APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

1.CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS (N)

Como já vimos em estudo realizado em curso de primeiro grau, para o estudo da Matemática, fazemos uso de alguns conjuntos numéricos, entre eles, destacamos o "conjunto dos números naturais". Começando pelo "zero" e acrescentando sempre uma unidade, teremos os chamados números naturais e seu conjunto é indicado por:

IN = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 21, ...}

Convém notar que quando excluímos o "Zero" deste conjunto, temos o conjunto dos números naturais não nulos, que é indicado por:

IN* = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 21, ...}

Se considerarmos a sucessão dos números naturais, veremos que: o "zero" é o menor dos números naturais e todo número natural tem um sucessivo ou sucessor.

Exemplos: **1** é o sucessivo de **0**
2 é o sucessivo de **1**
3 é o sucessivo de **2**
. .
. .
. .
n + 1 é o sucessivo de **n**

Sendo assim, como consequência de que todo número natural tem um sucessivo, "não existe um último número natural". Dizemos, então, que tanto o conjunto **IN** como o conjunto **IN*** "são infinitos". Todo número natural, com exceção do "zero" tem um antecessor.

Exemplos: **0** é o antecessor de **1**
1 é o antecessor de **2**
n - 1 é o antecessor de **n**

Dois ou mais números que se seguem na secessão dos números naturais são denominados "consecutivos".

Exemplos: **21 e 22** são números naturais consecutivos.
76, 77 e 78 são números naturais consecutivos.

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

Observe as seguintes notações:

1º) Quando queremos especificar que a letra **n** representa um número natural, escrevemos **n** $\in$ **IN;**

2º) Quando escrevemos **n** $\in$ **IN** e **n** $<$ 5, queremos dizer que **n** representa um número natural menor que 5, ou seja, **n** pode ser **0**, ou **1**, ou **2**, ou **3**, ou **4**;

3º) Quando escrevemos **n** $\in$ **IN** e 2 $<$ **n** $<$ 6, queremos dizer que **n** representa um número natural que está compreendido entre 2 e 6, ou seja, **n** pode ser 3, 4 ou 5. Sejam, então, os seguintes conjuntos (que são subconjuntos de **IN**):

A = { **n** $\in$ **IN** / **n** $<$ 5} (Lê-se: **n** pertence a **IN** tal que **n** é menor que 5)

Escrevendo os elementos desse conjunto, um a um, temos:

A = { 0, 1, 2, 3, 4 }

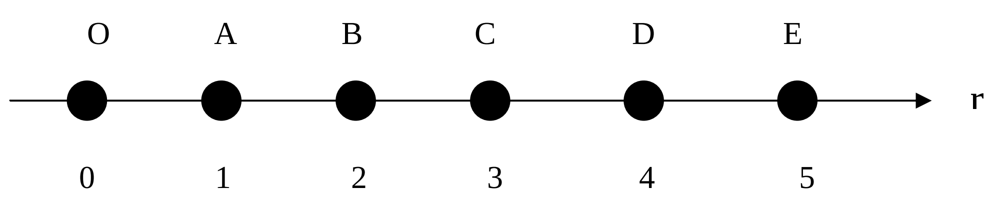
B = { **n** $\in$ **IN** / 2 $<$ **n** $<$ 6} (Lê-se: **n** pertence a **IN** tal que **n** está contido entre dois e seis)

Escrevendo, um a um, os elementos desse conjunto, temos:

B = { 3, 4, 5}

<u>DA RETA NUMÉRICA NATURAL</u>

Consideremos o conjunto dos números naturais **IN** = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...} e façamos corresponder ao número **0** (zero) o ponto origem (O), ao número 1 o ponto **A**, ao número 2 o ponto **B**, e assim sucessivamente:



Assim, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais **IN** = { 0, 1, 2, 3, 4, ...} e o conjunto P = { O, A, B, C, ...} dos pontos assinalados na reta **r**.

→ Dizemos que: O conjunto P dos pontos assinalados sobre a reta **r** constitui uma representação geométrica do conjunto **IN** e cada ponto assinalado sobre a reta é denominado imagem geométrica do número correspondente.

Desta forma: o ponto **O** é a imagem geométrica do número **0**
o ponto **A** é a imagem geométrica do número **1**
o ponto **B** é a imagem geométrica do número **2**
o ponto **C** é a imagem geométrica do número **3**
o ponto **D** é a imagem geométrica do número **4**
o ponto **E** é a imagem geométrica do número **5**

Obs: O conjunto P é denominado **reta numérica natural.**

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

O objetivo desta unidade é rever e aprofundar o estudo das operações fundamentais com números naturais, já que adicionar, subtrair, multiplicar e dividir são fatos constantes em nossos afazeres diários.

DA ADIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Adição consiste na operação que faz corresponder a um par ordenado de números dados um único número, que é a soma do primeiro com o segundo. Sendo assim, atente-se para as seguintes propriedades:

Propriedade do Fechamento:
Observe: 8 + 6 = 14 Então 8 $\in$ **IN**, 6 $\in$ **IN**, (8 + 6) $\in$ **IN**

Logo: a soma de dois números naturais é sempre um número natural.

Propriedade Comutativa:
Observe: a soma dos números 7 e 5, nessa ordem, é 12, ou seja, 7 + 5 = 12. Trocando a ordem dos números, obtemos o mesmo resultado: 5 + 7 = 12.

$$\left.\begin{array}{l} 7 + 5 = 12 \\ 5 + 7 = 12 \end{array}\right\} \quad \text{Então: } 7 + 5 = 5 + 7$$

Daí:

Logo: <u>a ordem das parcelas não altera a soma.</u>

<u>Propriedade do Elemento Neutro</u>:
Observe as adições:

$$\left.\begin{array}{l} 0 + 2 = 2 \\ 2 + 0 = 2 \end{array}\right\} \quad \text{Então: } 0 + 2 = 2 + 0$$

Verifica-se que, adicionando o número 0 (zero) a um número natural, o resultado é sempre o próprio número natural, ou seja, o 0 (zero) não influi ao resultado da adição. Então: o número zero é chamado de <u>elemento neutro</u> da adição.

<u>Propriedade Associativa</u>:
Observe: $(6 + 4) + 8 = 10 + 8 = 18$
$6 + (4 + 8) = 6 + 12 = 18$

Então: $(6 + 4) + 8 = 6 + 4 + 8$

Logo: a adição de três parcelas pode ser feita, associando-se as duas primeiras ou as duas últimas parcelas, indiferentemente.

<u>Propriedade do Cancelamento</u>:
Exemplos: Se $a + 10 = b + 10$, então $a = b$
Se $x + 4 = 5 + 4$, então $x = 5$

<u>Propriedade Aditiva</u>:
Exemplos: Se $a = b$, então: $a + 10 = b + 10$
Se $a = 10$ e $b = 5$, então: $a + b = 10 + 5$

<u>Soma de Três ou Mais Números</u>:
A soma de três ou mais números naturais é o número que se obtém, adicionando-se o terceiro à soma do primeiro com o segundo; e assim por diante.
Exemplo: $36 + 12 + 54 = 48 + 54 = 102$

DA SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Observe a seguintes operação:

171.000 – 57.000 = 114.000 ou

```
  171.000
 - 57.000
 ________
  114.000
```

- A operação que realizamos denomina-se subtração.
- O número 171.000 denomina-se minuendo.
- O número 57.000 denomina-se subtraendo.
- O número 114.000 denomina-se diferença.

Relação Fundamental da Subtração:

Minuendo – Subtraendo = diferença.
Subtraendo + diferença = minuendo.

171.000 – 57.000 = 114.000 → Diferença

57.000 → Subtraendo

171.000 → Minuendo

Observe:
7 – 4 = 3 pois 4 + 3 = 7; logo: 3 é a diferença entre 7 e 4.
32 – 20 = 12 pois 20 + 12 = 32; logo: 12 é a diferença entre 32 e 20.
15 – 15 = 0 pois 15 + 0 = 15; logo: zero é a diferença entre 15 e 15.
6 – 9 = ? neste caso, a diferença entre 6 e 9 é impossível de calcular, pois não há número natural que adicionado a 9 dê 6.

Logo: a diferença entre dois números naturais só existe quando o primeiro é maior ou igual ao segundo.

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

EXPRESSÕES NUMÉRICAS SIMPLES

1º exemplo: Calcular o valor da expressão numérica: 10 – 6 + 4 – 7

$$\underline{10 - 6} + 4 - 7 = \underline{4 + 4} - 7 = 8 - 7 = 1$$

Observe: neste caso, por convenção, realizamos as operações obedecendo à ordem em que elas aparecem na expressão.

2º exemplo: Calcular o valor da expressão numérica 20 – (15 – 10 + 6)

$$20 - (\underline{15 - 10} + 6) = 20 - (\underline{5 + 6}) = 20 - 11 = 9$$

DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Quanto à multiplicação podemos afirmar que:

- ❖ Produto é uma soma de parcelas iguais.
- ❖ Multiplicar é adicionar parcelas iguais.

Então: $\underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + 2}_{\text{Parcelas Iguais}} = \underbrace{5 \times 2}_{\text{Fator}} = 10 \longrightarrow \text{Produto}$

Na multiplicação, devemos observar que:

- ❖ Multiplicando qualquer número por 1 dá o próprio número.
  Exemplo: 1 x 6 = 6

- Multiplicando qualquer número por **0** (zero) dá zero.
  Exemplo: 0 x 6 = 0

Propriedade de Fechamento:

Observe: 5 x 2 = 10 Se 5 **∈ IN** e 2 **∈ IN**, então (5 x 2) **∈ IN**.
Logo: o produto de dois números naturais é sempre um número natural.

Propriedade Comutativa:

Observe: 5 x 2 = 10
2 x 5 = 10

Então: 5 x 2 = 2 x 5
Logo: a ordem dos fatores não altera o produto.

Propriedade do Elemento Neutro:

Observe: 8 x 1 = 1 x 8
Logo: multiplicando-se o número 1 por um número natural, em qualquer ordem, o resultado é sempre o próprio número natural. O número 1 é chamado elemento neutro de multiplicação.

Propriedade Associativa:

Observe os seguintes cálculos:

(5 x 2) x 3 = 10 x 3 = 30

5 x (2 x 3) = 5 x 6 = 30

Então: (5 x 2) x 3 = 5 x (2 x 3)

Logo: numa multiplicação de três fatores, podem-se associar os dois primeiros ou os dois últimos, indiferentemente.

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

Propriedade Distributiva Em Relação Á Adição ou À Subtração:

Observe os seguintes cálculos:

$5 \times (6 + 2) = (5 \times 6) + (5 \times 2)$

$4 \times (7 - 3) = (4 \times 7) - (4 \times 3)$

Logo: o produto de um número por uma soma (ou diferença) pode ser obtido multiplicando-se o número por cada um dos termos da soma (ou diferença) e adicionando-se (ou subtraindo os produtos parciais).

DA DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Observe abaixo, o cálculo a seguir:

23	5
3	4

Então, temos:

- o primeiro número dado (23) denomina-se dividendo.
- o segundo número dado (5) denomina-se divisor.
- O resultado da divisão (4) denomina-se quociente.
- o que sobra (3) denomina-se resto.

Observações:
O dividendo = divisor x quociente + resto
0 não existe.
5 : 0 não existe.
8 : 3 não pertence ao conjunto dos números naturais.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Observe os exemplos:

1º) Calcular o valor da expressão: 20 + 6 : 2

20 + 6 : 2 = 20 + 3 = 23

2º) Calcular o valor da expressão: 40 : 10 x 5

40 : 10 x 5 = 4 x 5 = 20

3º) Calcular o valor da expressão: 12 : 6 + 3 x 8

12 : 6 + 3 x 8 = 2 + 24 = 26

Regras: devemos efetuar, em primeiro lugar, as divisões ou as multiplicações, obedecendo à ordem em que aparecem, em seguida, as adições ou as subtrações, obedecendo também à ordem em que aparecem. Caso haja parênteses, calcular, inicialmente, o valor da expressão situada no interior dos parênteses.

Exemplo: 40 : (16 - 3 x 4) = 40 : (16 – 12) = 40 : 4 = 10

Note: em se tratando de parênteses, primeiro efetuamos as divisões e as multiplicações, para depois efetuarmos as subtrações e as adições.

POTENCIAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS

Já dissemos anteriormente que multiplicar é somar parcelas iguais. Veja:

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\boxed{\text{Cinco parcelas}}} = 5 \times 3 = 15$

Agora, você deverá considerar o seguinte produto de fatores iguais:

$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{Cinco fatores}} = 243$

Observe que: a operação realizada denomina-se “potenciação”, sendo que o produto:
3 x 3 x 3 x 3 x 3 pode ser indicado por 3^5 e o seu resultado: 243 chama-se “quinta potência de três”. Dessa forma, temos: $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$.
O fator que se repete denomina-se “base” da potência (no caso, o número 3). O número que indica quantas vezes o fator se repete denomina-se “expoente” (no caso, o número 5).

expoente fatores
base

Então: $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ potência
Observação: A expressão 3^5 lê-se : três elevado à quinta potência.

Logo: dados dois números naturais, a e n (com $n > 1$), a expressão a^n é igual ao produto de n fatores iguais ao número a. Quando o expoente é 2, lê-se quadrado.
Exemplo: 6^2 lê-se: seis elevado ao quadrado ou quadrado de seis. Quando o expoente é 3, lê-se : “cubo”. Exemplo: 2^3 lê-se: dois elevado ao cubo ou cubo de dois.

Observações importantes:

- Toda potência de expoente **1** é igual à base: $5^1 = 5$.
- Toda potência de expoente **0** é igual a **1**: $5^0 = 1$.
- Toda potência de base **0** é igual a **0** : $0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$.

- Toda potência de base **1** é igual a **1 :** $\mathbf{1}^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$.
- Toda potência de 10 é igual ao algarismo **1** seguido de tantos zeros quantos forem as unidades do expoente: $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

1ª) Calcular o valor da expressão : $3^3 + 1 = 27 + 1 = 28$

2ª) Calcular o valor da expressão numérica: $20 - 4^2 : 2 = 20 - 16 : 2 = 20 - 8 = 12$.

3ª) Calcular o valor da expressão numérica: $3^4 : 9 \times 2^3 = 81 : 9 \times 8 = 9 \times 8 = 72$.

Não esqueça: efetuamos, em 1º lugar, as potenciações, em 2º lugar, as divisões ou multiplicações, na ordem em que aparecem, em 3º lugar as adições ou subtrações, na ordem em que aparecem.

Caso, haja parênteses, calculamos inicialmente o valor da expressão situada no seu interior: $2^5 + (4^2 + 2^3 \times 3) =$

$2^5 + (16 + 8 \times 3) =$

$2^5 + (16 + 24) =$

$32 + 40 = 72$.

NÚMEROS INTEIROS

O conjunto dos números inteiros nada mais é do que uma ampliação do conjunto dos números naturais. Sendo assim, atente-se para as seguintes subtrações:

5 – 8	12 – 20	0 – 3

Você observou que não pôde efetuar as subtrações, porque nelas, o minuendo é menor que o subtraendo. Então a operação **a – b**, quando $a < b$, é impossível de ser efetuada no conjunto dos números naturais **IN**. Para que esse tipo de operação seja sempre possível, foi necessária a ampliação do conjunto **IN**, com a criação de uma nova categoria de números denominada de "números inteiros positivos e negativos".

NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS E NEGATIVOS

A fim de se obter um conjunto em que a operação subtração entre seus elementos seja sempre possível, foi necessário ampliar o conceito de número. Com esse objetivo criou-se para cada número natural **n** (com **n** diferente de zero) um número + **n** (lê-se mais **n**) e um número – **n** (lê-se: menos **n**). Veja:

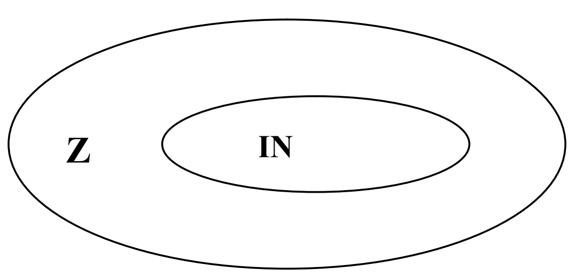
Exemplos:

- Para o número **1** criou-se: (+ 1) e (– 1)
- Para o número **2** criou-se: (+ 2) e (– 2)
- Para o número **3** criou-se: (+ 3) e (– 3)
- Para o número **9** criou-se: (+ 9) e (– 9)

Os números + 1, + 2, + 3 e + 9 são denominados "números inteiros positivos" e os números – 1, – 2, – 3 e – 9 são denominados "números inteiros negativos".

