U.M.A.
Caminho de Sucesso

UNIVERSIDADE METODISTA DE ANGOLA

FACULDADE DE ENGENHARIA E ARQUITECTURA

APONTAMENTOS

DAS AULAS TEÓRICAS E PRÁTICAS DE ÁLGEBRA LINEAR

LUANDA
2020

TÓPICOS

- **MATRIZES**
- **SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**
- **INVERSÃO DE MATRIZES**
- **DETERMINANTES**

DOCENTE: ALFREDO QUINDAI

1. Introdução

Estes apontamentos das aulas teóricas e práticas cobrem parte do material para um curso de um semestre de Álgebra Linear e Geometria Analítica ministrado nos primeiros semestres para alunos das áreas de Engenharias.

Para uma boa assimilação do texto, resolveremos diversos exercícios em aula, deixando os demais a cargo do aluno.

No fim de cada aula teremos exercícios para que o aluno possa avaliar os seus conhecimentos e certificá-los com resolução de tarefas.

O aluno deve ter em mente que à resolução dos exercícios deve preceder de um bom conhecimento da teoria.

Críticas e sugestões hão de surgir e serão bem-vindas. Resta-me apenas o consolo de ter feito algum esforço para empregar utilmente o meu tempo nesse trabalho.

Agradeço os Professores Doutores Volodymir Khrokin e Alexei Ponomarev, Docentes, Coordenador e Coordenador Adjunto do Curso de Mestrado em Matemática, respectivamente, na Universidade Agostinho Neto (2002 – 2008) e também, Docentes na Universidade Metodista de Angola (até 2012), que colocaram-me o desafio de organizar melhor os apontamentos das aulas.

Como em qualquer obra, esta também não está isenta de erros, pelo que, não hesitem em apontá-los quando detectados, para devida correcção, através do correio electrónico alfredoquindai@gmail.com.

Alfredo Quindai

II – Objectivos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

A disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica (**ÁLGA**) é uma das componentes de formação básica em Ciências de um curso de Engenharia. Os conceitos e as técnicas nela apresentadas têm como finalidade desenvolver as capacidades de abstracção e de raciocínio lógico-dedutivo que permitem a aquisição de ferramentas importantes nessa disciplina, necessárias à progressão do estudo das Engenharias.

Os apontamentos estão divididos em quatro capítulos.

O Capítulo 1 trata das matrizes, operações com matrizes e propriedades da álgebra matricial.

O Capítulo 2 aborda os sistemas de equações lineares (SEL). A resolução de sistemas de equações lineares é feita usando os métodos de eliminação de Gauss (MEG) e Gauss-Jordan (MEG-J), que consistem em transformar a matriz até que ela esteja na forma escalonada ou em escada de linhas e na forma escalonada reduzida, respectivamente.

O Capítulo 3 trata da inversão de matrizes, ou seja, do cálculo da matriz inversa, aplicando os métodos de eliminação de Gauss-Jordan (MEG-J), o método de cofactores e outros. Estes métodos requerem aplicação e dedicação exclusiva do interessado (o aluno).

O Capítulo 4 estuda a "função determinante", que é uma função real de variável matricial no sentido que associa a uma matriz quadrada um número real $y = f(X)$. O estudo dos determinantes tem aplicações importantes, em particular, nos sistemas de equações lineares e na inversão de matrizes.

Conteúdos

- Bibliografia

Capítulo 1 – Matrizes e Álgebra das Matrizes

1.1 Matrizes

Definição 1.1: Uma matriz A, de ordem $m \times n$ (lê-se $m\ por\ n$), é uma expressão de mn números dispostos por m linhas e n colunas, da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação abreviada: A matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ pode representar-se abreviadamente por (a_{ij}) ou $[a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n}}^{1 \le j \le m}$, sendo que $[A]_{ij}$ ou a_{ij} é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A.

1.1.1. Matriz escalonada ou em escada de linhas

Definição 1.2: Uma matriz escalonada ou em escada de linhas é uma matriz tal que por baixo do primeiro elemento não nulo de cada linha da matriz, e por baixo dos elementos anteriores da mesma linha, todas as entradas são nulas.

Exemplo 1.1 A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ está escalonada ou em escadas de linhas.

1.1.2. Pivot ou elemento redutor

Definição 1.3: Denomina-se **pivot** (lê-se pivô) ou **elemento redutor** o primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz escalonada ou em escada de linhas.

Exemplo 1.2 A matriz A tem como pivot's, os elementos redutores 1 (uns) em todas as linhas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

1.2 Matrizes Especiais

1.2.1. Matriz Linha ou Vector Linha

Definição 1.4: Uma matriz linha ou vector linha é uma matriz do tipo $1 \times n$, representada da seguinte forma

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}],$$

ou seja, a $i-ésima$ linha de matriz, para $i=1,\dots,m$.
Exemplo 1.3 A matriz

$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 3\end{bmatrix}_{1\times 4}$ é matriz linha de ordem 1×4, isto é, tem uma única linha e quatro colunas.

1.2.2. Matriz Coluna ou Vector Coluna

Definição 1.5: Uma matriz coluna ou vector coluna é uma matriz do tipo $m\times 1$, representada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix},$$

ou seja, a $j-ésima$ coluna de matriz, para $j=1,\dots,n$.

Exemplo 1.4 A matriz

$B=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\\ 0\\ 4\end{bmatrix}_{5\times 1}$ é matriz coluna de ordem 5×1, isto é, tem cinco linhas e apenas uma coluna.

1.2.3. Matriz Quadrada

Definição 1.6: Denomina-se matriz quadrada de ordem n, a matriz do tipo $n\times n$, com o mesmo número de linhas e de colunas, representada da seguinte forma

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

Exemplo 1.5 As matrizes

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & -4\\ 4 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 3\end{bmatrix}_{4\times 4}$, são quadradas.

1.2.4. Matriz Rectangular

Definição 1.7: Denomina-se matriz rectangular, a matriz do tipo $m \times n$, em que $m \neq n$, representada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.6 As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times3}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times4}$$, são rectangulares.

1.2.5 Matriz Triangular

Definição 1.8: Denomina-se matriz triangular, a matriz quadrada de ordem n, do tipo $n \times n$, em que são nulos os elementos situados para um dos lados da diagonal principal, representada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.7 As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, são triangular superior e triangular inferior, respectivamente.

1.2.6. Matriz Diagonal

Definição 1.9: Denomina-se matriz diagonal, a matriz quadrada de ordem n, em que são nulos todos os elementos situados fora da diagonal principal, representada da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.8 A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$ é diagonal.

1.2.7. Matriz Escalar

Definição 1.10: Denomina-se matriz escalar, a matriz quadrada de ordem n, em que os elementos da diagonal principal são todos iguais, mas diferentes de 1 e de 0.

Exemplo 1.9 A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ é escalar.}$$

1.2.8. Matriz Identidade

Definição 1.11: Denomina-se matriz identidade, a matriz diagonal constituída por apenas 1 (uns) na diagonal principal e denota-se por I_n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.10 As matrizes

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ são identidades.}$$

1.2.9. Matriz Nula

Definição 1.12: Denomina-se matriz nula, a matriz constituída por apenas elementos nulos e denota-se por $O_{m\times n}$. Se $m = n$ pode representar-se por O_n.

Exemplo 1.11 As matrizes

$$O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dizem-se}$$

matrizes nulas.

1.3 Matriz Transposta

Definição 1.13: Denomina-se matriz transposta de $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, do tipo $m \times n$, a matriz dada por $A^T = \left[a_{ji}\right]$ ou $A^t = \left[a_{ji}\right]$, do tipo $n \times m$, obtida trocando-se as linhas com as colunas das matrizes dadas.

Exemplo 1.11 As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ são}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ B^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$ (números reais) designa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$ (números complexos) designa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Resumindo:

Das seguintes matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix},\quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } F = [2].$$

A e B são do tipo 2×2. A matriz C é 2×3, D é 1×3, E é 3×1 e F é 1×1.

De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos ou entradas de algumas das matrizes dadas acima são $a_{11} = 1$, $b_{22} = 3$, $c_{13} = 0$, $d_{12} = 3$, $e_{31} = -1$ e $[F]_{11} = 2$.

Uma matriz que só possui uma linha é chamada matriz linha, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada matriz coluna. Nos exemplos 1.2.1. e 1.2.2, a matriz A é uma matriz linha e a matriz B é uma matriz coluna. Matriz linha e matriz coluna são chamadas de vectores.

Dizemos que duas matrizes são iguais se elas são do mesmo tipo (têm o mesmo tamanho) e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são **iguais** se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

1.4. Operações com Matrizes

As operações com matrizes são análogas às operações com números, sendo válidas todas as suas propriedades.

