{OS} = \vec{\theta} D_{OS} - \hat{\vec{\alpha}} D_{LS} (\vec{\theta})$$

Ángulo de deflexión reducido

$$\vec{\alpha} = \hat{\vec{\alpha}} \frac{D_{LS}}{D_{OS}}$$

Ecuación de la lente

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha} (\vec{\theta})$$

Cosmología: distancias de diámetro angular

Lente puntual

Lente puntual

$$\hat{\vec{\alpha}} = \frac{4GM}{c^2\xi} \hat{\xi}$$

$\xleftarrow{D_{OL}\theta}$

Angulo de deflexión reducido

$$\vec{\alpha} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2\theta} \hat{\theta}$$

Ecuación de la Lente

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{\theta_E^2}{\theta} \hat{\theta}$$

Ángulo de Einstein

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$$

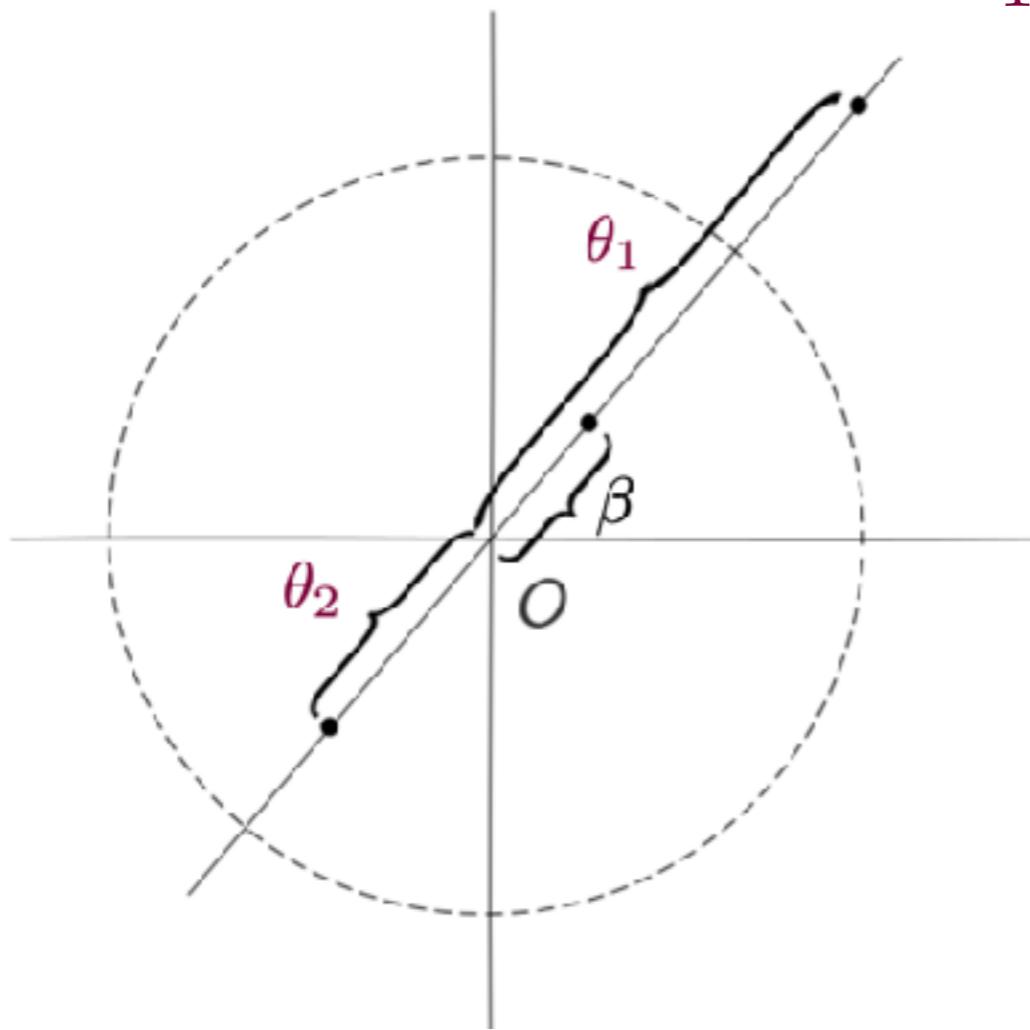
Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Soluciones

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$



Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Soluciones

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

Magnificación

$$\mu = \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta}$$

Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Soluciones

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

Magnificación

$$\mu_{1,2} = \left(1 - \left[\frac{\theta_E}{\theta_{1,2}} \right]^4 \right)^{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{y^2 + 2}{2y\sqrt{y^2 + 4}}$$

Distancia em unidades del ángulo de Einstein $y = \beta/\theta_E$

Magnificación total

$$\mu = |\mu_1| + |\mu_2| = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}$$

Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \rightarrow y = x - \frac{1}{x}$$

Soluciones

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right)$$

Recordando las variables:

coordinadas físicas
(distancia)

$$\eta$$

$$\xi$$

$$\mu = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}$$

coordinadas
angulares

$$\beta$$

$$\theta$$

coordinadas
adimensionales

$$y = \beta/\theta_E$$

$$x = \theta/\theta_E$$

Curva de luz de microlente

Trayectoria relativa lente-fuente:

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{\beta}(t)}{\theta_E}$$

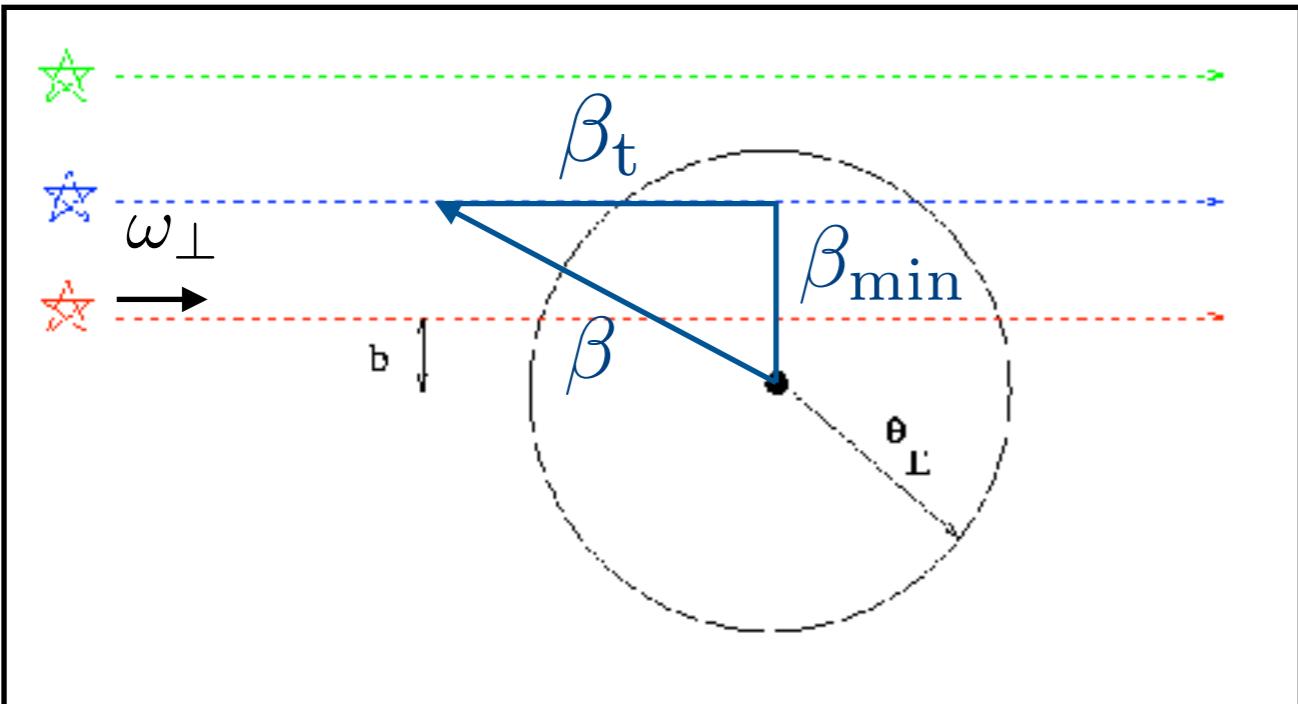
Magnificación de lente puntual:

$$\mu = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$$

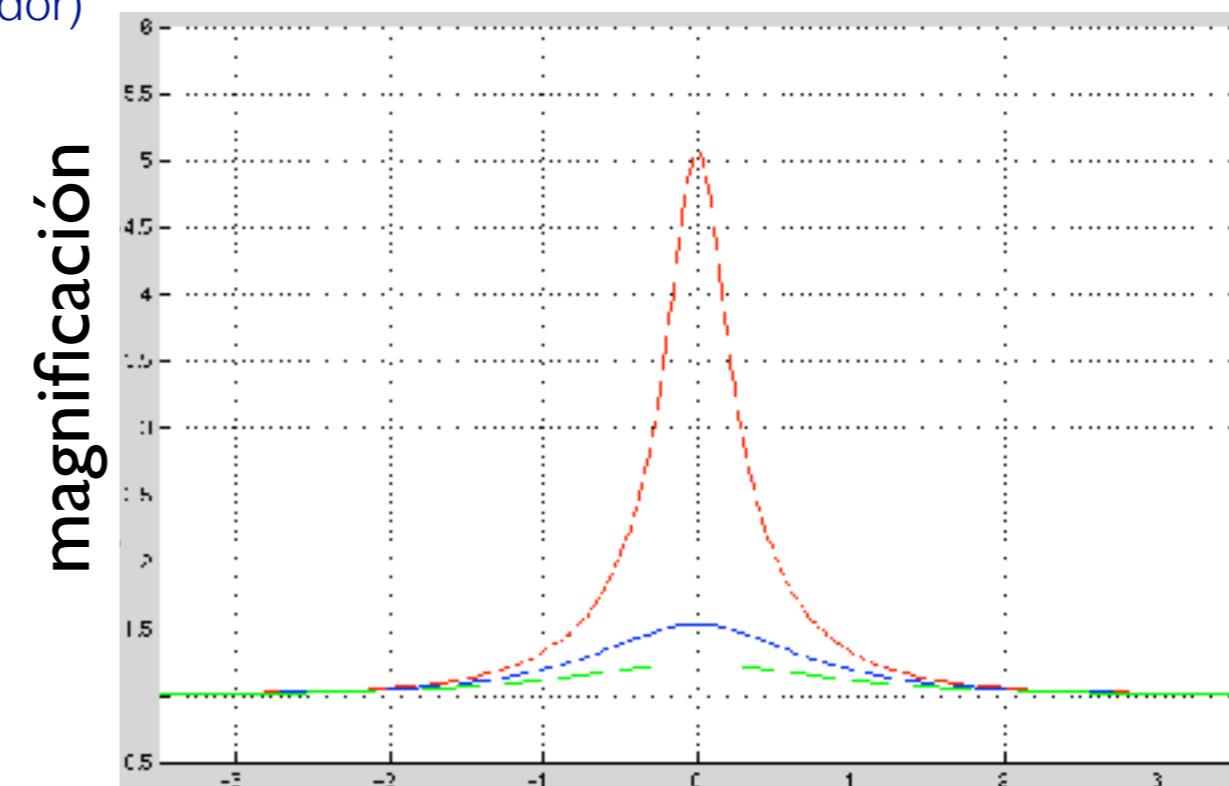
Radio (angular) de Einstein:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$$

ω_{\perp} : velocidad angular entre lente y fuente (relativa al observador)



Plano de las fuentes



Tiempo en unidades del tiempo de Einstein

Movimiento rectilíneo uniforme:

$$\beta_t = \omega_{\perp} t = \frac{v_{\perp}}{D_{OL}} t$$

$$u(t) = \sqrt{u_{\min}^2 + \left(\frac{v_{\perp} t}{\theta_E D_{OL}}\right)^2} = \sqrt{u_{\min}^2 + \left(\frac{t}{t_E}\right)^2}$$

$$t_E = \frac{\theta_E D_{OL}}{v_{\perp}}$$

Para un tiempo con origen arbitraria $t \rightarrow (t - t_0)$

Curva de luz de microlente

- Astrónomos (ópticos) usan magnitudes

$$m = m_{\text{ref}} - 2.5 \log_{10} \frac{f}{f_{\text{ref}}}$$

- Mostrar que la variación de magnitud de una fuente magnificada es dada por

$$\Delta m = -2.5 \log_{10}(\mu)$$

- Hacer gráficas de la curva de luz, $\Delta m \times \frac{t - t_0}{t_E}$
- ¿Qué se puede medir a partir de la curva de luz de un evento de lente y fuente puntuales?

Curva de luz de microlente

- Astrónomos (ópticos) usan magnitudes

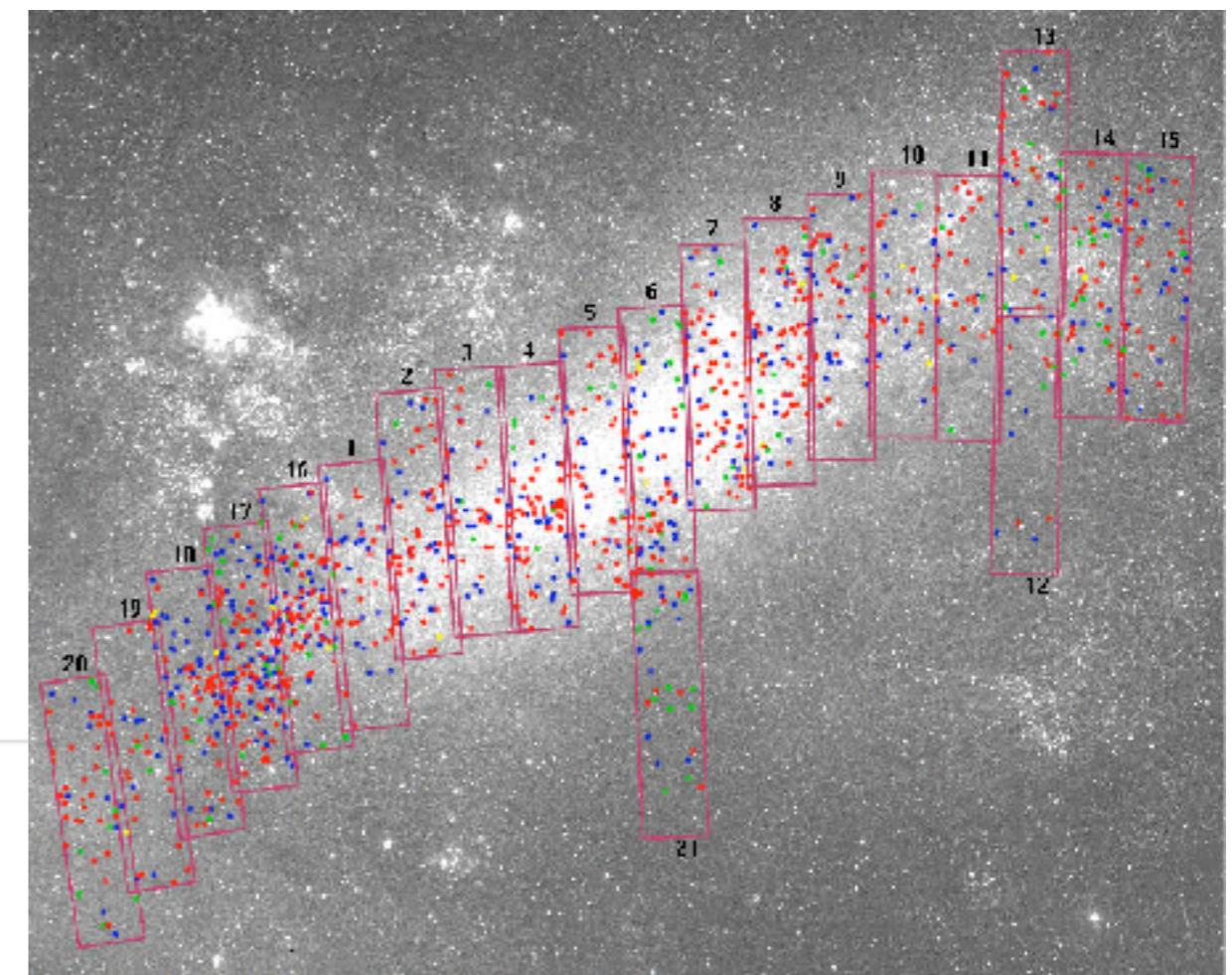
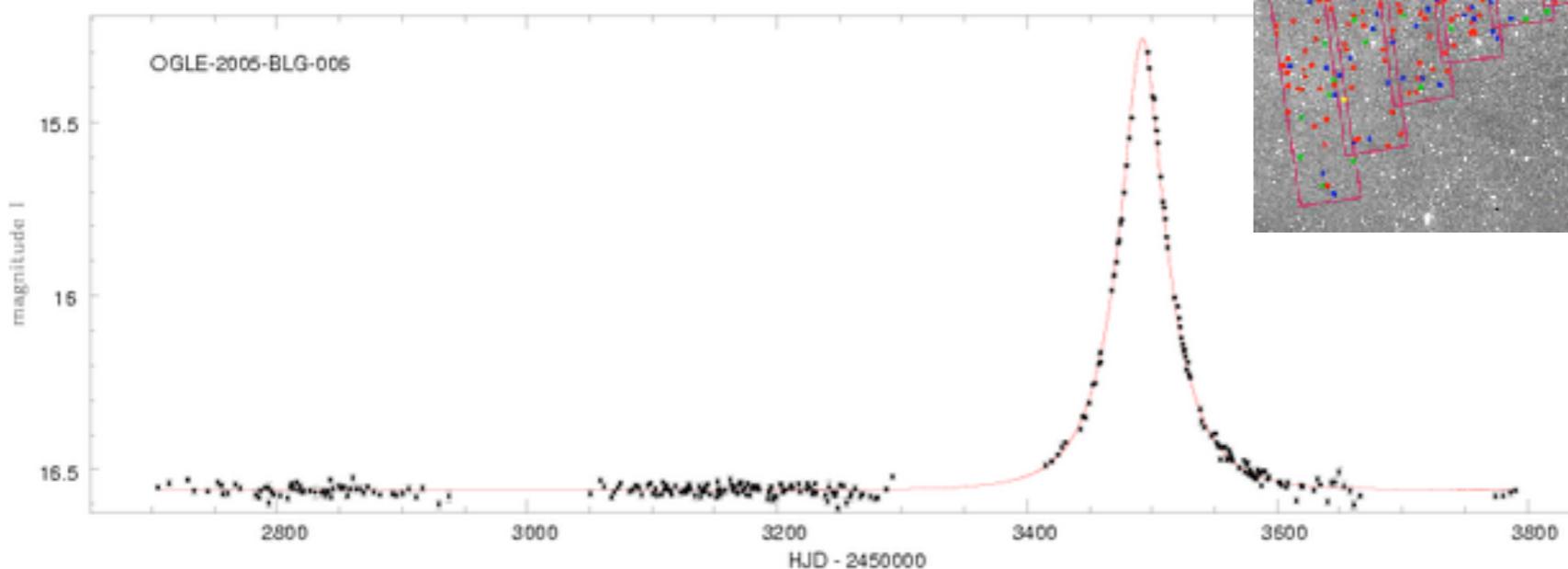
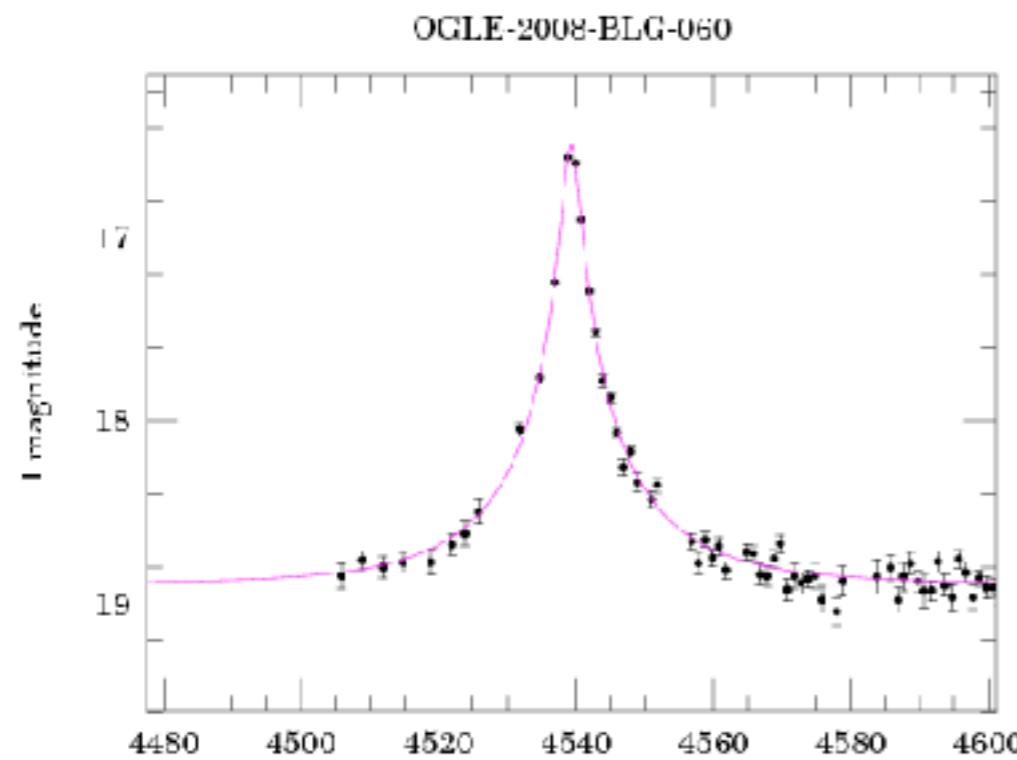
$$m = m_{\text{ref}} - 2.5 \log_{10} \frac{f}{f_{\text{ref}}}$$