Então, podemos afirmar: o conjunto constituído pelos números inteiros positivos, pelo número zero e pelos números inteiros negativos e denominado "conjunto dos números inteiros", que é representado pela letra **Z,** e escrito:

Z = { ... , –5, – 4 , –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 , 4 , 5, ...}



Observando o diagrama acima, podemos afirmar que:
IN $\subset$ **Z**, então: **IN** é subconjunto de **Z**.
Além do conjunto **IN**, podemos identificar outros subconjuntos de **Z**:

- Conjunto dos números inteiros diferentes de zero : **Z***

❖ **Z* =** { ..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

- Conjunto dos números inteiros não negativos = $\mathbf{Z}_+$

❖ $\mathbf{Z}_+$ = { 0, 1, 2, 3, 4, ...}

- Conjunto dos números inteiros não positivos = $\mathbf{Z}_-$

❖ $\mathbf{Z}_-$ { 0, – 1, –2 , –3, – 4, ...}

- Conjunto dos números inteiros positivos = $\mathbf{Z}^*_+$

❖ $\mathbf{Z}^*_+$ = { 1, 2, 3, 4, 5, ...}

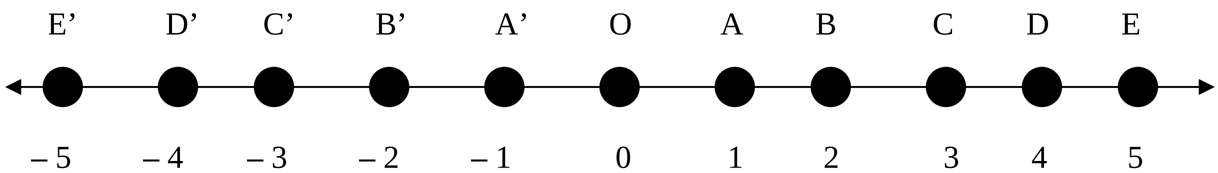
REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS INTEIROS

Tomamos uma reta **r** e sobre ela, tomamos um ponto **O** que vai dividi-la em duas semi-retas. A seguir, procedemos da seguinte forma:

- à direita do ponto **O**, com certa unidade de medida assinalamos pontos consecutivos e, para cada ponto, fazemos corresponder um número inteiro positivo.
- À esquerda do ponto **O**, com a mesma unidade, assinalamos pontos consecutivos e, para cada ponto, fazemos corresponder um número inteiro negativo.
- Ao ponto **O**, denominado **"origem"** , fazemos corresponder o número "zero". Veja:

r

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM



Assim, estabelecemos uma correspondência biunívoca, isto é, a cada número positivo corresponde um número negativo, entre um subconjunto de pontos da reta **r** e o conjunto **Z**. O conjunto dos pontos assinalados sobre a reta **r** constitui a representação geométrica do conjunto **Z**. O conjunto dos pontos assinalados sobre a reta **r** constitui a representação geométrica do conjunto **Z**, e cada um dos pontos da reta é a “imagem” de um número inteiro.

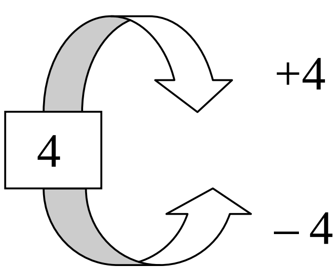
Assim: o ponto **A** é a imagem geométrica do número + 1.
o ponto **E’** é a imagem geométrica do número – 5.

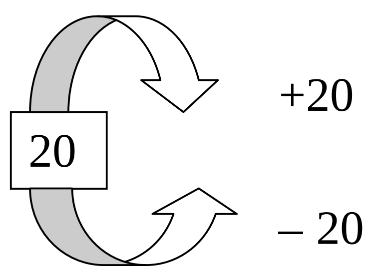
O número inteiro é denominado **“abscissa”** do ponto correspondente.

Assim: o número + 2 é a abscissa do ponto B’.
o número – 3 é a abscissa do ponto C’.

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO INTEIRO

Como já vimos, para cada número natural (**n** diferente de zero) foi criado um número + **n** e um número – **n**.





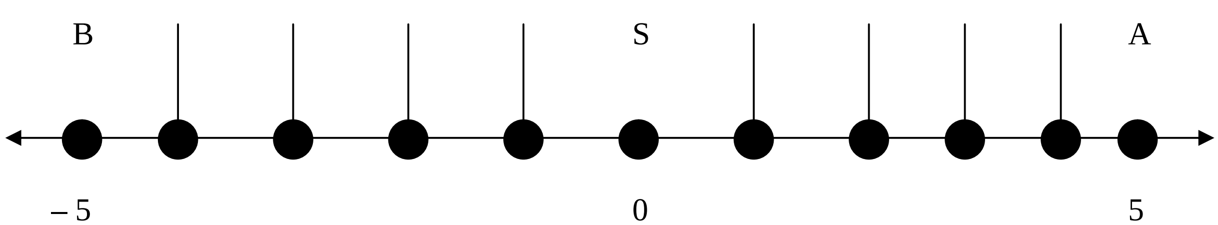
APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

O número natural denomina-se **módulo** ou **valor absoluto** do número inteiro:

- O módulo do número + 5 é 5. Indica-se : / + 5 / = 5
- O módulo do número –5 é 5. Indica-se: / –5 / = 5
- O módulo de zero é zero mesmo. Indica-se: / 0 / = 0
- O módulo do número + 10 é 10. Indica-se : / + 10 / = 10
- O módulo do número – 10 é 10. Indica-se: / –10 / = 10

<u>NÚMEROS INTEIROS OPOSTOS OU SIMÉTRICOS</u>

Observe novamente a reta numérica:

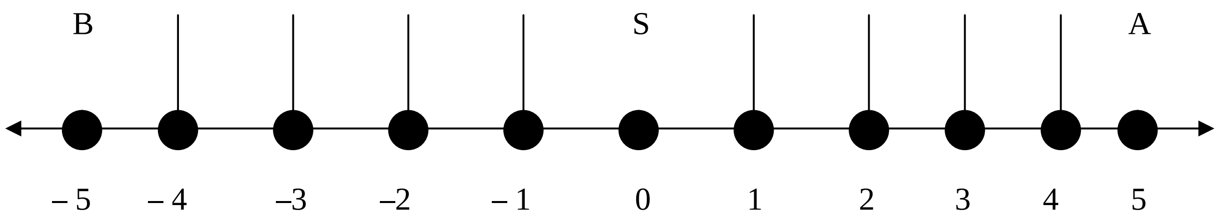


- A distância do ponto **A** ao ponto **S** é igual à distância do ponto **B** ao ponto **S**.
- Os números que expressam as posições dos pontos **A** e **B** têm módulos iguais, isto é, /+ 5 / = / –5 / = 5.
- Os números que expressam as posições dos pontos **A** e **B** têm sinais diferentes.
- Os pontos **A** e **B** são simétricos em relação ao ponto **S**.
- Dois números opostos têm sinais diferentes e o mesmo módulo.
- O oposto de zero é zero.

Daí: dois números inteiros são <u>opostos</u> ou <u>simétricos</u> quando têm módulos iguais e sinais diferentes.

COMPARAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Para tanto, vamos considerar também a reta numérica:



❖ Assim, podemos concluir que:

❖ $5 > 1$, pois 5 está a direita de + 1 na reta numérica.
❖ $2 > 3$, pois 2 está a direita de – 3 na reta numérica.
❖ $-1 > -4$, pois – 1 está a direita de – 4 na reta numérica.

Assim: dados dois números inteiros, o maior é aquele que estiver mais à direita na reta numérica.

DETERMINAÇÃO DE UM SUBCONJUNTO DE Z

Vamos escrever o conjunto do números inteiros maiores que – 3:

❖ Pela nomeação dos elementos: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

❖ Simbolicamente: $\{x \in \mathbf{Z} \,/\, x > -3\}$

❖ Então: $\{x \in \mathbf{Z} \,/\, x > -3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Vamos escrever o conjunto do números inteiros menores ou iguais a – 5:

- Pela nomeação dos elementos: $\{-5, -6, -7, -8, -9, ...\}$
- Simbolicamente : $\{x \in \mathbf{Z} / x \leq -5\}$
- Então: $\{x \in \mathbf{Z} / x \leq -5\} = \{-5, -6, -7, -8, -9, ...\}$

Vamos escrever o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a – 4 e menores que + 2:

- Pela nomeação dos elementos : $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
- Simbolicamente : $\{x \in \mathbf{Z} / -4 \leq x < 2\}$
- Então: $\{x \in \mathbf{Z} / -4 \leq x < 2\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

SOMA DE DOIS NÚMEROS INTEIROS DE MESMO SINAL

Para somar dois números inteiros de mesmo sinal, é importante ter conhecimento das seguintes recomendações:

- Quando ambos os números são positivos, a soma é um número positivo.
- Quando ambos os números são negativos, a soma é um número negativo.
- O módulo do resultado é sempre igual à soma dos módulos das parcelas.

Exemplos: $(+6) + (+8) = +14$

$(+3) + (+7) = +10$

$(-2) + (-4) = -6$

$(-5) + (-3) = -8$

$(+2) + (+3) = +5$

$(-4) + (-2) = -8$

Regra: a soma de dois números inteiros (diferentes de zero) de mesmo sinal é obtida conservando-se o sinal comum às parcelas e adicionando-se os módulos.

SOMA DE DOIS NÚMEROS INTEIROS DE SINAIS DIFERENTES

Observe que, quando um número é positivo e o outro negativo, o número mais distante da origem é que determina se a soma é um número positivo ou um número negativo, e que o módulo do resultado é sempre igual à diferença entre os módulos da parcelas.
Atente-se para as operações seguintes:

$(+18) + (-8) = +10$

$(+15) + (-10) = +5$

$(+11) + (-14) = -3$

$(+9) + (-19) = -10$

$(-6) + (+4) = -2$

$(+7) + (-3) = +4$

Regra: a soma de dois números inteiros (diferentes de zero) de sinais diferentes é obtida dando-se o sinal da parcela que tem maior módulo e calculando-se a diferença entre os módulos.

SOMA DE DOIS NÚMEROS INTEIROS ONDE UM DELES É ZERO

Atente-se para as seguintes operações:

$(+6) + 0 = +6$

$(-5) + 0 = -5$

$0 + (+3) = +3$

$0 + (-2) = -2$

Regra: a soma de dois números inteiros, um dos quais é zero, é igual ao outro número.

SOMA DE DOIS NÚMEROS OPOSTOS OU SIMÉTRICOS

Atente-se para as seguintes operações:

(+ 5) + (–5) = 0
(+ 9) + (– 9) = 0

Pelo que se observa, nos cálculos acima, números opostos ou simétricos são números inteiros que têm o mesmo módulo e sinais diferentes.

Regra: a soma de dois números inteiros opostos ou simétricos é igual a zero.

SOMA DE TRÊS OU MAIS NÚMEROS INTEIROS

Atente-se para os seguintes cálculos:
(+ 9) + (– 7) + (+ 5) + (– 10) =
(+ 14) + (– 17) = – 3

Pelo que se observa, a soma de três ou mais números inteiros resume-se na soma de dois números inteiros (diferentes de zero), onde o resultado é obtido somando-se o total das parcerias positivas com o total das parcelas negativas.

Regra: obtemos a soma calculando:

- A soma de todas as parcelas positivas;
- A soma de todas as parcelas negativas;
- A soma dos resultados obtidos.

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o minuendo ao oposto do subtraendo, isto é, obtemos o mesmo resultado. Sendo assim, observe os seguintes cálculos:

(+ 7) – (+ 5) = (+ 7) + (– 5) = + 2
(+ 3) – (– 2) = (+ 3) + (+ 2) = + 5

Regra: Para se determinar a diferença entre dois números inteiros, basta calcular a soma do minuendo com o oposto do subtraendo.

ADIÇÃO ALGÉBRICA

A adição e a subtração no conjunto **Z** podem ser considerados como uma única operação denominada adição algébrica, cujo resultado chama-se **"soma algébrica"**. Observe os seguintes cálculos:

a) (+ 7) + (– 5) = + 7 – 5 = + 2
b) (– 2) – (+ 3) = (– 2) + (– 3) = 2 – 3 = – 5
c) (+ 3) + (10) – (+ 8) = (+ 3) + (+ 10) + (– 8) = + 3 + 10 – 8 = + 5

ELIMINAÇÃO DE PARÊNTESES

Atente-se para os cálculos da seguinte soma algébrica:
– 5 + (2 – 8 + 6) = – 5 + 2 – 8 + 6 = – 13 + 8 = – 5
Regra: numa soma algébrica, os parênteses, que contém uma soma de números inteiros e que são precedidos pelo sinal (+), podem ser eliminados juntamente com o sinal (+) que os precede, escrevendo-se os números contidos no seu interior, cada qual com o próprio sinal.

Seja a soma algébrica: 3 – (– 2 + 10 – 7) =
3 + 2 – 10 + 7 =
+ 12 – 10 = + 2

Regra: numa soma algébrica, os parênteses que contém uma soma de números inteiros e que são precedidos pelo sinal (–) , podem ser eliminados juntamente com o sinal (–) que os precede, escrevendo-se os números contidos no seu interior, com sinais trocados.

Observação: Quando existem colchetes e chaves, valem as mesmas regras práticas de eliminação. Note que, quando um desses sinais de associação contém outro, a eliminação se faz a partir do mais interno.
Exemplo: 20 – [– 3 + (– 5 + 18 + 6) – 1] =

20 – [– 3 – 5 + 18 + 6] = ⟶ eliminando os parênteses

20 + 3 + 5 – 18 – 6 + 1 = ⟶ eliminando os colchetes

+ 29 – 24 = + 5

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Na multiplicação de dois números inteiros, devemos ficar atentos para os seguintes casos:

<u>QUANDO OS DOIS FATORES TÊM SINAIS IGUAIS</u> :

1º Exemplo: $(+5).(+3) =$

$5 \times 3 = 15$ ou $+15$

2º Exemplo: $(-5).(-3) =$

$\underbrace{5 \times 3}_{\text{Calcula-se o produto dos módulos dos fatores.}} = 15$ ou $+15$

Logo: $(+5).(+3) = +15$

$(-5).(-3) = +15$

Regra: para determinar o produto de dois números inteiros (diferentes de zero), com fatores de sinais iguais, calcula-se o produto dos módulos dos fatores, dando-lhe sinal positivo.

<u>QUANDO OS FATORES TÊM SINAIS DIFERENTES</u>

1º Exemplo: $(+5).(-3) = 5 \,.\, (-3) = \underbrace{(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)}_{\text{produto é uma soma de parcelas iguais}} = -15$

o módulo de + 5 = 5

produto é uma soma de parcelas iguais

2º Exemplo: $(-5).(+3) = (-5).3 = (-5)+(-5)+(-5) = -15$

Logo: $(+5).(-3) = -15$
$(-5).(+3) = -15$

Regra: para determinar o produto de dois números inteiros (diferentes de zero), com fatores de sinais diferentes, calcula-se o produto dos módulos dos fatores, dando-lhe sinal negativo.

PRODUTO DE TRÊS OU MAIS NÚMEROS INTEIROS

$(+ 6) . (- 2) . (- 3) . (+ 5) = (- 12) . (- 3) . (+ 5) = (+ 36) . (+ 5) = + 180$

Regra: para se obter o produto de três ou mais fatores, multiplica-se o primeiro pelo segundo, o resultado obtido, pelo terceiro, e assim por diante.

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Quanto à divisão de números inteiros, convocamos a atenção do estudante para os seguintes casos:

QUANDO O DIVIDENDO E O DIVISOR TÊM O MESMO SINAL

1º Exemplo: $(+ 18) : (+ 6) = + 3$
2º Exemplo: $(- 18) : (- 6) = + 3$

Regra: o quociente de dois números inteiros de sinais iguais, com o segundo diferente de zero, é obtido dividindo-se o módulo do dividendo pelo módulo do divisor e dando ao quociente o sinal positivo.

QUANDO O DIVIDENDO E O DIVISOR TÊM SINAIS DIFERENTES

1º Exemplo: $(+ 18) : (- 6) = - 3$
2º Exemplo: $(- 18) : (+ 6) = - 3$

Regra: o quociente de dois números inteiros de sinais diferentes, com o segundo diferente de zero, é obtido dividindo-se o módulo do dividendo pelo módulo do divisor e dando ao quociente o sinal negativo.