Definição 1.14: A **soma de duas matrizes de mesmo tipo** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, é definida como sendo a matriz $m \times n$, tal que

$$C = A + B,$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também para $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 1.12: Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se chamarmos de C a soma das duas matrizes de A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 3+(-1) & 0+2 \\ 2+1 & 4+3 & (-2)+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Definição 1.15: A **multiplicação de uma matriz** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por **um escalar (número)** α é definida pela matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Pode escrever-se também $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Diz-se que a matriz B é **um múltiplo escalar** da matriz A.

Exemplo 1.13 O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ pelo escalar (-2) é dado por

$$(-2)A = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot(-4) \\ (-2)\cdot(-5) & (-2)\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 8 \\ 10 & -12 \end{bmatrix}$$

Definição 1.16: O **produto de duas matrizes**, em que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$, é definido pela matriz $m \times n$

$$C = AB$$

obtida da seguinte forma

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \qquad (1.1)$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Podemos escrever também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$.

A equação (1.1) está a dizer que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da $i - ésima$ linha de A pelos elementos correspondentes da $j - ésima$ coluna de B.

A equação (1.1) pode ser escrita de forma compacta usando a notação de somatório.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Lê-se: Somatório de k variando de 1 à p de $a_{ik}b_{kj}$.
Nota: Só é possível efectuar o produto (multiplicação) AB, se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

Exemplo 1.14: Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se chamarmos de C, o produto das duas matrizes A e B, então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2\cdot 0 + (-3)\cdot 5 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-3)(-4) & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + (-3)\cdot 0 \\ 3\cdot(-2) + 4\cdot 0 + 0\cdot 5 & 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + 0\cdot(-4) & 3\cdot 0 + 4\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

O produto BA não está definido (por que?). Entretanto, mesmo quando ele está definido, BA pode não ser igual a AB, ou seja, o produto de matrizes não é comutativo, isto é, $AB \neq BA$, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 1.15 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

O próximo exemplo mostra-nos como as matrizes podem ser usadas para descrever quantitativamente um processo de produção.

Exemplo 1.4.5. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufactura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B.
Usando matrizes podemos determinar quantos gramas dos insumos A e B são necessários na produção de x kg do produto X, y kg do produto Y e z kg do produto Z.

$$\begin{array}{rc} & \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} gramas\ de\ A/kg \\ gramas\ de\ B/kg \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} = A \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{matrix} kg\ de\ X\ produzidos \\ kg\ de\ Y\ produzidos \\ kg\ de\ Z\ produzidos \end{matrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix} \begin{matrix} gramas\ de\ A\ usados \\ gramas\ de\ B\ usados \end{matrix}$$

1.4.1. Propriedades da Álgebra Matricial

Teorema 1.1. Sejam A, B e C matrizes de tipos apropriados, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações com matrizes:
(a) (comutatividade): $A + B = B + A$;
(b) (associatividade): $A + (B + C) = (A + B) + C$;
(c) (elemento neutro): A matriz nula, $O_{m\times n}$, definida por $[O]_{ij} = 0$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ é tal que, $A + O = A$, para toda matriz A, $m \times n$.
(d) (elemento simétrico): Para cada matriz A, existe uma única matriz – A, definida por $[-A]_{ij} = -a_{ij}$, tal que, $A + (-A) = O$.
(e) (associatividade): $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
(f) (distributividade): $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
(g) (distributividade): $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
(h) (associatividade): $A(BC) = (AB)C$;
(i) (elemento neutro): Para cada inteiro positivo n a matriz, $n \times n$,
(ii)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada **matriz identidade** é tal que

$$AI_n = I_m A = A, \text{ para toda matriz } A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

(j) (distributividade): $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;
(k) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
(l) $(A^T)^T = A$;
(m) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
(n) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
(o) $(AB)^T = B^T A^T$.

A **diferença** entre duas matrizes de mesmo tipo $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$, tal que

$$A - B = A + (-B),$$

ou seja, é a soma da matriz A com a simétrica da matriz B.

Em particular, sejam A uma matriz quadrada de ordem n e p um inteiro positivo.

Definimos **a potência *p* de *A***, por $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p\ vezes}$.

Para $p = 0$, tem-se $A^0 = I_n$.

1.5 Exercícios

1. Defina a matriz A do tipo 4×4 cujos elementos a_{ij} satisfazem a condição:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i + j \text{ é } par \\ 0, caso\ contrário\ (c.c.) \end{cases}$$

2. Sejam as matrizes A, B e C, assim definidas:

$$A = (a_{ij})_{3\times2} \text{ e } a_{ij} = \begin{cases} 2, se\ i = j \\ 2(i + j), se\ i \neq j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{3\times2} \text{ e } b_{ij} = (-1)^i \text{ e}$$

$$C = (c_{ij})_{3\times2} \text{ e } c_{ij} = \begin{cases} 3, se\ i + j \text{ é } ímpar \\ 0,\ se\ caso\ contrário \end{cases}$$

Calcule:

(a) $A + B$;
(b) $C - B + A$;
(c) AB^T;
(d) $A^T C$.

3. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -6 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule, se for possível:

(a) $AB - BA$;
(b) $2C - D$;
(c) $(2D^T - 3E^T)^T$;
(d) $D^2 - DE$.

4. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que:

(a) AB é diferente de BA;
(b) AE_j é a $j - ésima$ coluna de A, para $j = 1, 2, 3$ e $E_i^T B$ é a $i - ésima$ linha de B, para $i = 1, 2, 3$.
(c) Escrevendo B em termos das suas colunas, $B = [B_1 \quad B_2]$, em que $B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, o produto AB pode ser escrito como $AB = A[B_1 \quad B_2] = [AB_1 \quad AB_2]$.

5. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Verifique que

$xA_1 + yA_2 + zA_3 = AX$, em que A_j é a $j - ésima$ coluna de A, para $j = 1, 2, 3$.

Capítulo 2 – Sistemas de Equações Lineares

2.1 Sistemas de Equações Lineares (SEL)

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vejamos como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Definição 2.1 Uma **equação linear** com n incógnitas (variáveis desconhecidas), $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e b são constantes reais.

Um sistema de equações lineares pode ser escrito em termos de uma única equação matricial.

Definição 2.2 Um sistema de equações lineares ou simplesmente sistema linear é um conjunto com m equações lineares a n incógnitas (variáveis desconhecidas), ou seja, é um conjunto de equações na forma canónica ou geral de

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são os coeficientes e constantes reais (termos independentes), para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas ou variáveis do sistema.

2.2 Resolução de Sistema de Equações Lineares

Resolver um sistema de equações lineares é determinar (encontrar) os valores das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, de modo que substituídos, satisfaçam simultaneamente, as equações, ou seja, o membro esquerdo tem de ser igual ao membro direito ($ME = MD$).

Exemplo 2.1 Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z & = 7 \\ 4x + 9y & = 2 \\ x + 5y - 3z & = 0 \end{cases}$$

Será $(x, y, z) = (2,1,1)$, a solução do sistema? Que tal $(x, y, z) = (11/4\,, -1, -3/4)$?

Vamos substituir os valores de x, y e z em cada equação. Tentando $(x, y, z) = (2,1,1)$ na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$, então a primeira equação é satisfeita.

Usando a substituição na segunda equação, encontramos

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 + 9 \cdot 1 &= 2 \\ 17 &\neq 2 \end{aligned}$$. A segunda equação não é satisfeita.

Portanto, $(x, y, z) = (2,1,1)$ não pode ser a solução para o sistema de equações dado.
Tentemos agora, o segundo conjunto de números $(x, y, z) = (11/4, -1, -3/4)$.

A substituição na primeira equação tem como resultado

$$\begin{aligned} 3 \cdot 11/4 + 2 \cdot (-1) + 3/4 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}. \text{ Satisfaz!}$$

Na segunda equação, obtemos

$$\begin{aligned} 4 \cdot 11/4 + 9 \cdot (-1) &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}. \text{ Também satisfaz!}$$

Na terceira equação

$$\begin{aligned} 11/4 + 5 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3/4) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}. \text{ Satisfaz!}$$

Portanto, $(x, y, z) = (11/4, -1, -3/4)$ é a solução para o sistema linear dado.
Esses valores tornam válidas as três equações do sistema em questão.

Nota: A palavra "**sistema**" indica que as equações devem ser consideradas em conjunto, e não de forma isolada.

2.2.1 Descrição das possibilidades de soluções

i) **Sistema Consistente:** Tem uma única solução ou infinito número de soluções.
ii) **Sistema Inconsistente:** Não tem solução.

