

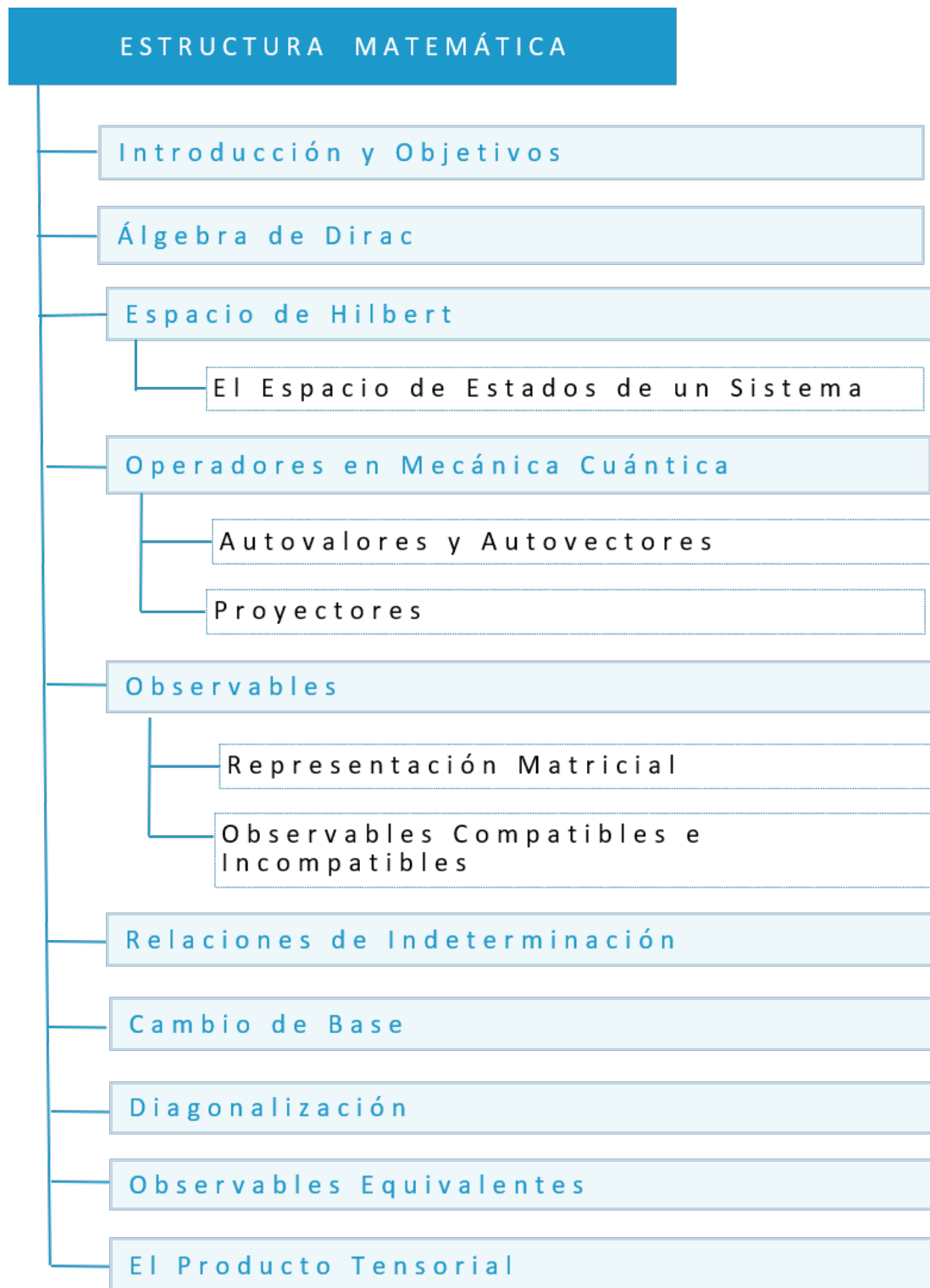
Mecánica Cuántica

---

# Estructura Matemática de la Mecánica Cuántica

# Índice

Esquema. . . . .	2
Ideas clave . . . . .	3
1.1 Introducción y objetivos . . . . .	3
1.2 Algebra de Dirac . . . . .	3
1.3 El Espacio de Hilbert . . . . .	4
1.4 Operadores en Mecánica Cuántica . . . . .	9
1.5 Observables . . . . .	14
1.6 Relaciones de Indeterminación . . . . .	19
1.7 Cambio de Base. . . . .	22
1.8 Diagonalización. . . . .	26
1.9 Observables Equivalentes. . . . .	28
1.10 El Producto Tensorial . . . . .	29



## 1.1 Introducción y objetivos

.La mecánica cuántica se basa en una estructura matemática de operadores lineales que actúan sobre espacios vectoriales complejos. En este bloque vamos a dar una visión general de los elementos matemáticos que son necesarios para abordar la estudio de la mecánica cuántica.

## 1.2 Algebra de Dirac

La notación de Dirac, conocida también como notación bra-ket es una notación habitual en mecánica cuántica que se utiliza para trabajar con los vectores que representan los estados cuánticos.

Un vector estado, por ejemplo  $\psi$  se representa mediante la notación:  $|\psi\rangle$ , denominada ket. Todo ket, tiene asociado un funcional lineal que se representa como  $\langle\phi|$ . El funcional lineal  $\langle\phi|$  opera sobre el vector  $|\psi\rangle$  dando un número complejo, es decir:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \alpha \in \mathbb{C}$$

## 1.3 El Espacio de Hilbert

El espacio de Hilbert es un espacio vectorial que puede tener cualquier dimensión, incluso dimensión infinita. Se trata de una generalización del espacio vectorial euclídeo. En mecánica cuántica, se hace uso del espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$  para representar los estados de los sistemas cuánticos.

### El Espacio de Estados de un Sistema

Vamos a abordar la mecánica cuántica desde una perspectiva postulacional, con la que estableceremos una base axiomática que nos servirá de guía para un estudio formal de la mecánica cuántica.