- Observación: en una curva de luz real, además de considerar los errores de medida y demás, es importante tomar en cuenta que el flujo de la fuente f_s suele estar contaminado por el flujo de la lente o estrellas próximas, lo que hace un *background*, constante f_b de forma que:

$$f(t) = f_s \mu(t) + f_b$$

Curvas de luz de lente y fuente puntuales

Observada por proyectos como MACHO, OGLE, EROS...



$$t_E \equiv D_d \theta_E / v_{\perp}$$

degeneraciones

Microlensing astrométrico

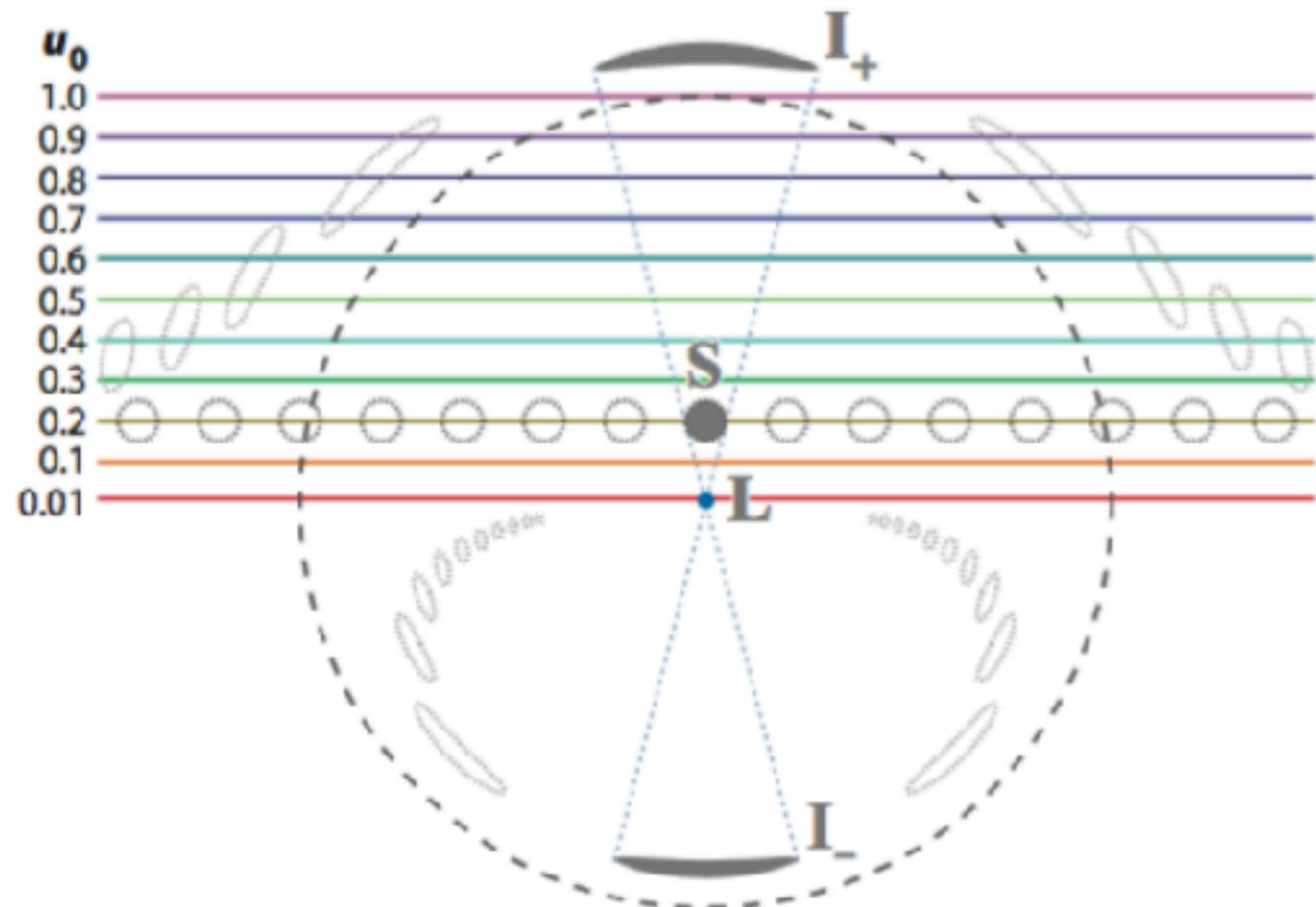
Ecuación de la Lente

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

No se resuelven (separan) las imágenes, pero se podría ver la variación de la posición del **centroide**!

Soluciones

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$



$$\vec{\delta\theta} = \frac{\vec{u}}{u^2 + 2} \theta_E$$

$$\delta\theta_{\max} = \frac{\theta_E}{2\sqrt{2}} = 0.35 \theta_E$$

$$\theta_E \approx 1 \text{ mas} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1/2}$$

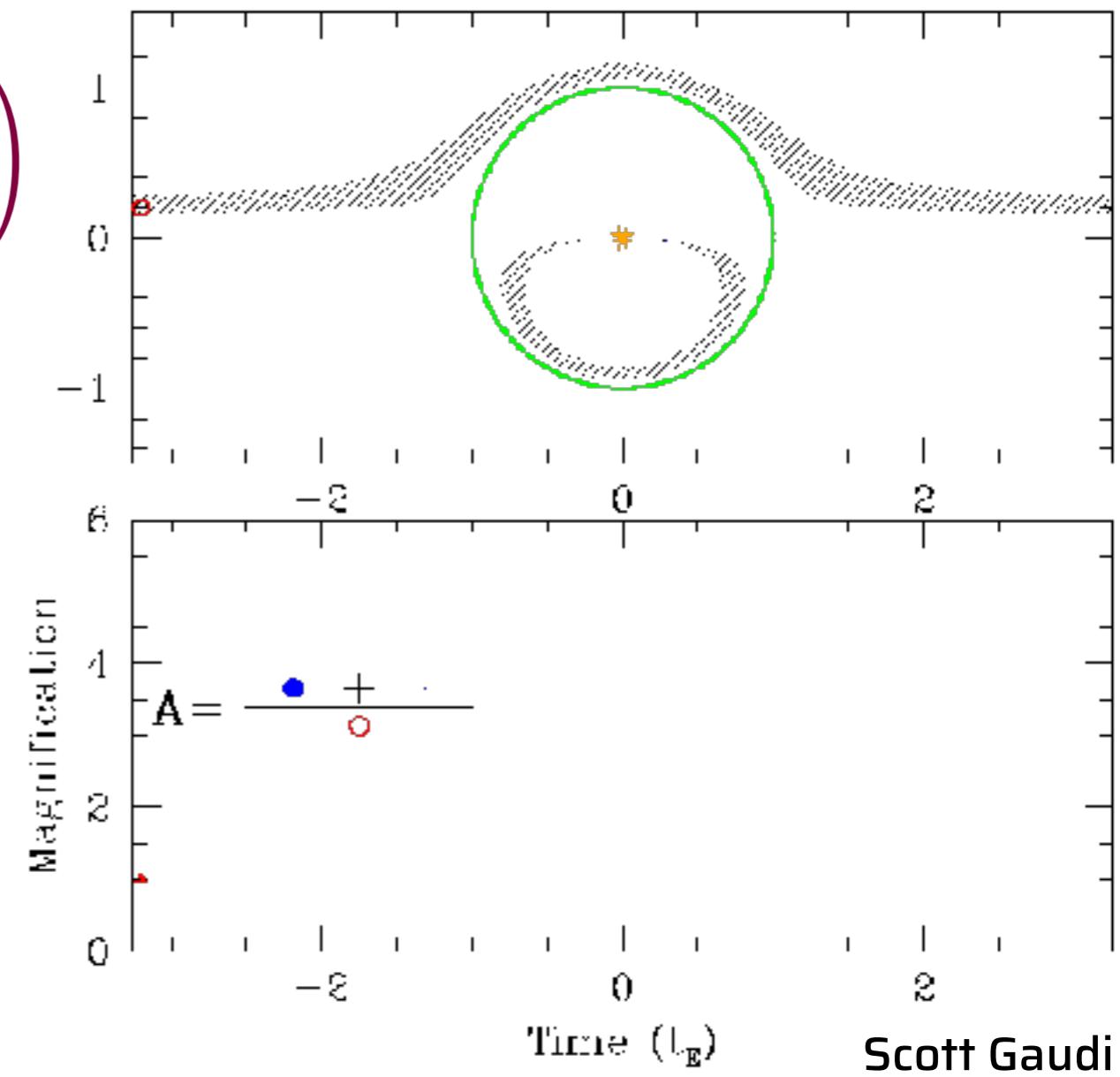
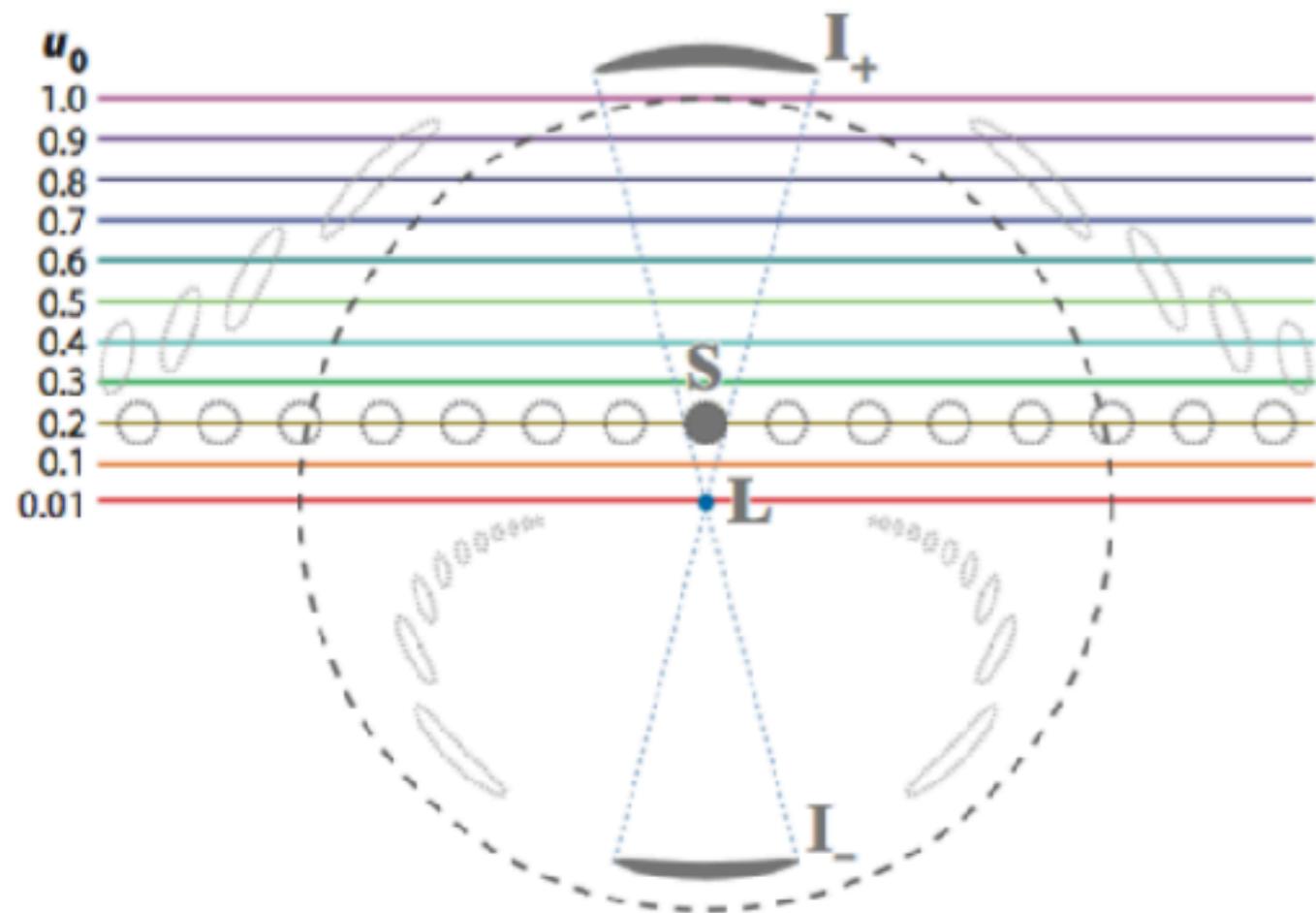
Microlensing astrométrico

Ecuación de la Lente

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Soluciones

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$



Scott Gaudi

Microlensing astrométrico

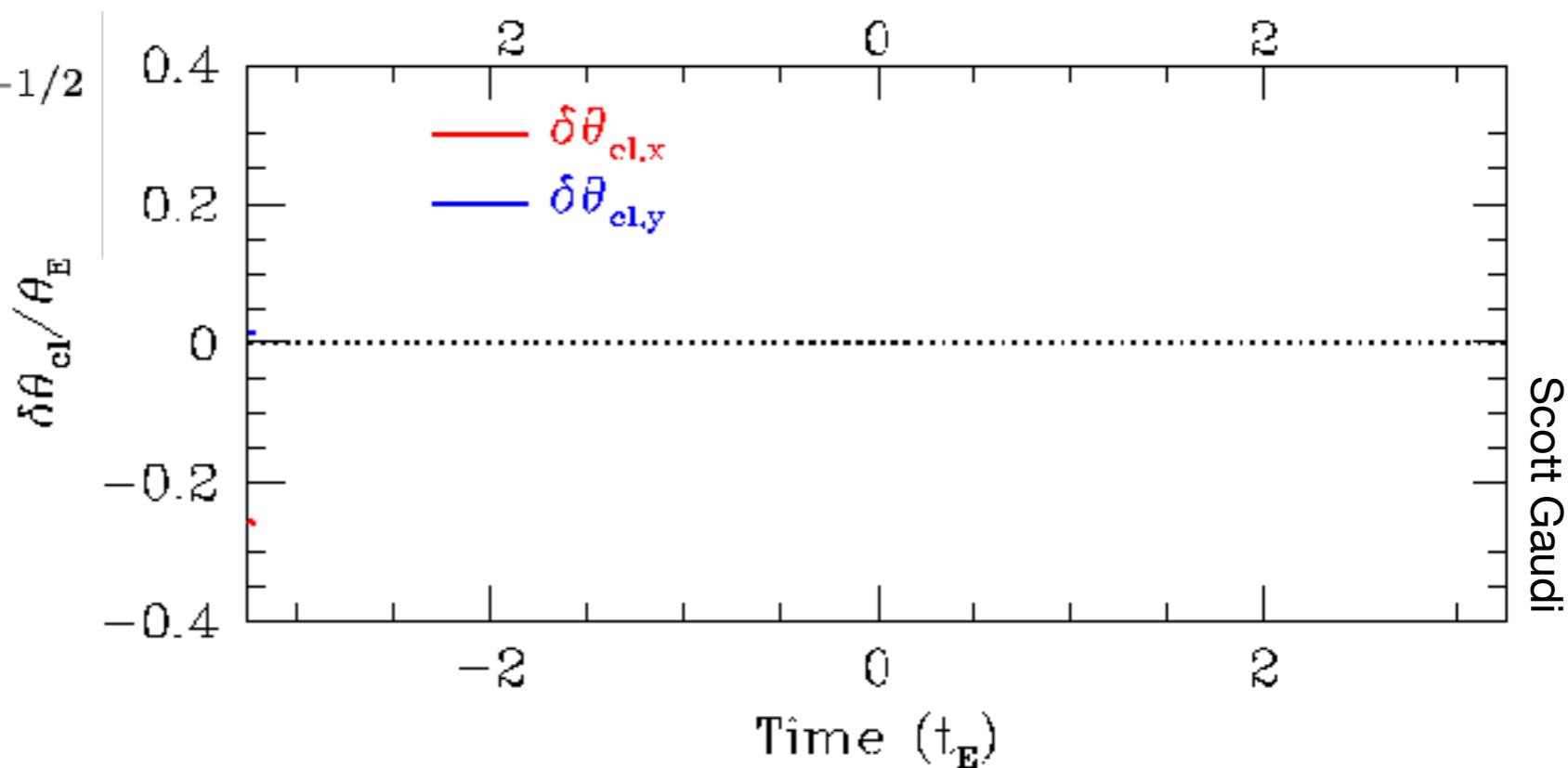
Dependencia distinta en u

$$\vec{\delta\theta} = \frac{\vec{u}}{u^2 + 2} \theta_E$$

Identifiable para mayores
valores de u : más probable!

$$\theta_E \approx 1 \text{ mas} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1/2}$$

Medido recientemente
con Gaia y HST!



Microlensing astrométrico

Dependencia distinta en u

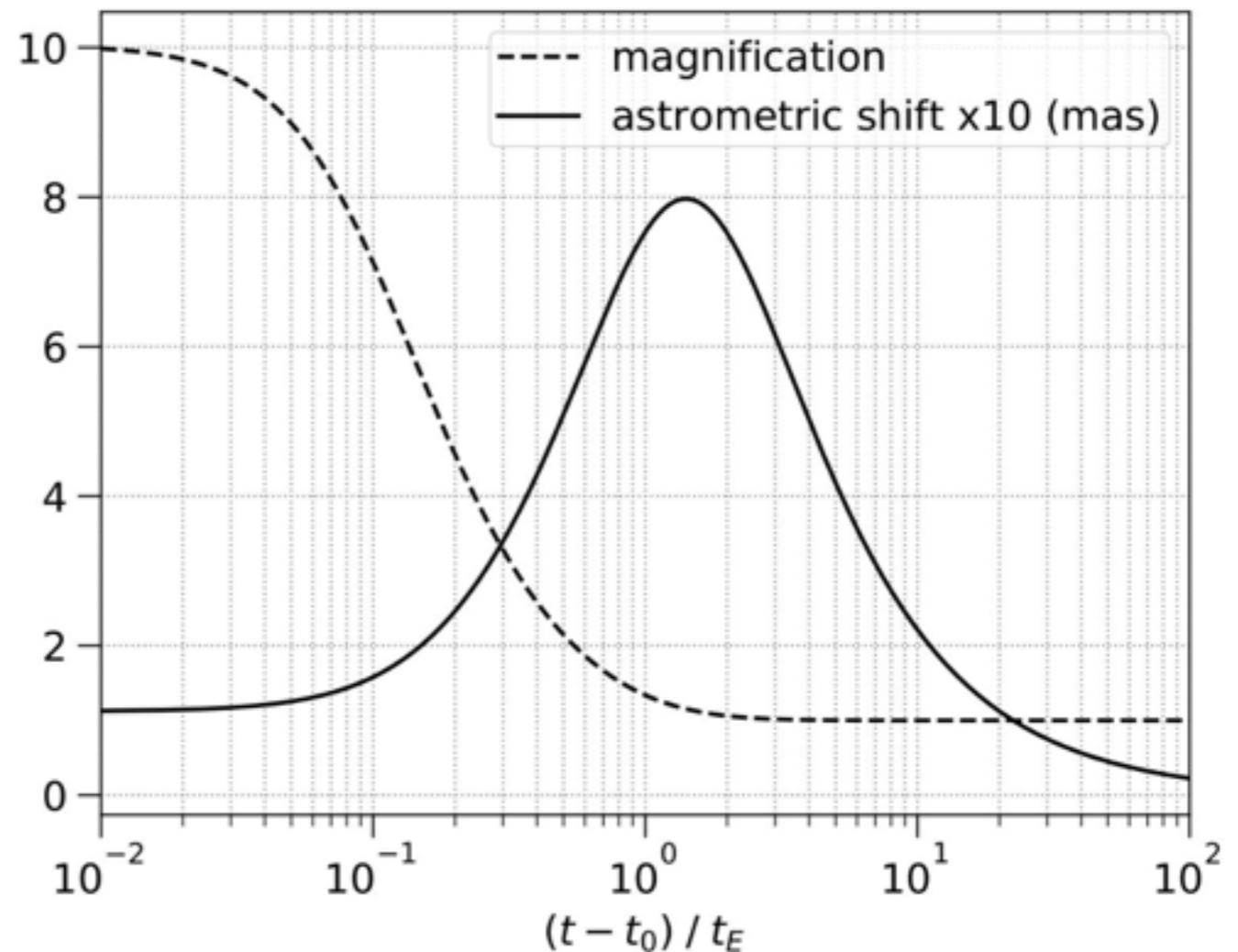
$$\delta \vec{\theta} = \frac{\vec{u}}{u^2 + 2} \theta_E$$

Identifiable para mayores
valores de u : más probable!

$$\theta_E \approx 1 \text{ mas} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1/2}$$