2.2.2 Classificação dos Sistemas de Equações Lineares quanto ao seu conjunto de soluções

Tendo em conta a resolução do sistema de equações lineares e o respectivo conjunto de soluções, podemos classificar o sistema linear dizendo que é:

1. Possível Determinado **(SPD)**: Tem uma única solução.
2. Possível Indeterminado **(SPI)**: Tem infinitas soluções.
3. Impossível **(SI)**: O conjunto-solução é vazio. Não tem solução.

2.3 Representação Matricial de um Sistema de Equações Lineares

O Sistema de Equações Lineares (SEL) pode ser escrito como uma equação matricial, usando o produto de matrizes que já foi definido, na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sendo A, a matriz dos coeficientes das variáveis ou incógnitas, X, a matriz coluna das variáveis e B, a matriz coluna dos termos independentes ou constantes.

O sistema anterior também pode ser representado por

$$[A \mid B] = \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right]$$

dizendo-se que é a **matriz aumentada ou ampliada** do sistema.

Uma solução de um sistema linear é uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

Na forma matricial S é a solução do sistema linear se $AS = B$.

Ao conjunto S de todas as soluções do sistema damos o nome de **conjunto de solução** ou **solução geral** do sistema

$$S = \left\{ s_1, s_2, \dots, s_n \in \ \mathbb{R}^n : A \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = B \right\}$$

A matriz A é também conhecida como **matriz do sistema linear**.

Exemplo 2.2 O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$AX = B \rightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique por qualquer método já estudado) ou na forma matricial

$$X = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

2.4 Método de Eliminação de Gauss (MEG)

Este método consiste em aplicar as operações elementares na matriz aumentada ou ampliada, obtendo-se sistemas lineares equivalentes ao inicial.

2.4.1 Operações elementares

Seja A uma matriz $m \times n$. As operações elementares sobre as linhas da matriz A, são as seguintes:

1. Permutação (i.e. troca) de duas linhas da matriz;
2. Multiplicação de uma linha da matriz por um escalar não nulo;
3. Adição de uma linha da matriz a uma outra linha multiplicada por um escalar (múltiplo).

Adoptaremos as seguintes notações para as transformações elementares sobre as linhas de uma matriz:

(a) $L_i \leftrightarrow L_j$, para representar que se efectuou a troca das linhas L_i e L_j;

(b) $\alpha L_i \rightarrow L_i$, para representar que a linha L_i foi multiplicada pelo escalar α diferente de zero ($\alpha \neq 0$);

(c) $L_i + kL_j \rightarrow L_i$, para representar que a nova linha L_i é obtida, somando à linha L_i a linha L_j previamente multiplicada por um escalar k.

Nota: O método de eliminação de Gauss é também um algoritmo de condensação da matriz A.

Exemplo 2.3 O sistema linear

$$\begin{cases} x + \quad z = 3 \\ x + 2y + 2z = 6, \\ 3y + 3z \quad = 6 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Resolução: Consideremos a matriz aumentada ou ampliada do sistema e o consequente método de eliminação de Gauss (aplicação de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada), de acordo com a notação adoptada

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1^{\text{a}}\ linha \\ L_2 \rightarrow 2^{\text{a}}\ linha \\ L_3 \rightarrow 3^{\text{a}}\ linha \end{array}$$

Primeira operação: $L_2 + (-1)L_1 \rightarrow L_2$. Significa que adicionamos à segunda linha, L_2, (-1) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] L_2 + (-1)L_1 \rightarrow L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Segunda operação: $L_3 + (-3/2)L_2 \rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, $(-3/2)$ vezes a segunda linha, L_2, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] L_3 + (-3/2)L_2 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

Logo, o sistema linear inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + \qquad z = 3 \\ \quad 2y + z = 3 \\ \quad 3/2\, z \;\; = 3/2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x + \;\; z = 3 \;\; (I) \\ 2y + z = 3 \;\; (II) \\ \qquad z \;\; = 1 \;\; (III) \end{cases}$$

Daqui, resulta que substituindo $z = 1$ nas equações (II) e (I), respectivamente, obtemos $y = 1$ e $x = 2$.

Regra Geral dos Sistemas (RGS): Todo e qualquer sistema deve ser verificado e testado quanto ao seu conjunto de solução, isto é, $ME = MD$.

Verificação do exemplo 2.3:

Substituindo, nas três equações do sistema linear inicial, os valores das variáveis $x = 2$, $y = 1$ e $z = 1$, temos:

Na **primeira equação**: $2 + 1 = 3$ e $3 = 3$. Satisfaz!
Na **segunda equação**: $2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$ e $6 = 6$. Aqui também, satisfaz!
Na **terceira equação**: $3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$ e $6 = 6$. Também, satisfaz!

Portanto, o conjunto de solução do sistema linear dado é $S = (2,1,1)$ e é classificado como sistema possível e determinado (SPD), quer dizer, tem uma única solução.

Exemplo 2.4 Resolver o sistema de equações lineares seguinte:

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad 3z - 9w = 6 \\ 5x + 15y - 10z + 40w = -45 \\ \;\; x + \;\; 3y \;\;\; - z \;\; + 5w = -7 \end{cases}$$

Resolução: Considerando a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss, temos

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1^{\underline{a}}\ linha \\ L_2 \rightarrow 2^{\underline{a}}\ linha \\ L_3 \rightarrow 3^{\underline{a}}\ linha \end{array}$$

Primeira operação: $L_1 \leftrightarrow L_3$. Significa que trocamos a primeira linha, L_1 com a terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] L_1 \leftrightarrow L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Segunda operação: $1/5\, L_2 \rightarrow L_2$. Significa que dividimos $1/5$ a segunda linha, L_2 para obtermos uma nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] 1/5\, L_2 \rightarrow L_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Terceira operação: $L_2 + (-1)L_1 \rightarrow L_2$. Significa que adicionamos à segunda linha, L_2, (-1) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] L_2 + (-1)L_1 \rightarrow L_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Quarta operação: $L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, 3 vezes a segunda linha, L_2, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo, o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\begin{cases} x + 3y - z + 5w = -7 \\ \qquad\quad\; -z + 3w = -2 \end{cases}$$

As incógnitas ou variáveis desconhecidas y e w são livres, isto é, podem tomar valores arbitrários, enquanto que as variáveis x e z são não livres ou básicas.

Por isso, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y - 2w - 5 \\ y \\ 3w + 2 \\ w \end{bmatrix}$$ para quaisquer $y, w \in \mathbb{R}$, dada por

$$S = \{(-3y - 2w - 5, y, 3w + 2, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$$

No exemplo acima, **o sistema é possível e indeterminado (SPI)**. Tem infinitas soluções.

Verificação:

Suponha que $y = 0$ e $w = 0$ (valores arbitrários). Vamos substituir esses valores na solução geral.
Primeira solução: $S_1 = \{(-5, 0, 2,0)\}$
Suponha ainda, que $y = 1$ e $w = 1$. Na solução geral temos a **Segunda solução**:
$S_2 = \{(-10, 1, 5, 1)\}$ e assim sucessivamente.
Depois de sucessivas verificações, a que conclusão chega quanto a solução geral do sistema linear?

Exemplo 2.5 Resolver o sistema de equações lineares seguinte:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ 3x + 3y - 5z = 1 \end{cases}$$

Resolução: Considerando a matriz aumentada e o consequente método de eliminação de Gauss, temos

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1^{\underline{a}}\ linha \\ L_2 \rightarrow 2^{\underline{a}}\ linha \\ L_3 \rightarrow 3^{\underline{a}}\ linha \end{array}$$

Primeira operação: $L_2 + (-2)L_1 \rightarrow L_2$. Significa que adicionamos à segunda linha, L_2, (-2) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] L_2 + (-2)L_1 \rightarrow L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

Segunda operação: $L_3 + (-3)L_1 \rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, (-3) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] L_3 + (-3)L_1 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & -14 & -5 \end{array}\right]$$

Terceira operação: $L_3 + (-2)L_2 \rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, (-2) vezes a segunda linha, L_2, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & -14 & -5 \end{array}\right] L_3 + (-2)L_2 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3y - 7z = 0 \\ 0 = -5 \end{cases}$$

Logo, **o sistema é impossível (SI)**. Não tem solução, porque $0 \neq -5$.

2.4.2 Característica de uma matriz

Definição 2.3 A característica de uma matriz A, denotada por $car(A)$, é por definição a característica da matriz escalonada ou em escada de linhas obtida através do método de eliminação de Gauss de A.
Numa matriz escalonada ou em escada de linhas, a característica da matriz é igual ao número de pivots (lê-se pivôs), ou seja, ao número de linhas não nulas.