Definimos un sistema físico como un conjunto de elementos que tienen relación entre ellos pero que pueden ser aislados del resto del universo. Cuando el sistema esté totalmente aislado, será un sistema cerrado. Los sistemas que no están totalmente aislados y por lo tanto están expuestos al ambiente que les rodea, se dice que son sistemas abiertos y pueden estar afectados por variables externas que en el caso de que no se deseen se suelen atribuir a ruido.

Un sistema físico puede ser observado mediante procesos de medición. Cada observación del sistema constituye un estado del mismo, y en mecánica cuántica se representa mediante un vector en el espacio de Hilbert. Siguiendo la notación de Dirac, estos vectores se denominan "kets" y se representan como  $|\alpha\rangle$ . El conjunto de todos los kets o vectores de estado forma el espacio de estados del sistema.

El espacio de estados de un sistema está constituido pues, por todos los posibles estados en lo que se puede encontrar al sistema cuando se realiza una medición.

Este espacio de estados tiene estructura matemática de espacio vectorial, lo cual sig-

nifica mayormente que cualquier estado del sistema físico puede ser expresado como una combinación lineal de un conjunto de estados que constituyen lo que denominamos estados base, es decir si  $|\alpha\rangle$  es un estado del sistema, entonces  $|\alpha\rangle$  se puede expresar como:

$$|\alpha\rangle = a_1|u_1\rangle + a_2|u_2\rangle + \dots + a_n|u_n\rangle$$

donde  $|u_i\rangle$  son estados base del sistema. Un espacio vectorial puede tener distintas bases y un estado del sistema puede representarse referido a distintas bases.

El hecho de tener estructura de espacio vectorial también implica que dados dos estados del sistema  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$ , cualquier combinación de estos estados también será un estado del sistema, es decir:

$$\text{si } |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in H \Rightarrow a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle \in H \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

En mecánica cuántica, un sistema puede caracterizarse por una función de onda  $\psi$  la cual representa una amplitud de probabilidad para cada estado del sistema.

La forma de realizar una medida, consiste en obtener el cuadrado de la amplitud de probabilidad que proporciona la función de onda y tras sucesivas medidas obtener una distribución de probabilidad.

Al realizar una medida del cuadrado de la amplitud se pierde información sobre la fase de la amplitud de onda.

Un espacio de Hilbert es un espacio lineal en el que se define un producto interno que denominamos "producto hermítico" y cuyo resultado es un número complejo. Si los vectores de estado  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle \in H$ , entonces el producto hermítico se define como:

$$\langle \beta | \alpha \rangle \in \mathbb{C}$$

Los espacios de Hilbert con los que se trabaja en mecánica cuántica constan de elementos que pueden ser vectores discretos de dimensión finita, pero también pueden ser funciones, lo que vienen a ser elementos continuos de dimensión infinita. En cualquier caso, de momento nos abstraeremos de esta característica utilizando la notación bra-ket de Dirac.

En la notación de Dirac, el ket  $|\alpha\rangle$  representa un vector del espacio de Hilbert y el bra  $\langle\alpha|$  representa un operador del espacio dual de H.

Las características del espacio de Hilbert expresadas en esta notación se pueden exponer de la siguiente manera:

1.  $\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^* \quad \forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in H$
2.  $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0$
3.  $\langle \alpha | \alpha \rangle \in \mathbb{R}$
4.  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 0$  sii  $|\alpha\rangle = 0$

El producto hermítico  $\langle | \rangle$  es lineal en la segunda variable (ket) y antilineal en el bra. Es decir:

$$\begin{aligned} \langle \beta | a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 \rangle &= a_1 \langle \beta | \alpha_1 \rangle + a_2 \langle \beta | \alpha_2 \rangle \\ \langle b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 | \alpha \rangle &= b_1^* \langle \beta_1 | \alpha \rangle + b_2^* \langle \beta_2 | \alpha \rangle \end{aligned}$$

donde  $b_i^*$  es el conjugado complejo de  $b_i$ .

El producto hermítico es un elemento del cuerpo de los complejos  $\mathbb{C}$ . Podemos definir la longitud de un elemento del espacio de Hilbert calculando el producto hermítico consigo mismo. De esta forma definimos lo que se denomina norma de un vector y que denotamos por:

$$\text{Norma}(|\alpha\rangle) = \|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$$

Hemos dicho que un bra es un elemento del espacio dual del espacio de Hilbert. Por lo tanto, si al hacer el producto hermítico  $\langle\alpha|\alpha\rangle$  se obtiene un elemento del cuerpo de los complejos, resulta que los  $|\text{bra}\rangle$  son aplicaciones lineales que al aplicarlas sobre los  $|\text{ket}\rangle$  dan como resultado un número complejo.

Definimos el espacio dual  $H^*$  del espacio de Hilbert, como el espacio lineal que contiene funcionales lineales *phi* tales que:

$$\phi : H \longrightarrow \mathbb{C}$$

La relación entre el espacio de Hilbert  $H$  y su espacio dual viene establecida por el conocido Teorema de Riesz, el cual justifica el uso de la notación bra-ket que se emplea en mecánica cuántica.

### Definición 1: El Teorema de Riesz

Dado un espacio de Hilbert  $H$  y su espacio dual  $H^*$  compuesto este último por todos los funcionales lineales continuos de  $H$  en el cuerpo de los complejos  $\mathbb{C}$ . Si  $x$  pertenece a  $H$ , entonces se define el funcional lineal  $\phi_x$  como:

$$\phi_x(y) = \langle y, x \rangle \quad \forall y \in H \quad (1)$$



$\phi_x$  es un funcional que pertenece a  $H^*$ , y que se obtiene haciendo el producto interno entre dos vectores  $x$  e  $y$  de  $H$ . Un funcional lineal es una aplicación lineal de un espacio vectorial sobre su cuerpo de escalares,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , esta aplicación transforma vectores en escalares.

El Teorema de Riesz dice que cada elemento  $\phi$  de  $H^*$  puede escribirse unívocamente como el producto interno de dos elementos de  $H$ .