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

Vamos estudar as regras para as potências de números inteiros com base diferente de zero. Atente-se para os seguintes casos:

QUANDO O EXPOENTE É UM NÚMERO PAR

$(+2)^2 = (+2) \times (+2) = +4$ ⟶ a potência é um número positivo.

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$ ⟶ a potência é um número positivo.

$(+2)^4 = +16$ ⟶ a potência é um número positivo.

$(-2)^4 = +16$ ⟶ a potência é um número positivo.

Regra: quando o expoente é par, a potência é sempre um número positivo.

QUANDO O EXPOENTE É UM NÚMERO ÍMPAR

$(+2)^3 = (+2) \times (+2) \times (+2) = +8$ ⟶ leva o mesmo sinal da base.

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ ⟶ leva o mesmo sinal da base.

$(+2)^5 = +32$ ⟶ leva o mesmo sinal da base.

$(-2)^5 = -32$ ⟶ leva o mesmo sinal da base.

Regra: quando o expoente é ímpar, a potência tem sempre o mesmo sinal da base.

POTÊNCIA DE EXPOENTE 1 (UM)

$(+3)^1 = +3$
$(-3)^1 = -3$

Regra: a potência com expoente 1 (um) é igual ao próprio número da base.

POTÊNCIA DE EXPOENTE 0 (ZERO)

$(+2)^0 = +1$

$(-2)^0 = +1$

Regra: toda potência com expoente zero é igual a + 1

Observações:

$(-2)^2$ é diferente de -2^2, pois $(-2)^2 = +4$ e $-2^2 = -4$.

$(-2)^2$ representa o quadrado do número -2.

-2^2 representa menos o quadrado do número 2.

PRODUTO DE POTÊNCIA DE MESMA BASE

1º Exemplo: $(+5)^3 \times (+5)^6 = (+5)^{3+6} = (+5)^9$

2º Exemplo: $(-2)^4 \times (-2) \times (-2)^5 = (-2)^{4+1+5} = (-2)^{10}$

Regra: num produto de potências de mesma base, somam-se os expoentes e conserva-se a base.

QUOCIENTE DE POTÊNCIA DE MESMA BASE

1º Exemplo: $(-6)^5 : (+6)^2 = (+6)^{5-2} = (+6)^3$

2º Exemplo: $(-10)^8 : (-10)^3 = (-10)^{8-3} = (-10)^5$

Regra: num quociente de potências de mesma base, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes.

POTÊNCIA DE POTÊNCIA

1º Exemplo: $[(+10)^2]^5 = (+10)^{2 \times 5} = (+10)^{10}$

2 º Exemplo: $[(-8)^3]^2 = (-8)^{3x2} = (-8)^6$

Regra: num produto de potência de potência de mesma base, conserva-se a base e multiplica-se os expoentes.

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

POTÊNCIA DE UM PRODUTO OU DE UM QUOCIENTE

$[(+ 6) \times (- 5)]^2 = (+ 6)^2 \times (- 5)^2$
$[(- 10) : (+ 2)]^3 = (- 10)^3 : (+ 2)^3$

Regra: para se obter a potência de um produto ou de um quociente, eleva-se cada termo do produto ou do quociente a este expoente.

2. NÚMEROS PRIMOS

NÚMEROS PRIMOS

Os números que admitem apenas dois divisores (ele próprio e 1) são chamados **números primos**.

Exemplos:

a) 2 é um número primo, pois $D_2 = \{ 1, 2 \}$
b) 3 é um número primo, pois $D_3 = \{ 1, 3 \}$
c) 5 é um número primo, pois $D_5 = \{ 1, 5 \}$
d) 7 é um número primo, pois $D_7 = \{ 1, 7 \}$
e) 11 é um número primo, pois $D_{11} = \{ 1, 11 \}$

O conjunto dos números primos é infinito.

$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$

NÚMEROS COMPOSTOS

Os números que têm mais de dois divisores são chamados **números compostos**.

Exemplos:
a) 4 é um número composto, pois $D_4 = \{ 1, 2, 4 \}$
b) 6 é um número composto, pois $D_6 = \{ 1, 2, 3, 6 \}$
c) 8 é um número composto, pois $D_8 = \{ 1, 2, 4, 8 \}$
d) 9 é um número composto, pois $D_9 = \{ 1, 3, 9 \}$

CONCLUSÕES

- O número 2 é o único número par que é primo.
- O número 1 não é primo nem composto (tem apenas 1 divisor)

Números Naturais

Números Primos | 1 | Números Compostos

RECONHECIMENTO DE UM NÚMERO PRIMO

Para reconhecer se um número é primo, dividimos o número dado, sucessivamente, pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13,.. até que o quociente seja menor ou igual ao divisor. Se isso acontecer e a divisão não for exata, dizemos que o número é primo.

DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO EM FATORES PRIMOS (FATORAÇÃO)

Um número composto pode ser indicado como um produto de fatores primos. Ou melhor, um número pode ser **fatorado**.

Exemplo:

Vamos decompor o número 140 em fatores primos.

140 = 2 x 70
140 = 2 x 2 x 35
140 = 2 x 2 x 5 x 7

COMPOSTO FATORES PRIMOS

Na prática você fará assim:

140	2
70	2
35	5
7	7
1	$2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$

PROCEDIMENTOS

- Escrevemos o número dado à esquerda de uma barra vertical.
- Dividimos o número (140) pelo menor número primo possível. Neste caso, é o 2.
- Voltamos a dividir o quociente, que é 70, pelo número primo possível.
  Aqui novamente é o 2.
- O processo é repetido, até que o quociente seja 1.

TESTES

1) Dadas as afirmações:

- O número 1 é primo.
- O número 0 é primo.
- O número 1 é composto.

Temos:
a) só uma verdadeira.
b) só duas verdadeiras.
c) todas verdadeiras.
d) todas falsas.

2) Um número primo tem:

a) só dois divisores.
b) nenhum divisor.
c) apenas um divisor.
d) mais do que dois divisores.

3) Dos conjuntos abaixo, o único que possui como elementos somente números primos é:

a) { 13, 17, 27 } b) { 13, 17, 19 } c){ 19, 21, 23 } d) { 21, 23, 29 }

4) O conjunto dos divisores de 30 que são primos é:

a) { 1, 2, 3 } b) { 1, 2, 5 } c) { 2, 3, 5 } d) { 1, 3, 5 }

5) Se A é o conjunto dos divisores de 15 e se B é o conjunto dos números primos menores do que 15, então A ∩ B é o conjunto:

a) { 3, 5 } b) { 2, 5 } c) { 3, 5, 15 } d) { 2, 3, 5, 15 }

6) Qual o número representado como um produto de **fatores primos** ?

a) $2 \times 5 \times 10$ b) $2 \times 3 \times 7$ c) $2 \times 5^2 \times 7^2$ d) $2^2 \times 5^2 \times 7^2$

7) A Fatoração completa de 4. 900 é:

a) $2^2 \times 5^2 \times 7$ b) $2^2 \times 5 \times 7^2$ c) $2 \times 5^2 \times 7^2$ d) $2^2 \times 5^2 \times 7^2$

8) O produto de $2 \times 3 \times 7^2$ é a fatoração completa de:

a) 84 b) 184 c) 194 d) 294

9) O algarismo que deve ser colocado à direita de 12 para se obter um número primo é:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7

10) Qual dos números abaixo é primo ?

a) 123 b) 143 c) 153 d) 163

11) Qual dos números abaixo é primo ?

a) 121 b) 401 c) 362 d) 201

12) Das seqüências a seguir, aquela que **não** contém números primos é:

a) 13, 427, 1029 b) 189, 300, 529 c) 2, 111, 169 d) 11, 429, 729

GABARITO

1) D
2) A
3) B
4) C
5) A
6) B
7) D
8) D
9) D
10) D
11) B
12) B

3. MÁXIMO DIVISOR COMUM (M.D.C.) E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (M.M.C.)

3.1. MÁXIMO DIVISOR COMUM (M.D.C.)

Consideremos os conjuntos dos divisores dos números 20 e 30.

D (20) = { 1, 2, 4, 5, 10, 20 }

D (30) = { 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 }

Observe : a) D (20) ∩ D (30) = { 1, 2, 5, 10 }
b) Os divisores comuns de 20 e 30 são : 1, 2, 5, 10.
c) O maior divisor comum de 20 e 30 é 10.

Então, o número 10 é denominado *máximo divisor comum* de 20 e 30, o qual representamos por:

M.D.C. (20, 30) = 10

Daí podemos dizer : dados dois ou mais números, não simultaneamente nulos, denomina-se *máximo divisor comum* (m.d.c.) desses números o maior dos seus divisores comuns.

TÉCNICAS PARA O CÁLCULO DO M.D.C.

Vamos determinar o m.d.c. dos números 24 e 60.

Pela teoria dos conjuntos, já sabemos que:

D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 }

D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

D(60) ∩ D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 12 } = divisores comuns de 24 e 60 ⇔ m.d.c. (24, 60) = 12

TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

1º) Decompõe-se cada número em seus fatores primos.
2º) Calcula-se o produto dos fatores comuns, cada um deles com o menor expoente. O produto assim obtido será o m.d.c. procurado.

EXEMPLO:

60	2	24	2
30	2	12	2
15	3	6	2
5	5	3	3
1		1	

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$24 = 2^3 \times 3$
Então, o M.D.C. de (60 e 24) $= 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$.
Regra : O M.D.C. de dois ou mais números é igual ao resultado do produto dos fatores comuns de menor expoente.

TESTES

Aplicando a decomposição em fatores primos, determine:

a) o m.d.c. de (24 e 30)
b) o m.d.c. de (24 e 40)
c) o m.d.c de (60 e 100)
d) o m.d.c. de (48 e 80)
e) o m.d.c de (72, 63 e 54).

Respostas: a = 6, b = 8, c = 20, d = 16, e = 9

3.2. MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (M.M.C.)

Vamos considerar os conjuntos múltiplos de 4 e 6 :

M(4) = { 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36,40.....}

M(6) = { 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...}

Agora, observe:

a) M(4) ∩ M(6) = { 0, 12, 24, 36,... }
b) Os múltiplos comuns de 4 e 6 são : 0, 12, 24, 36,.....
c) O menor múltiplo comum de 4 e 6, diferente de zero é 12.

Sendo assim, o número 12 é denominado mínimo múltiplo comum de 4 e 6, que representamos por: m.m.c. (4, 6) = 12.

Daí podemos dizer: dados dois ou mais números diferentes de zero, denomina-se mínimo múltiplo comum (m.m.c) desses números o menor de seus múltiplos comuns, diferente de zero.

TÉCNICAS PARA O CÁLCULO DO M.M.C.:

Vamos determinar o M.M.C de 60 e 24. Pela teoria dos conjuntos, já sabemos que:

M(60) = { 0, 60, 120, 180, 240, 300, ...}

M(24) = { 0, 24, 48, 72, 96, 120, 144, ...}

M(60) ∩ M(24) = { 0, 120, ... }

Então: M.M.C. de { 60 e 24 } = 120.

Porém, podemos determinar o M.M.C de dois ou mais números diferentes de zero de uma maneira mais simples, por meio de decomposição em fatores primos.

Regra: decompõe-se cada número em seus fatores primos. Calcula-se o produto dos fatores comuns e não comuns, cada um deles elevado ao maior expoente. O produto assim obtido será o M.M.C. procurado.

Exemplo: Calcular o M.M.C de (60 e 24).

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Então: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ e $24 = 2^3 \times 3$. Logo, o M.M.C de (60 e 24) = $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

De maneira mais prática, as decomposições podem ser realizadas ao mesmo tempo, pois desta forma já se obtém os fatores comuns e os fatores não comuns com o maior expoente:

Vamos calcular o M.M.C. de (8 e 10).

	2
	5

8, 10

4, 5

2, 5

1, 5

1, 1

Então: o M.M.C de (8 e 10) = 2^3 x 5 = 8 x 5 = 40

PROPRIEDADES

1ª) Calculamos o M.M.C de (4, 6 e 12). Observa-se que 12 é múltiplo de

4, 6, 12	2
2, 3, 6	2
1, 3, 3	3
1, 1, 1	

Propriedade: dados dois ou mais números diferentes de zero, se um deles for múltiplo de todos os outros, então esse número será o M.M.C. dos números dados.

2ª) Calculamos o M.M.C de (4 e 9). Observa-se que 4 e 9 são números primos entre si.

4, 9	2
2, 9	2
1, 9	3
1, 3	3

O M.M.C. de (4 e 9) = 2^2 x 3^2 = 4 x 9 = 36.

Propriedade: dados dois ou mais números que são primos entre si, o M.M.C. entre eles será o produto dos números dados.

RELAÇÃO ENTRE O M.M.C E O M.D.C DOS MESMOS NÚMEROS

Vamos trabalhar com os números 60 e 24 dos quais já sabemos que:

- M.M.C. de (60 e 24) = 120 e
- M.M.C de (60 e 24) = 12

Então: a) o produto dos números dados : 60 x 24 = 1.440
b) M.D.C. de (60 e 24) x M.M.C. de (60 e 24) = 12 x 120 = 1.440

Propriedade: o produto de dois números, diferentes de zero, é igual ao produto do M.D.C. pelo M.M.C. dos mesmos números.

TESTES

1) Aplicando a decomposição em fatores primos, calcule:

a) M.M.C. de (120 e 50)
b) M.M.C. de (12 e 16)
c) M.M.C. de (6 e 9)
d) M.M.C. de (14 e 35)
e) M.M.C. de (16 e 20)
f) M.M.C. de (12, 20 e 24)
g) M.M.C de (10, 20 e 40)
h) M.M.C. de (21, 28 e 42)
i) M.M.C. de ((50, 80 e 100).

2) Aplicando a decomposição simultânea em fatores primos, determine:

a) M.M.C. de (6 e 10)

b) M.M.C. de (18 e 12)
c) M.M.C. de (9 e 30)
d) M.M.C. de (14, 21 e 35)
e) M.M.C. de (6, 10 e 12)
f) M.M.C. de (8, 12 e 16)
g) M.M.C de (20, 15 e 25)
h) M.M.C. de (90 e 120)
i) M.M.C. de (100 e 150)
j) M.M.C. de (20, 36, 40 e 48)
k) M.M.C. de (80, 120 e 150)
l) M.M.C de (10, 14, 28 e 35).

3) Sabe-se que M.M.C de (50 e 60) = 300. Calcule os múltiplos comuns de 60 e 50 menores que 2.000. (Sugestão: você conhece o menor múltiplo comum; para determinar os outros, calcule os múltiplos desse número).

4) Um conjunto A é formado pelos múltiplos comuns de 10 e 12, menores que 500. Quantos elementos tem esse conjunto A ?

