Lentes gravitacionales
en astrofísica y cosmología

Actividad Práctica 1

1. [Opcional] Algunos pasos para obtener la desviación de la luz por una fuente puntual (Schwarzschild) en relatividad general (siguiendo el camino del libro Mollerach y Roulet)

   Demuestre que extremizar la acción de uma partícula libre es equivalente a extremizar $(ds/d\lambda)^2$. *Tip*: elijiendo λ como parámetro afin, $ds/d\lambda$ e constante **a lo largo de la trayetória**.

   Muestre que la propagación de un fotón en el campo de una masa puntual ocurre en un plano. *Tip*: use las ecuaciones de Euler-Lagrange para $(ds/d\lambda)^2$, elija como condición inicial $\theta = \pi/2$ y muestre que, en ese caso $\dot{\theta} = const.$ a lo largo de la trayectória.

   Muestre que la desviación de la luz, del infinito al punto de máxima aproximación es dado por:

   $$\Delta\phi := \phi_m - \phi_\infty = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{2GM}{r_m c^2}(1 - x^3)}}, \tag{1}$$

   donde $x := r_m/r$ y r_m es la distancia de máxima aproximación (i.e. parámetro de impacto).

   Muestre que el ángulo de deflexión puede ser escrito cómo $\hat{\alpha} = 2\Delta\phi - \pi$.

2. Solución exacta versus aproximación de campo débil

   Calcule numéricamente el ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$ sin hacer la aproximación de campo débil ($r_m \ll R_S := 2MG/c^2$). Haga una gráfica de $\hat{\alpha} \times r_m/(2R_S)$ en función de (r_m/R_S) para ilustrar el comportamiento del ángulo de desviación próximo al radio de Schwarzschild.

3. Ángulo de deflexión via teorema de Fermat

   Según la argumentación heurística hecha en clase, podemos asociar la propagación de la luz en un espacio-tiempo curvo a la propagación de la luz en un medio material con índice de refrección n dado por;

   $$n(\vec{x}) = 1 - 2\frac{\phi(\vec{x})}{c^2}. \tag{2}$$

Usando el princípio de Fermab, muestre que el ángulo de delfexión está dado por

$$\vec{\hat{\alpha}}(b) = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\perp} \phi \, \mathrm{dz} \tag{3}$$

donde z es la coordinada en la dirección que une la fuente y el observador (linea de visada, *line-of-sight*), el gradiente es tomado en el plano perpendicular a esa dirección y b es el parámetro de impacto.

Considere $\vec{x}$ dado por el potencial de una masa puntual M. Obtenga el ángulo de deflexión en ese caso.

Tip: Vea el desarrollo en las notas de Massimo Meneghetti.

4. Demuestre que el efecto de lente gravitacional preserva el brillo superficial, de forma que la magnificación es dada por la razón entre las áreas de la imágen y de la fuente. *Tip*: vea la demonstración en Petters, Lavine & Wambsganss o Mollerach e Roulet.

5. Obtenga la magnificación de las dos imágens y la magnificación total en el caso de una lente y fuente puntuales.

6. Curvas de luz de lente y fuente puntuales

   5.1 Hacer curvas de magnificación en función del tiempo en unidades de t/t_E para algunos valores de u_0. *Tip:* considerar valores de u_0 en el rango de 0.2 a 1.2.

   5.2 Considerar una fuente (estrella) situada en el bulbo de nuestra galáxia (aproximadamente el centro galáctico), una lente de una masa solar a mitad de distancia entre la fuente y la Tierra y una velocidad de la fuente de 100 Km/s. Hacer una gráfica de magnificación en función del tiempo, algunos valores de u_0, en ese caso.

7. Solución numerica usando códigos públicos

   Como suele ocurrir en todos los campos, para aplicaciones prácticas de microlentes es necesario usar códigos numericos. Para empezar a ganar alguna familiaridad con ese tema, se pide que hagan **curvas de luz de lente y fuente puntuales (*point source, point lens*, PSPL) usando alguno de los códitos disponibles públicamente**. Pueden elegir cualquiera. Algunas sugerencias: `pyLIMA`, `MulensModel`, `muLAn` o `eesunhong` (`https://github.com/rges-pit/eesunhong`).