Exemplo 2.6 O sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y + \ z = 1 \\ 4x + y + 3z = 2 \\ -2x + 2y + z \ = 4 \end{cases}$$

Partindo da matriz aumentada/ampliada (MEG), tem-se

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1^{\underline{a}}\ linha \\ L_2 \rightarrow 2^{\underline{a}}\ linha \\ L_3 \rightarrow 3^{\underline{a}}\ linha \end{array}$$

Primeiro e segundo passos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 + (-2)L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Terceiro passo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right] L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Classificação do sistema: Possível determinado.
Variáveis básicas: x, y e z.
Variáveis livres: Não tem.
$car(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3}$

2.5 Método de Eliminação de Gauss-Jordan (MEG-J)

O método de eliminação **de Gauss-Jordan**, que é uma extensão do método de Gauss, consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema até que obtenhamos uma matriz numa forma em que o sistema associado à esta matriz seja de fácil resolução. Em outras palavras, procura-se obter uma matriz numa forma em que todas as linhas não nulas possuam como primeiro elemento não nulo, **chamado "pivot"**, (lê-se pivô) ou **elemento redutor**, o número 1.
Além disso, se uma coluna contém um pivot, então todos os seus outros elementos terão que ser iguais a zero.

Exemplo 2.7 Considere o sistema de equações seguinte. Resolva-o, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 2x + y + 4z = 2000 \\ 2x + 3y + 5z = 2500 \end{cases}$$

Resolução: Formemos primeiro, a matriz dos coeficientes do sistema ou a matriz aumentada e apliquemos as operações elementares.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1^{\underline{a}}\ linha \\ L_2 \rightarrow 2^{\underline{a}}\ linha \\ L_3 \rightarrow 3^{\underline{a}}\ linha \end{array}$$

1ª. eliminação:
Vamos procurar para pivot da L_1, um elemento não nulo da primeira coluna não nula (se for o caso, podemos usar a troca de linhas para "trazê-lo" para a primeira linha). Mas, como o primeiro elemento da primeira coluna é igual à 1, ele será o primeiro pivot.

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 1ª. coluna, que é a coluna do pivot, para isso, adicionamos à segunda linha, L_2, (−2) vezes a primeira linha, L_1 e adicionamos à terceira linha, L_3, também, (−2) vezes a primeira linha, L_1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 + (-2)L_1 \to L_2 \\ L_3 + (-2)L_1 \to L_3 \end{array}$$

Cálculos auxiliares para a 1ª. eliminação:

(I) $L_2 + (-2)L_1 \to L_2$

$$\left.\begin{array}{r} 2 + (-2)\cdot 1 = 0 \\ 1 + (-2)\cdot 1 = -1 \\ 4 + (-2)\cdot 1 = 2 \\ 2000 + (-2)\cdot 1000 = 0 \end{array}\right.$$

. Portanto, a nova segunda linha, L_2: $0 \ -1 \ \ 2 \ \ 0$

(II) $L_3 + (-2)L_1 \to L_3$

$$\left.\begin{array}{r} 2 + (-2)\cdot 1 = 0 \\ 3 + (-2)\cdot 1 = 1 \\ 5 + (-2)\cdot 1 = 3 \\ 2500 + (-2)\cdot 1000 = 500 \end{array}\right.$$

. Portanto, a nova terceira linha, L_3: $0 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 500$

A sub-matriz equivalente é,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right]$$

2ª. eliminação:

Vamos escolher o elemento de posição a_{22}. Como temos que "fazer" o pivót igual a um, multiplicamos L_2 por (−1).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right] \quad (-1)\,L_2 \to L_2$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2ª. coluna, que é a coluna do pivót, para isso, somamos à L_1, $(-1)L_2$ e somamos à L_3, também, $(-1)L_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 + (-1)L_2 \to L_1 \\ L_3 + (-1)L_2 \to L_3 \end{array}$$

Cálculos auxiliares para a 2ª. eliminação:

(I) $L_1 + (-1)L_2 \to L_1$

$$\left.\begin{array}{r} 1 - 0 = 1 \\ 1 + (-1)\cdot 1 = 0 \\ 1 + (-1)(-2) = 3 \\ 1000 + (-1)\cdot 0 = 1000 \end{array}\right.$$

. Portanto, a nova primeira linha, L_1: $1 \ \ 0 \ \ 3 \ \ 1000$

(II) $L_3 + (-1)L_2 \rightarrow L_3$

$$\begin{array}{r} 0 = 0 \\ 1 + (-1) \cdot 1 = 0 \\ 3 + (-1)(-2) = 5 \\ 500 + (-1) \cdot 0 = 500 \end{array}$$. Portanto, a nova terceira linha, L_3: $0 \;\; 0 \;\; 5 \;\; 500$

obtendo-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right]$$

3ª. eliminação:

Vamos escolher o elemento de posição a_{33}. Como temos que "fazer" o pivot igual a um, multiplicamos L_3 por $1/5$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right] 1/5\, L_3 \rightarrow \quad L_3$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 3ª. coluna, que é a coluna do pivot, para isso, somamos à L_1, $(-3)L_3$ e somamos à L_2, 2 L_2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + (-3)L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 + 2L_3 \rightarrow L_2 \end{array}$$

Cálculos auxiliares para a 3ª. eliminação:

(I) $L_1 + (-3)L_3 \rightarrow L_1$

$$\begin{array}{r} 1 + (-3) \cdot 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ 3 + (-3) = 0 \\ 1000 + (-3) \cdot 100 = 700 \end{array}$$. Portanto, a nova primeira linha, L_1: $1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 700$

(II) $L_2 + 2L_3 \rightarrow L_2$

$$\begin{array}{r} 0 = 0 \\ 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ 0 + 2 \cdot 100 = 200 \end{array}$$. Portanto, a nova segunda linha, L_2: $0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 200$

Obtendo-se a sub-matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & & & = 700 \\ & y & & = 200 \\ & & z & = 100 \end{cases}$$, quer dizer, $x = 700$, $y = 200$ e $z = 100$

Verificação:
Verificar um sistema linear é substituir em todas as suas equações, os valores obtidos das variáveis, de modo a que sejam satisfeitas as relações $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

$$\begin{cases} x + y + z &= 1000 \\ 2x + y + 4z &= 2000 \\ 2x + 3y + 5z &= 2500 \end{cases}$$

Substituindo, nas três equações do sistema linear, os valores das variáveis $x = 700$, $y = 200$ e $z = 100$, tem-se

Na **primeira equação**: $700 + 200 + 100 = 1000$ e $1000 = 1000$. Satisfaz.
Na **segunda equação**: $2 \cdot 700 + 200 + 4 \cdot 100 = 2000$ e $2000 = 2000$. Aqui também, satisfaz.
Na **terceira equação**: $2 \cdot 700 + 3 \cdot 200 + 5 \cdot 100 = 2500$ e $2500 = 2500$. Também, satisfaz.

Portanto, podemos concluir que $x = 700$, $y = 200$ e $z = 100$ são os únicos valores que satisfazem o sistema linear dado com solução geral

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Definição 2.4 Uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ está na forma escalonada reduzida quando satisfaz as seguintes condições:

(a) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;
(b) O pivot, ou seja, o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula, é igual a 1;
(c) O pivot de cada linha não nula ocorre à direita do pivot da linha anterior;
(d) Se uma coluna contém um pivot, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma escalonada.

Exemplo 2.8 As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ são escalonadas reduzidas;

Enquanto

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ são escalonadas, mas não são escalonadas reduzidas.

O método de Gauss-Jordan aplica-se também na condensação ou escalonamento de matrizes, mediante operações elementares às linhas da matriz aumentada/ampliada até que esteja na forma escalonada reduzida.

Exemplo 2.9 Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x \ + 3y \ + 13z = 9 \\ \quad y + 5z \quad = 2 \\ -2y - 10z \ = -8 \end{cases}$$

A sua matriz aumentada é

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$$

1ª. eliminação:
Como o pivot da primeira linha é igual a 1 e os outros elementos da primeira coluna são iguais a zero, não há nada o que fazer na 1ª. eliminação.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 + (-3)L_2 \rightarrow \ L_1 \\ L_3 + 2L_2 \rightarrow \ L_3 \end{array}$$

2ª. eliminação:
Olhamos para submatriz obtida eliminando-se a primeira linha. Escolhemos para pivot um elemento não nulo da primeira coluna não nula da submatriz. Escolhemos o elemento de posição a_{22}. Como é igual a 1, precisamos, agora, "zerar" os outros elementos da coluna do pivot. Para isso, somamos à primeira linha, $(-3)L_2$ e somamos à terceira, $2L_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema dado e equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x \qquad - 2z = 3 \\ \qquad y + 5z = 2 \\ \qquad\qquad 0 = -4 \end{cases}$$

que não possui solução.