GABARITO

1)

a) 100
b) 48
c) 18
d) 70
e) 80
f) 120
g) 40
h) 84
i) 400

2)

a) 30
b) 36
c) 90
d) 210
e) 60
f) 48
g) 150
h) 360

i) 300
j) 720
k) 1.200
l) 140

3)

300, 600, 900, 1.500 e 1.800

4) (oito) elementos

4. NÚMEROS RACIONAIS

Agora, as divisões cujos resultados não são números inteiros e que, portanto, não podem ser realizadas no conjunto **Z** e para que a operação **a : b** (com **a** e **b** pertencendo ao conjunto dos números inteiros e **b** diferentes de zero), seja sempre possível, será necessária a ampliação do conjunto **Z** com a criação de uma nova categoria de números: números racionais positivos e números racionais negativos – (conjunto **Q**). Então, do mesmo modo como vimos no conjunto **Z**, para cada número racional foi criado um número **+ a** (lê-se: mais a) e um número **– a** (lê-se: menos a):

2 → +2, – 2

2/3 → +2/3, – 2/3

0,5 → +0,5

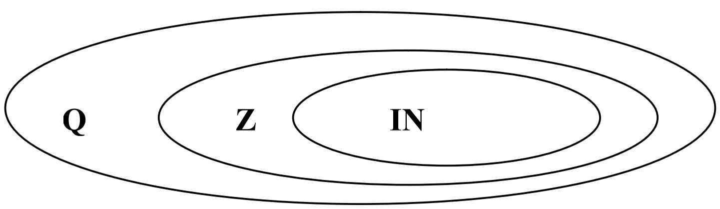
1,66 → +1,66

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

O conjunto constituído pelos números racionais negativos, pelo número zero e pelos números racionais positivos é denominado “conjunto dos números racionais relativos, representado pela letra **Q**, e escrito:

Q = { ...., – 2, ..., – 5/3, ..., – 1,........, 1/2......, 0,......., + 2/3,........, + 1,........, + 2,..........}

Observamos que: $\mathbf{IN} \subset \mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ $\longrightarrow$ $\mathbf{IN} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$



Além dos conjuntos **IN** e **Z**, podemos identificar os seguintes subconjuntos de **Q:**

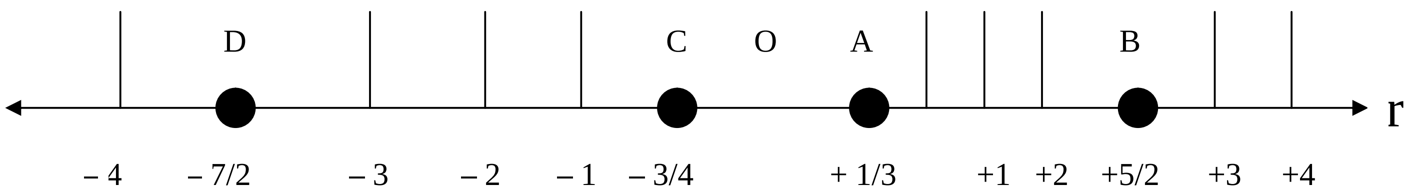
$\mathbf{Q}^*$ = **Q** – { 0 }
$\mathbf{Q}_+$ = { números racionais não negativos } = { números racionais absolutos }
$\mathbf{Q}_-$ = { números racionais não positivos }
$\mathbf{Q}^*_+$ = { números racionais positivos } = $\mathbf{Q}_+ - \{\mathbf{0}\}$
$\mathbf{Q}^*_-$ = { números racionais negativos } = $\mathbf{Q}_- - \{\mathbf{0}\}$

Observações:
+ 2 e – 2
+ 1/4 e – 1/4/
+ 1,2 e – 1,2

Todos os números acima são números racionais opostos ou simétricos.

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

A RETA NUMÉRICA DECIMAL



Assim: o ponto **A** é a imagem geométrica do número racional + 1/3.
o número racional – 7/2 é a abscissa do ponto **D**.

ADIÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS – ADIÇÃO ALGÉBRICA

1º exemplo : (+ 3/5) + (– 2/3) = + 3/5 – 2/3 = (+ 9 – 10) : 15 = – 1 /15

2ª exemplo: – 1/2 – [1/4 – (1/6 – 1/8) – 1/3] =

– 1/2 – [1/4 – 1/6 + 1/8) – 1/3] = eliminando os parênteses

– 1/2 – 1/4 + 1/6 – 1/8 + 1/3 = eliminando os colchetes

$\dfrac{-12 - 6 + 4 - 3 + 8}{24}$ = obtendo o mínimo múltiplo comum e realizando os cálculos

$\dfrac{-21 + 12}{24} \longrightarrow$ – 9/24 = 3/8 simplificando por 3 (três)

3º exemplo: determine o valor da expressão:

x + y, para x = – 5/8 e para y = + 1/2

x + y = (–5/8) + (+ 1/2) = (substituindo os valores de x e y)

(–5/8) + (+ 1/2) = (eliminando os parênteses)

$-5/8 + 1/2 = \dfrac{-5+4}{8} = -1/8$ (obtendo o mínimo múltiplo comum e realizando os cálculos)

Regra: quando o sinal imediatamente anterior aos parênteses, colchetes ou chaves é positivo, conserva-se os sinais do interior dos parênteses, chaves e colchetes; se negativo, troca-se o sinal do interior deles.
Na adição ou subtração de frações, podem ocorrer os seguintes casos:

AS FRAÇÕES TÊM O MESMO DENOMINADOR

$2/6 + 3/6 = 5/6$

Desse exemplo, concluímos que:

Regra: a soma de frações que têm denominadores iguais é obtida somando-se os numeradores e conservando-se o denominador.

$5/6 - 3/6 = 2/6$

A partir desse exemplo, podemos dizer que:

Regra: a diferença entre frações que têm denominadores iguais é obtida subtraindo-se os numeradores e conservando-se o denominador.

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Observe o seguinte exemplo:

$2/5 \times 3/4 = 6/20$

O exemplo nos mostra que:

Regra: o produto de dois números fracionários é obtido pela multiplicação dos numeradores entre si e dos denominadores entre si.

Há casos em que a determinação do produto de números fracionários pode ser facilitada:

EXISTEM FATORES COMUNS NO NUMERADOR E NO DENOMINADOR

3/4 x 5/3 = 5/4 (cancela-se o fator 3 do numerador e o fator 3 do denominador)

5/3 x 2/5 x 7/2 = 7/3 (cancela-se os fatores 2 e os fatores 5)

EXISTEM FATORES NO NUMERADOR E NO DENOMINADOR QUE PODEM SER SIMPLIFICADOS

4/15 x 10/9 = 8/27 (dividem-se os fatores 10 e 15 por 5)

2/9 x 3/15 x 10/2 = 2/9 (dividem-se 10 e 15 por 5, e 3 e 9 por 3 cancelam-se os fatores 2)

DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Observe o seguinte exemplo:

2/3 : 5/4 = 2/3 x 4/5 = 8/15, o que nos permite concluir a seguinte regra:

Regra: o quociente de um número racional por outro é obtido multiplicando-se o primeiro pelo inverso do segundo.

Veja mais este exemplo:

Calcular o valor da expressão : 2/15 + 2/3 : 5/9

Solução:

2/15 + 2/3 : 5/9 = 2/15 + 2/3 x 9/5 = 2/15 + 2/3 x 9/5 = 2/15 + 6/5 = $\frac{2 + 18}{15}$ = ⟶

⟶ 20/15 = 4/3

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Vamos calcular a potência: $(2/3)^4$

GOVERNO DO ESTADO DE RONDÔNIA
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E
MÉDIO JOHN KENNEDY

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

$(2/3)^4 = \underbrace{2/3 \times 2/3 \times 2/3 \times 2/3}_{4 \text{ fatores}} = 2^4 : 3^4 = 16/81$

Regra: a potência de um número fracionário é obtida elevando-se o numerador e o denominador ao expoente indicado.

Vamos considerar as seguintes expressões:

$(-1/7)^2 = +1/49$ (quando o expoente é par, a potência é sempre positiva).

$(+2/3)^4 = +16/81$ (quando o expoente é par, a potência é sempre positiva).

$(+1/5)^3 = +1/125$ (quando o expoente é ímpar, a potência tem o mesmo sinal da base).

$(-3/2)^5 = -243/32$ (quando o expoente é ímpar, a potência tem o mesmo sinal da base).

$(+3/7)^1 = +3/7$ (potência de expoente 1 é igual a base).

$(-5/6)^0 = +1$ (potência de expoente zero é igual a + 1).

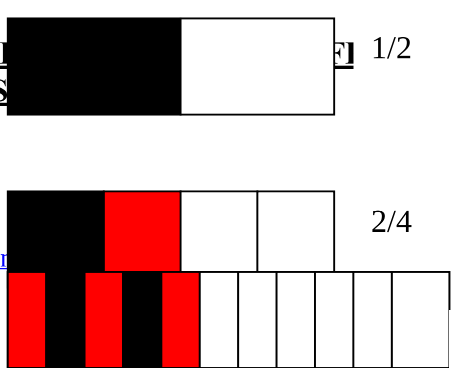
$(+3/4)^{-1} = +4/3$ (a potência de um número racional com expoente – 1 é igual ao inverso do número dado).

EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

Observando a figura abaixo, notamos que 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10 representam a mesma parte da unidade tomada.

Verificamos que existem frações diferentes que representam a mesma parte do todo. Daí a definição: duas ou mais frações que representam a mesma parte do todo são equivalentes.

CORI **FI** **)ECIMA**
VICE VERS



www.escolajohn

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

Toda fração com denominador 10, ou 100, ou 1.000, ou ..... denomina-se fração decimal.

Exemplos: 3/10, 5/100, 8/1000

Para lermos uma fração decimal, lemos, inicialmente, o numerador da fração seguido:

- da palavra décimo quando o denominador for 10.
- da palavra centésimos quando o denominador for 100.
- da palavra milésimos quando o denominador for 1000.

2/10 lê-se : três décimos;

3/100 lê-se : três centésimos;

3/1000 lê-se três milésimos.

Representação decimal de cada parte:

1/10 = 0,1 são representações diferentes do mesmo número racional.

1/100 = 0,01 são representações diferentes do mesmo número racional.

1/1000 = 0,001 são representações diferentes do mesmo número racional.

0,1; 0,01; 0,001; 0,3; 0,04 são chamados, simplesmente, números decimais.

São, também, números decimais, por exemplo. 2,5 ; 1,48 ; 12,624.

- A vírgula separa as unidades inteiras das unidades decimais.
- As unidades inteiras formam a parte inteira do número decimal.
- As unidades decimais formam a parte decimal do número decimal.

1 2 , 6 2 4

parte decimal

parte inteira

5. PORCENTAGEM

Freqüentemente, ouvimos frases como estas:

- “Sete por cento de desconto.”
- “Cinco por cento de comissão”.
- “Prejuízo de quinze por cento.”

RAZÃO CENTESIMAL

As razões cujos conseqüentes são iguais a 100 são chamadas **razões centesimais.**

Exemplos: a) 7/100 b) 5/100 c) 15/100

PORCENTAGEM

Porcentagem é uma razão centesimal representada pelo símbolo % (por cento).

Exemplos: a) 7/100 = 7% (que se lê: “7 por cento”)

b) 5/100 = 5% (que se lê: “5 por cento”)

c) 15/100 = 15% (que se lê: “15 por cento”)

Essa forma de representação (7%, 5%, 15%, etc.) chama-se **taxa percentual.**

EXERCÍCIOS

1) Escreva as razões na forma de taxa percentual:

a) 1/100 b) 9/100 c) 35/100 d) 100/100 e) 143/100 f) 387/100

2) Represente na forma de razões centesimais:

a) 3% b) 8% c) 34% d) 52% e) 89% f) 130%

3) Escreva as razões na forma de taxa percentual

Resolvido. 1/2 = 50/100 = 50%

a) 1/4 b) 3/5 c) 7/10 d) 1/50 e) 9/25 f) 17/10

g) 7/2 h) 5/4 i) 3/8

GABARITO

1)
a) 1%
b) 9%
c) 35%
d) 100%
e) 143%
f) 387%

2)

a) 3/100
b) 8/100
c) 34/100
d) 52/100
e) 89/100
f) 130/100

3)

a) 25%
b) 60%

c) 70%
d) 2%
e) 36%
f) 170%
g) 350%
h) 125%
i) 37,5%

<u>PROBLEMAS DE PORCENTAGEM</u>

São resolvidos através de regra de três simples.

<u>EXEMPLO 1</u>

Calcular 20% de R$ 700,00.

$$\downarrow \quad \begin{matrix} 100 & 20 \\ 700 & x \end{matrix} \quad \downarrow$$

$100/700 = 20/x = 100 \cdot x = 20 \cdot 700 \longrightarrow 100\,x = 14.000 \longrightarrow x = 14.000 : 100 \longrightarrow x = 140$

Resposta : R$ 140,00

Método Prático

Calcular 20% de R$ 700,00.

Solução : $20/100 \;.\; 700 = \dfrac{20 \;.\; 700}{100} = \dfrac{14.000}{100} = 140$

Resposta: R$ 140,00.

EXERCÍCIOS

1) Calcule as porcentagens:

a) 8% de R$ 700,00 b) 5% de R$ 4.000,00 c) 12% de R$ 5.000,00

d) 15% de R$ 2.600,00 e) 100% de R$ 4.520,00 f) 125% de R$ 8.000,00

g) 0,4% de R$ 50.000,00 h) 1,2% de R$ 40.000,00

2) Calcule as porcentagens:

a) 3% de 400 b) 18% de 8.600 c) 35% de 42.000 d) 0,5% de 150.000

e) 1% de 3.000 f) 120% de 6.200 g) 3,2% de 6.000 h) 12,5% de 18.000

3) Numa escola de 900 alunos, 42% são rapazes. Calcule o número de rapazes.

4) Sobre um ordenado de R$ 380,00 são descontados 8% para o INSS. De quanto é total de desconto ?

5) Comprei uma bicicleta por R$ 500,00. Revendi com um lucro de 15%. Quanto ganhei ?

6) Uma caneta que custava R$ 0,60 sofreu um desconto de 5%. Quanto você pagará por essa caneta ?

7) Por quanto deverei vender um objeto que me custou R$ 72,00 para lucrar 30% ?

8) Seu pai comprou um rádio por R$ 85,00 e obteve um desconto de 12%. Quanto pagou pelo rádio ?

9) Um comerciante comprou uma mercadoria por R$ 9.500,00. Querendo obter um lucro de 12%, por que preço deverá vender a mesma ?

10) Ao se pagar com atraso, uma prestação de R$ 1.300,00 sofreu um acréscimo de 4%. Qual o novo valor dessa prestação

GABARITO

1)
a) R$ 56,00
b) R$ 200,00
c) R$ 600,00
d) R$ 390,00
e) R$ 4.520,00
f) R$ 10.000,00
g) R$ 200,00
h) R$ 480,00

2)
a) 12
b) 1548
c) 14700
d) 750
e) 30
f) 7440
g) 192
h) 2250

3) 378 rapazes

4) R$ 30,40

5) R$ 75,00

6) R$ 0,57

7) R$ 93,60

8) R$ 74,80

9) R$ 10.640,00

10) R$ 1.352,00

EXEMPLO 2

Numa classe de 40 alunos, 36 foram aprovados. Qual foi a taxa de porcentagem dos aprovados ?

Solução:

40	36	(Em cada 40 alunos, temos 36 aprovados.)
100	x	(Em cada 100 alunos, teremos x aprovados.)

Proporção: $\dfrac{40}{100} = \dfrac{36}{x} \longrightarrow 40\,x = 3600 \longrightarrow x = 3600 : 40 \longrightarrow x = 90$

Resposta: A aprovação foi de 90%.

<u>EXEMPLO 3</u>

Comprei uma camisa e obtive um desconto de R$ 1,20, que corresponde à taxa de 5%. Qual era o preço da camisa ?

Solução:

100	5
x	1,20

Proporção: $\dfrac{100}{x} = \dfrac{5}{1{,}20} = 5\,x = 120 \longrightarrow x = 120 : 5 \longrightarrow x = 24$

Resposta: A camisa custava R$ 24,00.

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

EXERCÍCIOS

1) Numa escola de 40 alunos, 6 foram reprovados. Qual a taxa de porcentagem dos alunos reprovados ?

2) Um feirante observou que, em cada 75 laranjas, 6 estavam estragadas. Qual a taxa de porcentagem das frutas estragadas ?

3) Comprei um carro por R$ 23.000,00 e revendi com um lucro de R$ 1.610,00. Qual foi a taxa de lucro ?

4) Um comerciante recebeu um desconto de R$ 1.312,00 numa compra cujo valor era de R$82.000,00. Calcule a taxa de desconto.

5) Um produto custa R$ 40,00 e é vendido por R$ 52,00. Qual é a taxa de lucro?

6) Numa turma de 30 operários faltaram 12. Qual a taxa de operários presentes ?

7) As tarifas de ônibus foram majoradas, passando a R$ 1,60 para R$ 2,16. Qual foi a taxa de aumento ?

8) Oito (8) por cento dos vencimentos de um operário equivalem a R$ 33,60. Calcule o total de seus vencimentos.

9) Numa classe foram reprovados 15% dos alunos, isto é, 9 alunos. Quantos alunos havia na classe?

10) Um corretor de imóveis recebeu R$ 1.700,00 correspondentes a 5% de sua comissão. Qual o valor da venda ?