La función  $\phi : H \rightarrow H^*$ ,  $\phi(x) = \varphi_x$  es un anti-isomorfismo isométrico, lo cual viene a significar que:

- ▶  $\phi$  es una aplicación biyectiva.
- ▶ Las normas de  $x$  y de  $\phi(x)$  coinciden:  $\|x\| = \|\phi(x)\|$ .
- ▶  $\phi$  es aditivo:  $\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$ .
- ▶ Si el cuerpo base es  $\mathbb{R}$ , entonces  $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$  para todo número real  $\lambda$ .
- ▶ Si el cuerpo base es  $\mathbb{C}$ , entonces  $\phi(\lambda x) = \lambda^* \phi(x)$  para todo número  $\lambda$  complejo, donde  $\lambda^*$  es el complejo conjugado de  $\lambda$ . La función inversa de  $\phi$  puede ser descrita como sigue.

Dado un elemento  $\varphi$  de  $H^*$ , el complemento ortogonal del núcleo de  $\varphi$  es un subespacio unidimensional de  $H$ . Tómese un elemento diferente de cero  $z$  en el subespacio, y el conjunto  $x = \frac{z}{\|z\|}$ . Entonces  $\phi(x) = \varphi$ .

Se define el concepto de operador lineal  $A$  sobre el espacio  $H$  como un endomorfismo de  $H$ , esto es una aplicación lineal de  $H$  sobre  $H$ :

$$A : H \longrightarrow H$$

de tal forma que:

$$A(a_1|\alpha_1\rangle + a_2|\alpha_2\rangle) = a_1A|\alpha_1\rangle + a_2A|\alpha_2\rangle$$

La acción del operador lineal  $A$  sobre el espacio dual, se define de la siguiente manera:

1.  $(cA)|\alpha\rangle = c(A|\alpha\rangle)$   
 $\langle W|(cA) = c(\langle W|A)$
2.  $(A+B)|\alpha\rangle = A|\alpha\rangle + B|\alpha\rangle$   
 $\langle\beta|(A+B) = \langle\beta|A + \langle\beta|B$
3.  $(AB)|\alpha\rangle = A(B|\alpha\rangle)$   
 $\langle\beta|(AB) = (\langle\beta|A)B$

$$A|\alpha\rangle = |A\alpha\rangle = |\alpha_A\rangle$$

$$\langle\beta|A = \langle u| \neq \langle\beta A|$$

## 1.4 Operadores en Mecánica Cuántica

La acción del operador  $X$  sobre un ket cualquiera  $\alpha$  del espacio de Hilbert  $H$  da como resultado otro ket que también pertenece a  $H$ .

$$X|\alpha\rangle = |X\alpha\rangle$$

Sin embargo, cuando un operador actúa sobre un bra  $|\alpha\rangle$  del espacio dual  $H^*$ , el resultado no es el dual del operador sobre el dual del vector en  $H$ , es decir:

$$\langle\alpha|X = \langle\omega| \neq \langle\alpha X|$$

Cuando un operador  $X$  actúa sobre un bra  $\langle\alpha|$  del espacio dual, el resultado es otro bra  $\langle\alpha|X$ , pero el bra  $\langle\alpha|X$  no es el dual del operador  $X|\alpha\rangle$ . La correspondencia dual entre un ket  $|\alpha\rangle$  de  $H$  y su dual  $\langle\alpha|$  en  $H^*$  vendrá dada por:

$$X|\alpha\rangle = \langle\alpha|X^\dagger$$

Ahora  $X|\alpha\rangle$  y  $\langle\alpha|X^\dagger$  son conjugados.  $X^\dagger$  es el operador hermítico conjugado de  $X$ . Se debe cumplir que:

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \langle\alpha|X|\beta\rangle^*$$

Se dice que el operador  $X$  es hermítico si  $X = X^\dagger$  y anti-hermítico si  $X^\dagger = -X$

Los operadores hermíticos son muy utilizados en mecánica cuántica y tienen una serie de propiedades muy importantes.

1. Forma de Jordan: Un operador lineal siempre se puede expresar como suma de un operador hermítico y un operador anti-hermítico.

$$X = A + B$$

donde  $A$  es hermítico y  $B$  es anti-hermítico. Esto se comprueba fácilmente definiendo  $A$  y  $B$  como:

$$A = \frac{X + X^\dagger}{2} \qquad B = \frac{X - X^\dagger}{2}$$

entonces:

$$A^\dagger = \frac{X^\dagger + X}{2} = A \qquad B^\dagger = \frac{X^\dagger - X}{2} = -B$$

$$A + B = \frac{1}{2} (X + X^\dagger + X - X^\dagger) = \frac{1}{2} (X + X) = X$$

2. Una combinación lineal de operadores hermíticos es hermítica:

$$(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots, a_nX_n)^\dagger = (a_1X_1)^\dagger + (a_2X_2)^\dagger + \dots, (a_nX_n)^\dagger =$$

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

3. En general, el producto de dos operadores  $X, Y$  es anticonmutativo, es decir  $XY \neq YX$  y por lo tanto si  $X, Y$  son hermíticos, resulta que su producto no lo es.

$$(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger = YX \neq XY \longrightarrow XY \neq (XY)^\dagger$$

sin embargo, si  $X, Y$  conmutan:

$$[X, Y] = XY - YX = 0 \Rightarrow XY = YX$$

4. En general el conmutador  $[X, Y]$  es anti-hermítico.

$$([X, Y])^\dagger = (XY - YX)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger = YX - XY = -[XY]$$

5. El producto  $XY$  de dos operadores se puede descomponer como:

$$XY = \frac{XY + YX}{2} + \frac{1}{2}[XY]$$

## Autovalores y Autovectores

Dado un operador lineal  $X$ , se dice que  $a \in \mathbb{C}$  es un valor propio o autovalor de  $X$  y el ket  $|\alpha\rangle$  es el vector propio o autovector, si se cumple que:

$$X|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle \quad (2)$$

1. Si  $|\alpha\rangle$  es un autovector de  $X$ , entonces los múltiplos de  $|\alpha\rangle$  del tipo  $c|\alpha\rangle$  son autovectores de  $X$  relativos al mismo autovalor.
2. Cualquier combinación lineal de autovectores de  $X$  linealmente independiente de un mismo autovalor es un autovector de  $X$  relativo a ese autovalor.
3. El conjunto de autovectores de  $X$  para un autovalor  $a$  forma un espacio vectorial

asociado al autovalor  $a$  (realmente es un subespacio vectorial).