Em geral, um sistema linear não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da sua matriz aumentada for da forma $[\ 0 \ldots 0 \mid b'_m\ ]$, com $b'_m \neq 0$.

Exemplo 2.10 Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3z - 9w = 6 \\ 5x + 15y - 10z + 40w = -45 \\ x \ + \ 3y \quad - z \ + 5w = -7 \end{cases}$$

A sua matriz aumentada é

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

1ª. eliminação:
Como temos que "fazer" o pivot igual a 1, escolhemos para pivot o elemento de posição a_{31}. Precisamos "colocá-lo" na primeira linha, para isto, trocamos a terceira linha com a primeira. Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da primeira coluna, que é a coluna do pivot, para isto, adicionamos à segunda linha, $(-5)L_1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 + (-5)L_1 \to L_2 \end{array}$$

2ª. eliminação:
Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a primeira linha. Escolhemos para pivot um elemento diferente de zero na primeira coluna não nula desta sub-matriz. Escolhemos o elemento de posição a_{23}. Como temos que fazer o pivot igual a 1, multiplicamos a segunda linha por (−1/5), ou seja, $(-1/5)L_2$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] (-1/5)L_2 \to L_2,$$

obtendo-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da segunda coluna, que é a coluna do pivót, para isto, adicionamos à primeira linha a segunda e à terceira linha, (−3) vezes a segunda.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + L_2 \to L_1 \\ L_3 + (-3)L_2 \to L_3 \end{array}$$

Daí, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz é escalonada reduzida.

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\begin{cases} x + 3y + 2w = -5 \\ z - 3w = 2 \end{cases}$$

A matriz deste sistema possui duas colunas sem pivots. As variáveis que não estão associadas a pivots podem ser consideradas variáveis livres, isto é, podem assumir valores arbitrários. Neste exemplo, as variáveis y e w não estão associadas a pivots e podem ser consideradas variáveis livres.

Sejam $y = \alpha$ e $w = \beta$. As variáveis associadas aos pivots terão os seus valores dependentes das variáveis livres, $z = 2 + 3\beta$ e $x = -5 - 3\alpha - 2\beta$.

Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-3\alpha-2\beta \\ \alpha \\ 2+3\beta \\ \beta \end{bmatrix} \text{para todos valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ reais.}$$

Em geral, se o sistema linear tiver solução e a forma escalonada reduzida da matriz aumentada possuir colunas sem pivots, as variáveis que não estão associadas aos pivots podem ser consideradas **variáveis livres (ou não básicas)**, isto é, podem assumir valores arbitrários. As variáveis associadas aos pivots (**variáveis básicas**) terão os seus valores dependentes das variáveis livres.

Lembramos que o sistema linear não tem solução se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema for da forma [0 . . . 0 | b'_m], com $b'_m \neq 0$.

Observação: Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz aumentada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível.

2.6 Sistemas de Equações Lineares Homogêneos (SELHO)

Um sistema linear na forma

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases}$$

é chamado sistema homogêneo e pode ser escrito matricialmente como $AX = \bar{0}$.

Logo, admite-se que todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

chamada de solução trivial, isto é, $S = \{0, 0, \dots, 0\}$.

De notar que, todo sistema homogêneo tem solução. Quer dizer, o sistema tem solução trivial ou tem infinitas soluções.

Observação: Para resolver um sistema linear homogêneo $AX = \bar{0}$, basta escalonarmos a matriz A do sistema, já que sob a acção de uma operação elementar a coluna de zeros não é alterada.

Mas, é preciso ficar atento quando se escreve o sistema linear associado a matriz resultante das operações elementares, para se levar em consideração esta coluna de zeros que não vimos escrevendo.

O conjunto solução do sistema do exemplo **2.10** foi

$$S = \{(-3y - 2w - 5,\ y,\ 3w + 2, w):\ y, w \in \mathbb{R}\}$$

Cada solução neste sistema pode ser escrita da forma seguinte (separando a parte que tem as variáveis livres)

$$(-3y - 2w - 5, y, 3w + 2, w) = (-5, 0, 2, 0) + (-3y - 2w, y, 3w, w)$$

Facilmente se verifica que $S = \{(-3y - 2w, y, 3w, w): y, w \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução S_0 do sistema homogêneo $AX = \overline{0}$ e que $(-5, 0, 2, 0)$ é uma solução particular de $AX = B$ e portanto,

$$S = (-5, 0, 2, 0) + S_0$$

2.6.1 Discussão de um sistema de equações lineares em função dos seus parâmetros

Discutir um sistema de equações lineares em função dos seus parâmetros reais, é determinar valores destes parâmetros, de modo que o seu conjunto de solução pode ser:

(a) Sistema Possível Determinado (**SPD**);
(b) Sistema Possível e Indeterminado (**SPI**);
(c) Sistema Impossível (**SI**).

Observação: Para discutirmos o **SEL** em função dos seus parâmetros reais basta resolvê-lo, escalonando a matriz A do sistema pelos métodos já estudados.

Exemplo 2.11 Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z no qual a e b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ x + ay = 2b - z \\ y + z = ay + b \end{cases}$$

a) Discuta a natureza do sistema, em função dos parâmetros reais a e b.
b) Considerando $a = 1$ e $b = 1/2$.
b1) Resolva o sistema
b2) Determine $c \in \mathbb{R}$, de modo que a equação $x + y + cz = c$, seja compatível com o sistema dado.

Resolução (a): O sistema linear anterior é equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2b \\ (1 - a)y + z = b \end{cases}$$

Consideremos a matriz aumentada (ampliada) do sistema e o consequente método de eliminação de Gauss, de acordo com a notação adoptada

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2b \\ 0 & 1-a & 1 & b \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1^{\text{a}}\ linha \\ L_2 \rightarrow 2^{\text{a}}\ linha \\ L_3 \rightarrow 3^{\text{a}}\ linha \end{array}$$

Primeira operação elementar: $L_2 + (-1)L_1 \rightarrow L_2$. Significa que adicionamos à segunda linha, L_2, (-1) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2b \\ 0 & 1-a & 1 & b \end{array}\right] L_2 + (-1)L_1 \rightarrow L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 2b-1 \\ 0 & 1-a & 1 & b \end{array}\right]$$

Segunda operação elementar: $L_3 + L_2 \rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, 1 vezes a segunda linha, L_2, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 2b-1 \\ 0 & 1-a & 1 & b \end{array}\right] L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 2b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 3b-1 \end{array}\right]$$

Vamos discutir o sistema linear a partir da segunda e terceira linhas onde estão os parâmetros reais a e b.

Na segunda linha temos que igualar a zero, os termos $a - 1 = 0$ e $2b - 1 = 0$. Assim, $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ e $2b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1/2$.

Primeira discussão: Para $a = 1$ e $b = 1/2$, a matriz apresenta uma linha com zeros

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Logo é um sistema possível e indeterminado, **SPI**.

Segunda discussão: Para $a = 1$ e $b \neq 1/2$, é um sistema impossível, **SI**. Verifique!

Terceira discussão: Para $a \neq 1$, $b = 1/2$ ou $b \neq 1/2$, é um sistema possível e determinado, **SPD**.

Resolução (b1): Para $a = 1$ e $b = 1/2$, o sistema linear é equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad z = 1/2 \end{cases}$$

Substituindo o valor de $z = 1/2$ na primeira equação, obtemos $x = 1/2 - y,\ \ y \in \mathbb{R}$.

Seja $y = \alpha$, a solução geral é $S = \{(1/2 - \alpha,\ \alpha,\ 1/2\ ) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. O sistema de equações lineares tem infinitas soluções.

Resolução (b2): Para que a equação $x + y + cz = c$, $c \in \mathbb{R}$ seja compatível com o sistema dado, $c = 1$. Repare na primeira equação: $x + y + z = 1$.