GABARITO
1) 15%
2) 8%
3) 7%
4) 1,6%
5) 30%
6) 60%
7) 35%

8) R$ 420,00
9) 60 alunos
10) R$ 34.000,00

TESTES

1) Calculando 16% de 80, obtemos:

a) 12,8 b) 16 c) 24 e) 96

2) Calculando 7,4% de 6.000, obtemos:

a) 444 b) 454 c) 4440 e) 4540

3) Calculando 160% de 450, obtemos:

a) 72 b) 270 c) 620 e) 720

4) Somando-se 30% de 12 com 0,5% de 60, obtemos:

a) 3,6 b) 3,9 c) 6,6 d) 6,9

5) $(10\%)^2$ é igual a:

a) 1% b) 10% c) 20% d) 100%

6) Trinta por cento da quarta parte de 6400 é igual a :

a) 480 b) 640 c) 240 d) 160

7) Se 5% de x é igual a 12, então x é igual a:

a) 240 b) 280 c) 200 d) 320

8) O aluguel de um apartamento é de R$ 720,00. Se houver um reajuste de 52% sobre esse valor, ele será de:

a) R$ 1.084,40 b) R$ 1.094,40 c) R$ 1.095,40 d) R$1.094,50

9) Um salário de R$ 245,00 aumentado em 47% passa a ser de :

a) R$ 330,15 b) R$ 350,35 c) R$ 360,15 d) R$ 380,15

10) Trinta por cento da área de um painel de 20 m^2 é ocupada por ilustrações e 50% das ilustrações são em azul. Então, a área ocupada pelas ilustrações em azul é igual a:

a) 3 m^2 b) 6 m^2 c) 9 m^2 d) 12 m^2

11) Uma indústria tem 85% dos seus empregados brasileiros e 60 estrangeiros. Então, o número total de empregados é :

a) 540 b) 280 c) 320 d) 400

12) Um objeto custa R$ 185,00 a prazo; à vista tem 12% de desconto. O preço desse objeto à vista é:

a) R$ 152,80 b) R$ 162,80 c) R$ 160,20 d) R$ 170,20

13) O preço de uma lancha de R$ 15.000,00 a ser vendida numa liquidação com 9% de desconto é:

a) R$ 12.650,00 b) R$ 13.650,00 c) R$ 13.350,00 d) R$ 16.350,00

14) A caderneta de poupança, no último ano, rendeu entre juros e correção monetária 21,5%. A quantia de R$ 15.000,00 rendeu, nesse ano, para o seu depositante:

a) R$ 3.235,00 b) R$ 3.522,00 c) R$ 3.150,00 d) R$ 3.225,00

15) Um molho de pimenta passando 850 g contém 6% desse peso em alho. A quantidade de alho que esse molho contém é:

a) 50 g b) 51 g c) 52 g d) 53 g

16) Numa prova de 40 questões, quem errou 6 questões acertou:

a) 6% b) 14% c) 60% d) 85%

17) Uma duplicata de R$ 14.400,00 foi paga, antes do vencimento, por R$ 13.824,00. A taxa de desconto foi de:

a) 3% b) 4% c) 5% d) 6%

18) Um brinquedo custava R$ 70,00 e passou a custar R$ 75,60. O aumento representa:

a) 6% do preço antigo.

b) 7% do preço antigo.

c) 8% do preço antigo.

d) 12% do preço antigo.

19) Uma verba de R$ 360.000,00 foi assim distribuída: para o setor A 36 mil reais; para o setor B 108 mil reais e para o setor C 216 mil reais. Expressando estas parcelas em percentuais, nesta ordem, temos:

a) 15%, 25% e 60% b) 10%, 32% e 58% c) 10%, 30% e 60% d) 10%, 28% e 62%

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

20) Para a venda de uma geladeira, o cartaz anuncia:

4 x R$ 367, 20 ou R$ 1.080,00 à vista

Quem comprar a prazo, pagará a mais:

a) 25% do preço à vista.
b) 28% do preço à vista.
c) 32% do preço à vista.
d) 36% do preço à vista.

21) Se o passe de um jogador for vendido por R$ 10.000.000,00 com quanto ficaria o clube, sabendo-se que o jogador deve receber 15% do valor do seu passe ?

a) R$ 8.500.000,00 b) R$ 1.500.000,00 c) R$ 850.000,00 d) R$ 150.000,00

22) No dia 1º de dezembro um lojista aumenta em 20% o preço de um artigo que custava R$300,00. Na liquidação após o Natal o mesmo artigo sofre um desconto de 20%. Seu preço na liquidação é:

a) R$ 240,00 b) R$ 250,00 c) R$ 278,00 d) R$ 288,00

23) Numa turma, 80% dos alunos forma aprovados, 15% reprovados e os 6 alunos restantes desistiram do curso. Na turma havia :

a) 65 alunos b) 95 alunos c) 80 alunos d) 120 alunos

24) Após um aumento de vinte por cento um livro passa a custar R$ 18,00. O preço antes do aumento era de:

a) R$ 15,00 b) R$ 14,40 c) R$ 14,00 d) R$ 16,00

25) Um trabalhador recebe R$ 2.800,00 de salário bruto do qual é descontado 8% de INSS e 3% de imposto de renda. O desconto total é de:

a) R$ 84,00 b) R$ 224,00 c) R$ 298,00 d) R$ 308,00

26) Seja

$$x = \sqrt{9} - \frac{6}{5} + 25 - 4{,}8.$$ Então, o valor de 0,3% de x é:

a) 0,66 b) 0,066 c) 2,2 d) 6,6

GABARITO

1) A
2) A
3) D
4) B
5) A
6) A
7) A
8) B
9) C
10) A
11) D
12) B
13) B
14) D
15) B
16) D
17) B
18) C
19) C
20) D
21) A

22) D
23) D
24) A
25) D
26) B

6. REGRA DE TRÊS

Vejamos o seguinte problema: se 4 bolas custam R$ 800,00, quanto custarão 8 bolas ?
As duas grandezas são **número de bolas** e **custo**. No problema dado, aumentamos o valor de uma grandeza (número de bolas) e desejamos saber qual o valor correspondente da outra (custo), na mesma proporção.

Os problemas dessa natureza são conhecidos pelo nome de **regra de três** e consistem em calcular um valor desconhecido (incógnita) que designamos por **x**, através de outros valores conhecidos, todos eles guardando entre si perfeita proporcionalidade.

Se no problema aparecem somente duas grandezas proporcionais, como no exemplo apresentado (número de bolas e custo), diz-se que a regra de três é **simples**. Se, por exemplo, compreende mais de duas grandezas (número de operários, comprimento de um muro e tempo gasto para construí-lo), a regra de três é composta.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

A regra de três simples pode ser **direta** ou **inversa**. Ela é **direta**, quando as grandezas são diretamente proporcionais, isto é, variam no mesmo sentido.

A regra de três é **inversa** quando as grandezas são inversamente proporcionais, isto é, variam em sentido contrário : enquanto uma aumenta a outra diminui; (por exemplo, número de operário e tempo para fazer certa obra).

Doravante, **apenas para facilitar a compreensão**, indicaremos por convenção, se a regra de três é **direta** ou **inversa** através de uma seta colocada ao lado da grandeza. Assim, quando a regra de três for direta, a seta ficará voltada para baixo (↓); quando for inversa, a seta ficará voltada para cima (↑). Ainda para facilitar a resolução dos problemas, por convenção onde estiver a incógnita (**x**), a seta ficará sempre voltada para baixo.

Tomando-se os dados do problema enunciado, poderemos dispô-los da seguinte forma:

4 bolas.......................................R$ 800,00
8 bolas.......................................R$ x

OBSERVAÇÃO:

a) na primeira linha horizontal, escrevemos os valores conhecidos (4 bolas e R$ 800,00);
b) na segunda linha horizontal, escrevemos o outro valor conhecido e o valor desconhecido (incógnita), a saber : 8 bolas e x;
c) os valores respectivos de cada grandeza devem ficar em perfeita correspondência vertical, como se observa no problema acima: **bolas** embaixo de **bolas** e **reais** embaixo de **reais**.
d) conforme estabelecido por convenção, marcamos em seguida com seta para baixo a grandeza onde se encontra a incógnita (x). Resta agora apurar se a regra de três é **direta** ou **inversa.**

4 bolas..R$ 800,00 ↓
8 bolas..R$ x

Analisemos o problema dado. Quando aumentamos o número de bolas, é claro que o preço que deveremos pagar (custo) será também maior. Assim, se aumentando o valor da grandeza **número de bolas**, o valor correspondente da grandeza **custo** tende a aumentar, concluímos que estas duas grandezas são **diretamente proporcionais**, isto é, **variam no mesmo sentido.** Logo, a regra de três é **direta.** Marquemo-la, pois, com a seta voltada para baixo. Assim,

↓ 4 bolas..R$ 800,00 ↓
8 bolas..R$ x

Calculemos agora o valor de x. Como já sabemos que a regra de três é direta, podemos armar a seguinte proporção entre os 3 elementos conhecidos e a incógnita, bastando seguir o sentido das setas : 4 : 8 **::** R$ 800,00 : x

Lê-se: 4 está para 8 assim como 800 está para x. Os números 8 e 800,00 são os **meios** e 4 e x são os **extremos** da proporção. Para calcular o valor de x, estando ele na extremidade da proporção, multiplicam-se os meios e divide-se o produto pelo outro extremo conhecido; quando o x estiver no meio da proporção, multiplicam-se os extremos e divide-se o produto pelo meio conhecido. Assim, na proporção acima, teremos:

$$x = \frac{8 \times 800,00}{4} = \frac{6.400,00}{4} = 1.600,00$$

MODO PRÁTICO DE RESOLVER A REGRA DE TRÊS DIRETA

Um modo prático de resolver a **regra de três direta**, a ser adotado pelo candidato sempre que possível, consiste em após armar a **regra de três** conforme já ensinado, traçar uma diagonal entre os valores opostos de cada grandeza, como abaixo demonstramos.

4 bolas... R$ 800,00

8 bolas... R$ x

Feito isso, calcula-se o valor da incógnita por meio de uma fração que tem para **numerador** o produto dos valores conhecidos que estão ligados pela diagonal (8 bolas e R$ 800,00) e para o **denominador** o outro valor conhecido (4 bolas), que se acha unido à incógnita (x) como segue:

4 bolas......................R$ 800,00

8 bolas......................R$ x

$$x = \frac{8 \times 800}{4} = \text{R\$ } 1.600,00$$

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

Chamamos a atenção do candidato agora para o seguinte problema, em que as grandezas não estão enunciadas na mesma unidade: um carro percorre 120 quilômetros em 2 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 40 minutos ?

No problema aparecem duas grandezas: percurso em quilômetros e tempo em minutos. Entretanto, a grandeza tempo vem expressa em duas unidades de medida tempo (hora e minutos). Desse modo, antes de armar a regra de três, temos que reduzir a grandeza a uma só unidade. Assim, duas horas reduzidas a minutos nos dão 120 minutos. Agora sim, podemos armar a regra de três e resolver o problema.

120 m ....120 km

40 m......................... x

$$x = \frac{40 \times 120}{120} = 40 \text{ km}$$

REGRA DE TRÊS INVERSA

Examinemos o seguinte problema: se 6 homens executam um trabalho em 24 dias, em quanto tempo 9 homens, nas mesmas condições, o executarão ?

Armando a regra de três dentro do modelo já estabelecido, teremos:

6 homens ....24 dias ↓

9 homens.......................x dias

Vejamos, em seguida, se a regra de três é **direta** ou **inversa**. Assim, se 6 homens levaram 24 dias para fazer determinado trabalho, é lógico que, aumentando número de homens para 9, estes precisarão de **menos tempo** para executá-lo. Verificamos, então, que as duas grandezas variam em sentidos opostos, pois aumenta uma (número de homens) e a outra (tempo gasto em dias) diminui.

Logo, a regra de três é **inversa**, que indicaremos com a seta voltada para cima.

↑ 6 homens ....24 dias ↓

9 homens.......................x dias

Para armar a proporção, basta seguir o mesmo sentido das setas. Assim na grandeza homens a seta está voltada para cima (no sentido de 9 para 6) na grandeza dias a seta está voltada para baixo (no sentido de 24 para x). Logo:

$9 : 6 :: 24 : x$ $\qquad$ $x = \dfrac{6 \times 24}{9} = 16$

MODO PRÁTICO DE RESOLVER A REGRA DE TRÊS INVERSA

A regra de três inversa também pode ser resolvida de forma prática, que consiste em, após armar a regra de três conforme já ensinado, calcular o valor da incógnita através de uma fração que tem para **denominador** o valor conhecido que se liga **horizontalmente** ao x e para **numerador** o produto dos demais valores conhecidos. Assim, no caso já apresentado, teríamos :

6 homens $\longleftrightarrow$ ....24 dias

9 homens $\longleftrightarrow$ ....x dias

$$x = \frac{6 \times 24}{9} = 16 \text{ dias}$$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Um operário ganha R$ 720,00 por 20 dias de trabalho. Quanto ganharia se tivesse trabalhado 12 dias ?

Solução:

$\downarrow$ 20 dias ....720 $\downarrow$

12 dias....................... x

$20 : 12 :: 720 : x$

$$x = \frac{12 \times 720}{20} = 432{,}00$$

2) Um operário faz em 3 dias certa tarefa, cujo coeficiente de dificuldade é de 1,2. Quantos dias levará para fazer outra, se o coeficiente for de 0,8 ?

Solução: Diminuindo a dificuldade, diminui o tempo gasto, logo, regra de três direta.

$\downarrow$ 1,2 .... 3 dias $\downarrow$
0,8....................... x dias

1,2 : 0,8 :: 3 : x

$$x = \frac{0,8 \times 3}{1,2} = 2 \text{ dias}$$

3) A habilidade de dois operários está na razão de 3 para 4. O primeiro fez 6 metros de um muro. Quantos metros faria o segundo, no mesmo espaço de tempo ?

Solução:

$\downarrow$ 3 .... 6 metros $\downarrow$
4....................... x metros

3 : 4 :: 6 : x

$$x = \frac{4 \times 6}{3} = 8 \text{ metros}$$

4) Se 8 operários construíram um muro em 20 dias, 10 operários em quantos dias o farão ?

Solução: Aumentando o número de operários, diminui o número de dias. Logo, regra de três inversa.

$\uparrow$ 8 op .... 20 dias $\downarrow$
10 op .... x dias

10 : 8 :: 20 : x

$$x = \frac{8 \times 20}{10} = 16 \text{ dias}$$

5) Vinte operários fazem 1/3 de uma obra em 12 dias. Quanto tempo será necessário para fazer a obra toda, se despedirmos 8 operários ?

Solução: 3 x 12 = 36 dias (fariam a obra toda)
20 operários – 8 operários = 12 operários.

↑ 20 op .... 36 dias ↓
12 op .... x dias

$$x = \frac{20 \times 36}{12} = 60 \text{ dias}$$

6) Uma roda com 40 dentes engrena com outra de 30 dentes. Sabendo que a primeira deu 450 voltas, calcular o número de voltas da segunda.

Solução:

↑ 40 dentes .... 450 ↓
30 dentes x

$$x = \frac{40 \times 450}{30} = 600 \text{ voltas}$$

30 : 40 :: 450 : x

7) Um fazendeiro tem 25 porcos e alimento suficiente para sustentá-los durante 16 dias. Tendo recebido mais 15 porcos, durante quantos dias poderá alimentá-los sem diminuir a ração ?

Solução: 25 + 15 = 40 porcos

↑ 25 .... 16 dias ↓
40 .... x dias

$$x = \frac{25 \times 16}{40} = 10 \text{ dias}$$

40: 25 :: 16 : x

8) Para percorrer a distância entre duas cidades, um avião gasta 3 horas, desenvolvendo 400 km/hora. Se quiser reduzir o tempo gasto para 2/3, qual deverá ser a sua velocidade ?

Solução: 2/3 de 3 horas = 2/3 x 3/1 = 6/3 = 2 horas

400 km/h .... 3 horas
x km/h .... 2 horas

$$x = \frac{400 \times 3}{2} = 600 \text{ km/h}$$

x : 400 :: 3 : 2

9) Trinta operários trabalhavam numa obra. Após 25 dias, quando a metade estava pronta, foram despedidos 20 operários. Em quantos dias os demais terminarão a obra ?

Solução : 30 – 20 = 10 operários (restante)

30 op .... 25 dias
10 op .... x dias

$$x = \frac{30 \times 25}{10} = 75 \text{ dias}$$

10 : 30 :: 25 : x

7. JUROS SIMPLES

Denomina-se **juro** a quantia que se recebe como compensação, quando se empresta ou aplica, por um período determinado, uma certa importância. O dinheiro depositado ou emprestado chama-se **capital**. O juro, é portanto, a remuneração do capital.