Dado un operador  $X$ , cada uno de sus autovalores lleva asociado un subespacio de Hilbert  $H_X$  cuya base esta formada por los correspondiente autovectores del operador  $X$ .

Cada operador (observable) genera un espacio de dimensión  $n$ , entonces un sistema físico está caracterizado por un espacio que contiene a todos los subespacios y por tanto se podrá caraterizar por una serie de operadores.

Los autovalores correspondientes a operadores hermíticos son siempre magnitudes reales y los autovalores son vectores ortogonales. Esto significa que los autovalores son magnitudes medibles y por ello los observables en Mecánica Cuántica vienen dados por operadores hermíticos.

Si  $X = X^\dagger$  y  $X|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle$ , entonces:

$$\langle\alpha|X|\alpha\rangle = a\langle\alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|X|\alpha\rangle = \langle\alpha|X^\dagger|\alpha\rangle = \langle\alpha|X|\alpha\rangle \longrightarrow A \in \mathbb{R}$$

Por otro lado, si  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  son autovalores de  $X$  con autovalores  $a$  y  $b$  respectivamente y  $X$  es hermítico  $X = X^\dagger$ , entonces:

$$X|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|X = b\langle\beta|$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle\beta|X|\alpha\rangle = a\langle\beta|\alpha\rangle \\ \langle\beta|X|\alpha\rangle = b\langle\beta|\alpha\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle\beta|X|\alpha\rangle - \langle\beta|X|\alpha\rangle = 0$$

Por tanto  $(a - b)\langle\beta|\alpha\rangle = 0$  Si  $a \neq b \Rightarrow \langle\beta|\alpha\rangle = 0$ .

Se define el espectro de valores del operador  $X$  como el conjunto de autovalores de

$X$ .

## Proyectores

Dado un espacio vectorial de dimensión  $n$  donde tenemos una base ortonormal de vectores  $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle$ , se cumple que:

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$$

Si  $W$  es un subconjunto de  $V$ , que cumple las condiciones siguientes:

1. El vector nulo pertenece a  $W$

2.  $\forall |u\rangle, |v\rangle \in W$  resulta que:

$$|u\rangle + |v\rangle \in W$$

$$\alpha |u\rangle \in W$$

Entonces  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

Si la dimensión de  $W$  es  $m < n$ , y existe un conjunto de vectores ortogonales

$$|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_m\rangle$$

que forman una base en  $W$ . Entonces, definimos un operador de proyección o proyector como:

$$P_m = \sum_{i=1}^m |v_i\rangle \langle v_i|$$

De tal forma que cumple las siguientes propiedades:

►  $P$  es hermítico:  $P = P^\dagger$

►  $P$  es igual a su cuadrado  $P = P^2$

Un operador proyección puede estar compuesto por un único vector base, por ejemplo:

$$P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$$

$$P_i^2 = (|v_i\rangle\langle v_i|)^2 = (|v_i\rangle\langle v_i|)(|v_i\rangle\langle v_i|) =$$

$$= |v_i\rangle\langle v_i|v_i\rangle\langle v_i| = |v_i\rangle\langle v_i| = P_i$$

Si aplicamos este proyecto sobre un ket.

$$P_i|\alpha\rangle = |v_i\rangle\langle v_i|\alpha\rangle = (\langle v_i|\alpha\rangle)|v_i\rangle$$

$$\text{si } |\alpha\rangle = a_1|\alpha_1\rangle + a_2|\alpha_2\rangle + \dots + a_n|\alpha_n\rangle \Rightarrow \sum_j^n a_j\langle v_i|\alpha_j\rangle = a_j\delta_{ij}|v_i\rangle$$

Lo que hace este operador  $P_i$  es justamente "proyectar" una componente del vector  $|\alpha\rangle$  sobre la dirección  $v_i$ .

El operador identidad del espacio  $H$  puede representarse como la suma de todos los generadores de proyección del espacio  $H$ .

$$I = \sum_i^n P_i = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle\langle v_i|$$

Esta expresión se conoce como la relación de clausura.

## 1.5 Observables

Vamos a analizar que es lo que se puede medir en un sistema físico. Las medidas se realizan mediante aparatos que nos proporcionan valores reales de las magnitudes que medimos. Los aparatos de medida no pueden arrojar magnitudes de número complejos. Esto es algo que tenemos que tener presente desde el principio, porque en mecánica cuántica los estados vienen dados por amplitudes que tienen una fase que puede ser compleja, por eso si queremos obtener una medida tenemos que obtener su cuadrado, es decir la probabilidad, perdiendo la información relativa a la fase.

En mecánica cuántica, a cada magnitud que se quiere medir se le asocia un operador de tal forma que al actuar dicho operador sobre un estado puro, se obtiene un valor real y el estado no queda modificado.

Si se hace actuar el operador sobre un estado que no es un estado puro, también se obtiene un valor real, pero ahora el estado resulta alterado, o proyectado, a un estado puro.

A estas magnitudes cuyo valor puede ser determinado mediante un aparato de medida se les denomina magnitudes observables o simplemente "Observables".