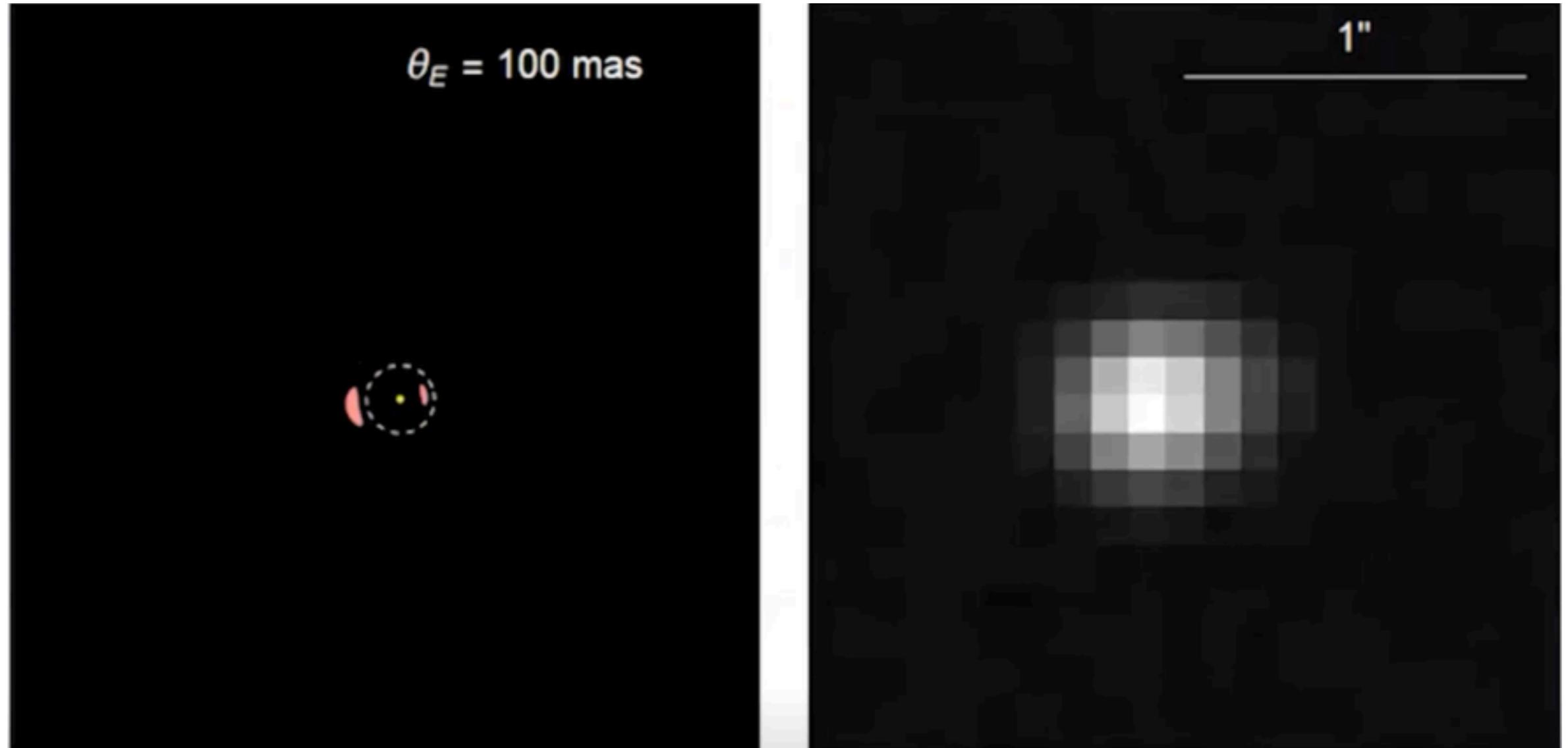
Medido recientemente
con Gaia y HST!

$$u(t) = \sqrt{u_{\min}^2 + \left(\frac{t}{t_E} \right)^2}$$



$$\mu = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$$

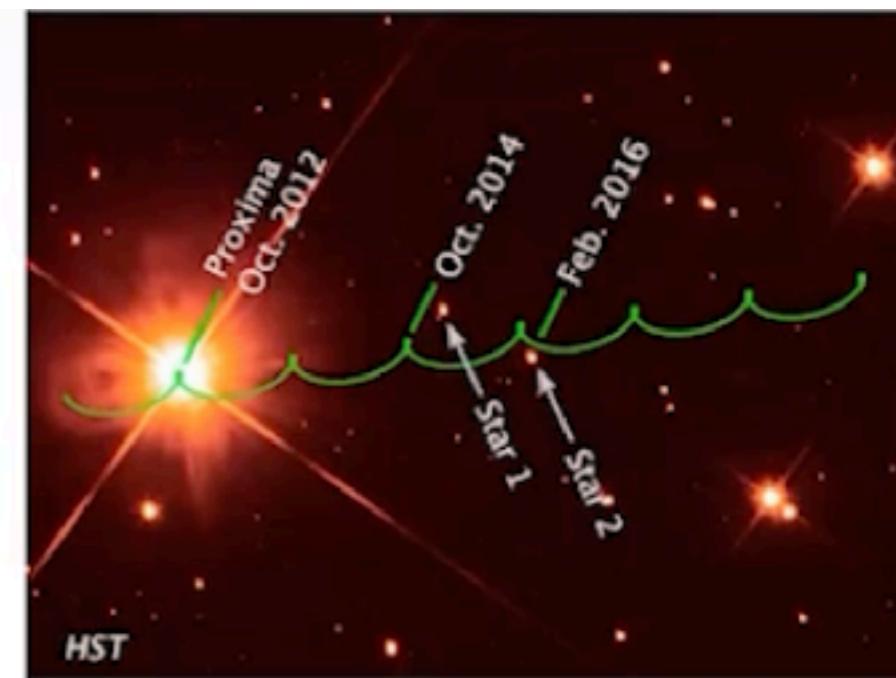
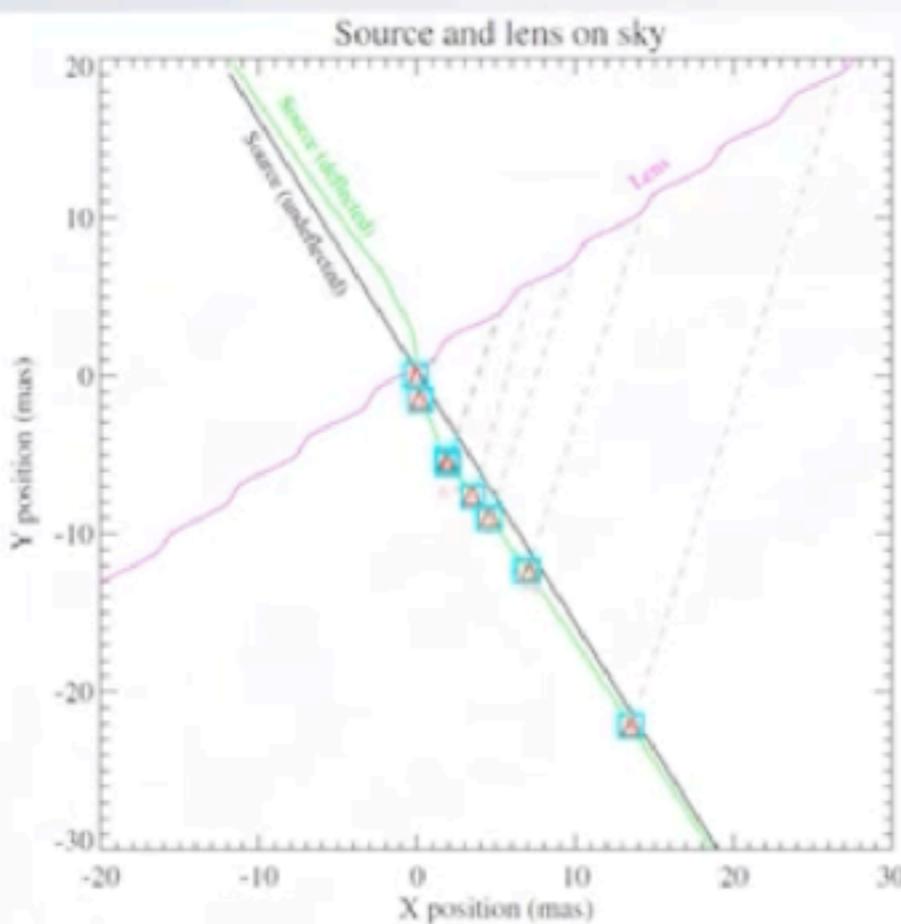
Microlensing astrométrico



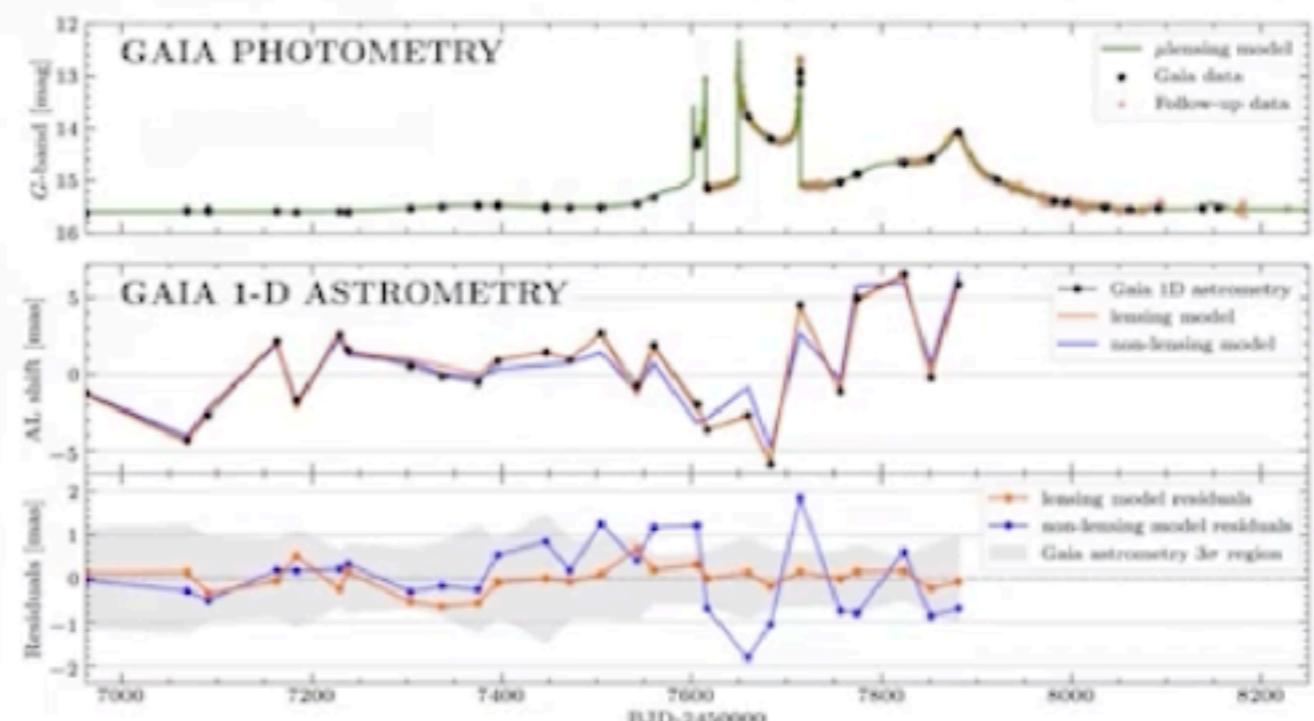
Ejemplo de sistema típico (x100!) y la PSF del telescopio
(en este caso, Roman!)
Milagro de la estadística: se puede medir!

Detecciones de microlesing astrometrico

- White dwarfs by *HST*
(*Sahu et al. 2017, McGill et al. 2022*)
- Proxima Centauri by *VLT* (*Zurlo et al. 2018*)



- MOA-2011-BLG-191/OGLE-2011-BLG-0462: an isolated BH of $7 M_{\odot}$ by *HST*
Sahu et al. (2022), Lam et al. (2022)
- Binary system in Gaia transient Gaia16aye (*Rybicki 2022*)



The dawn of astrometric microlensing From cold exoplanets to black-holes

25th International Microlensing Conference

New dates of the conference August 31, September 1 and 2

<https://www.cold-worlds.com/nouvelles-scientifiques/workshops-2022/>

<https://clementranc.github.io/microlensing25/schedule/Schedule.htm>

Astrometric microlensing

Interferometric microlensing

Detection of free-floating planets, exoplanets, brown dwarfs, stars and binaries, compact objects, including white dwarfs and black holes

Cold planet demographics (observational constraints and theory)

Stellar populations and their properties in the Milky Way (and other galaxies)

Search for electromagnetic signatures of gravitational-wave sources through microlensing

Synergies between ground-based facilities and/or space-missions

(Gaia, Roman, Euclid, PRIME, Rubin, ELTs)

Data mining, numerical tools and techniques

Scientific Organizing Committee

Clément Ranc, co-chair (IAP, Sorbonne University)
Jessica Lu, co-chair (UC Berkeley)
David Bennett (NASA Goddard)
Aparna Bhattacharya (NASA Goddard)
Sun-Ju Chung (Korea Astronomy and Space Science Institute)
Somayeh Khakpash (University of Delaware)
Przemek Mróz (Caltech)
Matthew Penny (Louisiana State University)
Takahiro Sumi (University of Osaka)
Andrzej Udalski (University of Warsaw)
Joachim Wambsganss (Astronomisches Rechen-Institut, University of Heidelberg)

Local Organizing Committee

Jean-Philippe Beaulieu (IAP)



Mas allá de la curva de Paczynski

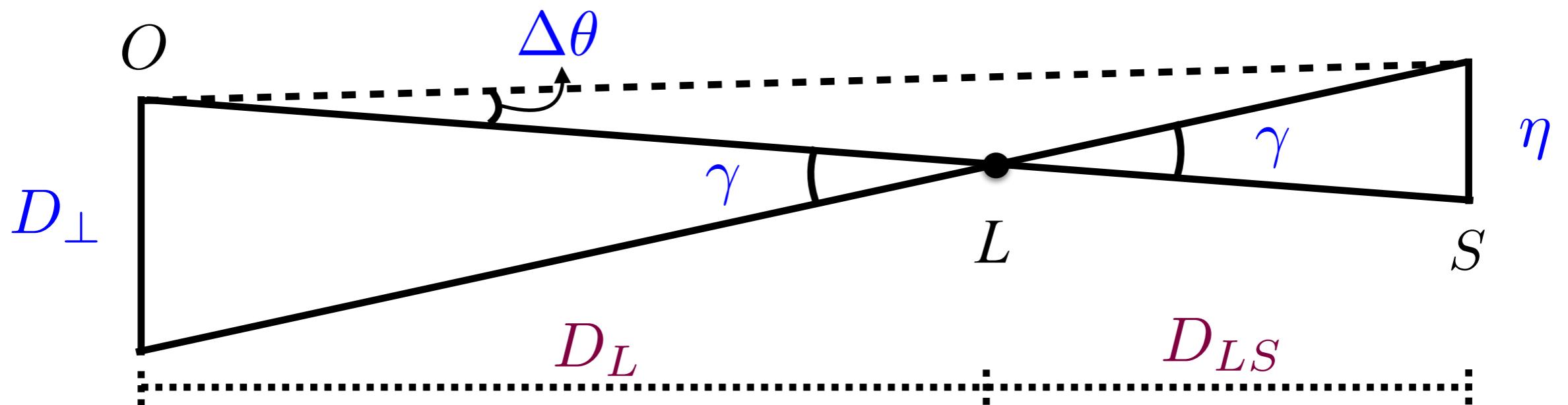
Paralaje

Fuentes finitas y limb darkening

Lentes compuestas

Paralaje (geometría)

- Variación de la posición de una fuente S relativa a un objeto L por el desplazamiento de un observador O :



Es fácil ver que, para ángulos pequeños,

$$\Delta\theta = D_{\perp} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} = D_{\perp} \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)$$

Definiendo:

$$\pi_L = \frac{1}{D_L}, \pi_S = \frac{1}{D_S}, \pi_{\text{rel}} = \pi_L - \pi_S$$

$$\boxed{\Delta\theta = D_{\perp} \pi_{\text{rel}}}$$

Paralaje I

- Movimiento uniforme: $u_{\odot}(t) = u_0 + \omega_E(t - t_0)$
- Desplazamiento adicional por el movimiento orbital de la tierra (en unidades de θ_E):

$$u_1(t) = -\pi_E \sin \beta \cos \zeta(t) \quad u_2(t) = \pi_E \sin \zeta(t)$$

con $\zeta(t) = \Omega t - \varphi$

β : inclinación de la órbita de la Tierra con relación a la linea de visión

$$\Omega = \frac{2\pi}{\text{año}}$$

Paralaje relativo entre la fuente y la lente normalizado por θ_E

$$\pi_E = \frac{1 \text{U.A.}}{\theta_E} \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)$$

Paralaje I

- Movimiento uniforme: $u_{\odot}(t) = u_0 + \omega_E(t - t_0)$
- Desplazamiento adicional por el movimiento orbital de la tierra (en unidades de θ_E):

$$\begin{aligned} |\vec{u}_{\oplus}(t)|^2 &= |\vec{u}_{\odot}(t) + \vec{u}(t)|^2 = \\ &= u_0^2 + \omega_E^2(t - t_0)^2 + 2\pi_E \{ \sin \zeta(t) [u_0 \cos \psi + \omega_E(t - t_0) \sin \psi] + \\ &+ \sin \beta \cos \zeta(t) [u_0 \sin \psi - \omega_E(t - t_0) \cos \psi] \} + \\ &+ \pi_E^2 [\sin^2 \zeta(t) + \sin^2 \beta \cos^2 \zeta(t)]. \end{aligned}$$

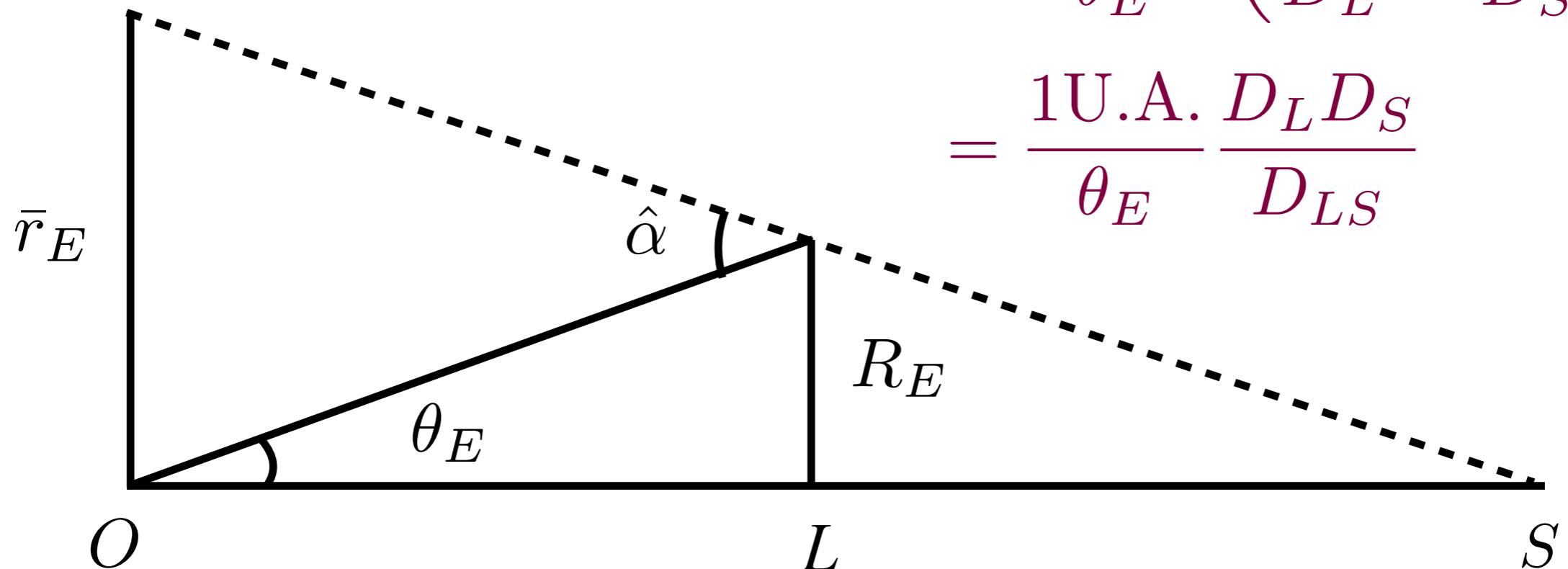
ψ : angulo de la trayectoria de la fuente sin considerar el movimiento de la Tierra (en el mismo sistema en que se define u_1, u_2)

Observación: los ángulos y fase son conocidos (medidos). Considerar el paralaje solo agrega dos variables desconocidas, π_E y ψ ($\circ \vec{\pi}_E$)

Observación

Paralaje relativo entre la fuente
y la lente normalizado por θ_E

$$\pi_E = \frac{1 \text{U.A.}}{\theta_E} \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)$$
$$= \frac{1 \text{U.A.}}{\theta_E} \frac{D_L D_S}{D_{LS}}$$