Para resolver os problemas de juros, pode-se adotar o tradicional processo de fórmulas, cuja regra básica é a seguinte: o juro é igual ao produto do **capital** pela **taxa anual** e pelo **tempo**, dividido por **100**, a saber:

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

Dessa fórmula geral, são deduzidas todas as demais fórmulas que permitem encontrar os outros elementos que ali figuram, a saber:

Cálculo da Taxa

$$i = \frac{j \times 100}{c \cdot t}$$

Cálculo do Tempo

$$t = \frac{j \times 100}{c \cdot t}$$

Cálculo do Capital

$$c = \frac{j \times 100}{i \cdot t}$$

No estudo deste ponto, entretanto, ao invés de fórmulas, resolveremos os problemas através da regra de três simples, eis que o problema nada mais é do que um problema de porcentagem acrescido de mais um valor : **o tempo.**

Para facilitar o entendimento deste método, relembramos que, nos problemas de porcentagem, são 4 os valores que participam, a saber: **capital, taxa** (parte de 100%), **porcentagem e 100%** (ou 100 partes proporcionais e que corresponde ao capital).

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

O **capital** (que é o todo, a quantia principal) é sempre igual a 100% (número total de partes em que este é dividido), enquanto a **porcentagem** é sempre igual a **taxa.** Logo,

Capital = 100%
Porcentagem = taxa (i%)

As igualdades acima servem de base para armar a regra de três simples, através da qual solucionamos todos os problemas de porcentagem. Para calcular a porcentagem, basta multiplicar a taxa (i%) pelo capital e dividir por 100. Assim, para calcular 5% de 200, faremos:

5 x 200 = 1.000
1.000 : 100 = 10

Se quiséssemos calcular quantos porcentos 10 representa de 200, armaríamos a seguinte regra de três:

200.......................100%
10.......................x

$$x = \frac{10 \times 100}{200} = 5\%$$

Se aumentarmos a **taxa**, a **porcentagem** (resultado) também aumentará. Por exemplo, 20% de R$ 500,00 são iguais a R$ 100,00, que é a quinta parte do capital considerado (R$ 500,00), isto porque a taxa de 20% é também igual a quinta parte de 100% (que representa o capital). Do mesmo modo, 50% de R$ 500,00 são iguais a R$ 250,00 (metade do capital), porque a taxa 50% é a metade de 100%.

Nos problemas de porcentagem, conforme vimos, a taxa incide diretamente sobre o capital sem qualquer outra limitação (5% de R$ 200,00 = R$ 10,00). Já nos problemas de juros a taxa está vinculada ao <u>tempo</u> durante o qual o capital esteve empregado (5%a.a x 1 ano x R$ 200,00 = R$10,00), tomando-se como base o período de 1 ano (12 meses ou 360 dias).

Convém observar, portanto, que, nos problemas de juros, trabalhando sempre com a taxa <u>ao ano</u>, se o **tempo** dado no problema for expresso somente em **anos**, o capital será igual a **100** (100 x 1 ano); se em **meses** (ou anos e meses), o capital será igual a **1.200** (100 x 12 meses); se em **dias** (ou anos, meses e dias ou meses e dias), o capital será igual a **36.000** (100 x 360 dias).

O **juro** é o rendimento gerado pelo **capital**. Assim, se o capital é igual a **100** (tempo em anos), **1.200** (tempo em meses) ou **36.000** (tempo em dias), concluímos que o juro é igual ao resultado da multiplicação da **taxa** (parte dos 100%) pelo **tempo** (ano, mês ou dia) durante o qual o capital esteve empregado. Exemplificando:

a) capital = 100 (tempo em anos)
i = 5% a.a.
t = 3 anos
i.t = 5 x 3 = 15 (representativo dos juros)

b) capital = 1.200 (tempo em meses)
i = 3% a.m. ou 3 x 12 = 36 a.a.
t = 4 meses
i.t = 36 x 4 = 144 (representativo dos juros)

c) capital = 36.000 (tempo em dias)
i = 0,2 a.d. ou 0,2 x 360 = 72% a.a.
t = 20 dias
i.t = 72 x 20 = 1.440 (representativo dos juros)

Obs.: Trabalhando com os valores representativos do capital acima indicados (100, 1.200 ou 3.600), sempre que precisarmos determinar a <u>taxa</u>, o resultado será sempre <u>taxa ao ano</u>

Armando a proporção, encontramos :

Capital = 100, 1.200 ou 36.000
Juro = taxa x tempo

Com base nas igualdades acima, de onde também são extraídas as fórmulas já conhecidas, resolveremos qualquer problema de **juros simples**, através apenas da regra de três simples.

TAXAS

I – TAXA UNITÁRIA E TAXA PERCENTUAL

Duas são as taxas habitualmente usadas: **taxa unitária e taxa percentual.**

Taxa Unitária – representa o **juro da unidade de capital** num determinado período considerado para unidade de tempo. Exemplo: se o juro do capital R$ 1.000.000,00 em 1 ano é

R$40.000,00, diz-se que a **taxa unitária anual** é igual a 0,04 (4/100). Taxa normalmente utilizada nos problemas de juros compostos.

R$ 1.000.000,00 x 0,04 x 1 = R$ 40.000,00

Taxa percentual – representa o juro do capital **100** no período tomado para unidade de **tempo**. Exemplo: se o capital R$ 1.000.000,00 rende R$ 40.000,00 em um ano, diz-se que a **taxa anual** é igual a 4% (quatro em cada 100).

1.000.000,00....................100
x...............................4

$$x = \frac{1.000.000 \times 4}{100} = 40.000,00$$

Confrontando os exemplos acima, concluímos que a **taxa percentual** é igual a 100 vezes a **taxa unitária** correspondente.

II. TAXAS PROPORCIONAIS E EQUIVALENTES

Taxas Proporcionais – são duas ou mais taxas que guardam entre si as mesmas proporções que os períodos de tempo a que se referem, como segue:

- 6% ao semestre e 12% a.a.
- 6% ao trimestre e 2% ao mês.

No regime de capitalização simples, os juros de um capital à taxa de 6% ao semestre durante o período de 12 meses são iguais aos juros do mesmo capital à taxa de 12% ao ano durante 1 ano.

Conclui-se, portanto, que, nesse caso, as **taxas proporcionais** são também **equivalentes**.

DUAS PROVIDÊNCIAS IMPORTANTES

Como nem sempre o **tempo** dado nos problemas **refere-se a um período completo** ou há coincidência entre o **tempo dado** e a **taxa aplicada**, devemos adotar preliminarmente duas providências importantes, antes de resolver **qualquer** problema de juros:

a) verificar se a **taxa** vem referida **ao ano** (a.a.), **ao mês** (a.m.) ou **ao dia** (a.d.), pois trabalharemos preferencialmente com a **taxa ao ano**, para facilitar a resolução. Assim, quando a encontrarmos referida **ao mês**, devemos imediatamente multiplicá-la por 12 (1ano = 12 meses), a fim de transformá-la **ao ano**; se referida **ao dia**, devemos igualmente multiplicá-la por 360 (o ano comercial tem 360 dias) para transformá-la **ao ano.** Exemplos:

1/3 % a.m. = 1/3 x 12 = 4 % a.a.

1/40 % a.d. = 1/40 x 360 = 9% a.a.

b) verificar se o **tempo** dado no problema vem expresso em **anos, meses** ou **dias** para determinar se o capital corresponderá a **100** (tempo em anos), **1.200** (tempo em meses), ou **36.000** (tempo em dias). Não esquecer também que, se o tempo vier expresso em número complexo (anos, meses e dias, anos e meses, meses e dias), devemos imediatamente reduzi-lo a incomplexo, como nos exemplos baixo:

2 a 6 m = 24 + 6 = 30 meses (usaremos o capital = 1.200)

1 a 5 m 10 d = 360 + 150 + 10 = 520 dias (usaremos o capital = 36.000)

5 m 20 d = 150 + 20 = 170 dias (usaremos o capital = 36.000)

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE – As providências preliminares acima devem ser adotadas para resolver **qualquer** tipo de problema de juros. Contudo, quando houver coincidência de **taxa** e **tempo** (por exemplo: 5% **a.a.** em 3 **anos**, ou 5% **a.m.** em 8 **meses** ou 5% **a.m.** em 1 a 4 m = 16 **meses**), o problema pode Ter uma solução simplificada, como veremos a seguir: Calcular os juros produzidos pelo capital de R$ 5.000,00 à taxa de 5% a.a., em 5 anos ?

i = 5% a.a. (significa que, a cada período de 1 (um) ano, haverá um ganho (juros) de 5% ou o equivalente a 5/100 ou 1/20 do capital.

t = 5 anos (significa que o capital ficará aplicado durante 5 anos completos).

c = R$ 5.000,00 (**capital, quantia principal** aplicada e sobre a qual vai incidir a taxa; é representada por 100).

Solução: (Tempo em **anos e a taxa** também **ao ano)**
5% x 5 a.a. = 25% (juros totais)

$$25\% \text{ de R\$ } 5.000{,}00 = \frac{25 \times 5.000{,}00}{} = \text{R\$ } 1.250{,}00 \text{ (juros)}$$

100

Se o mesmo capital fosse aplicado à taxa de ¼% a.m., durante 8 meses, assim calcularíamos os juros.
Solução: (Tempo em **meses** e taxa **ao mês**)

1/4 % x 8 m = 8/4 = 2% (juros totais)

$$2\% \text{ de R\$ } 5.000{,}00 = \frac{2 \times 5.000{,}00}{100} = \text{R\$ } 100{,}00 \text{ (juros)}$$

PROBLEMAS

1) Qual o juro produzido por R$ 2.000.000,00 em 5 meses à taxa de ½% a.m.?
Dica: Como a taxa vem referida ao mês, devemos de imediato transformá-la ao ano. Assim, 1/2 x 12 = 6% a.a.

2) Calcular os juros de R$ 18.000.000,00 à taxa de 4% a.a., em 1 ano, 2 meses e 20 dias.
Dica: 1 ano + 2 meses + 20 dias = 360 + 60 + 20 = 440 dias

3) Calcular o capital que, em 1 ano 2 meses e 20 dias, à taxa de 1/3% a.m., renda R$ 3.520.000,00 de juros.
Dica: 1 a 2 m 20 d = 440 dias
1/3 x 12 = 4% a.a.

4) A que taxa esteve colocado o capital de R$ 12.000.000,00 para, em 1 ano e 4 meses, render R$800.000,00 de juros ?
Dica: 1 a 4m = 12 + 4 = 16 meses

5) A que taxa se deve aplicar certo capital, para, no fim de 5anos, produzir juros iguais a 8/16 de si mesmo?

Solução: juros : 8
capital : 16
16 (capital)..............100(juros)
8 (juros)..................x

$$x = \frac{8 \times 100}{16} = 50 \text{ (taxa x tempo)}$$

50 : 5 = 10 % a.a.

6) Um capital de R$ 20.000.000,00 à taxa de 5% a.a., rendeu R$ 800.000,00 de juros. Qual o tempo?

7) Durante quanto tempo uma quantia deve ser emprestada a 5% a.a., para que os juros produzidos sejam iguais a 3/5 do capital ?

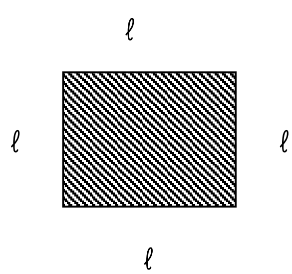
8) Um capital está para os seus juros como 8 está para 1. Determine o tempo a que esteve emprestado, sabendo que a taxa é de 6% a.a.

GABARITO

1) R$ 50.000,00 de juros
2) R$ 880.000,00
3) R$ 72.000.000,00
4) 80 : 16 = 5 % a.a.
5) 10% a.a.
6) 288 dias = 9 meses + 18 dias
7) 4320 ou 12 anos (4320: 360)
8) 750 dias = 2 anos + 1 mês

8. ÁREA DE FIGURAS PLANAS

A área de uma **região quadrada** cujo lado mede ℓ unidades de comprimento é dada por $S = \ell \text{ x } \ell = \ell^2$



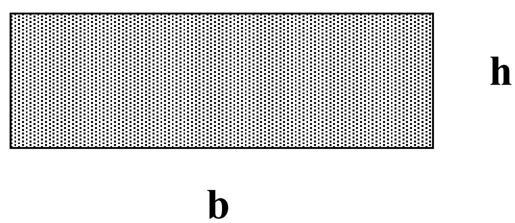
Exemplo: Calculemos a área de uma região quadrada que tem 6 cm de lado.
Obs.: Os lados de uma região quadrada são sempre iguais.

Como a medida do lado = 6 cm

Então, $S = \ell^2 = (6\text{ cm})^2 = 6\text{ cm} \times 6\text{ cm} = 36\text{ cm}^2$.

A área de uma **região retangular** de comprimento **b** e de largura **h** é dada por:

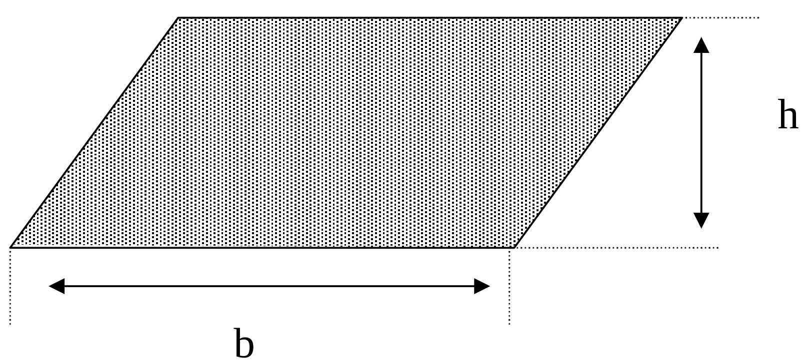
$S = \mathbf{b} \times \mathbf{h}.$



Exemplo: Calculemos a área de uma região retangular que tem 6 cm de base (b) e 2 cm de altura (h).

$S = \mathbf{b} \times \mathbf{h}$, substituindo temos $S = 6 \times 2 = 12\text{ cm}^2$.

A área de uma região limitada por um **paralelogramo** é obtida multiplicando-se o seu comprimento (ou base) pela sua largura (ou altura), isto é, $S = \mathbf{b} \times \mathbf{h}.$



Exemplo: Um paralelogramo tem 22 cm de comprimento e 12,5 cm de largura.

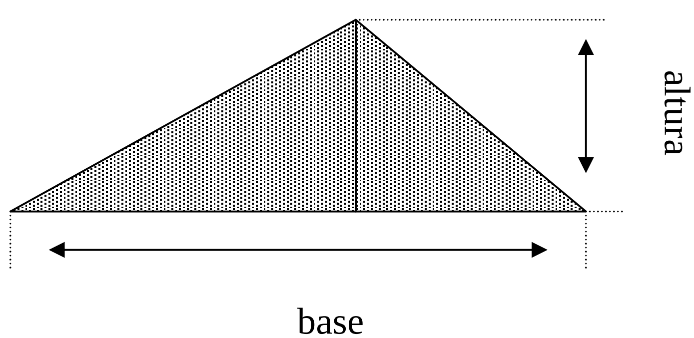
Calculemos a área da região limitada por esse paralelogramo.

Já sabemos que a fórmula : **S = b x h**, substituindo, temos:

S = 22 cm x 12,5 cm = 275 cm^2.

A área de uma **região triangular** cuja base mede **b** e cuja altura mede **h** é dada por:

$$S = \frac{b \times h}{2} \quad \text{ou} \quad S = (b \times h) : 2$$



Exemplo: A base de uma região triangular mede 80 cm. A medida da altura corresponde a 3/10 da medida da base. Qual é a área dessa região ?

Já sabemos que

$$S = \frac{b \times h}{}$$

e também, que 3/10 de 80 = 24 cm.

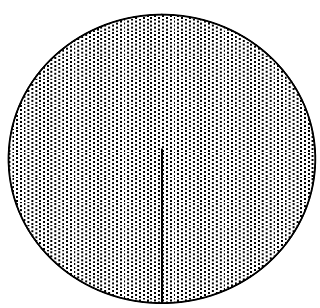
2

Substituindo, temos

$$\mathbf{S = \frac{80\ cm\ \ x\ \ 24\ cm}{2} = \frac{1.920\ cm}{2} = 960\ cm^2}$$

A área de uma **região circular** de raio **r** é dada por :

$$\mathbf{S = \pi\ \ x\ \ r^2}$$



Exemplo: Quantos m^2 de carpete serão usados para forrar um piso circular de 8 m de diâmetro ?

Obs.: o diâmetro = duas vezes o raio.

Já sabemos que $\mathbf{S = \pi\ \ x\ \ r^2}$ e que o $\dfrac{\text{diâmetro}}{2} = 4\text{ m}$ e $\pi = 3,14$.