Dada una propiedad física de un sistema que resulta medible, se le asigna a dicha propiedad un operador, digamos  $A$ . Supongamos que los valores que se obtienen al medir dicha propiedad son  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , entonces, podemos definir el estado del sistema por un conjunto de autovectores  $|a_i\rangle$  tales que:

$$A|a_i\rangle = \alpha_i|a_i\rangle$$

y cualquier vector del espacio de estados del sistema se podrá expresar como una combinación lineal de sus autovectores base, es decir:

$$|a\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle$$

Para formar una base, los autovectores  $|a_i\rangle$  deber ser ortonormales, esto es:

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$$

Para calcular los coeficientes de la combinación lineal, se multiplica el vector  $|a\rangle$  por la izquierda y se aplica la propiedad de ortogonalidad, es decir:

$$\langle a_i | a \rangle = \alpha_i$$



Por tanto:

$$|\alpha\rangle = \sum_i \alpha |a_i\rangle = \sum_i \langle a_i | \alpha \rangle |a_i\rangle$$

El significado que se le atribuye a esto es el siguiente: los coeficientes  $\alpha_i$  son los componentes de la función de onda que describe el estado  $|\alpha\rangle$  en la base que proporcionan los kets  $\{|a_i\rangle\}$ . Entonces resulta que estos coeficientes nos dan la probabilidad de que al realizar una medida sobre la magnitud descrita por el observable  $A$ , se obtenga el vector  $\alpha_k$ , es decir:

$$|\alpha_k|^2 = |\langle a_k | \alpha \rangle|^2$$

Vamos a enunciar una definición de valor esperado que sea equivalente a esta interpretación probabilística.

Si partimos de  $I = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|$ , entonces:

$$I|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

subsubsectionComposición Espectral del Operador  $A$  Cualquier operador  $A$  se puede expresar tomando el operador identidad  $I$  en cierta base  $|a_i\rangle$  de la forma:

$$A = \sum_i |a_i\rangle a_i \langle a_i|$$

y definimos el valor esperado del observable  $A$  como:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i a_i |\langle a_i | \alpha \rangle|^2 = \\ &= \sum_i \langle \alpha | a_i \rangle a_i \langle a_i | \alpha \rangle \end{aligned}$$

Es decir, el valor esperado del operador  $A$  es la suma de todos sus posibles valores afectador por un factor de peso que proporciona su probabilidad relativa.

Dada la descomposición espectral del operador  $A$ , el valore esperado del estado  $|\alpha\rangle$

para el operador  $A$  es:

$$\langle A \rangle_\alpha = \sum_i \langle \alpha | (|a_i\rangle a_i \langle a_i|) | \alpha \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

## Representación Matricial

Conociendo la acción de un operador sobre un conjunto de vectores base se tiene una representación matricial de dicho operador. Dada la base de vectores  $\{|ketv_i\rangle\}$ , la representación del operador  $A$  se puede especificar mediante sus elementos de matriz:

$$A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{nn} & \dots & & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1 | A | u_1 \rangle & \langle u_1 | A | u_2 \rangle & \dots & \langle u_1 | A | u_n \rangle \\ \langle u_2 | A | u_1 \rangle & A_{22} & \dots & \langle u_2 | A | u_n \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle u_n | A | u_1 \rangle & \dots & & \langle u_n | A | u_n \rangle \end{pmatrix}$$

La forma explícita de la matriz  $A$  no es única, sino que dependerá de la base escogida, es decir, la representación matricial de un operador  $A$  será distinta en función de la base que se utilice para su representación.

Si  $C = AB$  entonces, la representación matricial de  $C$  es:

$$\langle a_i | C | a_j \rangle = \langle a_i | AB | a_j \rangle = \sum_k \langle a_i | A | a_k \rangle \langle a_k | B | a_j \rangle$$

Hemos insertado el operador unidad  $\sum_k |a_k\rangle \langle a_k|$  entre  $A$  y  $B$ .

Si  $|\gamma\rangle = A|\alpha\rangle \Rightarrow \langle a_i | \gamma \rangle = \langle a_i | A | \alpha \rangle = \sum_j \langle a_i | A | a_j \rangle \langle a_j | \alpha \rangle$ . De esta forma, obtenemos los coeficientes del desarrollo del vector  $|\gamma\rangle$ . Para ello hemos multiplicado por la izquierda por  $\langle a_i |$  y llegamos a una expresión matricial  $\langle a_i | A | a_j \rangle$  que relaciona dos

vectores columna,  $|\alpha\rangle$  y  $|\gamma\rangle$ , es decir:

$$\langle a_i|\gamma\rangle = \sum_j \langle a_i|A|a_j\rangle \langle a_j|\alpha\rangle$$

$$\langle a_i|\gamma\rangle = \begin{pmatrix} \langle a_1|\gamma\rangle \\ \langle a_2|\gamma\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n|\gamma\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1|A|a_1\rangle & \langle a_1|A|a_2\rangle & \dots & \langle a_1|A|a_n\rangle \\ \langle a_2|A|a_1\rangle & \langle a_2|A|a_2\rangle & \dots & \langle a_2|A|a_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n|A|a_1\rangle & \langle a_n|A|a_2\rangle & \dots & \langle a_n|A|a_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1|\alpha\rangle \\ \langle a_2|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n|\alpha\rangle \end{pmatrix}$$

La representación matricial de un observable  $A$  tomando como base de la representación, sus autovectores, da lugar a una matriz diagonal, la cual es una representación mucho más sencilla.

## Observables Compatibles e Incompatibles

Ya hemos comentado anteriormente que en Mecánica Cuántica que hay conjuntos de observables que no se pueden medir de forma simultanea. El ejemplo más conocido es el de la posición y el momento de una partícula, ya que al aumentar la precisión en la medida de una, automáticamente aumentamos el margen de error en la medida del otro, tal y como se deriva del principio de incertidumbre de Heisenberg  $\Delta x \Delta p \approx \frac{\hbar}{2}$ .

Por otro lado, existen observables que si pueden medirse de forma simultanea con tanta precisión como permita el instrumento de medida. Estos observables se dice que son compatibles. Un conjunto de observables que describe totalmente el sistema física bajo estudio, se denomina C.C.O.C. (Conjunto Completo de Observables Compatibles), lo cual significa que todos ellos comparten una base de autovectores comunes.