Radio de Einstein
proyectado en el plano
del observador

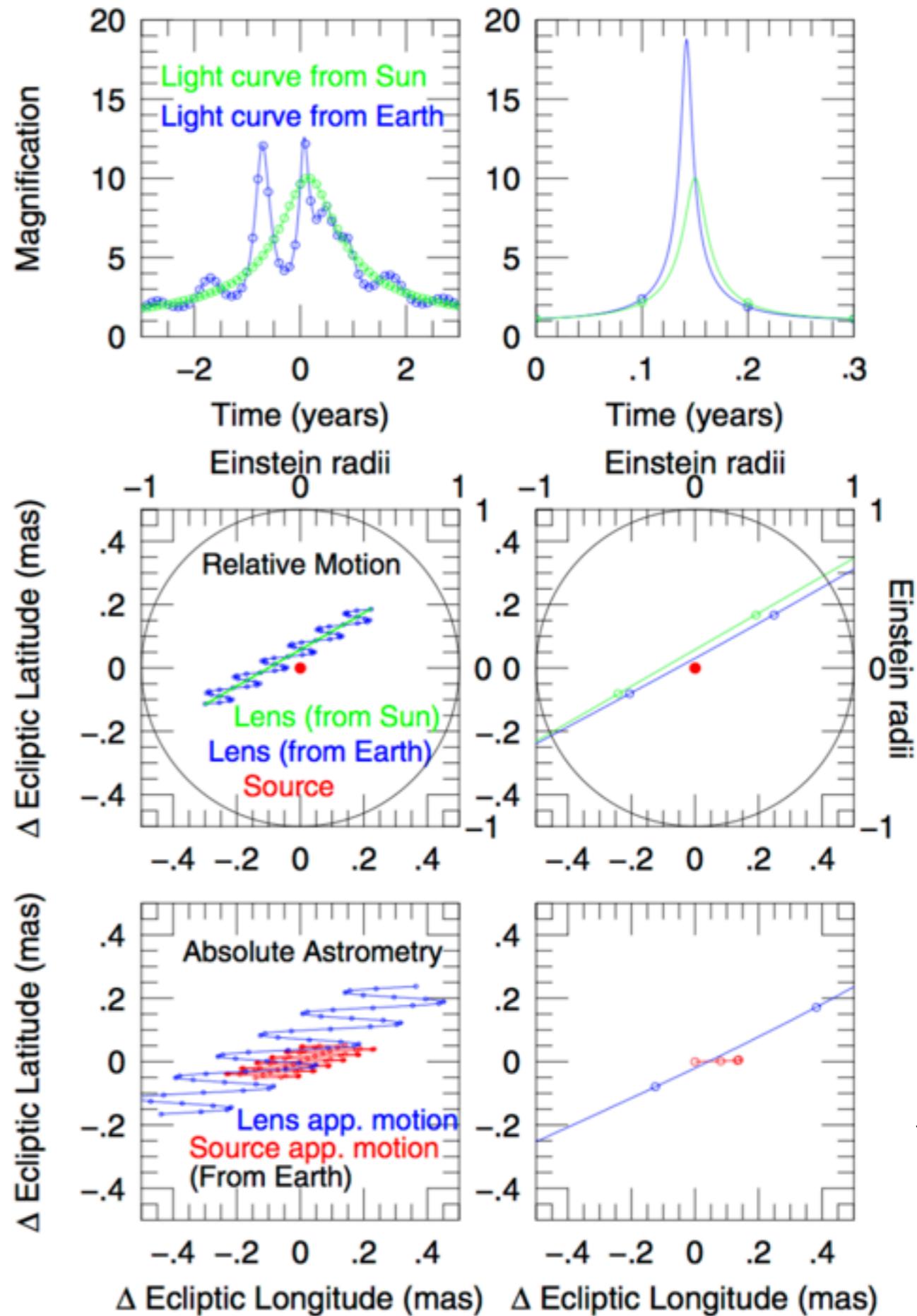
$$\bar{r}_E = \theta_E \frac{D_L D_S}{D_{LS}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{1}{1/D_L - 1/D_S}}$$

Parámetro de
paralaje

$$\pi_E = \frac{1 \text{U.A.}}{\bar{r}_E}$$

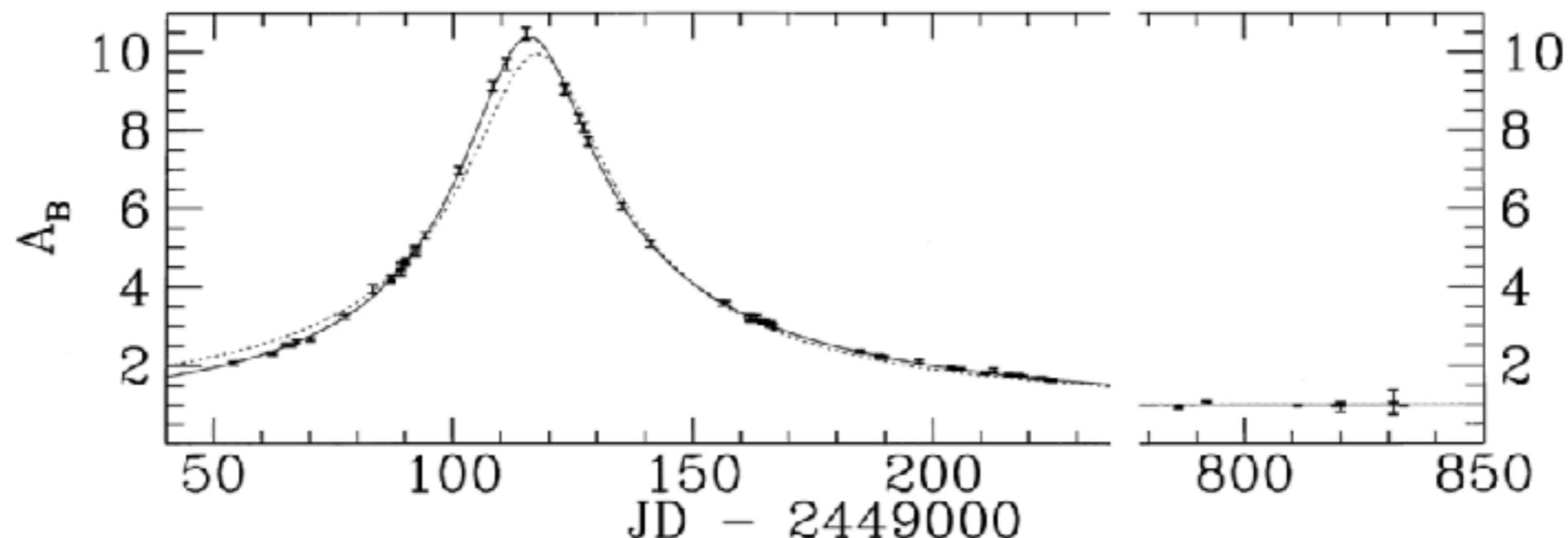
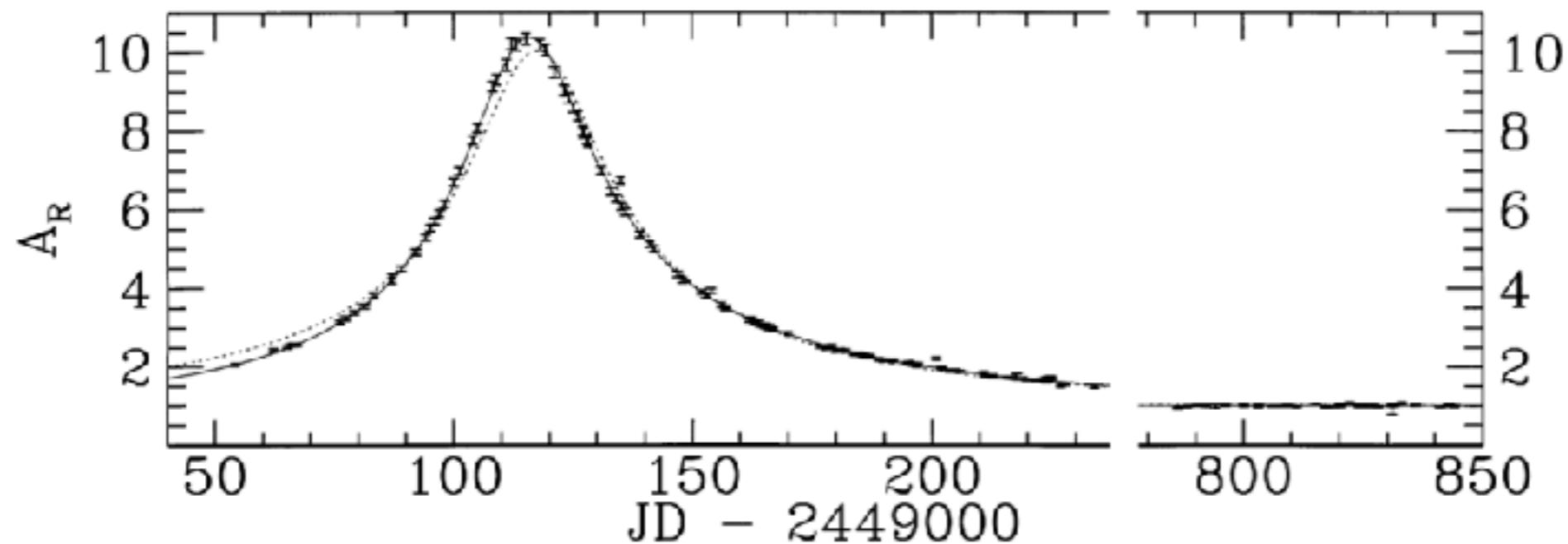
Paralaje por el movimiento de la Tierra

magnitud del efecto depende de la relación entre el tiempo de Einstein, la duración del año y el valor del parámetro de paralaje



FIRST OBSERVATION OF PARALLAX IN A GRAVITATIONAL MICROLENSING EVENT

C. ALCOCK,^{1,2} R. A. ALLSMAN,³ D. ALVES,^{1,4} T. S. AXELROD,^{1,5} D. P. BENNETT,^{1,2} K. H. COOK,^{1,2} K. C. FREEMAN,⁴ K. GRIEST,^{2,6} J. GUERN,^{2,6} M. J. LEHNER,^{2,6} S. L. MARSHALL,^{2,7} B. A. PETERSON,⁵ M. R. PRATT,^{2,7} P. J. QUINN,⁵ A. W. RODGERS,⁵ C. W. STUBBS,^{2,7,8} AND W. SUTHERLAND^{2,9} (THE MACHO COLLABORATION)



Xallarap

- Causado por el movimiento de rotación de la **fuente**. Ejemplo: sistema planeta-estrella
- Expresión casi idéntica a la de paralaje:

$$\begin{aligned}
 [u(t)]^2 = & u_0^2 + \omega_E^2 (t - t_0)^2 - 2 \chi_E \{ \sin \zeta(t) [u_0 \cos \psi + \omega_E (t - t_0) \sin \psi] + \\
 & + \sin i \cos \zeta(t) [u_0 \sin \psi - \omega_E (t - t_0) \cos \psi] \} + \\
 & + \chi_E^2 [\sin^2 \zeta(t) + \sin^2 \beta \cos^2 \zeta(t)] . \quad \zeta(t) = \Omega t - \varphi
 \end{aligned}$$

i : período orbital del planeta

Ω → período orbital del planeta

Parámetro de
xallarap

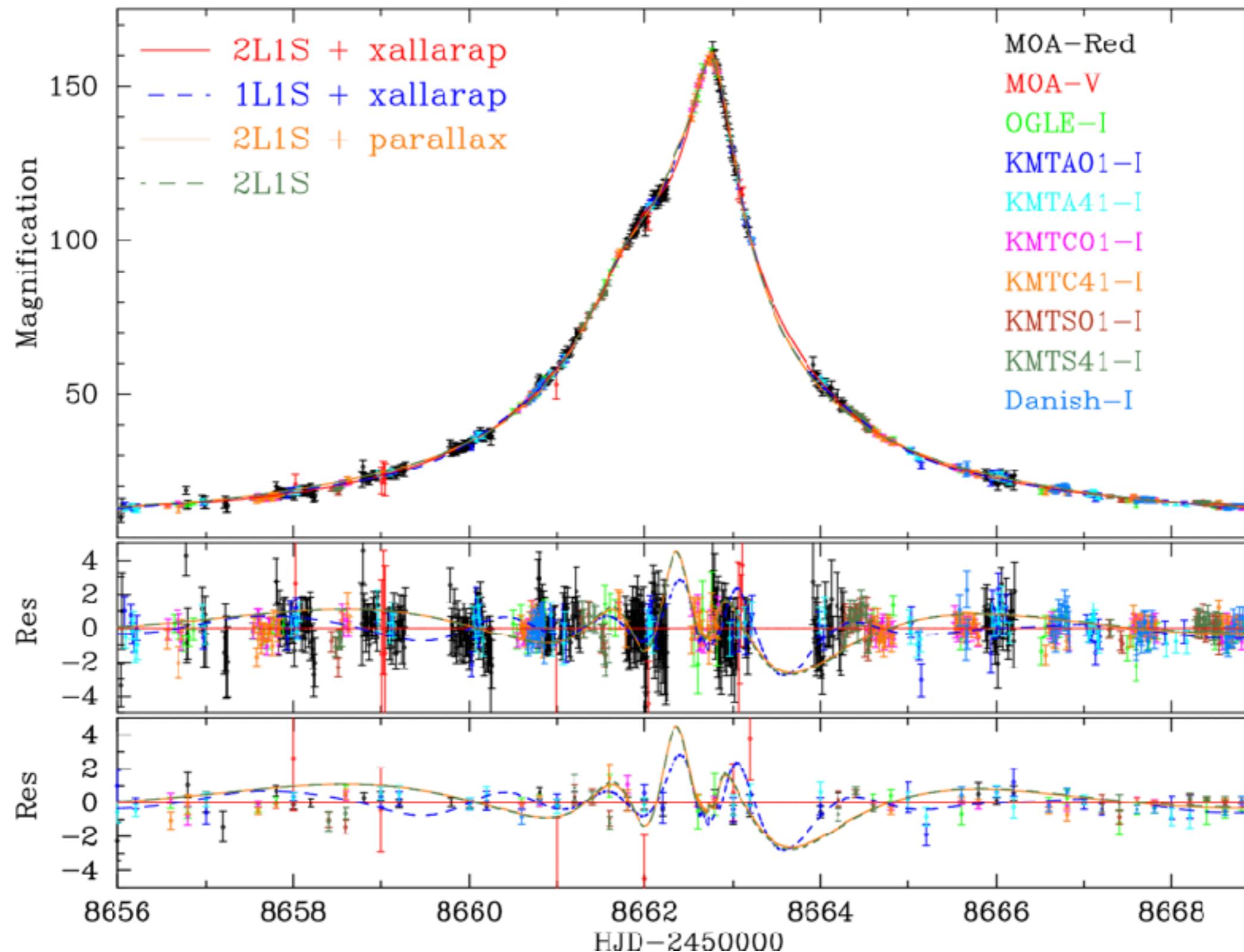
$$\chi_E = \frac{m_p}{m} \frac{a}{D_S \theta_E} \quad \begin{array}{l} \text{radio de la órbita del planeta} \\ \text{angulo de Einstein proyectado en el plano de la fuente} \end{array}$$

Razón entre la masa del planeta
y de la estrella (lo que se observa
es el movimiento de la estrella)

En este caso son 7 nuevos parámetros



OGLE-2019-BLG-0825: Constraints on the Source System and Effect on Binary-lens Parameters Arising from a Five-day Xallarap Effect in a Candidate Planetary Microlensing Event



Paralaje por diferentes puntos de observación

- Un mismo evento observado desde dos puntos será visto con diferentes ángulos
- Mostrar que la paralaje se puede calcular como $\pi_E = |\boldsymbol{\pi}_E|$ con

$$\boldsymbol{\pi}_E = \frac{1}{D_{\perp}} \left(\frac{\Delta t_0}{t_E}, \Delta u_0 \right)$$

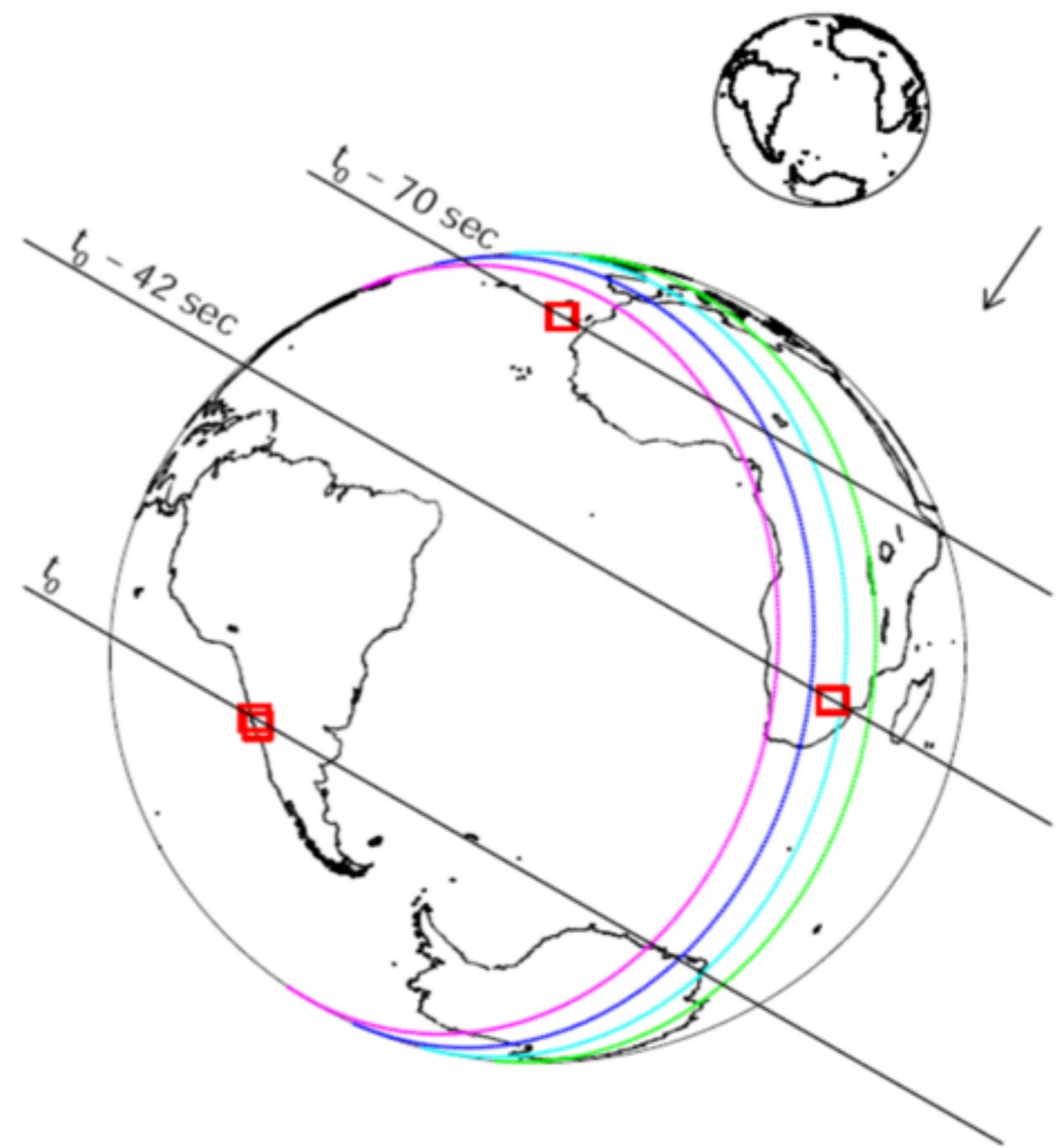
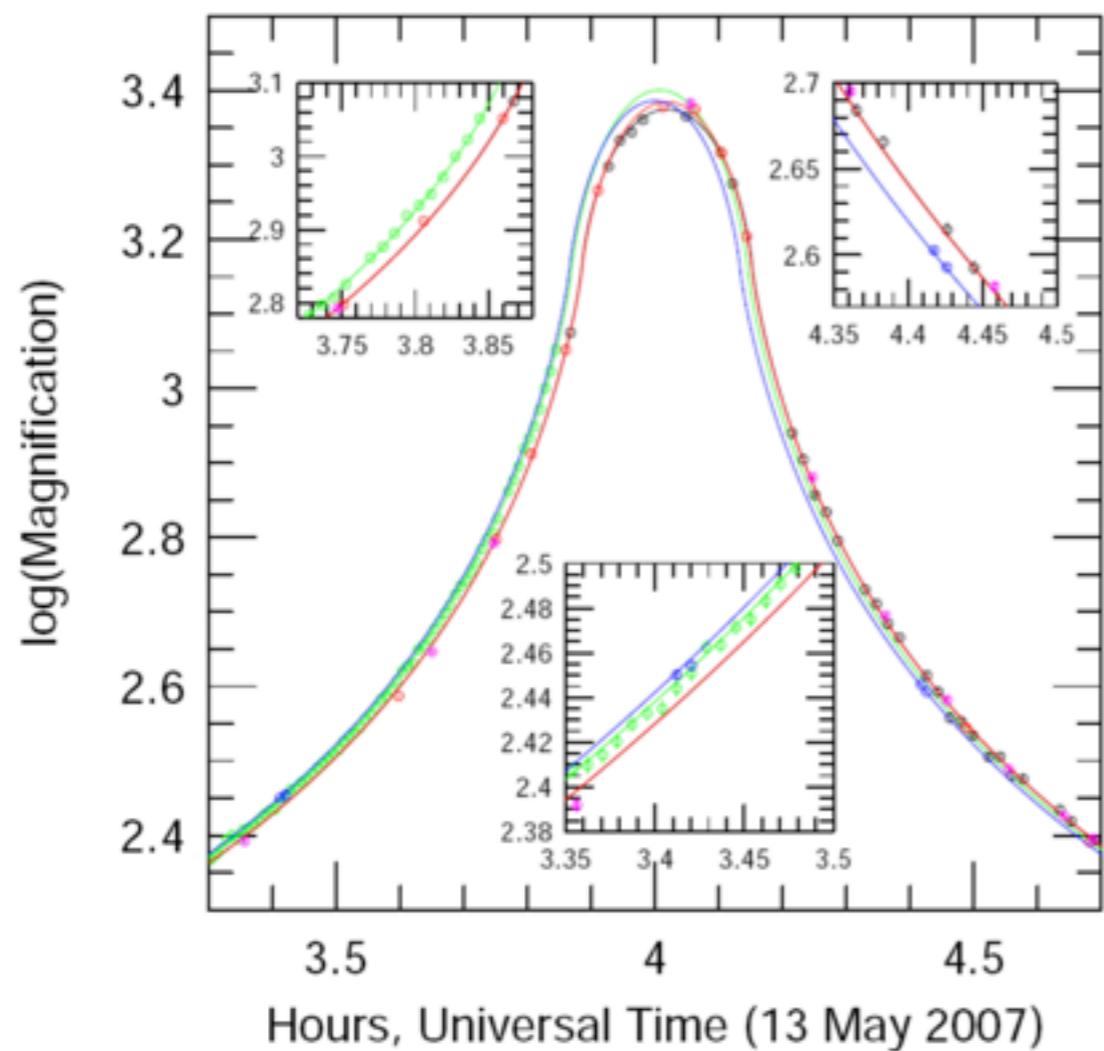
D_{\perp} : separación entre los observatorios en la dirección perpendicular a la linea de visión