Exemplo 2.12 Discuta, em função do parâmetro real a, o sistema de equações lineares seguinte:

$$\begin{cases} x+y+z=a+1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y=a+2a^2 \end{cases}$$

Resolução: Consideremos a matriz aumentada (ampliada) do sistema e o consequente método de eliminação de Gauss, de acordo com a notação adoptada

$$[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & a+2a^2 \end{array}\right]\begin{array}{l} L_1\rightarrow 1^{\text{a}}\ linha \\ L_2\rightarrow 2^{\text{a}}\ linha \\ L_3\rightarrow 3^{\text{a}}\ linha \end{array}$$

Primeira operação elementar: $L_2+(-1)L_1\rightarrow L_2$. Significa que adicionamos à segunda linha, L_2, (-1) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & a+2a^2 \end{array}\right] L_2+(-1)L_1\rightarrow L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \\ a & 1 & 0 & a+2a^2 \end{array}\right]$$

Segunda operação elementar: $L_3+(-a)L_1\rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, $(-a)$ vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \\ a & 1 & 0 & a+2a^2 \end{array}\right] L_3+(-a)L_1\rightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & -a & a^2 \end{array}\right]$$

Terceira operação elementar: $L_3+L_2\rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, 1 vezes a segunda linha, L_2, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & -a & a^2 \end{array}\right] L_3+L_2\rightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a & a^2-a \end{array}\right]$$

Igualando a zero, as expressões $a-1=0$ e $a^2-a=0$ na matriz aumentada, temos $a=0$ e $a=1$.

Primeira discussão: Para $a=0$, a matriz apresenta uma linha com zeros

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Logo é um sistema possível e indeterminado, **SPI**.

Segunda discussão: Para $a=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].\ \text{Sistema impossível, } \textbf{SI}.$$

Terceira discussão: Para $a \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$, é um sistema possível e determinado, **SPD**.

Exemplo 2.13 Discuta, em função dos parâmetros reais a e b, o sistema de equações lineares seguinte:

$$\begin{cases} 2x + y + w = 2 \\ 3x + 3y + az + 5w = 3 \\ 3x - 3z - 2w = b \end{cases}$$

Resolução: Consideremos a matriz aumentada (ampliada) do sistema e o consequente método de eliminação de Gauss, de acordo com a notação adoptada

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & a & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & b \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1^{\underline{a}}\ linha \\ L_2 \rightarrow 2^{\underline{a}}\ linha \\ L_3 \rightarrow 3^{\underline{a}}\ linha \end{array}$$

Primeira operação elementar: $1/2\, L_1 \rightarrow L_1$. Significa que multiplicamos primeira linha, L_1, para obtermos a nova primeira linha, L_1, com elemento redutor (pivot) 1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & a & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & b \end{array}\right] 1/2\, L_1 \rightarrow L_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 3 & a & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & b \end{array}\right]$$

Segunda operação elementar: $L_2 + (-3)L_1 \rightarrow L_2$. Significa que adicionamos à segunda linha, L_2, (-3) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 3 & a & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & b \end{array}\right] L_2 + (-3)L_1 \rightarrow L_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & a & \frac{7}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & b \end{array}\right]$$

Terceira operação elementar: $L_3 + (-3)L_1 \rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, (-3) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & a & \frac{7}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & b \end{array}\right] L_3 + (-3)L_1 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & a & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{7}{2} & b-3 \end{array}\right]$$

Quarta operação elementar: $L_3 + L_2 \rightarrow L_3$. Significa que adicionamos à terceira linha, L_3, 1 vezes a segunda linha, L_2, para obtermos a nova terceira linha, L_3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & a & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{7}{2} & b-3 \end{array}\right] L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & a & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & b-3 \end{array}\right]$$

Igualando a zero, as expressões $a-3=0$ e $b-3=0$ na matriz aumentada, temos $a=3$ e $b=3$.

Primeira discussão: Para $a=3$ e $b=3$, a matriz apresenta uma linha com zeros

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo é um sistema possível e indeterminado, **SPI**.
Segunda discussão: Para $a=3$ e $b\neq 3$, sistema impossível, **SI**.
Terceira discussão: Para $a\neq 3$, $b=3$ e $b\neq 3$, sistema possível e determinado, **SPD**.

2.7 Exercícios

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares, aplicando o método de eliminação de Gauss e classifique-os quanto ao seu conjunto de solução.

a) $\begin{cases} x+y-z+w=1 \\ x-y+z-w=0 \\ x+2y-z \quad\quad =1 \\ x-y-2z \quad\quad =1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=1 \\ \quad\quad x_2+3x_3+3x_4=2 \\ -x_1 \quad\quad +x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y+3z-w=1 \\ 4x-y+7z-7w=-5 \\ x+2y+z+2w=3 \end{cases}$

2. Resolva os sistemas de equações lineares seguintes, aplicando o método de eliminação de Gauss – Jordan:

a) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+5y+z=9 \\ x+4y-6z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=6 \\ 3x-y+2z=5 \\ 4y-2z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ 3x+3y-5z=1 \end{cases}$

3. Discuta, em função dos parâmetros reais a e b, os sistemas de equações lineares seguintes:

a) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-2y+3z=1 \\ x+2y+(a^2-3)z=a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=1-b \\ x+by+z=a \\ bx+y=b(1+2b) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+7z=-7 \\ 2x+3y+17z=-16 \\ x+2y+(a^2+1)z=3a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=b \\ ax+y+z=0 \end{cases}$

Capítulo 3 – Inversão de Matrizes

Este capítulo trata do cálculo da inversão de matrizes, ou seja, da matriz inversa, aplicando os métodos de eliminação de Gauss-Jordan (MEG-J) e o método de cofactores.

3.1 Matriz Inversa

Todo número real a, não nulo, possui um inverso (multiplicativo), ou seja, existe um número b, tal que $ab = ba = 1$. Este número é único e o denotamos por a^{-1}. Apesar da álgebra matricial ser semelhante à álgebra dos números reais, nem todas as matrizes A não nulas possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

De início, para que os produtos AB e BA estejam definidos e sejam iguais é preciso que as matrizes A e B sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já diferencia do caso dos números reais, pois todo número não nulo tem inverso.

Mesmo entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa, apesar do conjunto das que não tem inversa ser bem menor do que o conjunto das que tem.

Definição 3.1 Uma matriz quadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ é invertível ou não singular (regular), se existe uma matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n \qquad (3.1)$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de **inversa** de A. Se A não tem inversa, dizemos que A **é não invertível** ou **singular**.

Exemplo 3.1 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

A matriz B é a **inversa** de matriz A, pois $AB = BA = I_2$.

Quer dizer

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.1 Se uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ possui inversa, então a inversa é única.

Demonstração. Suponhamos que B e C sejam inversas de A. Então, $AB = BA = I_n = AC = CA$ e assim,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Denotamos a inversa de A, quando ela existe, por A^{-1}. Chama-se a atenção para o facto de que o índice superior -1, aqui, não significa uma potência, tão pouco uma divisão.

Assim como no caso da transposta, em que A^Tsignifica a transposta de A, aqui, A^{-1} significa a inversa de A.

3.1.1 Propriedades da Matriz Inversa

Teorema 3.2

(a) Se A é invertível, então A^{-1} também o é e

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

(b) Se $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$e $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ são matrizes invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

(c) Se $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ é invertível, então A^Ttambém é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Demonstração. Se queremos mostrar que uma matriz é a inversa de uma outra, temos que mostrar que os produtos das duas matrizes são iguais à matriz identidade.

(a) Uma matriz B é a inversa de A^{-1} se

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n;$$

Mas, como A^{-1} é a inversa de A, então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Como a inversa é única, então $B = A$ é a inversa de A^{-1}, ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Temos que mostrar que a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$, ou seja, mostrar que os produtos $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ são iguais à matriz identidade.

Mas, pelas propriedades (h) e (i) vem

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n;$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

(c) Queremos mostrar que a inversa de A^T é $(A^{-1})^T$. Pela propriedade (o), temos

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n;$$

$$(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

3.2 Método de Eliminação de Gauss-Jordan para o Cálculo da Inversa de uma matriz

O método consiste em justapor à matriz dos coeficientes a matriz identidade ou unidade, que através de operações elementares sucessivas, obtém-se primeiro, a matriz identidade e a seguir a matriz inversa.

Este algoritmo para obter a inversa de uma matriz chama-se método de eliminação de Gauss-Jordan que é a continuação do método de eliminação de Gauss, ou seja, o algoritmo

$$[A \mid I] \to \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \to [I \mid A^{-1}]$$

Exemplo 3.2. Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, aplicando o método de Gauss-Jordan.
O algoritmo é

$$[A \mid I] \to \cdots\cdots \to [I \mid A^{-1}]$$

Primeira operação elementar: $1/3\, L_1 \to L_1$. Significa que dividimos a primeira linha, L_1, por $1/3$, para ter o pivot igual a 1, escolhendo o elemento redutor (pivô), o da posição a_{11}.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] 1/3\, L_1 \to L_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Segunda operação elementar: $L_2 + (-4)L_1 \to L_2$. Significa que adicionamos à segunda linha, L_2, (-4) vezes a primeira linha, L_1, para obtermos a nova segunda linha, L_2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 + (-4)L_1 \to L_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right]$$

Terceira operação elementar: $3L_2 \to L_2$. Significa que multiplicamos a segunda linha, L_2, por 3.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right] 3L_2 \to L_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

Nota: A adição goza da propriedade comutativa, ou seja,

$$L_2 + (-4)L_1 \to L_2 = (-4)L_1 + L_2 \to L_2$$

Quarta operação elementar: $L_1 + (-5/3)L_2 \to L_1$. Significa que adicionamos à primeira linha, L_1, $(-5/3)$ vezes a segunda linha, L_2, para obtermos a nova primeira linha, L_1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right] L_1 + (-5/3)L_2 \to L_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

obtendo-se assim, primeiro, a matriz identidade e a seguir, a matriz inversa $[I \mid A^{-1}]$.