Diremos que el conjunto  $\{A_i\}$  es un C.C.O.C. si se verifican las siguientes características:

1. Todos los observables conmutan dos a dos:

$$[A_i, A_j] = 0 \quad \forall i, j$$

2. Existe una base única de autovectores

$$\{|keta_1, a_2, a_3, \dots, a_n\rangle\}$$

3. El sistema de observables es maximal, lo que significa que si se elimina alguno de los observables que forman parte del C.C.O.C., entonces ya no se pueden cumplir el punto 2.

El número de observables que componen un C.C.O.C. viene dado por la propia naturaleza del sistema físico en cuestión.

## 1.6 Relaciones de Indeterminación

Es conocido que el principio de incertidumbre de Heisenberg proporciona una relación entre la posición y el momento de un sistema físico que dice:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

Vamos a generalizar esta relación a dos operadores genéricos, digamos  $A$  y  $B$ .

Sabemos que el valor esperado de un operador  $A$  en un estado  $|\alpha\rangle$  viene dado por:

$$\langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

La desviación estándar de un operador vale:

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

$$(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2$$

Podemos definir la incertidumbre del operador  $A$  en el estado  $|\alpha\rangle$  como:

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \alpha | (A - \langle A \rangle)^2 | \alpha \rangle$$

y lo mismo para el operador  $B$ :

$$(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle = \langle \alpha | (B - \langle B \rangle)^2 | \alpha \rangle$$

Definimos los kets:

$$|X\rangle = (A - \langle A \rangle) |\alpha\rangle$$

$$|Y\rangle = (B - \langle B \rangle) |\alpha\rangle$$

y de esta forma podemos escribir

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \alpha | (A - \langle A \rangle)^2 | \alpha \rangle = \langle X | X \rangle$$

$$(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle = \langle \alpha | (B - \langle B \rangle)^2 | \alpha \rangle = \langle Y | Y \rangle$$

Por lo tanto:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 = \langle X | X \rangle \langle Y | Y \rangle$$

Aplicando la desigualdad de Schwartz:

$$\langle X | X \rangle \langle Y | Y \rangle \geq |\langle X | Y \rangle|^2 = \langle X | Y \rangle \langle X | Y \rangle \quad (4)$$

Calculamos  $\langle X | Y \rangle$ :

$$\langle X | Y \rangle = \langle \alpha | (A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) | \alpha \rangle =$$

$$\langle \alpha | AB - A\langle B \rangle - \langle A \rangle B + \langle A \rangle \langle B \rangle | \alpha \rangle =$$

$$\langle \alpha | AB | \alpha \rangle - \langle \alpha | A \langle B \rangle | \alpha \rangle - \langle \alpha | \langle A \rangle B | \alpha \rangle + \langle \alpha | \langle A \rangle \langle B \rangle | \alpha \rangle$$

Los valores esperados de un operador  $\langle A \rangle$  y  $\langle B \rangle$  son simples números reales y por lo

tanto los podemos sacar fuera, quedando:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha | AB | \alpha \rangle - \langle \alpha | A | \alpha \rangle \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle \alpha | B | \alpha \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle = \\ & = \langle \alpha | AB | \alpha \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

y por tanto, podemos decir que:

$$\langle X | Y \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

y de forma similar llegamos a:

$$\langle Y | X \rangle = \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

entonces, de la expresión 4 teníamos:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 = \langle X | X \rangle \langle Y | Y \rangle \geq |\langle X | Y \rangle|^2 = \langle X | Y \rangle \langle Y | X \rangle$$

Llegados a este punto hay que hacer la siguiente consideración: El producto interno de un bra y un ket es un número complejo  $c \in \mathbb{C}$ , es decir  $\langle X | Y \rangle = z \in \mathbb{C}$ . Por tanto  $|\langle X | Y \rangle|^2 = |z|^2 = z z^*$  y para cualquier número complejo  $z$ , sabemos que se cumple que:

$$z z^* = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 \geq \text{Im}(z)^2 = \left( \frac{z + \bar{z}}{2i} \right)^2 \quad (5)$$

si asignamos:

$$\bar{X} Y \rangle \bar{Y} X \rangle = z \cdot z^* \longrightarrow \begin{cases} \langle X | Y \rangle = z \\ \langle Y | X \rangle = z^* \end{cases}$$

y entonces:

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 & \geq |\langle X | Y \rangle|^2 = \langle X | Y \rangle \langle Y | X \rangle = z \cdot z^* = \left( \frac{\langle X | Y \rangle - \langle Y | X \rangle}{2i} \right)^2 = \\ & \left( \frac{(\langle X | Y \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle) - (\langle Y | X \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle)}{2i} \right)^2 \\ & = \left( \frac{\langle XY \rangle - \langle YX \rangle}{2i} \right)^2 = \left( \frac{\langle XY - YX \rangle}{2i} \right)^2 = \frac{([X, Y])^2}{2i} = (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión de que para dos operadores  $X$  e  $Y$ , se cumple que:

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{([X, Y])}{2i} \quad (6)$$

siendo  $[X, Y]$  el conmutador entre el operador  $X$  y el operador  $Y$ , esto es:

$$[X, Y] = XY - YX \quad (7)$$

y teniendo siempre en cuenta que en general  $XY \neq YX$ .

Si aplicamos esta expresión a los operadores de posición y momento:

$$[X, P] = i\hbar$$

$$\frac{[X, P]}{2i} = \frac{i\hbar}{2i} = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$$

## 1.7 Cambio de Base

Vamos a suponer que tenemos dos observables, sean  $A$  y  $B$  que son incompatibles. Los autovectores del observable  $A$  forman una base que denotamos por  $\{|a_i\rangle\}$  y los del observable  $B$  son  $\{|b_i\rangle\}$ . El espacio de estados del sistema puede ser descrito totalmente tomando la base  $\{|a_i\rangle\}$  o la base  $\{|b_i\rangle\}$ . El paso de la representación de una base a otra es posible. Vamos a ver como podemos relacionar ambas bases o representaciones.