Substituindo, temos : $\mathbf{S = 3,14\ \ x\ \ 4^2 = 3,14\ \ x\ 16 = 50,24\ m^2}$.

GOVERNO DO ESTADO DE RONDÔNIA
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO JOHN KENNEDY

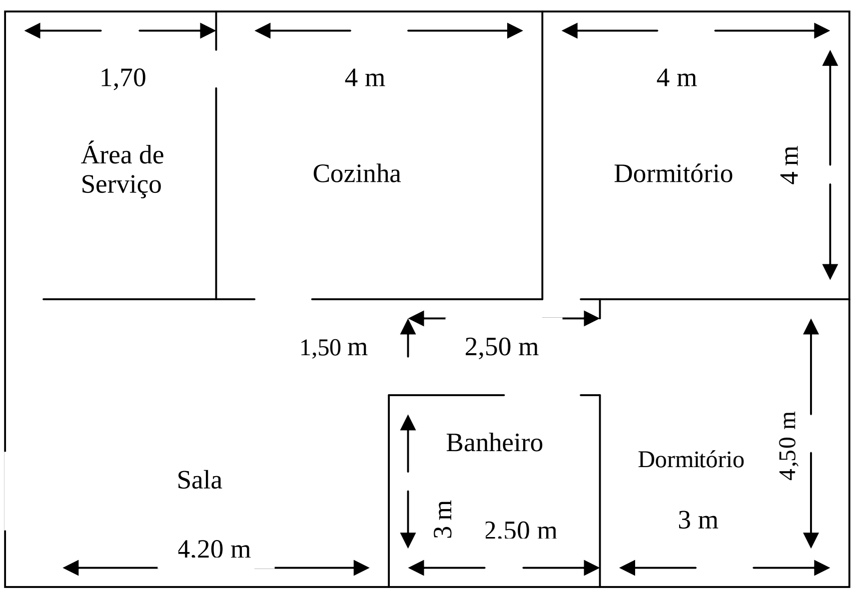
APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

TESTE GABARITADO

A figura abaixo nos mostra a planta de um apartamento. Baseado em seus dados calcule:

a) quantos m^2 de carpete são necessários para cobrir o piso da sala, do corredor, dos dois dormitórios, da cozinha, da área de serviço e do banheiro.
b) quantos m^2 de carpete são necessários para cobrir o piso da sala, do corredor e dos dois dormitórios.

c) quantos m^2 de cerâmica são suficientes para cobrir o piso do banheiro, da cozinha e da área de serviço.



Resposta:

Área do Piso da Sala = 18,9 m^2
Área do Piso do Corredor = 3,75 m^2

Área do Piso 1º Dormitório = 16 m^2
Área do Piso2º Dormitório = 13,5 m^2
Área da Piso Cozinha = 16 m^2
Área do Piso da Área de Serviço = 6,8 m^2
Área do Piso do Banheiro = 7,5 m^2

a) 82, 45 m^2 = 18,9 + 3,75 + 16 + 13,5 + 16 + 6,8 + 7,5 = 82,45 m^2

b) 52,15 m^2 = 18,9 + 3,75 + 16 + 13,5 = 52,15 m^2

c) 30,30 m^2 = 7,5 + 16 + 6,8 = 30,30 m^2

DAS MEDIDAS DE VOLUME

Temos como unidade fundamental para o cálculo de volumes um **cubo,** cuja a aresta mede **1 m** denominado **metro cúbico,** que se abrevia **m^3**. Sendo elas :

- o **decâmetro cúbico**, que se abrevia “dam^3” e vale 1.000 m^3.
- o **hectômetro cúbico**, que se abrevia “hm^3” e vale 1.000.000 m^3.
- o **quilômetro cúbico**, que se abrevia “km^3” e vale 1.000.000.000 m^3.

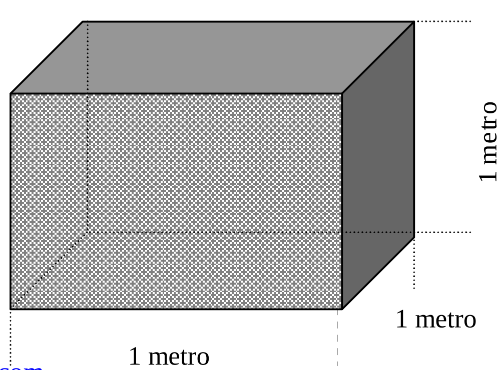
Estas unidades são os múltiplos do metro cúbico.

As unidades menores que o m^3 são:

- o **decímetro cúbico**, que se abrevia “dm^3” e vale 0,001 do m^3.
- o **centímetro cúbico**, que se abrevia “cm^3” e vale 0,000001 do m^3.
- o **milímetro cúbico**, que se abrevia “mm^3” e vale 0,000000001 do m^3.

Estas unidades são os submúltiplos do m^3.

O metro cúbico é um cubo de 1 metro de aresta.



DA TRANSAFORMAÇÃO DE UNIDADES

Note que cada unidade de volume é 1.000 vezes maior que a unidade imediatamente inferior, isto é, as sucessivas unidades variam de 1.000 em 1.000.

1º exemplo: Transformar 5 m^3 na unidade imediatamente inferior.

$5\ m^3 = (5 \times 1.000)\ dm^3 = 5.000\ dm^3$

Regra : Como estamos tratando de m^3 e a unidade de transformação pedida está apenas uma casa a esquerda da unidade original, basta multiplicar por 1.000 ou simplesmente colocar três zeros à direita do número dado.

2º exemplo: Transformar 1.200.000 cm^3 em m^3 .

1.200.0 $cm^3 = (1.200.000 : 1.000.000)\ m^3 = 1,2\ m^3$

Regra : Como a unidade de transformação pedida está situada duas casas à esquerda da unidade original, basta dividir o número dado por 1.000.000 ou simplesmente cortar os zeros da unidade original.

TESTES GABARITADOS

1º grupo : Transformar na unidade imediatamente inferior:

a) 13 m^3
b) 1,5 dm^3
c) 0,03 cm^3
d) 0,12 dam^3

2º grupo: Transformar na unidade imediatamente superior:

a) 1.500 cm^3
b) 45 m^3
c) 150.000 mm^3
d) 485.200 dm^3

Respostas: 1º grupo: a) 13.000 dm^3 b) 1.500 cm^3 c) 300 mm^3 d) 1.200 m^3

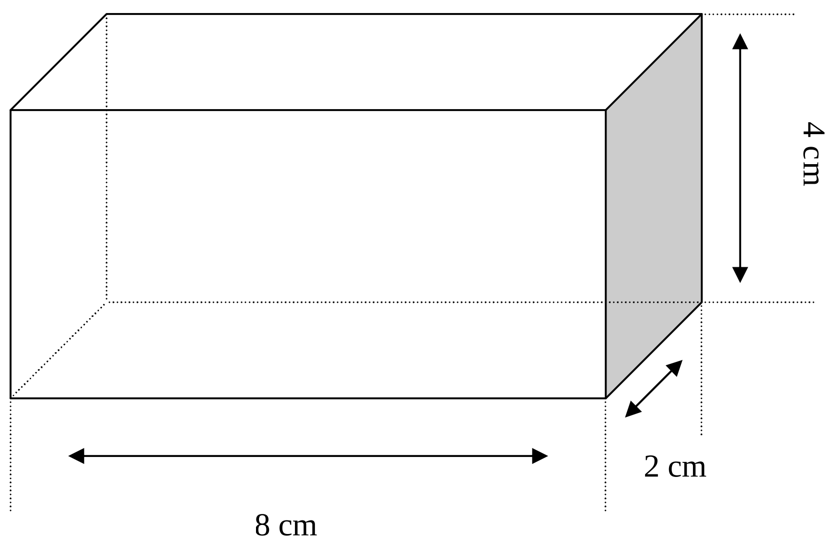
2º grupo: a) 1,5 dm^3 b) 0,045 dam^3 c) 150 cm^3 d) 485,2 m^3

CÁLCULO DO VOLUME DE UM SÓLIDO

Regra fundamental: Dado um cubo cuja a aresta mede **a** unidades de comprimento, o volume do cubo pode ser calculado por $\mathbf{V = a \times a \times a = a^3}$.

Exemplo: Vamos determinar o volume de um cubo, cuja aresta mede 8 cm. Substituindo, temos : $\mathbf{V} = (8\text{ cm})^3 = 8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 8\text{ cm} = 512\text{ cm}^3$.

A figura abaixo nos mostra um paralelepípedo retangular que tem 8 cm de comprimento, 2 cm de largura e 4 cm de altura. Calcule o volume do paralelepípedo.



Regra: Dado um paralelepípedo retangular que tem **a** unidades de comprimento, **b** unidades de largura e **c** unidades de altura, o volume do paralelepípedo pode ser calculado por:

Então : $\mathbf{V} = 8 \times 2 \times 4 = 64\text{ cm}^3$.

9. SISTEMA LEGAL DE MEDIDAS

DAS MEDIDAS DE COMPRIMENTO

A unidade fundamental e legal para medir comprimentos é o “metro”, usado, na maioria dos casos, para medir distâncias médias, como por exemplo, as dimensões da nossa casa, do nosso lote residencial, do nosso quintal, etc. Sua abreviatura é “m”.

Existem também as unidades maiores que o metro, designadas para medir distâncias maiores ou de grandes comprimentos, como as dimensões de uma fazenda, a distância entre duas cidades, ou até mesmo, o diâmetro da Terra. Essa unidades são os múltiplos do metro. Sendo elas:

- o decâmetro, que se abrevia “dam” e vale 10 m.
- o hectômetro, que se abrevia “hm” e vale 100 m.
- o quilômetro, que se abrevia “km” e vale 1000 m.

Há, ainda, as unidades menores que o metro, para medir pequenas dimensões como: o comprimento de um prego, a largura da folha de um livro, etc. Essas unidades são os submúltiplos do metro. Sendo elas:

- o decímetro, que se abrevia “dm” e vale 0,1 do m.
- o centímetro, que se abrevia “cm” e vale 0,01 do m.
- o milímetro, que se abrevia “mm” e vale 0,001 do m.

Múltiplos------------------------------- quilômetro	km	1.000 m
Múltiplos------------------------------- hectômetro	hm	100 m
Múltiplos------------------------------- decâmetro	dam	10 m
Unidade Fundamental ⟶ metro	m	1 m

Submúltiplos.................................... decímetro	dm	0,1 m
Submúltiplos.................................... centímetro	cm	0,01 m
Submúltiplos..................................... milímetro	mm	0,001 m

Observação: o metro padrão encontra-se assinalado sobre uma barra de metal nobre no Museu Internacional de Pesos e Medidas, na França. No Brasil, podemos encontrar uma cópia no Museu Nacional.

Não podemos deixar de notificar que existem outras medidas de comprimento também usadas, apesar de não pertencerem ao sistema de medidas. Sendo elas:

- a polegada, que vale aproximadamente 25 milímetros.
- a milha, que vale aproximadamente 1.609 metros.
- a légua, que vale aproximadamente 5.555 metros.

LEITURA E TRANSFORMAÇÕES DAS UNIDADES DE COMPRIMENTO

1, 4 6 lê-se: 1 vírgula 46 quilômetros ou 1 quilômetro e 46 decâmetros.

6 → dam
4 → hm
1 → km

Vamos sintetizar o quadro das unidades de comprimento da seguinte forma:

$$\text{Km} \xrightarrow{10} \text{hm} \xrightarrow{10} \text{dam} \xrightarrow{10} \text{m} \xrightarrow{10} \text{dm} \xrightarrow{10} \text{cm} \xrightarrow{10} \text{mm}$$

Observando a sintetização acima, vemos que cada unidade de comprimento é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior e 10 vezes menor que a unidade imediatamente superior, ou seja, as sucessivas unidades variam de 10 em 10.

Para exemplos, vamos considerar as seguintes transformações:

1) Seja transformar 8 m na unidade imediatamente inferior.

Como a unidade imediatamente inferior do “metro” é o “decímetro” e este está contido 10 vezes no “metro”, então: 8 m = (8 x 10) dm = 80 dm.

Regra : como “dm” está situado apenas uma casa abaixo do “m”, para transformar , basta completar com um zero para direita.

2) Seja transformar 24 mm na unidade imediatamente superior.

Como a unidade imediatamente superior do “mm” é o “centímetro” e este contém 10 vezes o “mm”, então: 24 mm = (24 : 10) cm = 2,4 cm.

Regra: transformar unidade “inferior” em outra “superior” significa dividir porque a unidade menor está contida 10 vezes na maior, bastando, para tanto, contar, da direita para a esquerda do número dado, uma casa para esquerda.

3) Seja transformar 3,5 km em m.

Como a unidade do “m” está situada três casas abaixo do “km”, então : 3,5 km = (3,5 x 1000) m = 3.500 m.

Regra: como “m” está localizado três casas abaixo de “km”, basta contar, da esquerda para direita, três casas a partir da vírgula ou da parte fracionária, e, não da parte inteira, porque esta marca a unidade antes da transformação.

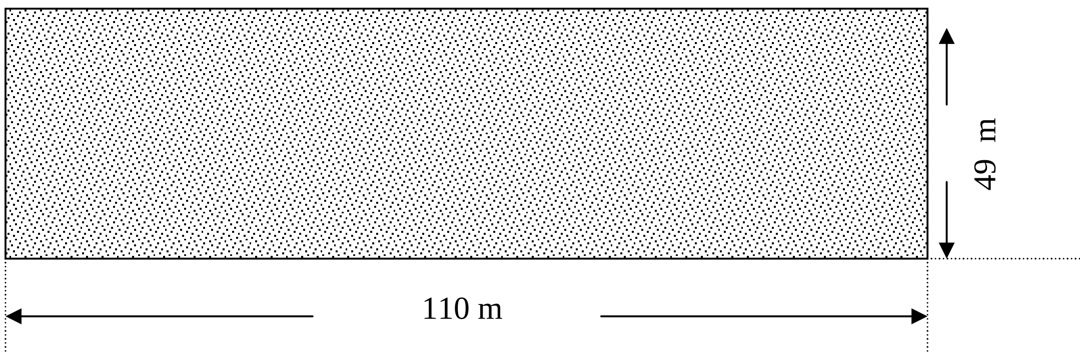
TESTES COM RESPOSTAS

Expresse:
a) 2,5 km em m
b) 0,4 m em cm
c) 520 m em hm
d) 63 mm em cm
e) 85 cm em m
f) 13,58 km em m
g) 1,65 m em cm
h) 750 m em km
i) 45 mm em m
j) 2,9 hm em m
k) 48.600 m em km
l) 0,225 km em m
m) 8 cm em m
n) 0,362 hm em m.

Respostas:
a) 2.500 m
b) 40 cm
c) 5,20 hm
d) 6,3 cm
e) 0,85 m
f) 13.580 m
g) 165 cm
h) 0,750 km
i) 0,045 m
j) 290 m
k) 48,600 km
l) 225 m
m) 0,08 m
n) 36,2 m.

MEDIDA DO PERÍMETRO DE UM POLÍGONO

Observe a seguinte figura:



Esta figura representa um campo de futebol que tem a forma retangular e seus lados medem 110 m e 40 m.

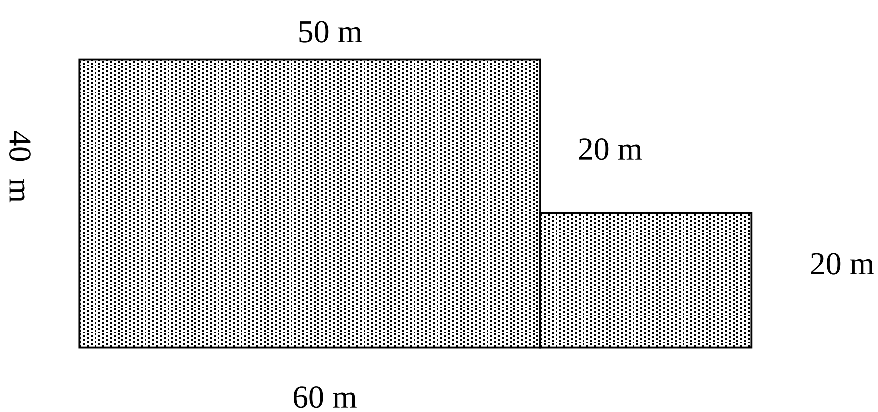
Para cercar totalmente o campo de futebol, devemos construir:

110 m + 49 m + 110 m + 49 m = 318 m.

Regra: a medida do perímetro, ou simplesmente perímetro de um polígono, é a soma das medidas dos lados desse polígono.