$\Delta t_0, \Delta u_0$: diferencias entre los parámetros medidos de las dos curvas de luz

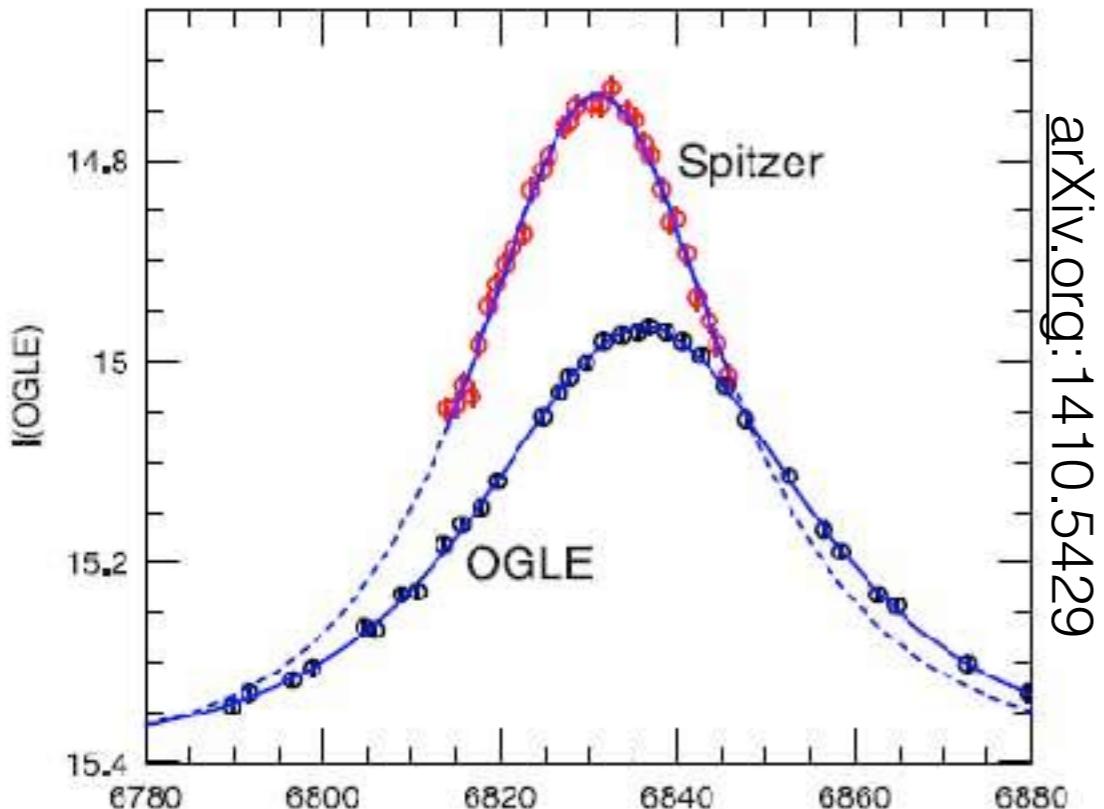
Paralaje por diferentes puntos de observación

OGLE-2007-BLG-224

Canaries South Africa Chile

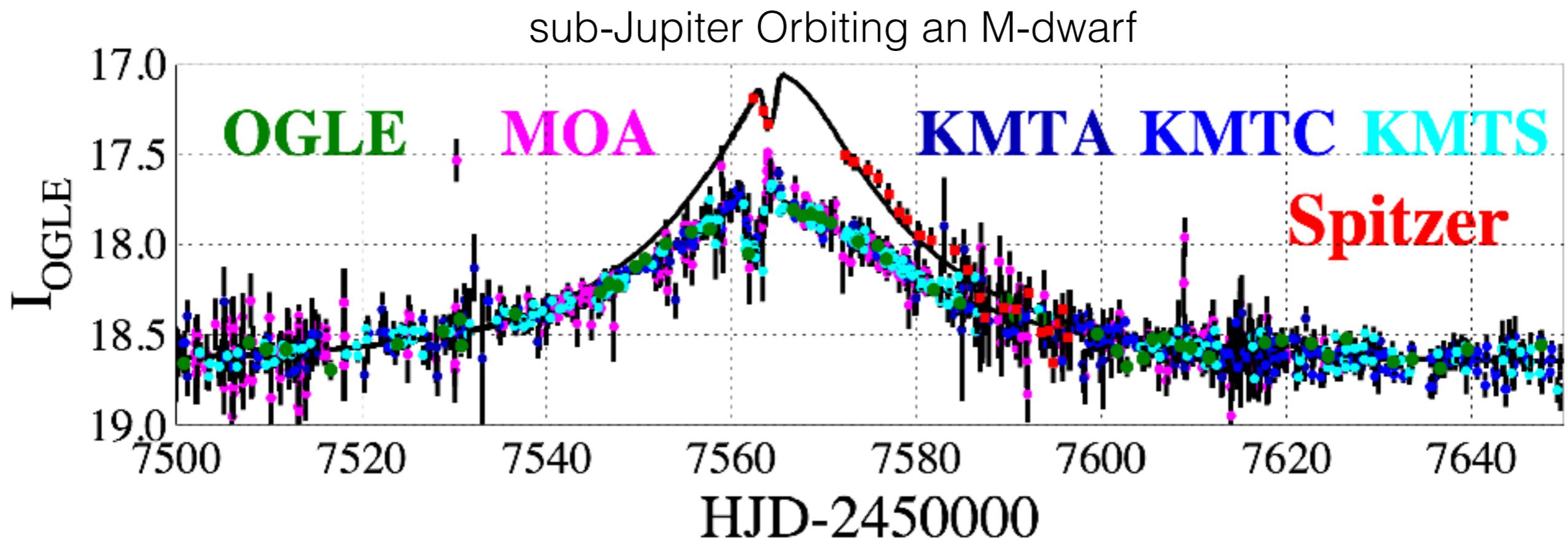


Paralaje satelital

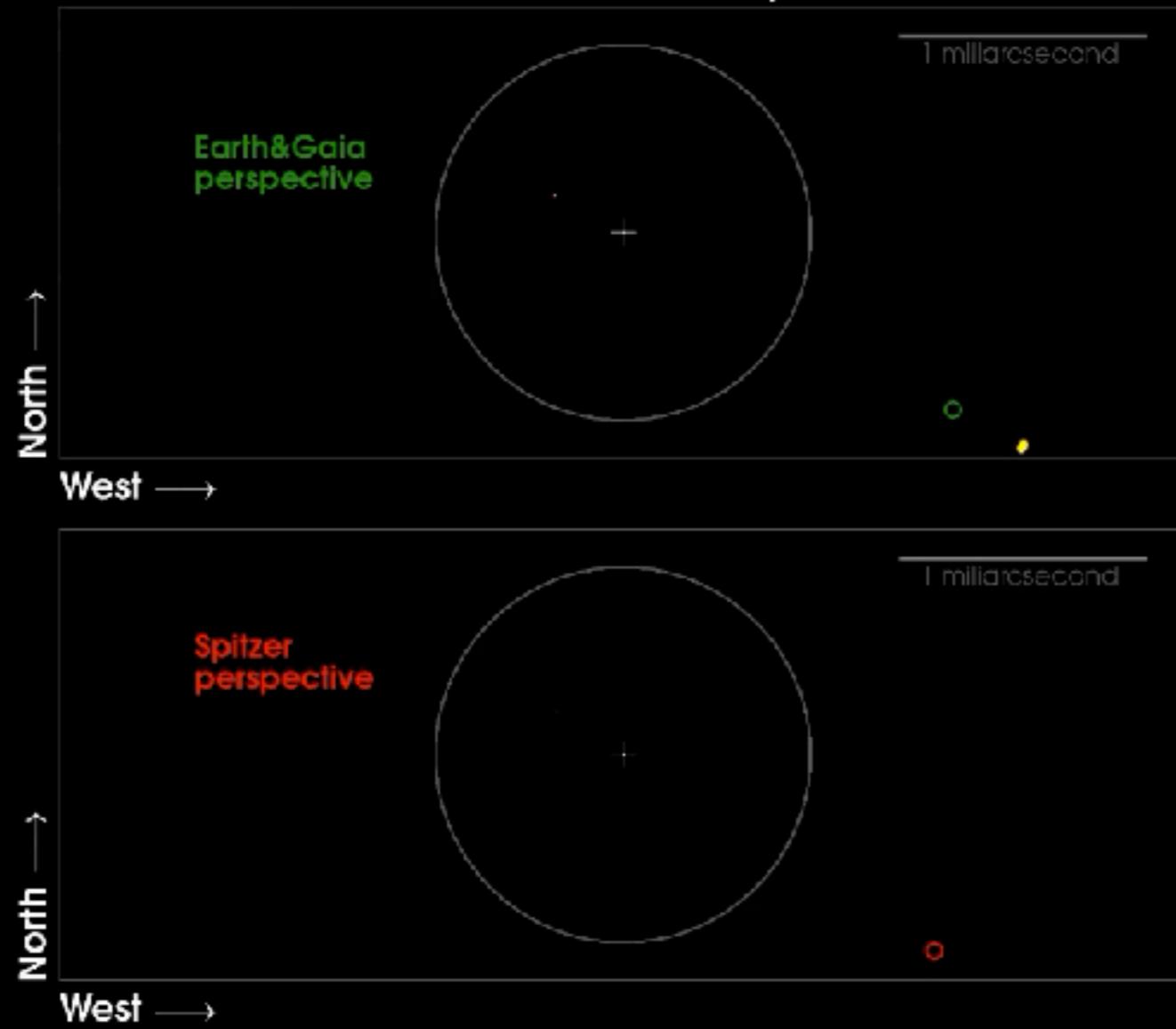


$$\pi_E = \frac{1}{D_\perp} \left(\frac{\Delta t_0}{t_E}, \Delta u_0 \right)$$

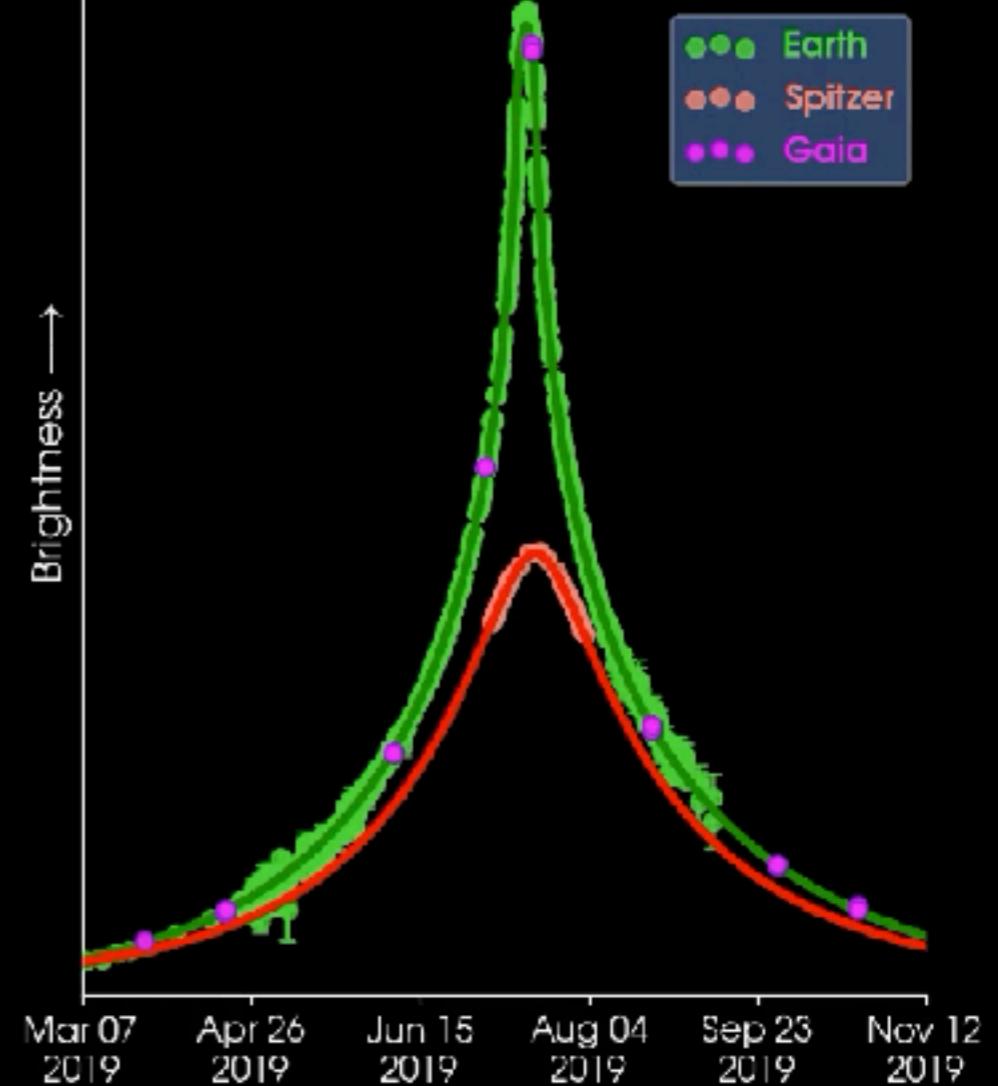
$\Delta t_0, \Delta u_0$: se pueden medir directamente a partir de las curvas de luz



Source-lens relative trajectories



Brightness time evolution



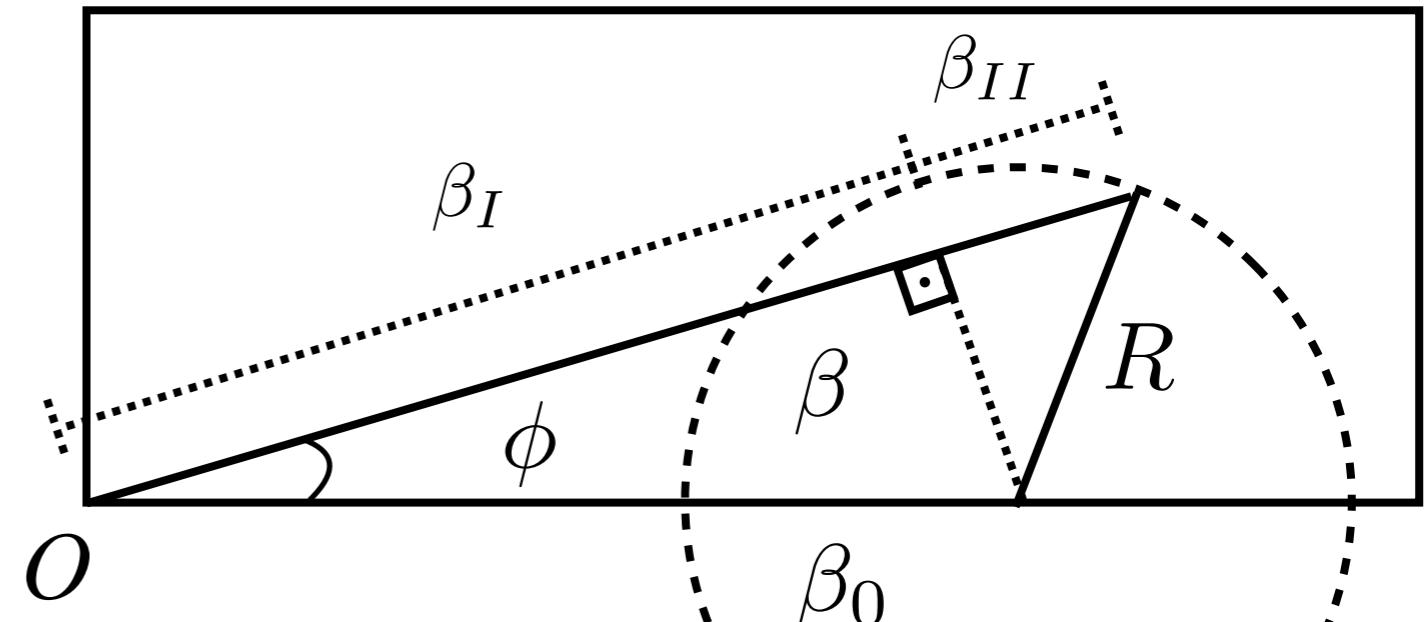
Fuente circular

Fuente circular de radio R a una distancia β de la lente en el eje x

$$\beta = \beta_I + \beta_{II}$$

$$\beta_I = \beta_0 \cos \phi$$

$$\beta_{II}^2 + (\beta_0 \sin \phi)^2 = R^2$$



Ecuación del círculo no centrado en el origen:

$$\beta = \beta_0 \cos \phi \pm \sqrt{R^2 - \beta_0^2 \sin^2 \phi}$$

Valores extremos de ϕ :

$$\phi_{\min, \max} = \pm \arcsin \left(\frac{R}{\beta_0} \right)$$

Fuente circular

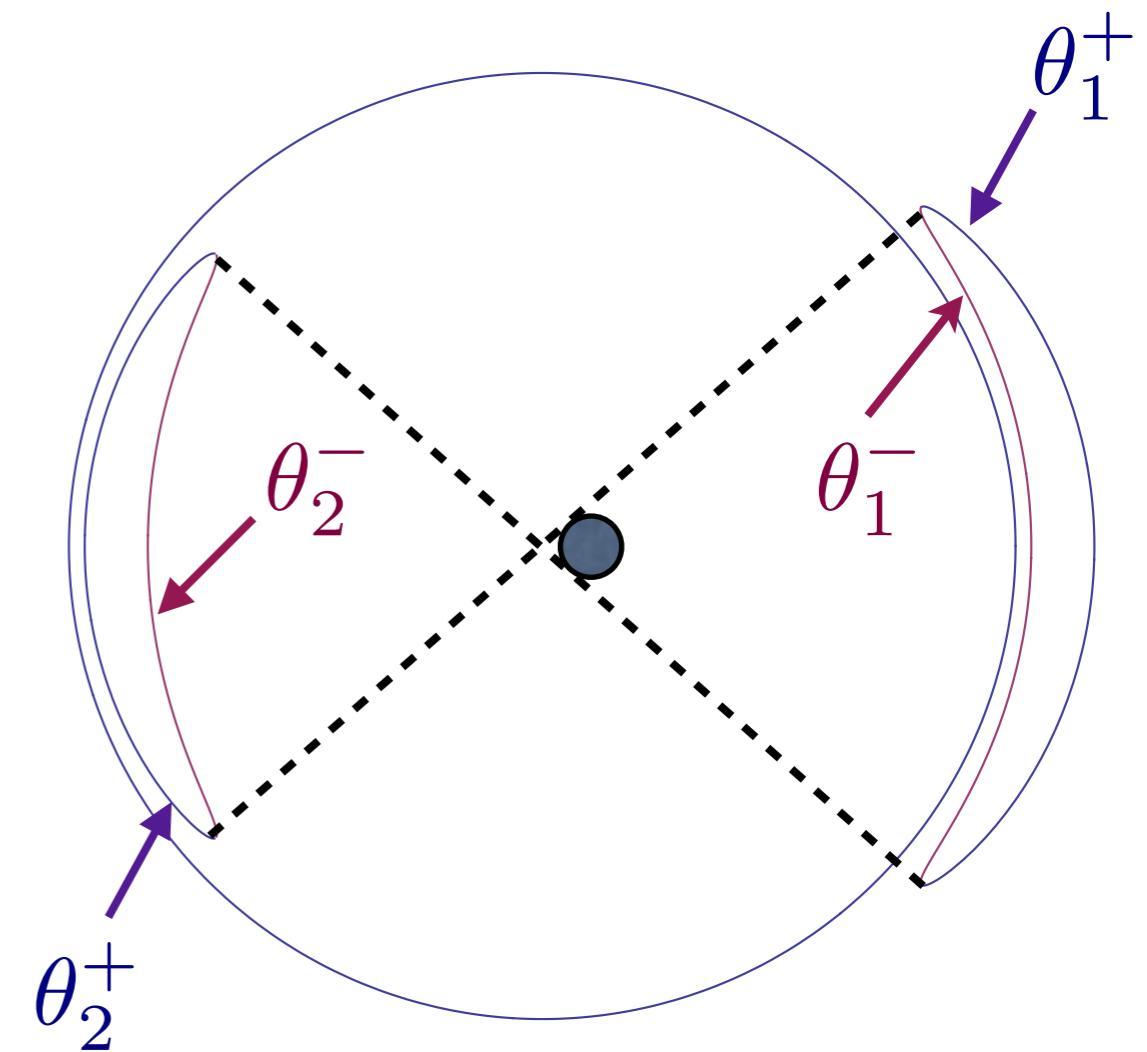
Soluciones de la lente puntual (mapeo de las coordenadas)