Lo primero que vamos a comprobar es que el conjunto de autovectores, tanto  $\{|a_i\rangle\}$  como  $\{|b_i\rangle\}$ , forman una base, es decir, que a partir de estos conjuntos de vectores se puede generar todo el espacio de Hilbert sobre el que existen todos los posibles estados del sistema.

Para que un conjunto de autovectores constituya una base, debe cumplir las condiciones de:

### 1. Completitud

### 2. Ortogonalidad

La relación de completitud establece que, dada una cierta base  $\{|a_i\rangle\}$ , se debe cumplir que:

$$\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{I} \quad (8)$$

La relación de ortogonalidad dice que todos los elementos o vectores que componen la base deben ser ortogonales, lo cual se materializa mediante la siguiente expresión:

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij} \quad (9)$$

Por tanto, si  $\{|a_i\rangle\}$  y  $\{|b_i\rangle\}$  cumplen las condiciones de completitud y de ortogonalidad del sistema, podemos decir que son bases del sistema.

Un vector ket expresado en la base  $\{|a_i\rangle\}$  tendrá una representación matricial, pero el mismo ket expresado en la base  $\{|b_i\rangle\}$  tendrá otra representación matricial distinta. Ambas representaciones son igualmente válidas, pero en función del problema a tratar, una podría llegar a ser más conveniente que la otra, por ello es necesario disponer de un mecanismo o procedimiento que permita realizar la transformación entre ambas representaciones.

**TEOREMA:** Dadas dos bases de vectores  $\{|a_i\rangle\}$  y  $\{|b_i\rangle\}$  que por definición deben ser ortonormales y completas, existe un único operador  $U$  que permite realizar la transformación, esto es:

$$\begin{aligned} |b_1\rangle &= U|a_1\rangle \\ |b_2\rangle &= U|a_2\rangle \\ &\vdots \\ |b_i\rangle &= U|a_i\rangle \end{aligned}$$



Si el operador de la transformación  $U$  es unitario, entonces se debe cumplir la relación siguiente:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I} \quad (10)$$

Los elementos de matriz de la matriz de transformación  $U$  son  $u_{ik}$  y vendrán dados por:

$$U_{ij} = \langle a_i | b_j \rangle$$

por ser hermítica:

$$U_{ji}^\dagger = \langle b_i | a_j \rangle$$

entonces:

$$(U U^\dagger)_{ij} = \sum_k U_{ik} U_{kj}^\dagger = \sum_k \langle a_i | b_k \rangle \langle b_k | a_j \rangle = \langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$(U^\dagger U)_{ij} = \sum_k U_{ik}^\dagger U_{kj} = \sum_k \langle b_i | a_k \rangle \langle a_k | b_j \rangle = \langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij}$$

La representación matricial del operador de transformación en la base  $\{|a_i\rangle\}$ , sería:

$$\langle a_k | U | a_\ell \rangle = \langle a_k | b_\ell \rangle$$

$$\langle a_i | U | a_j \rangle = \langle a_i | a_j \rangle$$

Esta matriz de transformación nos proporciona la relación entre la base  $\{|a_i\rangle\}$  y la base  $\{|b_i\rangle\}$ .

Dado un ket cualquiera  $|\alpha\rangle$  cuya expresión en la base  $\{|a_i\rangle\}$  es:

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \alpha \rangle$$

si se quiere pasar a la base  $\{|b_i\rangle\}$  se tendría que hacer la transformación:

$$\langle b_i | \alpha \rangle = \sum_\ell \langle b_i | a_\ell \rangle \langle a_\ell | \alpha \rangle = \sum_\ell \langle a_i | U^\dagger | a_\ell \rangle \langle a_\ell | \alpha \rangle$$

Lo que nos dice esta expresión es que para obtener el ket  $|\alpha'\rangle = \langle b_i | \alpha \rangle$  que es el ket

$|\alpha\rangle$ , pero en la base transformada  $\{|b_i\rangle\}$ , basta con aplicar la matriz  $U^\dagger$  al vector  $|\alpha\rangle$  en la base original  $\{|a_i\rangle\}$ , es decir  $|\alpha'\rangle = U^\dagger|\alpha\rangle$ .

Entonces podemos generalizar diciendo que para un operador  $X$ , sus elementos de matriz en la base original  $\langle b_k|X|b_\ell\rangle$  y en la base transformada  $\langle a_m|X|a_n\rangle$  cumplen con la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\langle b_k|X|b_\ell\rangle &= \sum_m \sum_n \langle b_k|a_m\rangle \langle a_m|X|a_n\rangle \langle a_n|b_\ell\rangle = \\ &= \sum_m \sum_n \langle a_k|U^\dagger|a_m\rangle \langle a_m|X|a_n\rangle \langle a_n|U|a_\ell\rangle\end{aligned}$$

Esta relación se denomina "Transformación de semejanza".

### Definición 2: Transformaciones de Semejanza

Si obtenemos los autovectores de una matriz hermítica  $H$  podemos expresar dicha matriz en forma diagonal, esto es, que todos los elementos de matriz, excepto los de la diagonal valgan 0.

$$\begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & & h_{33} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal, son los autovalores de la matriz. Para diagonalizar la matriz aplicamos una transformación de semejanza. Si  $D$  es la forma diagonal de una matriz, entonces:

$$D = S^{-1}CS$$

donde  $S$  es una transformación invertible que está formada por los autovectores de  $C$ .

Se dice entonces que las matrices  $C$  y  $D$  son semejantes y que representan al mismo operador en dos bases distintas.

Si  $S$  es una matriz unitaria, entonces, si la base original es ortonormal, la base transformada también lo será. Si  $C$  es una matriz hermítica, encontrando sus autovectores tenemos automáticamente una base.

## 1.8 Diagonalización

Hemos dicho anteriormente que a cada observable de un sistema físico se le asigna un operador  $A$ , el cual puede representarse en forma matricial, con elementos de matriz del tipo  $a_{ij}$ .