Do exemplo do campo de futebol que tem a forma retangular, podemos definir a seguinte fórmula : $P = 2 \times b + 2 \times h$.

Um terreno tem a forma e as medidas da figura abaixo. Para murar o terreno em todo seu contorno, quantos m de muro devem ser construídos ?



Observa-se facilmente que, para murar o terreno em todo seu contorno será preciso construir
60 m + 50 m + 40 m + 20 m + 10 m = 200 metros do muro.

DAS MEDIDAS DE CAPACIDADE

A quantidade de líquido existente no interior de um recipiente chama-se capacidade do recipiente, numa determinada unidade de referência. A unidade fundamental para medir a quantidade de líquidos que um recipiente pode contar no seu interior é o litro, que se abrevia com "ℓ".

Observação: O litro corresponde à capacidade de um cubo cuja aresta mede 1 dm, ou seja, corresponde ao volume de um decímetro cúbico. Simbolicamente, escreve-se: $1\ell = 1\ dm^3$.

Para medir grandes quantidades de líquidos, temos as seguintes unidades como múltiplos do litro:

- o decalitro, que se abrevia $da\ell$ e vale 10 litros.
- o hectolitro, que se abrevia $h\ell$ e vale 100 litros.
- o quilolitro, que se abrevia $k\ell$ e vale 1000 litros.

Para medir pequenas quantidades de líquidos, temos:

- o decilitro, que se abrevia $d\ell$ e vale 0,1 do litro.
- o centilitro, que se abrevia $c\ell$ e vale 0,01 do litro.
- o mililitro, que se abrevia $m\ell$ e vale 0,001 do litro.

Estas unidades são os submúltiplos do litro.

Observe o quadro das unidades de capacidade:

Múltiplos------------------------------- quilolitro	kℓ	1.000 ℓ
Múltiplos------------------------------- hectolitro	hℓ	100 ℓ
Múltiplos------------------------------- decalitro	daℓ	10 ℓ
Unidade Fundamental ⟶ litro	ℓ	1 ℓ
Submúltiplos.................................... decilitro	dℓ	0,1 ℓ
Submúltiplos.................................... centilitro	cℓ	0,01 ℓ
Submúltiplos..................................... mililitro	mℓ	0,001 ℓ

TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES

Sintetizando o quadro das unidades de capacidade, temos:

$$\text{kl} \overset{10}{\text{———}} \text{hl} \overset{10}{\text{———}} \text{dal} \overset{10}{\text{———}} \text{l} \overset{10}{\text{———}} \text{dl} \overset{10}{\text{———}} \text{cl} \overset{10}{\text{———}} \text{ml}$$

Observação : Cada unidade de capacidade é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior, isto é, as sucessivas unidades variam de 10 em 10.

1) Vamos expressar 2 litros em mililitro.

   2 ℓ = (2 x 100 m ℓ) = 2.000 mℓ

   Regra: Observe que a unidade de transformação pedida é menor que a padrão três casas, por isso, temos que multiplicar o número dado por mil ou simplesmente acrescentar três zeros para direita.

2) Já sabemos que 1 dm^3 = 1ℓ, então expresse 250 mℓ em cm^3.

250 mℓ = (250 : 1000 ℓ) = 0,25 ℓ = 0,25 dm^3
0,25 dm^3 = 250 cm^3.

TESTES COM RESPOSTAS

Expresse em litros:

a) 2,5 hectolitros	b) 650 centilitros	c) 1.800 mililitros	d) 6 m^3

Respostas:

a) 250 litros	b) 6,50 litros	c) 1,8 litros	d) 6000 litros.

DAS MEDIDAS DE MASSA

Quando medimos a massa de um corpo no chão (ao nível do mar) encontramos um número que é, também, a medida do peso do corpo. Sendo assim, podemos medir a massa de um corpo na superfície da Terra usando uma balança. Assim, as unidades usadas para medir a massa de um corpo são as mesmas usadas para medir o peso do corpo.

Observação: A massa de um decímetro cúbico de água a uma temperatura de 4º C constitui a unidade padrão de massa, chamado quilograma, que se abrevia “kg”.

Contudo, por ser mais prático, usamos como unidade principal o “grama”, que se abrevia “g” e se constitui numa massa igual à milésima parte do quilograma, isto é:

1 kg = 1.000 g = 0,001 kg.

Existe outras unidades, conforme nos mostra o quadro a seguir

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

Múltiplos------------------------------ kilograma	kg	1.000 g
Múltiplos------------------------------ hectograma	hg	100 g
Múltiplos------------------------------ decagrama	dag	10 g
Unidade Fundamental ⟶ metro	g	1 g
Submúltiplos.................................. decigrama	dg	0,1 g
Submúltiplos.................................. centigrama	cg	0,01 g
Submúltiplos.................................. miligrama	mg	0,001 g

Além dessas unidades, existe outras especiais : a tonelada (t) = 1.000 kg; o megaton, que corresponde a 1.000 toneladas; o quilate = 0,2 grama.

<u>TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES:</u>

Sintetizando o quadro das unidades de massa, temos

Kg ____ hg _____ dag _____ g _____ dg _____ cg _____ mg

Observação : Cada unidade de massa é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior, isto é, as sucessivas unidades variam de 10 em 10.

1) Transformar 5 kg em gramas

Logo: 5 kg = (5 x 1000 g) = 5000 g.

Regra: como a unidade pedida na transformação está à direita da unidade padrão três casas, devemos multiplicar por mil ou simplesmente acrescentar três zeros.

2) Transformar 130 cg em g.

130 cg = (130 : 100) = 1,30 g

DAS MEDIDAS DE TEMPO

Como se sabe, o relógio indica segundo, minuto e hora. O segundo é a unidade fundamental das medidas de tempo. O símbolo do segundo é o (s).

UNIDADES MAIORES QUE O SEGUNDO

Minuto (min) = 60 segundos

Hora (h) = 60 minutos ou 3.600 segundos.

Dia (d) = 24 horas.

As medidas de tempo não são decimais. Por isso, não use a vírgula para representá-las.

Exemplos: 6 horas e 30 minutos = 6 h 30 min

4 horas, 35 minutos e 15 segundo = 4 h 35 min 15 s

Observa-se que para reduzir medidas de tempo, multiplicamos ou dividimos por 60.

Exemplos : Se 1 hora tem 60 minutos, quantas minutos há em 2 horas ?

R: 2 horas = 60 x 2 = 120 minutos.

Quantos minutos há em 240 segundos ?

R: 240 : 60 = 4 minutos.

Registramos o tempo não só em horas, minutos e segundos. Existem outras medidas. Veja-as:

Dia = 24 horas
Semana = 7 dias
Quinzena = 15 dias
Mês = 30 ou 31 dias
Bimestre = 2 meses
Trimestre = 3 meses
Semestre = 6 meses
Ano = 12 meses
Biênio = 2 anos
Triênio = 3 anos
Quadriênio = 4anos
Qüinqüênio ou lustro = 5 anos
Decênio ou Década = 10 anos
Meio Século = 50 anos
Século = 100 anos
Milênio = 1.000 anos.

Em matemática, fazemos as operações com o mês comercial de 30 dias e o ano comercial com 360 dias. Quando o ano tem mais um dia (fevereiro) é chamado de ano bissexto (366 dias). No ano bissexto, o mês de fevereiro tem 29 dias. Os anos são bissextos quando são divisíveis por 4 e dão divisões exatas.

Exemplo: 1992 : 4 = 498 é bissexto.
1982 : 4 = 495, não e bissexto, pois deixa o resto = 2.

Os meses de abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias. Os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro têm 31 dias. O mês de fevereiro tem 28 dias e no ano bissexto, tem 29 dias.

DAS MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

A unidade fundamental para medir superfície corresponde a uma região quadrada de 1 metro de lado denominada metro quadrado e que se abrevia com **m^2**. Há também unidades maiores que o metro quadrado e que são usadas para medir grandes superfícies. Sendo elas:

- o decâmetro quadrado, que se abrevia "dam^2" e vale 100 m^2.
- o hectômetro quadrado, que se abrevia "hm^2" e vale 10.000 m^2 .
- o quilômetro quadrado, que se abrevia "dm^2" e vale 1.000.000 m^2.

Há também unidades menores que o metro quadrado e que são usadas para medir pequenas superfícies. Sendo elas:

- o decímetro quadrado, que se abrevia "dm^2" e vale 0,01 m^2.
- o centímetro quadrado, que se abrevia "cm^2" e vale 0,0001 m^2.
- o milímetro quadrado, que se abrevia "mm^2" e vale 0,000001 m^2.

Desta forma, observe o quadro das unidades para medir superfície :

Múltiplos------- quilômetro quadrado	km^2	1.000.000 m^2
Múltiplos------- hectômetro quadrado	hm^2	100.000 m^2
Múltiplos------- decâmetro quadrado	dam^2	100 m^2
Unidade Fundamental ....metro quadrado	m^2	1 m^2

Submúltiplos.... decímetro quadrado	dm^2	0,01 m^2
Submúltiplos.... centímetro quadrado	cm^2	0,0001 m^2
Submúltiplos... . milímetro quadrado	mm^2	0,000001 m^2

É muito importante notar que cada unidade de superfície é 100 vezes maior que a unidade imediatamente inferior, isto é, as sucessivas unidades variam de 100 em 100.

DA TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES:

1º exemplo: Transformar 2 m^2 na unidade imediatamente inferior.

$2m^2 = (2 \times 100) dm^2 = 200 dm^2$

Regra: Como estamos tratando de **metro quadrado** e a unidade imediatamente inferior a $\mathbf{m^2}$ é $\mathbf{dm^2}$, para transformar, basta completar, para direita, com dois zeros.

2º exemplo : Transformar 1.600 hm^2 na unidade imediatamente superior.

$1.600 hm^2 = (1 600 : 100) km^2 = 16 km^2$

Regra: o nosso estudo é sobre quadrado, então, como a unidade imediatamente superior a $\mathbf{hm^2}$ é o $\mathbf{km^2}$ que está à esquerda apenas uma casa, basta eliminar, da direita para a esquerda, dois algarismos do número dado.

3º exemplo: Transformar 3,5 hm^2 em m^2

$3,5 hm^2 = (3,5 \times 10.000) m^2 = 35.000 m^2$

Regra: Lembre-se de que estamos estudando **metro quadrado**, então, como a unidade de transformação $\mathbf{m^2}$ está abaixo da unidade original duas casas, basta completar, a partir da parte fracionária, com dois zeros para cada casa, da esquerda para direita.

DAS MEDIDAS AGRÁRIAS

APOSTILA SINOPSE – PROFº CARLOS ANDRÉ
CENTRO EDUCACIONAL MOJUCA - CEM

Para medir grandes porções de terras (como sítios, fazendas), usamos as unidades agrárias. Sendo elas :

- o centiare, que se abrevia “ca” e vale 1 m^2.
- o are, que se abrevia “a” e vale 100 m^2 = ao dam^2.
- o hectare, que se abrevia “ha” e vale 10.000 m^2 = ao hm^2

DA TRANSFORMAÇÃO DAS UNIDADES AGRÁRIAS

1º exemplo : Transformar 30.000 m^2 em ha.

30.000 m^2 = (30.000 : 10.000) hm^2 = 3 hm^2 = 3 ha

Regra: Note que o hectare corresponde ao hm^2 = 10.000 m^2, então, estamos transformando uma unidade menor em outra maior. Portanto, basta dividirmos o valor da unidade fornecida pelo valor correspondente da unidade pedida na transformação.

2º exemplo : Transformar 4,2 ha em m^2.

4,2 ha = 4,2 hm^2 = (4,2 x 10.000) m^2 = 42.000 m^2

Regra: Como estamos transformando uma unidade maior para outra menor, é claro que a primeira contém várias vezes a segunda, então, basta multiplicarmos a unidade dada pelo valor correspondente da unidade pedida (10.000 = 100 x 100) por que a unidade pedida na transformação está duas unidades à direita da unidade fornecida.

TESTES GABARITADOS

Expresse as seguintes unidades nas unidades pedidas.

a) 600 hm^2 em km^2
b) 3,2 km^2 em m^2
c) 840.000 m^2 em ha
d) 3.650 cm^2 em m^2
e) 0,036 km^2 em dam^2
f) 48 ha em km^2
g) 13,6 ha em m^2
h) 0,063 m^2 em cm^2
i) 0,0003 km^2 em m^2

j) 8.510.000 m^2 em km^2
k) 325.600 m^2 em ha
l) 5 ha em km^2

<u>RESPOSTAS</u>

a) 6 km^2	b) 3.200.000 m^2	c) 84 ha	d) 0,365 m^2	e) 360 dam^2
f) 0,48 km^2	g) 136.000 m^2	h) 630 cm^2	i) 3.000 m^2	j) $8{,}51^2$
l) 32,56 ha	m) 5.000 km^2			

FUNÇÕES

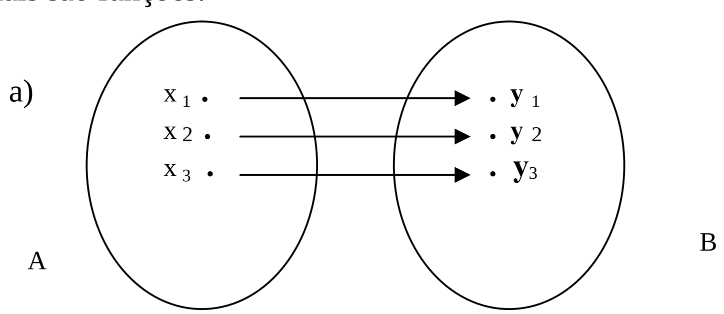
DEFINIÇÃO

Consideremos uma relação de um conjunto A em um conjunto B. Esta relação será chamada de função ou aplicação quando associar a todo elemento de A um único elemento de B.

Exemplos:

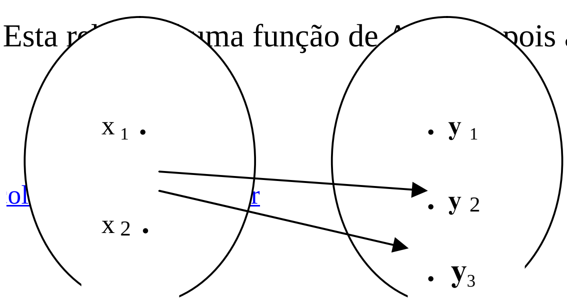
Consideremos algumas relações, esquematizadas com diagramas de Euler-Venn, e vejamos quais são funções:

a)



Esta r… uma função de … pois associa a todo elemento de A um único elemento de B.

b)



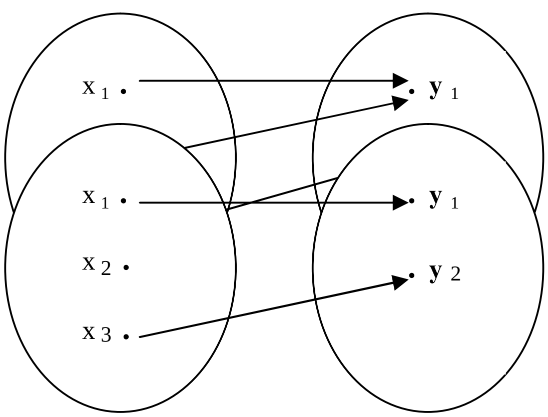
Esta relação não é uma função de A em B, pois associa a $x_1 \in$ A dois elementos do conjunto B : y_1 e y_2.

A B

c)

d)

A



B

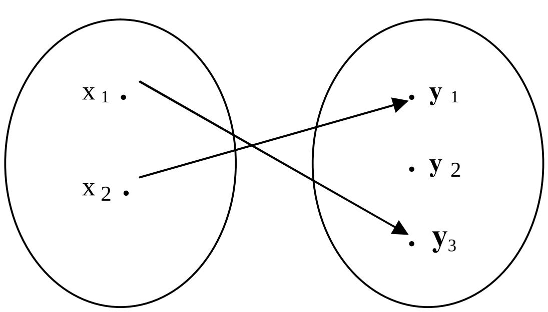
B

Esta relação é uma função de A em B, pois associa todo elemento de A um único elemento de B.

Esta relação não é uma função de A em B, pois não associa a $x_2 \in$ A nenhum elemento de B.

e)

A



B

Esta relação é uma função de A em B, pois associa à todo elemento de A um único elemento de B

Esta relação é uma função de A em B , pois associa à todo elemento de A um único elemento de B f)