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

Fuente circular en el eje x :

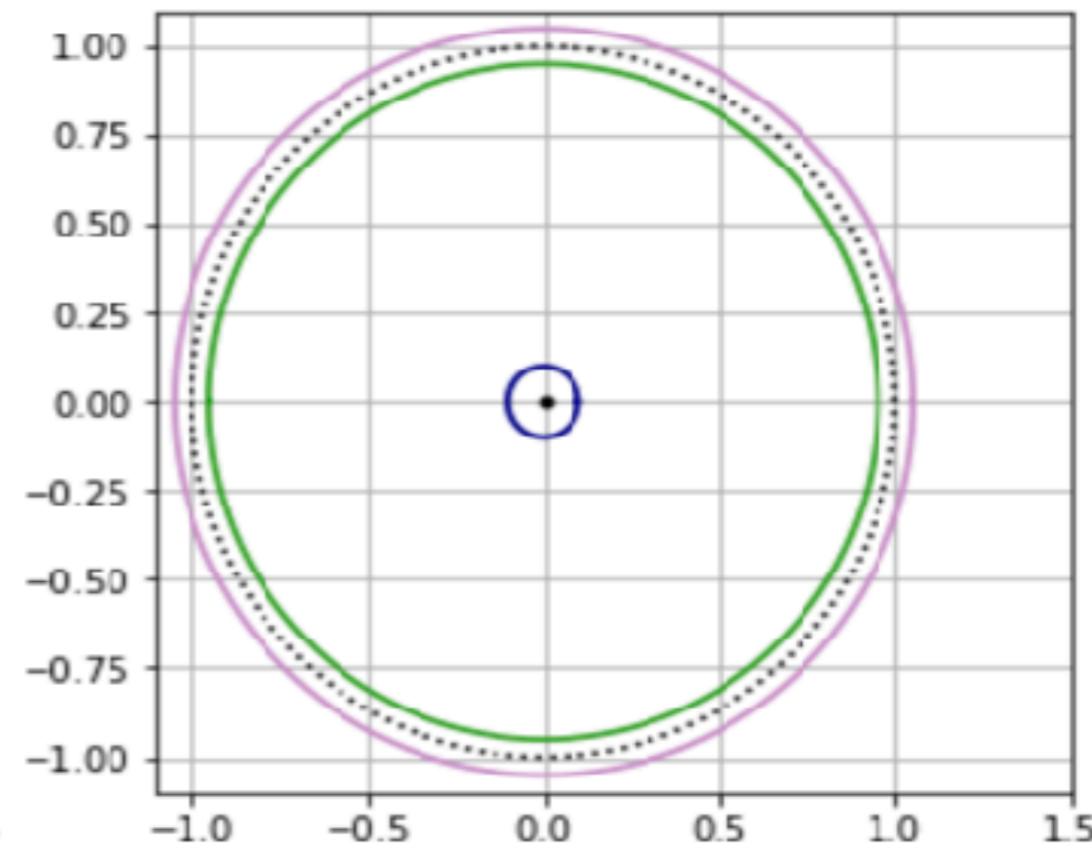
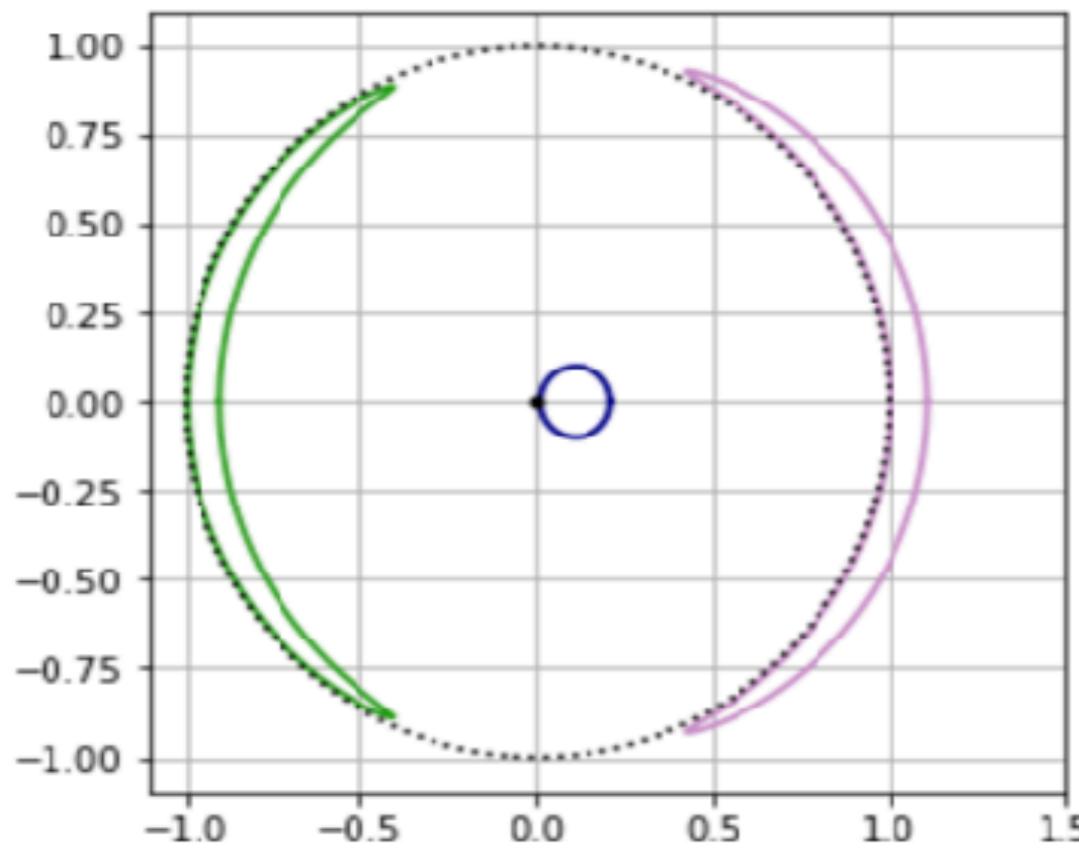
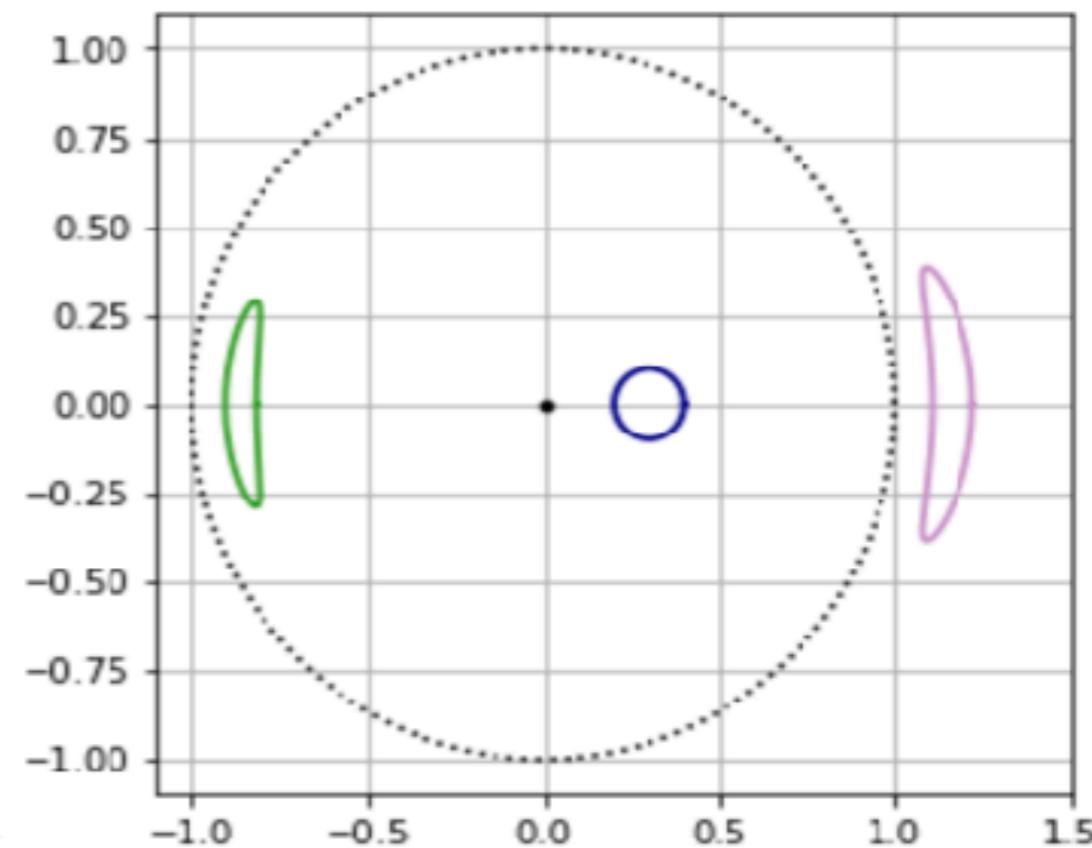
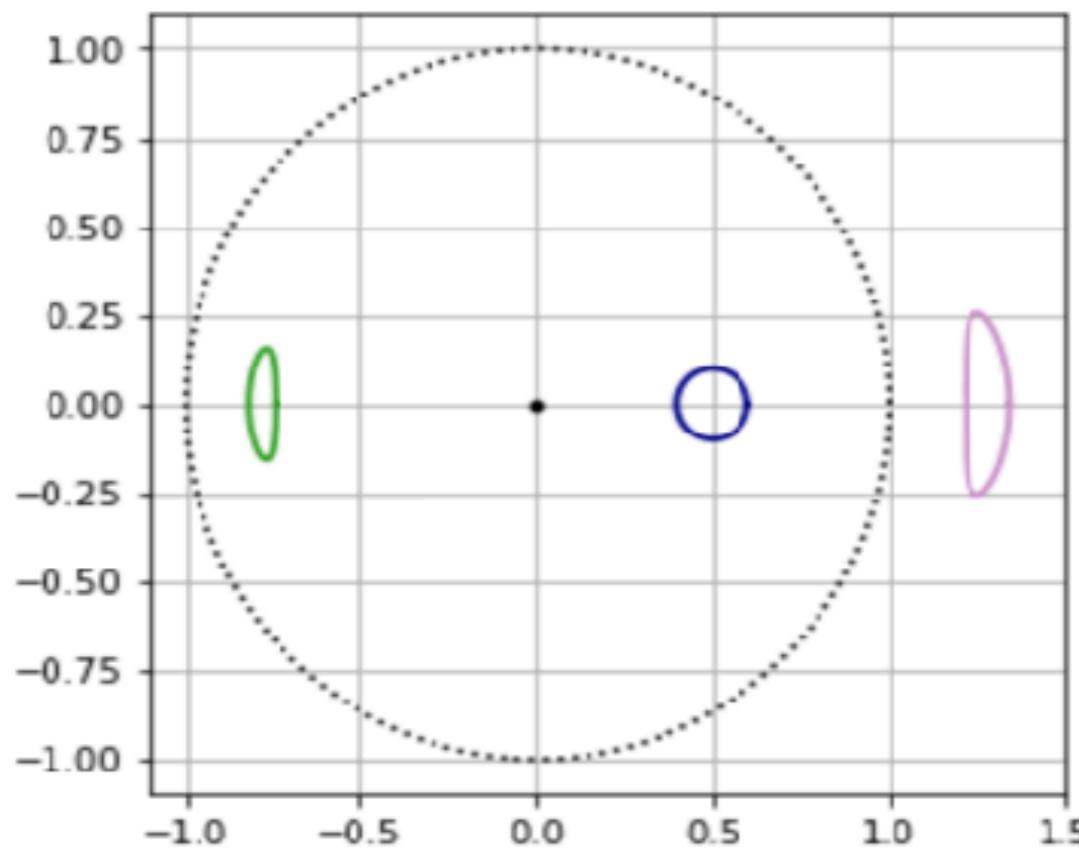
$$\beta = \beta_0 \cos \phi \pm \sqrt{R^2 - \beta_0^2 \sin^2 \phi}$$

Barriendo ϕ se construyen las imágenes



Ejercicio: hacer las gráficas

— x_1 — x_2 θ_E — Fonte circular • Lente

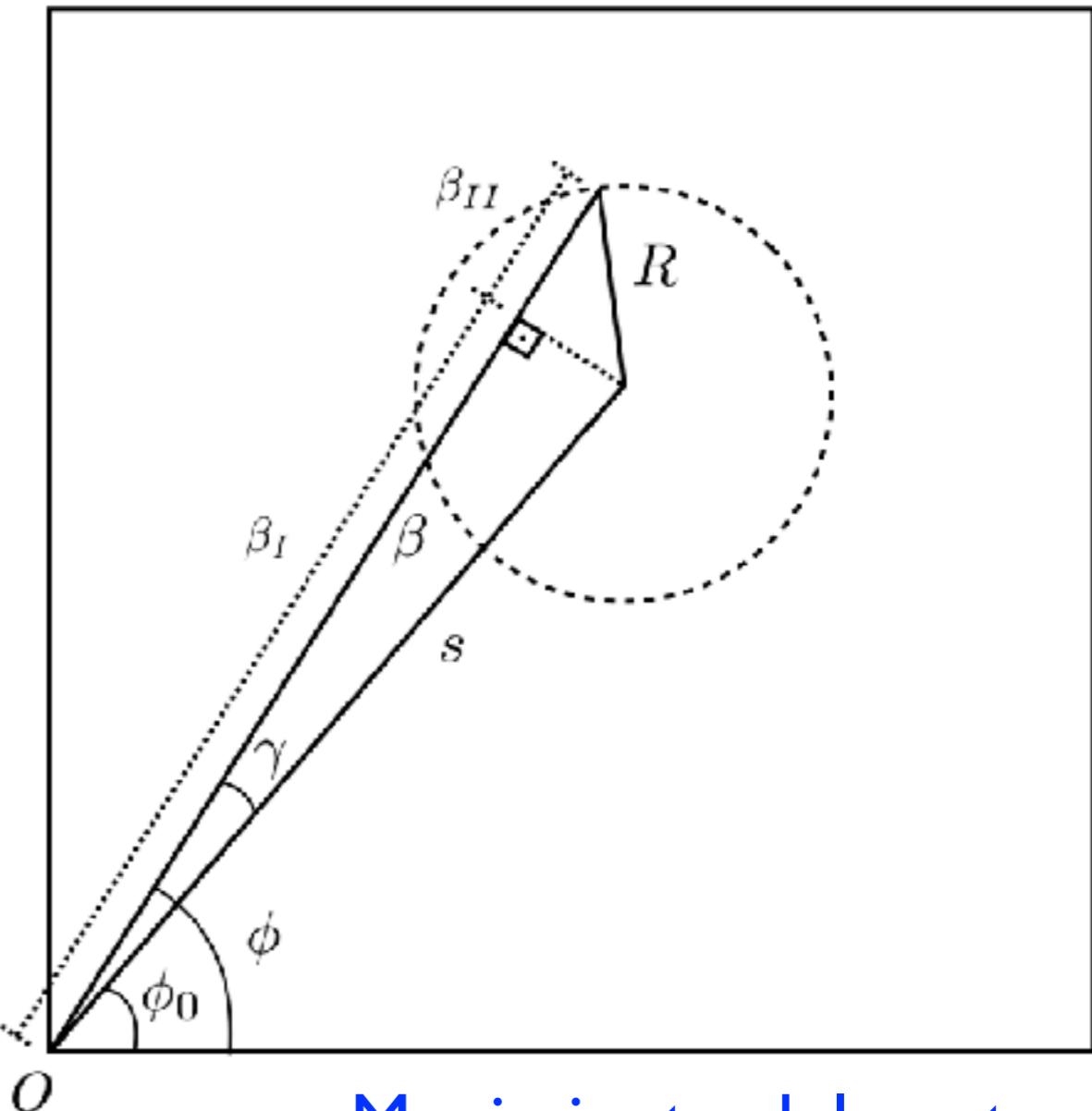


Giulya Souza

Fuente circular

- Ejercicio: obtener las imágenes para una fuente circular con orientación arbitraria
- Opcional: hacer una animación con la solución
- Usar coordenadas adimensionales y definir

$$r = \frac{R}{R_E} = \frac{R}{D_{OS} \theta_E} = \frac{\theta_R}{\theta_E}$$



- *Tip:* la fuente se puede escribir como:

$$\beta = \beta_0 \cos(\phi - \phi_0) \pm \sqrt{R^2 - \beta_0^2 \sin^2(\phi - \phi_0)} \quad \beta_0(t), \phi_0(t)$$

Movimiento del centro de la fuente:

Formalismo de números complejos

- Variables (adimensionales) complejas:

$$x = \frac{\theta_x + i\theta_y}{\xi_0} \quad y = \frac{\beta_x + i\beta_y}{\eta_0}$$

- Normalizando por el radio de Einstein:

$$x = \frac{\theta_x + i\theta_y}{\theta_0} \quad y = \frac{\beta_x + i\beta_y}{\theta_0}$$

- Mostrar que la Jacobiana del mapeo queda dada por

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right|^2$$

Formalismo de números complejos

- Variables (adimensionales) complejas:

$$x = \frac{\theta_x + i\theta_y}{\theta_0} \quad y = \frac{\beta_x + i\beta_y}{\theta_0}$$

- Mostrar que la ecuación de la lente puntual se puede escribir como

$$y = x - \frac{1}{\bar{x}}$$

- Y que la solución es

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{|y|^2}} \right)$$

Fuente circular en el formalismo de números complejos

Fuente circular:

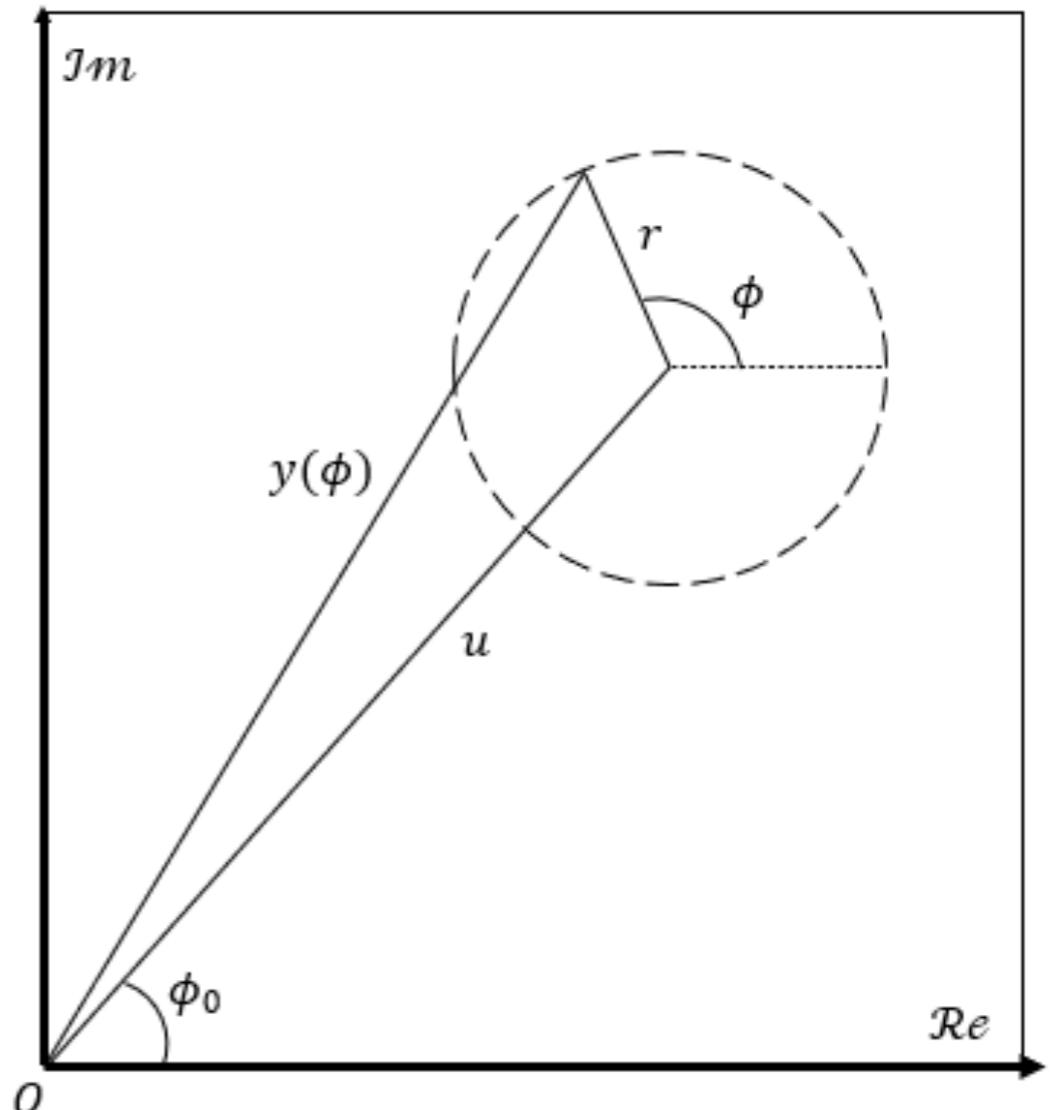
$$y(\phi) = ue^{i\phi_0} + re^{i\phi}$$

Reemplazando en la solución de la ecuación de la lente

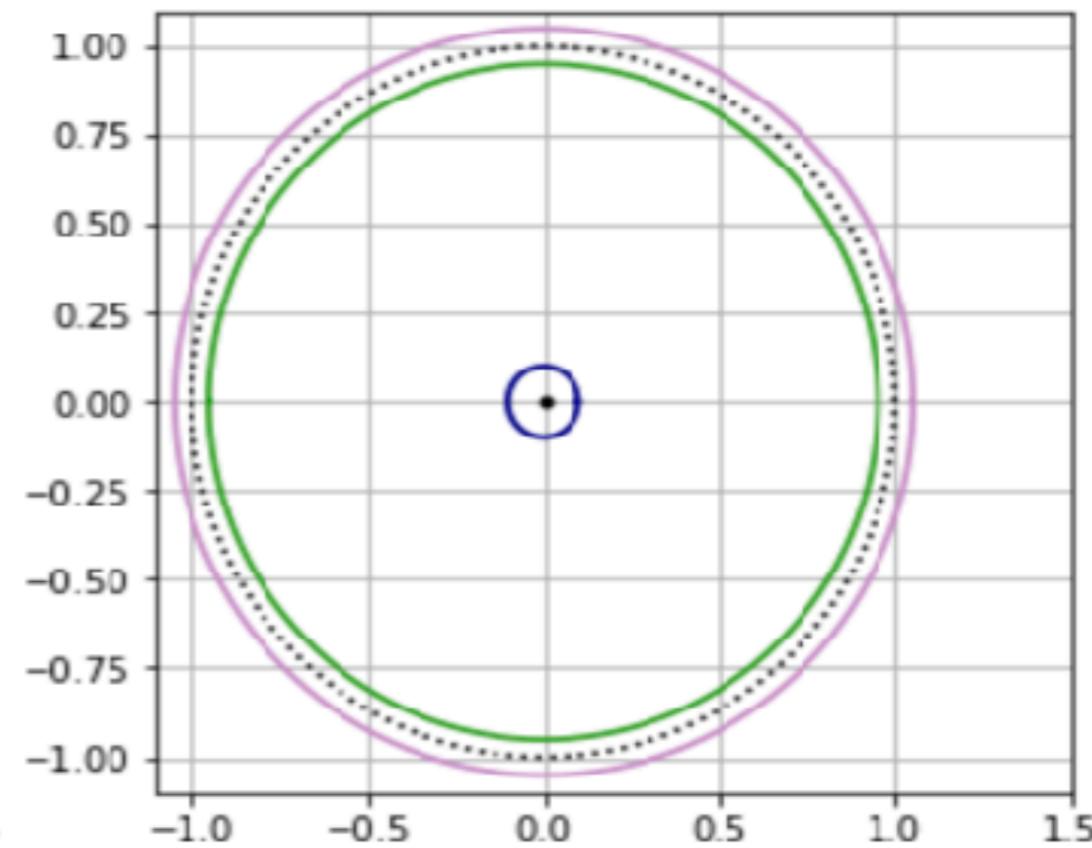
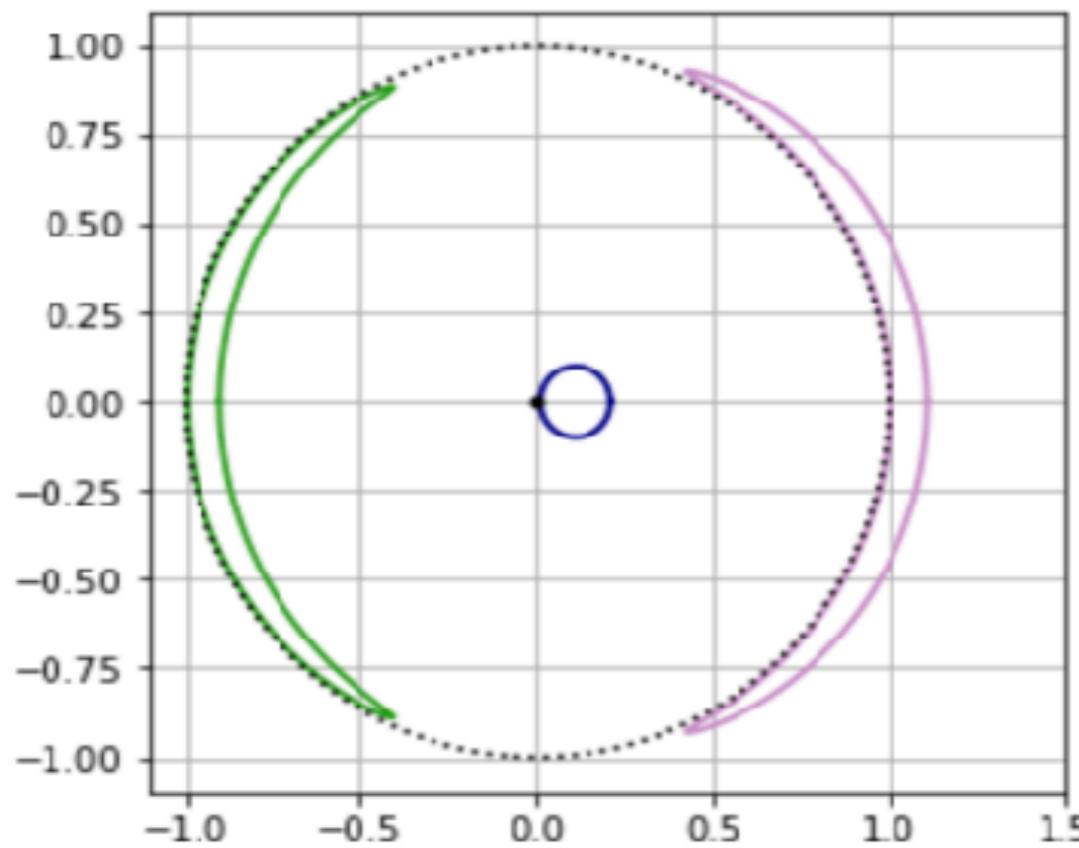
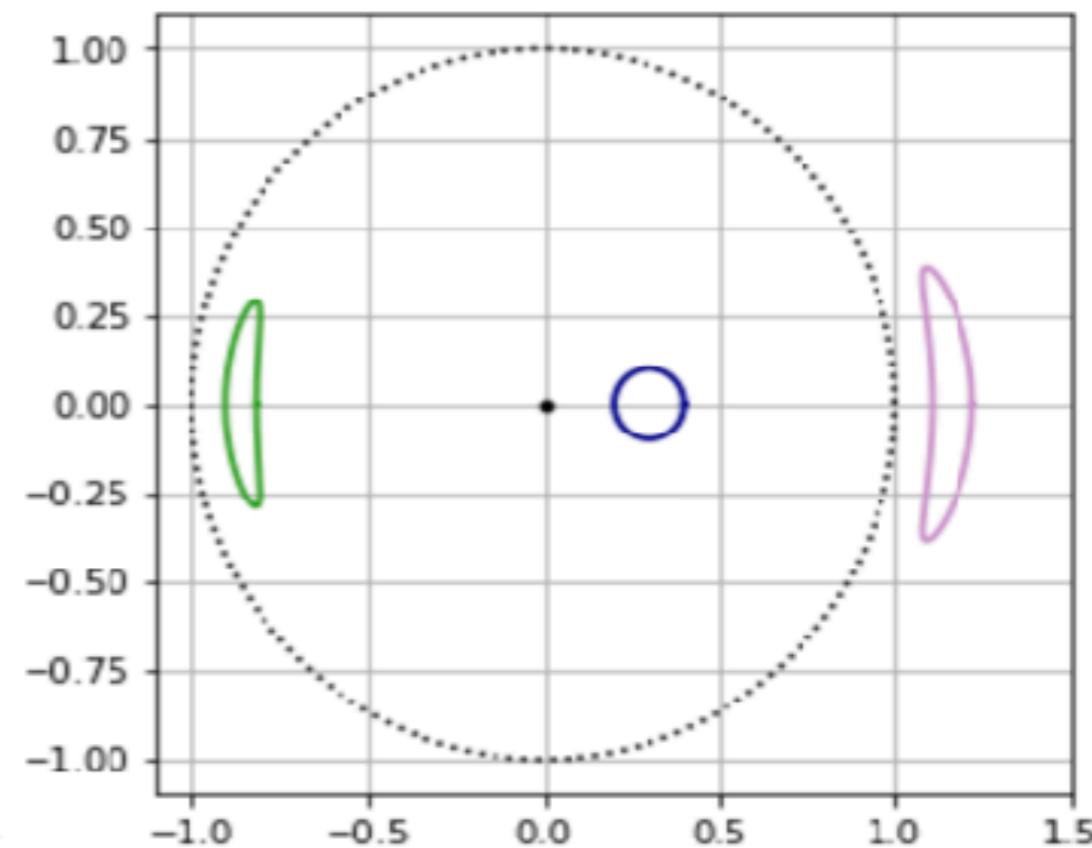
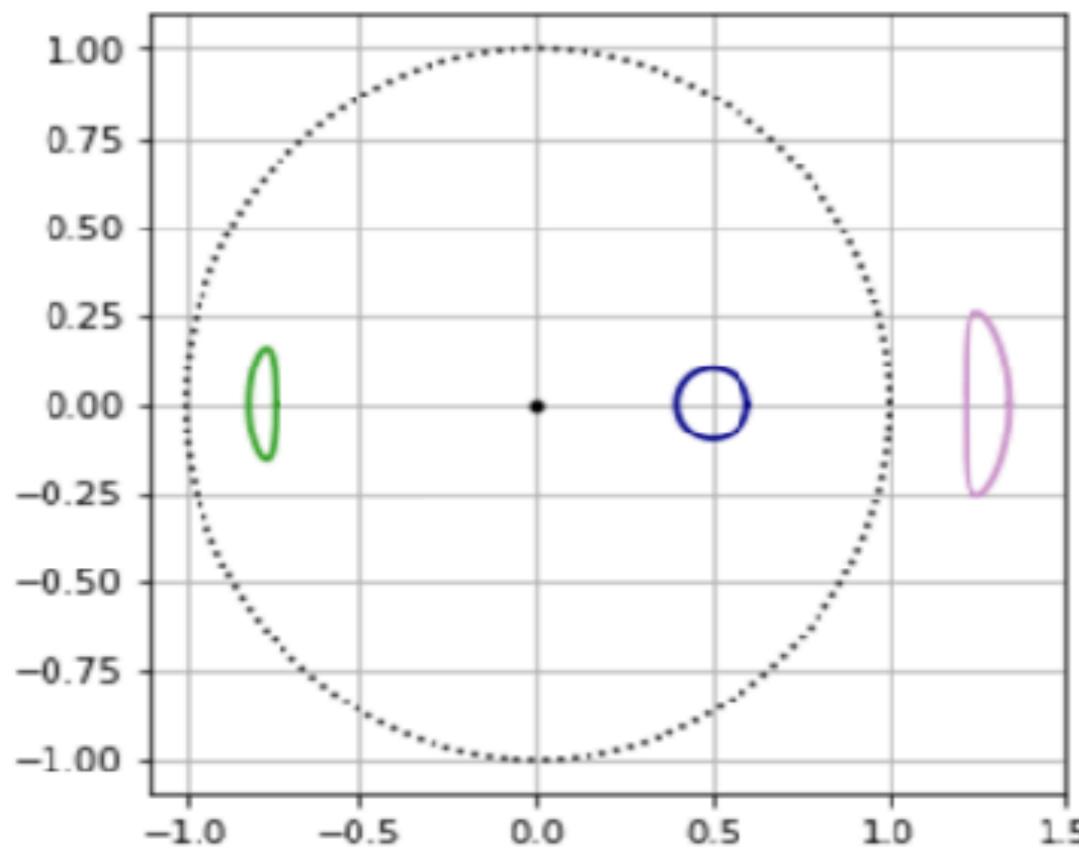
$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{|y|^2}} \right)$$

tenemos, simplemente

$$x_{1,2}(\phi) = \frac{ue^{i\phi_0} + re^{i\phi}}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{u^2 + 2ru \cos(\phi - \phi_0) + r^2}} \right)$$



— x_1 — x_2 θ_E — Fonte circular • Lente



Giulya Souza

Cálculo de la magnificación

- Conservación del brillo superficial

$$\mu = \frac{A_{\text{imagen}}}{A_{\text{fuente}}} = \frac{A_{\text{imagen}}}{\pi \rho^2}$$

Separando en la parte real w e imaginaria z de las imágenes

$$A_{1,2} = \int_0^{2\pi} z_{1,2}(\phi) \frac{dw_{1,2}(\phi)}{d\phi} d\phi$$

$$\mu_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{A_{\text{fuente}}} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} z_{1,2}(\phi) \frac{dw_{1,2}(\phi)}{d\phi} d\phi$$

Cálculo de la magnificación

Separando la solución de las imágenes en la parte real w e imaginaria z

$$w_{1,2}(\phi) = \frac{u \cos(\phi_0) + r \cos(\phi)}{2} f_{1,2}(\phi) \quad z_{1,2}(\phi) = \frac{u \sin(\phi_0) + r \sin(\phi)}{2} f_{1,2}(\phi)$$

$$f_{1,2}(\phi) = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{u^2 + 2r u \cos(\phi - \phi_0) + r^2}}$$

y reemplazando en la magnificación

$$\mu_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{A_{\text{fuente}}} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} z_{1,2}(\phi) \frac{d w_{1,2}(\phi)}{d\phi} d\phi$$

Cálculo de la magnificación

Magnificación por fuente circular (uniforme)

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} = & \frac{1}{2\pi} \left[\pm \pi - K \left(\frac{\pi}{2}, m \right) \frac{(u-r)}{r^2} \frac{4 + (u^2 - r^2)/2}{\sqrt{4 + (u-r)^2}} + E \left(\frac{\pi}{2}, m \right) \frac{u+r}{2r^2} \sqrt{4 + (u-r)^2} \right. \\ & \left. + \Pi \left(n, \frac{\pi}{2}, m \right) \frac{2(u-r)^2}{r^2(u+r)} \frac{1+r^2}{\sqrt{4 + (u-r)^2}} \right], \quad |u| \neq r\end{aligned}$$

$$n = \frac{4ur}{(u+r)^2} \quad \text{y} \quad m = \sqrt{\frac{4n}{4 + (u-r)^2}} .$$

caso en que el borde de la fuente toca el centro de la lente

$$\mu = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{r} + \frac{1+r^2}{r^2} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsen \left(\frac{r^2-1}{r^2+1} \right) \right] \right\}, \quad |u| = r$$

Cálculo de la magnificación

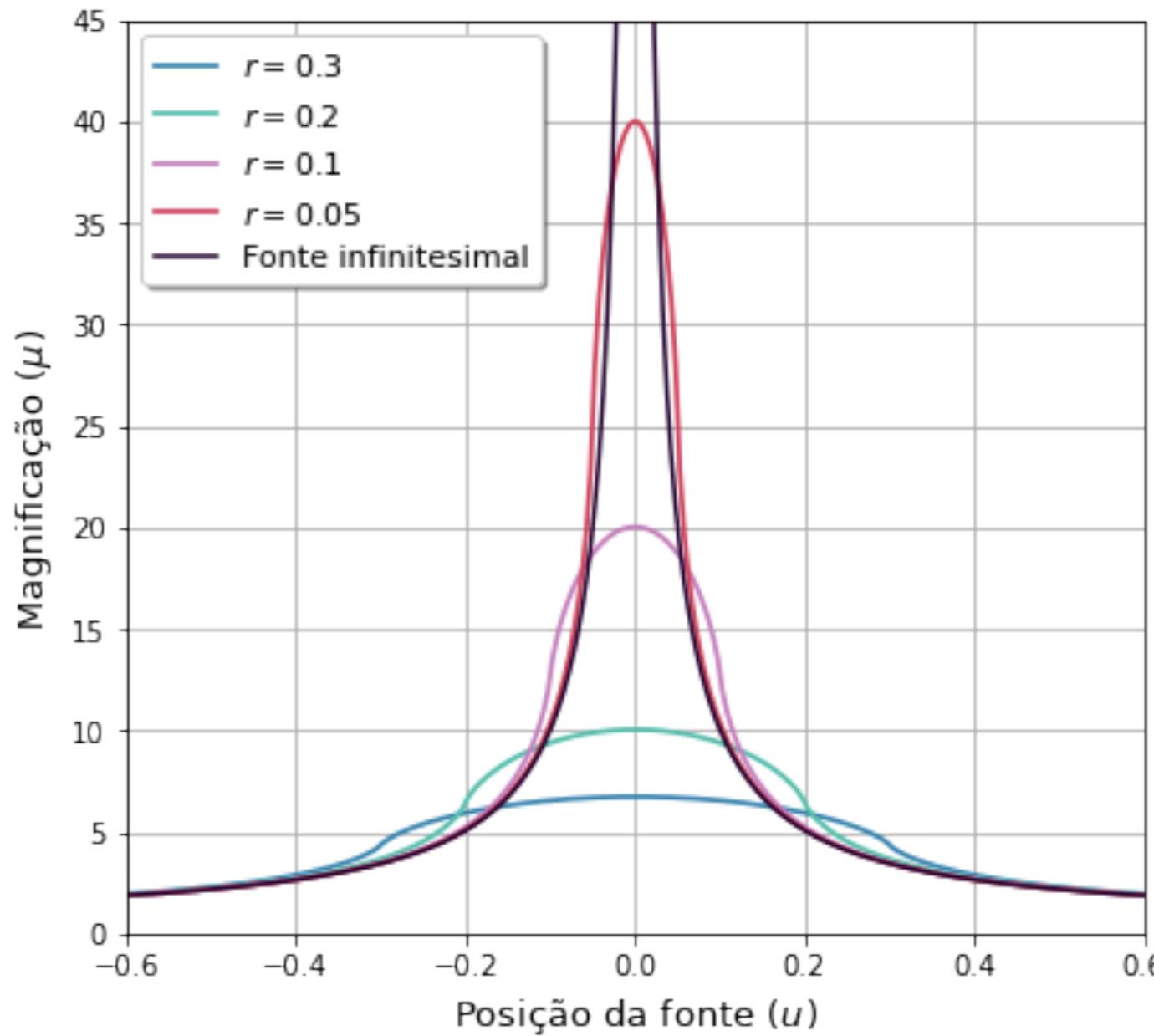
Lente y fuente perfectamente alineadas,

$$|u| = 0:$$

$$\mu_{\max} = \frac{\sqrt{4 + r^2}}{r}$$

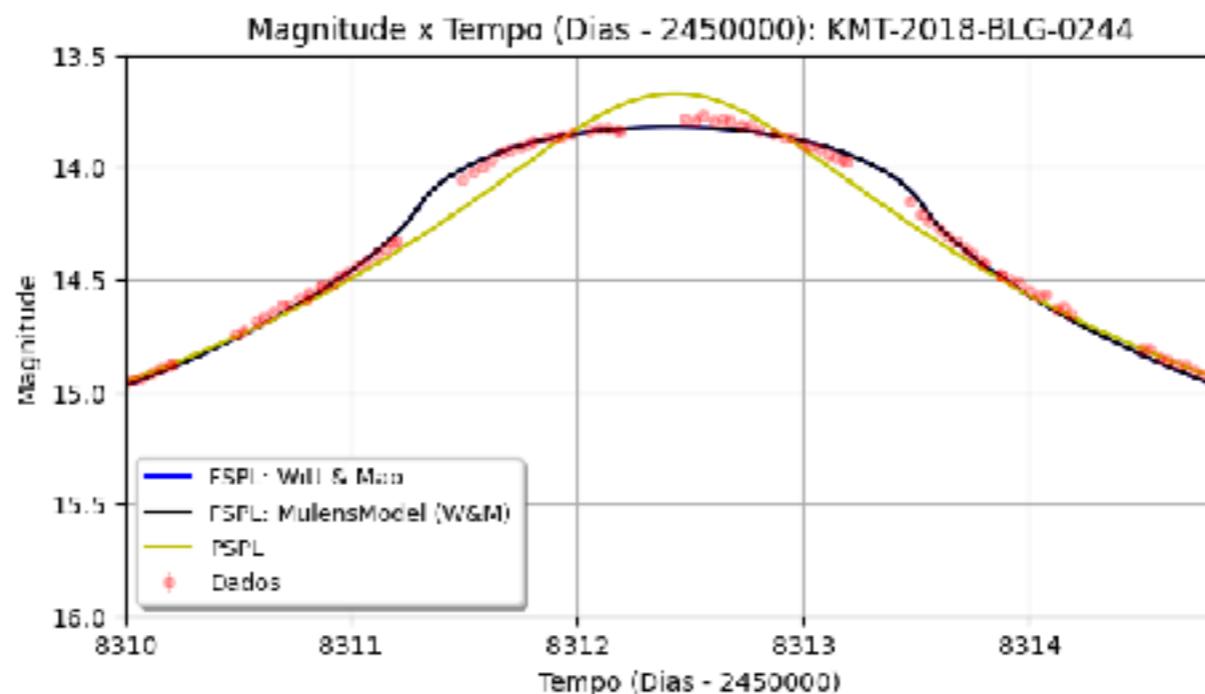
El efecto de fuente finita es importante cuando

