UNIVERSIDADE METODISTA DE ANGOLA

FACULDADE DE ENGENHARIA E ARQUITECTURA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Matrizes. Operações com matrizes

Docente: Alfredo Quindai

Matrizes. Operações com matrizes

Objectivos

Ao terminar este conteúdo, o aluno deve ser capaz de:

1) Saber o que é uma matriz;
2) Conhecer as operações de soma e diferença de matrizes, multiplicação de matrizes por um escalar e produto de matrizes;
3) Conhecer as propriedades das operações com Matrizes.

Matrizes

Definição: Uma matriz A, de ordem $m \times n$ (lê-se $m\ por\ n$), é uma expressão de $m \cdot n$ números dispostos por m linhas e n colunas, da seguinte forma:

Linha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Coluna

Notação abreviada: A matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ pode representar-se abreviadamente por (a_{ij}) ou $\left[a_{ij}\right]_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le m}$, sendo que $[A]_{ij}$ ou a_{ij} é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A.

Exemplos de Tipos de Matrizes

$A = \begin{array}{c} \textbf{Linha} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$ é uma matriz 2×2.

$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix} & \textbf{Coluna} \end{array}$ é do tipo 3×3.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3, ou seja, tem duas linhas e três colunas.

Observações

As matrizes representam-se por letras maiúsculas $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, etc.

Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, dizemos que a matriz é quadrada, caso contrário, rectangular. Nos exemplos anteriores, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes quadradas do tipo (ou de ordem) 2×2 e 3×3, respectivamente, enquanto que a matriz $\boldsymbol{C}$ é de ordem 2×3.

Matrizes são ferramentas importantes em toda a Matemática Moderna. São utilizadas para resolver sistemas de equações, para representar certas funções, etc. Encontram aplicações à Estatística, à Física, à Métodos Computacionais e aos outros (vários) campos do conhecimento.

Matriz genérica

Denota-se uma matriz genérica ou arbitrária de ordem 2×3, da seguinte forma

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

ou de ordem 3×3

$$B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrizes Especiais

Matriz linha ou vector linha

Definição: Uma matriz linha ou vector linha é uma matriz do tipo $1 \times n$, representada da seguinte forma

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}],$$

ou seja, a $i - ésima$ linha de matriz, para $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo: A matriz

$$A = [2 \quad -1 \quad 0 \quad 3]_{1\times 4}$$

é matriz linha de ordem 1×4, isto é, tem uma única linha e quatro colunas.

Matrizes Especiais

Matriz coluna ou vector coluna

Definição: Uma matriz coluna ou vector coluna é uma matriz do tipo $m \times 1$, representada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

ou seja, a $j - \acute{e}sima$ coluna de matriz, para $j = 1, \dots, n$.

Matrizes Especiais

Exemplo de matriz coluna ou vector coluna :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{5\times 1}$$

é matriz coluna de ordem 5×1, isto é, tem cinco linhas e apenas uma coluna.

Matrizes Especiais

Matriz quadrada

Definição: Denomina-se matriz quadrada de ordem n, a matriz do tipo $n \times n$, com o mesmo número de linhas e de colunas, representada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Matrizes Especiais

Exemplo: As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

, são quadradas

Matrizes Especiais

Matriz rectangular

Definição: Denomina-se matriz rectangular, a matriz do tipo $m \times n$, em que $m \neq n$, representada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes Especiais

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \text{e}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$, são rectangulares.

Matrizes Especiais

Matriz triangular

Definição: Denomina-se matriz triangular, a matriz quadrada de ordem n, do tipo $n \times n$, em que são nulos os elementos situados para um dos lados da diagonal principal, representada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrizes Especiais

Exemplo: As matrizes

Triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Triangular inferior

são triangular superior e triangular inferior, respectivamente.

Matrizes Especiais

Matriz diagonal

Definição: Denomina-se matriz diagonal, a matriz quadrada de ordem n, em que são nulos todos os elementos situados fora da diagonal principal, representada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrizes Especiais

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ é diagonal.}$$

Matrizes Especiais

Matriz escalar

Definição: Denomina-se matriz escalar, a matriz quadrada de ordem n, em que os elementos da diagonal principal são todos iguais, mas diferentes de 1 e de 0.

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ é escalar.}$$

Matrizes Especiais

Matriz identidade

Definição: Denomina-se matriz identidade, a matriz diagonal constituida por apenas 1 (uns) na diagonal principal e denota-se por I_n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Especiais

Exemplo: As matrizes

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ são identidades.}$$

Matrizes Especiais

Matriz nula

Definição: Denomina-se matriz nula, a matriz constituída por apenas elementos nulos e denota-se por $O_{m\times n}$. Se $m=n$ pode representar-se por O_n.

Exemplo: As matrizes

$$O_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ O_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ O_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ e

$$I_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ dizem-se matrizes nulas.