Podemos verificar este resultado, para nos certificarmos que não cometemos erros de cálculo, mediante as relações

$$AB = BA = I_n \text{ ou } \boldsymbol{A^{-1}A = AA^{-1} = I_n}, \text{ onde } B = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Daqui adiante, aplicaremos o algoritmo de Gauss-Jordan para o cálculo da inversa de uma matriz, apenas por notações já adoptadas anteriormente em **2.4.1.**

Exemplo 3.3 Calcular a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Resolução: Vamos justapor à matriz dos coeficientes a matriz identidade, $[A \mid I]$ou construir a matriz aumentada.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}]}, \text{ efectuando as operações elementares seguintes:}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 + (-2)L_1 \to L_2 \\ L_3 + (-1)L_1 \to L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 + 2L_2 \to L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] (-1)L_3 \to L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 + 3L_3 \to L_2 \\ L_1 + (-3)L_3 \to L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] L_1 + (-2)L_2 \to L_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]}_{[\boldsymbol{I} \ | \boldsymbol{A^{-1}}]}$$

Vamos verificar igualmente, esse resultado mediante as relações

$$AB = BA = I_n \text{ ou } \boldsymbol{A^{-1}A = AA^{-1} = I_n}, \text{ onde } B = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.4. Calcular, se existir, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolução: Vamos justapor à matriz dos coeficientes a matriz identidade, $[A \mid I]$,

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{[\boldsymbol{A} \ | \boldsymbol{I}]}$$, efectuando as operações elementares seguintes:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 + (-2)L_1 \to L_2 \\ L_3 + (-2)L_1 \to L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1)L_2 \to L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 + (-1)L_2 \to L_1 \\ L_3 + (-1)L_2 \to L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-1&1&0\\0&1&-2&2&-1&0\\0&0&5&-4&1&1\end{array}\right] 1/5\,L_3 \to L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-1&1&0\\0&1&-2&2&-1&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&-1&1&0\\0&1&-2&2&-1&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right] \begin{array}{c}L_2+2L_3\to L_2\\L_1+(-3)L_3\to L_1\end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{7}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&-2&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{7}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&0&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right]}_{[\boldsymbol{I}\ \mid \boldsymbol{A^{-1}}]}$$

Verifiquemos o resultado obtido mediante as relações

$$AB = BA = I_n \text{ ou } \boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{AA^{-1}} = \boldsymbol{I_n}, \text{ onde } B = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{7}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&4\\2&3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&4\\2&3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{7}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Portanto, a inversa de A é

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

Exemplo 3.5 Calcular, se existir, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

Resolução: Vamos justapor à matriz dos coeficientes a matriz identidade, $[A \mid I]$,

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{[\boldsymbol{A} \ \mid \boldsymbol{I}]}$$, efectuando as seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] 1/2\, L_1 \to L_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 + (-6)L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -8 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -8 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] -1/2\, L_2 \to L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -8 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -8 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 + (-\ 5/2)L_2 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & -13/4 & 5/4 & 1 \end{array}\right] (-\ 1/23)L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 15/23 & -4/23 & 6/23 \\ 0 & 0 & 1 & 13/92 & -5/92 & -1/23 \end{array}\right] L_1 + (-2)L_3 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 5/23 & 5/46 & 2/23 \\ 0 & 1 & 0 & 15/23 & -4/23 & 6/23 \\ 0 & 0 & 1 & 13/92 & -5/92 & -1/23 \end{array}\right] L_1 + (-\,1/2)L_2 \to L_1$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/46 & 9/46 & -1/23 \\ 0 & 1 & 0 & 15/23 & -4/23 & 6/23 \\ 0 & 0 & 1 & 13/92 & -5/92 & -1/23 \end{array}\right]}_{[\boldsymbol{I} \ \mid \boldsymbol{A}^{-1}]}$$

Verifiquemos o resultado obtido mediante as relações

$$AB = BA = I_n \text{ ou } \boldsymbol{A^{-1}A = AA^{-1} = I_n}, \text{ onde } B = A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -5/46 & 9/46 & -1/23 \\ 15/23 & -4/23 & 6/23 \\ 13/92 & -5/92 & -1/23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5/46 & 9/46 & -1/23 \\ 15/23 & -4/23 & 6/23 \\ 13/92 & -5/92 & -1/23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/46 & 9/46 & -1/23 \\ 15/23 & -4/23 & 6/23 \\ 13/92 & -5/92 & -1/23 \end{bmatrix}$

Exemplo 3.6. Calcular, se existir, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Vamos justapor à matriz dos coeficientes a matriz identidade, $[A \mid I]$,

$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{[\boldsymbol{A} \ \mid \boldsymbol{I}]}$, efectuando as operações elementares seguintes:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 + (-1)L_1 \to L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 + (-2)L_2 \to L_1 \\ L_3 + (-1)L_2 \to L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade e portanto, **não é invertível.**

3.3 Regressão da inversa para a matriz inicial

Podemos também, aplicar o algoritmo de Gauss-Jordan para o cálculo da matriz A, conhecendo a sua inversa.

Exemplo 3.7 Conhecendo a matriz inversa de A, (no exemplo 3.5)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-5/46 & 9/46 & -1/23\\ 15/23 & -4/23 & 6/23\\ 13/92 & -5/92 & -1/23\end{bmatrix}$$, encontre a matriz A.

O algoritmo é

$$[I\ |A^{-1}] \to \cdots\cdots \to [A\ |\ I]$$

Resolução: Neste caso, vamos justapor à matriz identidade a matriz dos coeficientes da inversa, $[I|A^{-1}]$.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -5/46 & 9/46 & -1/23\\ 0 & 1 & 0 & 15/23 & -4/23 & 6/23\\ 0 & 0 & 1 & 13/92 & -5/92 & -1/23\end{array}\right]}_{[I\ \ |A^{-1}]}$$, efectuando as seguintes operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -5/46 & 9/46 & -1/23\\ 0 & 1 & 0 & 15/23 & -4/23 & 6/23\\ 0 & 0 & 1 & 13/92 & -5/92 & -1/23\end{array}\right] (-46/5)\,L_1 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-46/5 & 0 & 0 & 1 & -9/5 & 2/5\\ 0 & 1 & 0 & 15/23 & -4/23 & 6/23\\ 0 & 0 & 1 & 13/92 & -5/92 & -1/23\end{array}\right] L_2 + (-15/23)\,L_1 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-46/5 & 0 & 0 & 1 & -9/5 & 2/5\\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 13/92 & -5/92 & -1/23\end{array}\right] L_3 + (-13/92)\,L_1 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-46/5 & 0 & 0 & 1 & -9/5 & 2/5\\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 13/10 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/10\end{array}\right] L_3 + (-1/5)\,L_2 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-46/5 & 0 & 0 & 1 & -9/5 & 2/5\\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1/10 & -1/5 & 1 & 0 & 0 & -1/10\end{array}\right] -10L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-46/5 & 0 & 0 & 1 & -9/5 & 2/5\\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] L_1 + (-2/5)\,L_3 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-44/5 & -4/5 & 4 & 1 & -9/5 & 0\\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] L_1 + 9/5\,L_2 \to L_1$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{[\boldsymbol{A} \ | \ \boldsymbol{I}]}$$

Portanto, regredimos a matriz A, ou seja, a matriz inicial conforme exemplo 3.5.

Se um sistema linear $AX = B$ tem **o número de equações igual ao número de incógnitas**, então o conhecimento da inversa da matriz do sistema A^{-1}, reduz o problema de resolver o sistema a simplesmente fazer um produto de matrizes.

Teorema 3.3 Seja A uma matriz do tipo $n \times n$.

(a) O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, e só se, A é invertível. Neste caso, a solução é $X = A^{-1}B$;

(b) O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e só se, A é singular (não invertível).

Demonstração:

(a) Se a matriz A é invertível, então multiplicando $AX = B$ por A^{-1} à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

(b) Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial. Pelo ponto anterior, esta será a única solução, e só se, A é invertível.