Los autovectores del operador  $A$  representan los estados base a partir de los cuales se pueden obtener todos los posibles estados del sistema, y los autovalores del operador

son los posibles resultados que se pueden obtener al realizar la medida del observable al cual representa el operador.

Si tenemos una matriz que representa el Hamiltoniano de un sistema, entonces sus autovalores serán las posibles energías que dicho sistema puede tener.

El procedimiento algebraico que se emplea para encontrar los autovectores y autovalores de una matriz se denomina comúnmente Diagonalización, y consiste en encontrar una base sobre la cual, la matriz tenga forma diagonal, es decir, que solo los elementos de su diagonal sean distintos de cero.

El objetivo de diagonalizar una matriz  $A$  es el de encontrar los autovectores  $|a_i\rangle$  y los autovalores  $\alpha_i$  del operador al que representa dicha matriz, esto es:

$$A|a_i\rangle = \alpha_i|a_i\rangle$$

Lo cual, en términos de los elementos de matriz, se puede escribir como:

$$\sum_i \langle b_j|A|b_i\rangle \langle b_i|a_i\rangle = \alpha_i \langle b_j|a_i\rangle$$

En definitiva, si  $A$  es un operador lineal u observable, se cumple que:

$$A|u\rangle = \lambda|u\rangle \lambda \in \mathbb{C} \quad (11)$$

Al resolver esta ecuación, se obtienen los autovectores  $|u\rangle$  y los autovalores  $\lambda_i$  de un operador.

Dada la representación matricial  $A$  de un operador, construimos su polinomio característico y la igualamos a cero. El polinomio característico se obtiene a partir de la

expresión:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \quad (12)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad.

Resolviendo la ecuación 12 obtenemos los valores de  $\lambda$  que se corresponden con los autovalores de  $A$  y a partir de los autovalores obtendremos los autovectores.

Si la dimensión del espacio es finita, digamos  $N$ , tenemos una ecuación algebraica de grado  $N$  en  $\lambda$  y las  $N$  raíces coinciden con los autovalores  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Conociendo los autovalores  $\alpha_i$  se puede resolver el sistema para los elementos de matriz  $\langle b_j | a_i \rangle$  correspondientes, modulados por una constante cuyo valor se obtiene mediante las condiciones de normalización. Los elementos de matriz  $\langle b_j | a_i \rangle$  son justamente los elementos de la matriz del cambio de base:

$$\{|a_i\rangle\} \longrightarrow \{|b_n\rangle\}$$

## 1.9 Observables Equivalentes

Vamos a ver un teorema importante relativo a la transformación unitaria de un observable.

Dadas dos bases ortonormales  $\{|a_i\rangle\}$  y  $\{|b_i\rangle\}$  en un espacio de Hilbert  $H$ , que se pueden conectar mediante una transformación unitaria  $U$ , es decir:  $|b_i\rangle = U|a_i\rangle$ , los operadores  $A$  y  $UAU^\dagger$  se dice que son observables unitariamente equivalentes.

Los autovalores de  $A$  en la base  $|a_i\rangle$  son:

$$A|a_i\rangle = \alpha_i|a_i\rangle$$

$$UAU^\dagger|a_i\rangle = \alpha_i|a_i\rangle$$

$$UAU^\dagger U|a_i\rangle = \alpha_i U|a_i\rangle$$

$$UAU^\dagger |b_i\rangle = \alpha_i |b_i\rangle$$

Con lo cual, se puede ver que  $A$  y  $UAU^\dagger$  tienen el mismo espectro de autovalores. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que observables unitariamente equivalentes tienen espectros idénticos.

## 1.10 El Producto Tensorial

En Mecánica Cuántica, cada partícula viene descrita por su propio espacio de Hilbert. En el caso de computación cuántica una partícula "vive" en un espacio de Hilbert de 2 dimensiones. Cuando trabajamos con dos partículas que interactúan, se forma un espacio de Hilbert de 4 dimensiones. La composición de este nuevo espacio de Hilbert se obtiene mediante la operación del producto tensorial entre los espacios de Hilbert de cada una de las partículas participantes. Esto es extensivo para cualquier dimensión y cualquier número de partículas.

El estado de un qubit individual ya hemos dicho que se representa por:  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . Si tenemos dos qubits dados por  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  y queremos representar cual es su estado global, este nuevo estado vendrá dado por:  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$

### Ejercicio 1.

Calcular el producto tensorial de:

$$\text{i) } |v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } |v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |w\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Solución.**

i)

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii)

**Ejercicio 2.**

Sean  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  dos espacios de Hilbert, de dimensión 2, describir la base del espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

**Solución.** Para cada uno de estos espacios vectoriales, se pueden tomar como base los vectores unitarios  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , y la base del espacio resultante  $\mathcal{H}$  se forma con todos los productos posibles de los estados de las bases de los espacios componentes  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , es decir:

$$|v_1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|v_2\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|v_3\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|v_4\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Ahora considérese un vector arbitrario en  $\mathcal{H}_1$  y otro vector arbitrario en  $\mathcal{H}_2$  que se expresan en función de los vectores de la base de sus correspondientes espacios de Hilbert. En  $\mathcal{H}_1 : |\phi\rangle = \sum_i \alpha |v_i\rangle$  En  $\mathcal{H}_2 : |\chi\rangle = \sum_i \beta |v_i\rangle$  y para representar un

vector  $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$  que pertenezca al espacio  $H$ , se suman los productos de los términos individuales, esto es:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$$

Entonces, si  $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$  es un vector formado por un producto tensorial, resulta que los componentes de  $|\psi\rangle$  se obtienen operando tensorialmente los componentes de los dos vectores  $|\phi\rangle$  y  $|\chi\rangle$ .

### Ejercicio 3.

El Hamiltoniano de un sistema viene dado, en su forma matricial por:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener sus valores propios.

**Solución.** Se toma el determinante y se calcula el polinomio característico

$$\det(\mathcal{H} - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2(1 - \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \longrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

Los valores propios serán el 1 doble y  $-1$ . Se trata de un sistema degenerado porque el valor  $+1$  aparece dos veces.