Matrizes Especiais

Matriz transposta

Definição: Denomina-se matriz transposta de $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, do tipo $m \times n$, a matriz dada por $A^T = \left[a_{ji}\right]$ ou $A^t = \left[a_{ji}\right]$, do tipo $n \times m$, obtida trocando-se as linhas com as colunas das matrizes dadas.

Exemplo: As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \; C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

são

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \; C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Resumindo

Das seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } F = [2].$$

A e B são do tipo 2×2. A matriz C é 2×3, D é 1×3, E é 3×1 e F é 1×1.

De acordo com a notação que introduzimos, **exemplos de elementos ou entradas** de algumas das matrizes dadas acima são $a_{11} = 1$, $b_{22} = 3$, $c_{13} = 0$, $d_{12} = 3$, $e_{31} = -1$ e $[F]_{11} = 2$.

Operações com Matrizes

As operações com matrizes são análogas às operações com números, sendo válidas todas as suas propriedades.

Definição: A **soma** de duas matrizes de mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, é definida como sendo a matriz $m \times n$, tal que

$$C = A + B,$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também para $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Soma de Matrizes

Exemplo: Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se chamarmos de C a soma das duas matrizes de A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 3+(-1) & 0+2 \\ 2+1 & 4+3 & (-2)+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Nota: Só é possível a soma de duas matrizes se forem do mesmo tipo.

Diferença de Matrizes

Definição: A **diferença** de duas matrizes de mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, é definida como sendo a matriz $m \times n$, tal que

$$C = A - B \text{ ou } C = A + (-B) \,,$$

obtida subtraindo-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \text{ para } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

Escrevemos também para $[A + (-B)]_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij})$.

Diferença de Matrizes

Exemplo: Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se chamarmos de C a diferença das duas matrizes de A e B, então

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & 3-(-1) & 0-2 \\ 2-1 & 4-3 & (-2)-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Nota: Só é possível a diferença de duas matrizes se forem do mesmo tipo.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

A **multiplicação** de uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ por um escalar α é definida pela matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Pode escrever-se também $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Diz-se que a matriz B é **um múltiplo escalar** da matriz A.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Exemplo: O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ pelo escalar (−2) é dado por

$$(-2)A = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot(-4) \\ (-2)\cdot(-5) & (-2)\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 8 \\ 10 & -12 \end{bmatrix}$$

Produto de Matrizes

Definição: O **produto** de duas matrizes, em que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, isto é,
$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{p\times n}$, é definido pela matriz $m \times n$

$$C_{m\times n} = AB$$

obtida da seguinte forma

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

para $i = 1, \ldots\ , m$ e $j = 1, \ldots\ , n$.

Podemos escrever também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$.

A equação acima está a dizer que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da $i - \acute{e}sima$ linha de A pelos elementos correspondentes da $j - \acute{e}sima$ coluna de B.

Produto de Matrizes

A equação (1.1) pode ser escrita de forma compacta usando a notação de somatório.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Lê-se: Somatório de k variando de 1 à p de $a_{ik}b_{kj}$.

Nota: Só é possível efectuar o produto (multiplicação) AB, se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

Produto de Matrizes

Exemplo: Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se chamarmos de C, o produto das duas matrizes A e B, então

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o número de colunas da matriz A (são 3) é igual ao número de linhas da matriz B (são 3), podemos efectuar a multiplicação.

Produto de Matrizes

$$\begin{bmatrix} 1(-2)+2\cdot 0+(-3)\cdot 5 & 1\cdot 1+2\cdot 3+(-3)(-4) & 1\cdot 0+2\cdot 0+(-3)\cdot 0 \\ 3\cdot(-2)+4\cdot 0+0\cdot 5 & 3\cdot 1+4\cdot 3+0\cdot(-4) & 3\cdot 0+4\cdot 0+0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: O produto de matrizes não é comutativo, isto é, $AB \neq BA$.

Exercícios

1) Defina a matriz A do tipo 4×4 cujos elementos a_{ij} satisfazem a seguinte condição:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i + j \text{ é } par \\ 0, caso\ contrário\ (c.c.) \end{cases}$$

Exercícios

2) Sejam as matrizes A, B e C, assim definidas:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 2} \text{ e } a_{ij} = \begin{cases} 2, & se\ i = j \\ 2(i+j), & se\ i \neq j \end{cases}$$

$$B = \left(b_{ij}\right)_{3\times 2} \text{ e } b_{ij} = (-1)^{i} \text{ e}$$

$$C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 2} \text{ e } c_{ij} = \begin{cases} 3, & se\ i + j \text{ é } ímpar \\ 0, & se\ caso\ contrário \end{cases}$$

Exercícios

Calcule:

(a) $A + B$;

(b) $C - B + A$;

(c) AB^T;

(d) $A^T C$.

Exercícios

3) Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -6 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

Se for possível calcule:

(a) $AB - BA$;

(b) $2C - D$;

(c) $(2D^T - 3E^T)^T$;

(d) $D^2 - DE$.