$$u \lesssim r$$



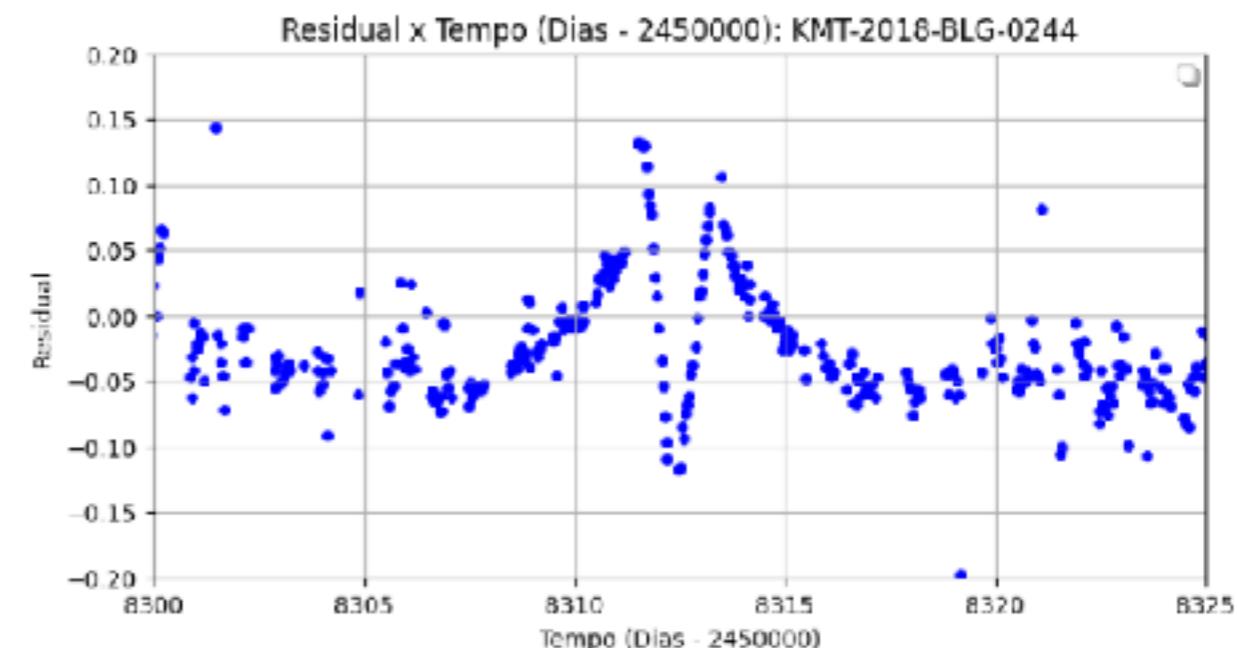
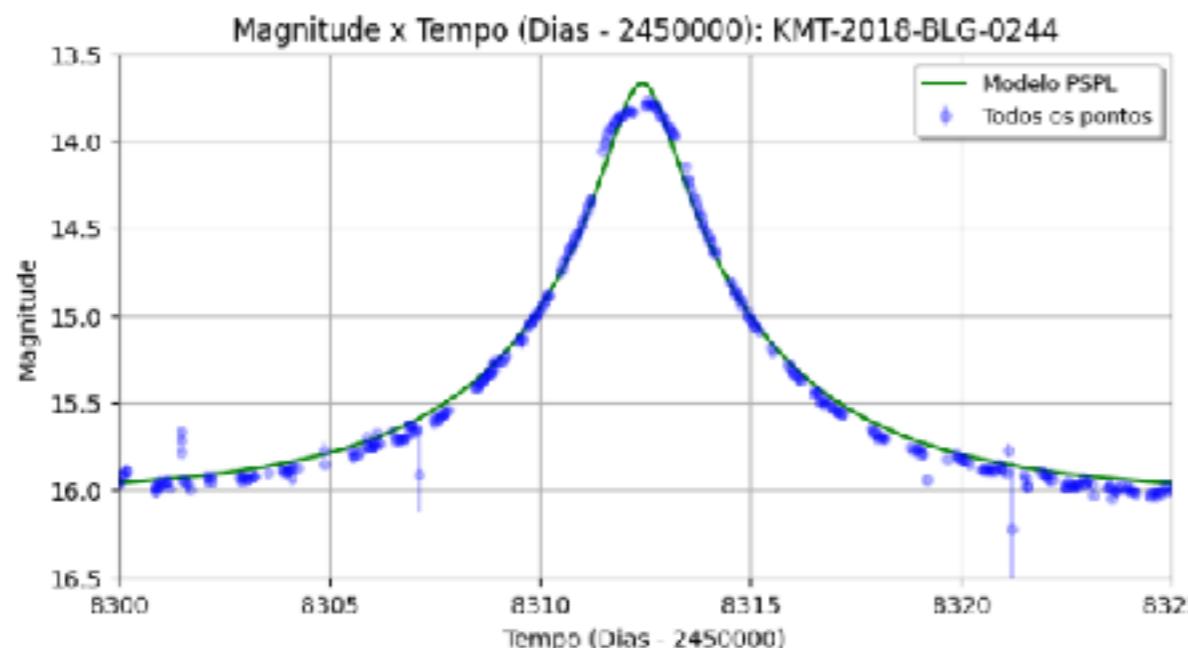
Efecto de fuente finita

- Efecto en la curva de luz



José Pereira da Silva Neto

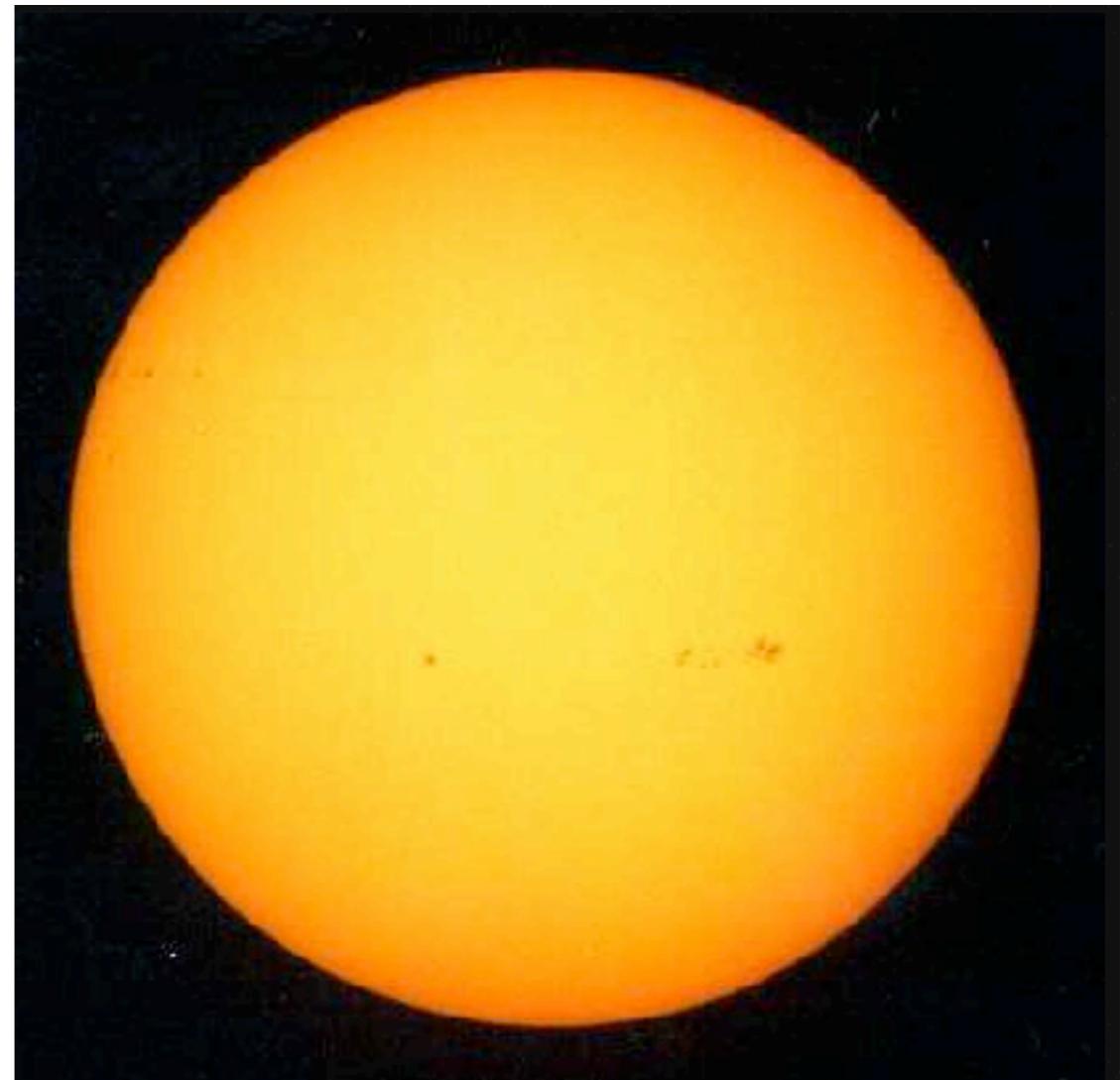
- Residuales de ajuste por fuente puntual



Oscurecimiento de borde

Limb darkening

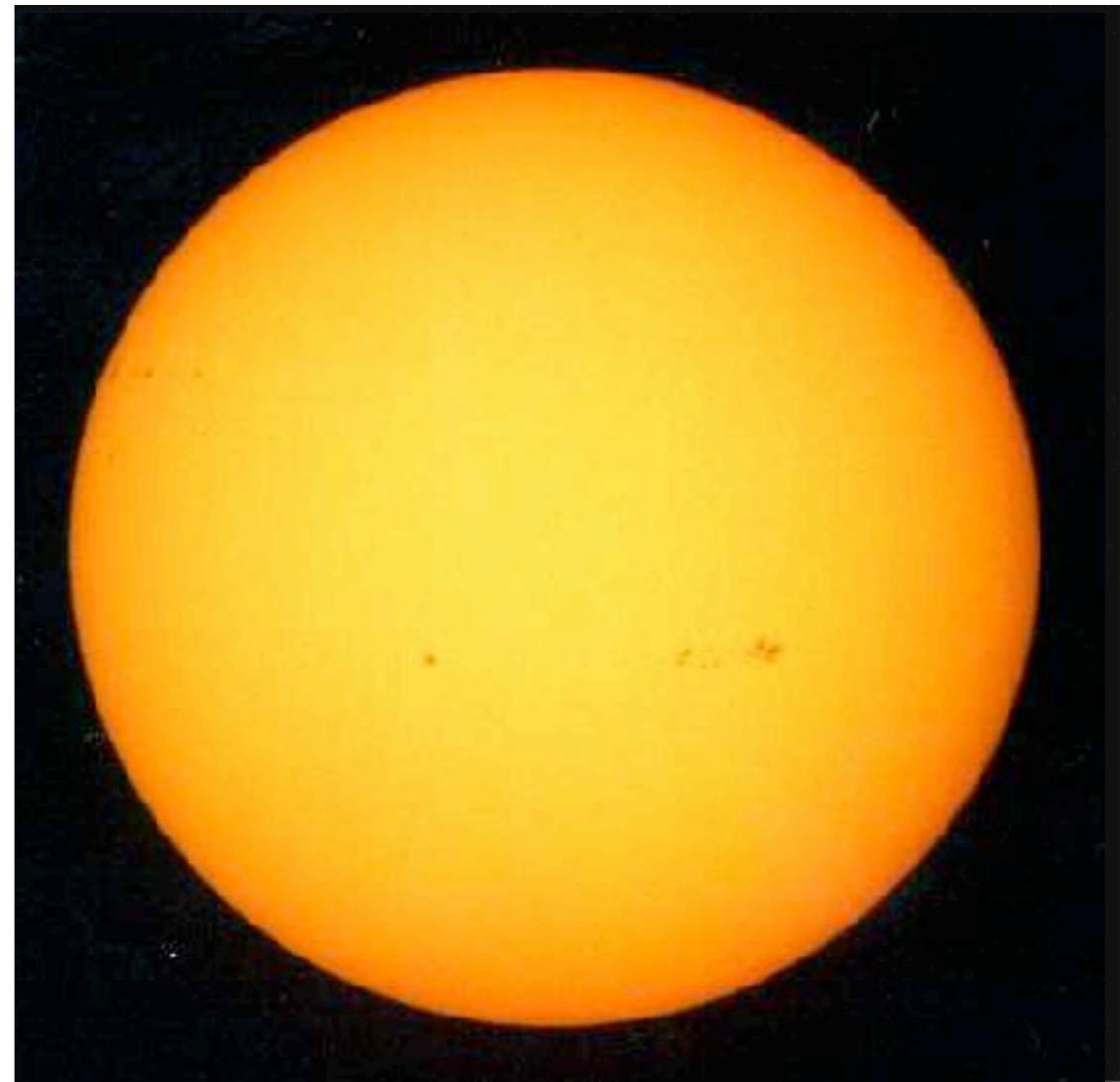
- Los bordes del Sol (y de otras estrellas) son oscurecidos respecto al centro
- Razón: la temperatura de la estrella varia con la distancia al centro
- Efecto cromático!
- Importante en microlensing! las cáusticas cruzan una región pequeña de la fuente!
- Efecto a tomar en cuenta
- *Microlensing* es una forma de **medir** el *limb darkening*!



Oscurecimiento de borde

Limb darkening

- Los bordes del Sol (y de otras estrellas) son oscurecidos respecto al centro
- Razón: la temperatura de la estrella varia con la distancia al centro
- Modelos teóricos para la dependencia radial del brillo
- Se usan expansiones empíricas
- Coeficientes dependen de la longitud de onda



ejemplo:
$$\frac{I_\lambda(\rho)}{I_\lambda(0)} = 1 - u_\lambda \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_\star} \right)^2} \right]$$

Microlensing con *limb darkening*

- La llave son las cáusticas! Solo una fracción de la estrella es muy magnificada!
- Magnificación

$$\mu_\lambda = \frac{\int_0^R I_\lambda(\rho) \bar{\mu}_{\text{anillo}}(\rho) \rho d\rho}{\int_0^R I_\lambda(\rho) \rho d\rho}$$

y podemos escribir

$$\bar{\mu}_{\text{anillo}}(\rho) = \frac{dA_{\text{imagen}}}{dA_{\text{fuente}}} = \frac{d(\bar{\mu}_{\text{circ}} \pi \rho^2)}{2\pi \rho d\rho}$$

Microlensing con *limb darkening*

$$\mu_\lambda = \int_0^R I_\lambda(\rho) \frac{1}{2\pi\rho} \frac{d(\pi\rho^2 \mu_{\text{circ}})}{d\rho} \rho d\rho \left[\int_0^R I_\lambda(\rho) \rho d\rho \right]^{-1}$$

- Se aproxima, con el método de integración de contorno por una suma en anillos:

Bozza (2010) MNRAS, 408.4, 2188, Bozza (2018) MNRAS 479.4, 5157

$$\mu_\lambda \approx \sum_i^N f_i (\mu_i \eta_i^2 - \mu_{i-1} \eta_{i-1}^2) \quad \eta_i = \rho_i / R$$

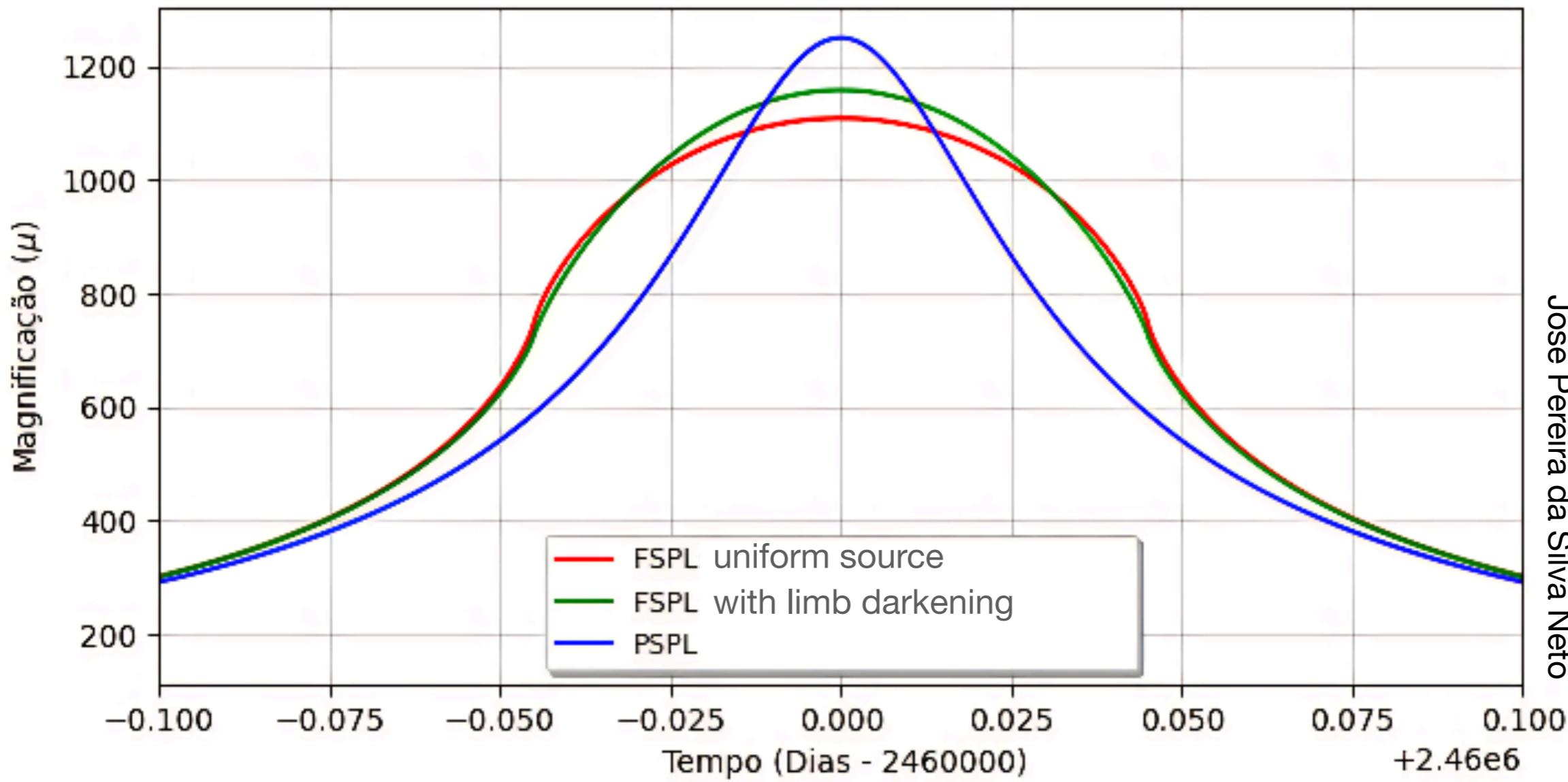
$$f_i = \frac{F(\eta_i) - F(\eta_{i-1})}{\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2} \quad \text{y} \quad F(\eta) = 2 \int_0^\eta \eta' I_\lambda(\eta') d\eta'$$

μ_i es la magnificación de un disco de radio ρ_i

Microlensing con *limb darkening*

$$\mu_\lambda \approx \sum_i^N f_i (\mu_i \eta_i^2 - \mu_{i-1} \eta_{i-1}^2)$$

$$\frac{I_\lambda(\rho)}{I_\lambda(0)} = 1 - u_\lambda \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_\star} \right)^2} \right]$$



José Pereira da Silva Neto

Lentes binarias

- Ejercicio: mostrar que la ecuación de la lente binaria

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \mu_A(\vec{\theta} - \vec{\theta}_A) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_A|^2} - \mu_B(\vec{\theta} - \vec{\theta}_B) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_B|^2}$$

con

$$\mu_i = \frac{M_i}{M_1 + M_2}$$

θ_E : radio (angulo) de Einstein calculado usando la massa total $M_1 + M_2$

se puede escribir como

$$y = x - \frac{\mu_A}{\bar{x} - \bar{x}_A} - \frac{\mu_B}{\bar{x} - \bar{x}_B}$$

Lentes binárias

- Usando la ecuación de la lente binaria

$$y = x - \frac{\mu_A}{\bar{x} - \bar{x}_A} - \frac{\mu_B}{\bar{x} - \bar{x}_B}$$

- Obtener las cáusticas y curvas críticas a partir de

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right|^2 = 0$$

Todo junto en un evento...