Vamos ver no próximo exemplo que se conhecemos a inversa de uma matriz, então a produção de uma indústria em vários períodos pode ser obtida apenas multiplicando-se a inversa por matrizes colunas que contenham a arrecadação e as quantidades dos insumos (inputs) utilizados em cada período.

Exemplo 3.6. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufactura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z em Euros (EU) é 2,00, 3,00 e 5,00, respectivamente. Como vimos no Exemplo 1.4.5, usando matrizes o esquema de produção pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} \\ \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} \overbrace{\begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}} = A \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

No exemplo 3.4. Calculamos a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

que é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se a inversa da matriz A, podemos saber a produção da indústria sempre que soubermos quanto foi gasto do insumo A, do insumo B e da arrecadação.

(a) Se em um período com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufacturada com 1kg de A e 2kg de B, essa indústria arrecadou EU 2 500, 00 então, para determinar quantos kg de cada um dos produtos , X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos A^{-1} pela matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{r} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Portanto, foram produzidos 700 kg do produto X, 200 kg de Y e 100 kg de Z.

(b) Se em outro período com a venda de toda a produção de X, Y e Z, manufacturada com 1kg de A e 2,1kg de B, essa indústria arrecadou EU 2900, 00, então para determinar quantos kg de cada um dos produtos de X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos A^{-1} pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Portanto, foram produzidos 500 kg do produto X, 300 kg de Y e 200 kg de Z.

3.4 Exercícios:

Efectue a regressão de matrizes inversas para as iniciais, dos exemplos 3.1, 3.2 e 3.3.

Capítulo 4 – Determinantes

4.1 Introdução

Estamos todos familiarizados com funções do tipo $f(x) = x^2$ ou $f(x) = \cos x$. Estas funções associam a um número real da variável x um número real $y = f(x)$, por isso, são denominadas funções reais de variável real (f.r.v.r.), $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Neste capítulo, estuda-se a "função determinante", que é uma função real de variável matricial no sentido que associa a uma matriz quadrada um número real $y = f(X)$.

O estudo dos determinantes tem aplicações importantes, em particular, nos sistemas de equações lineares e na inversa de matrizes.

4.2 Permutações de subconjuntos de $\mathbb{N}$

Um dos objectivos deste capítulo é a obtenção de fórmulas ou métodos para o cálculo de determinantes. Para isso, é necessário fazer referência ao conceito de permutação.

Definição 4.1: Chama-se permutação de um conjunto de números naturais $A = \{1, 2, \dots, n\}$ a qualquer conjunto que se pode construir com os n elementos, diferindo uns dos outros pela ordem dos seus elementos.

De notar que cada permutação de um conjunto de números naturais $A = \{1, 2, \dots, n\}$ é uma aplicação bijectiva de A em A.

Observação: Uma vez que o número de elementos do conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$ é $\#A = n$, o número de permutações de A é dado por $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Exemplo 4.1. Represente as permutações do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Resolução: Como $\#A = 3$, temos $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutações distintas no conjunto

$$A = \{(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1)\}.$$

Um método conveniente para sistematicamente listar as permutações de um dado conjunto é através de uma árvore de permutações, por exemplo, para $A = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & 1 & & \quad & & 2 & & \quad & & 3 & \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
3 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 1
\end{array}$$

4.3 Paridade de uma permutação

À permutação em que os elementos se dispõem na ordem natural, dá-se o nome de permutação principal. Se numa permutação dois elementos não estão dispostos na ordem natural, diz-se que constituem uma inversão (por exemplo, na permutação $(1,3,2)$ os elementos 3 e 2 constituem uma inversão).

O número total de inversões pode ser calculado da seguinte maneira:

(a) Fixar primeiro elemento da permutação e contar quantos elementos são mais pequenos que este;
(b) Fixar o segundo elemento da permutação e contar quantos elementos à direita são mais pequenos que este;
(c) Continuar até ao penúltimo elemento.

A soma destes números será o número de inversões na permutação.

Uma permutação será par ou ímpar consoante for par ou ímpar a soma das suas inversões, relativamente à sequência natural (até se obter a sequência natural).

Teorema de Bézout: Trocando entre si dois quaisquer elementos de uma permutação, a mesma muda de paridade.

Exemplo 4.2: Determine o número de inversões na permutação $(6,1,3,4,5,2)$.

Resolução: O primeiro elemento da permutação é 6. A partir deste, vamos contar quantos são os elementos mais pequenos que 6. São 5, designadamente, 1,3,4,5,2.

O segundo elemento da permutação é 1. A partir deste, vamos também, contar quantos os elementos mais pequenos que 1. Não há nenhum. Portanto, é zero.

E assim sucessivamente.

Assim, o número de inversões é: $5+0+1+1+1=8$. A permutação $(6,1,3,4,5,2)$ é par.

Exemplo 4.3: Represente as paridades das permutações do conjunto $A=\{1,2,3\}$.

Resolução: São 6 permutações distintas no conjunto A, nomeadamente

$$A=\{(1,2,3);(1,3,2);(2,1,3);(2,3,1);(3,1,2);(3,2,1)\}.$$

Assim,

$(1,2,3)\longrightarrow$ 0 inversões $\longrightarrow$ permutação par (permutação principal);
$(1,3,2)\longrightarrow$ 1 inversão $\longrightarrow$ permutação ímpar;
$(2,1,3)\longrightarrow$ 1 inversão $\longrightarrow$ permutação ímpar;
$(2,3,1)\longrightarrow$ 2 inversões $\longrightarrow$ permutação par;
$(3,1,2)\longrightarrow$ 2 inversões $\longrightarrow$ permutação par;
$(3,2,1)\longrightarrow$ 3 inversões $\longrightarrow$ permutação ímpar;

Observação: Com n elementos obtém-se $n!$ permutações, sendo $\frac{n!}{2}$ pares e $\frac{n!}{2}$ ímpares.

No exemplo 4.3, temos 3 elementos, obtendo-se $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutações, sendo $\frac{6}{2} = 3$ pares e $\frac{6}{2} = 3$ ímpares.

4.4 Termo de uma Matriz Quadrada

Termo de uma matriz quadrada de ordem n é qualquer produto de n elementos da matriz, onde esteja envolvido apenas um e um só elemento de cada linha e de cada coluna. Assim, por exemplo, numa matriz quadrada de ordem 3, podemos definir os seguintes termos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ onde } \begin{array}{ll} \bullet\ a_{11}a_{22}a_{33} \longrightarrow \text{termo principal} & \bullet\ a_{12}a_{23}a_{31} \\ \bullet\ a_{11}a_{23}a_{32} & \bullet\ a_{13}a_{21}a_{32} \\ \bullet\ a_{12}a_{21}a_{33} & \bullet\ a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Numa matriz quadrada de ordem 2, apenas podemos definir os seguintes termos $a_{11}a_{22}$ e $a_{12}a_{21}$.

Estes dois exemplos, ressaltam o facto de numa matriz de ordem n ter $n!$ termos.

São todos os produtos da forma $a_{1j_1}a_{2j_2\dots}a_{nj_n}$, onde $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ é uma permutação do conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

4.5 Paridade de um termo

Um termo, de uma matriz quadrada, será par ou ímpar consoante for par ou ímpar a soma das inversões efectuadas aos índices das linhas e aos índices das colunas.
Se tivermos o cuidado de formar os termos de modo que os índices das linhas fiquem ordenados, apenas temos que nos preocupar com as inversões efectuadas aos índices das colunas. Como no caso da matriz A anterior.

Por exemplo, o termo $\bullet\ a_{11}a_{23}a_{32} \xrightarrow[\text{Total=1} \Rightarrow \text{termo ímpar}]{\text{inversões das linhas=0} \quad \text{inversões das colunas=1}}$

Se o termo for par vem afectado de sinal $+$, se for ímpar do sinal de $-$. Portanto, como $a_{11}a_{23}a_{32}$ é ímpar, escreve-se $-a_{11}a_{23}a_{32}$.

Exemplo 4.4 Calcule a paridade dos termos de cada uma das matrizes seguintes:

a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Resolução:

a)

Termos	**Permutação associada**	**Paridade**	**Paridade do termo**
$a_{11}a_{22}$	$(1, 2)$	Par	$+a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	$(2, 1)$	Ímpar	$-a_{12}a_{21}$

b)

Termos	Permutação associada	Paridade	Paridade do termo
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$(1,2,3)$	Par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	$(1,3,2)$	Ímpar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	$(2,1,3)$	Ímpar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$(2,3,1)$	Par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$(3,1,2)$	Par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	$(3,2,1)$	Ímpar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

4.6 Determinante de uma matriz

Estamos agora em condição de definir a função determinante, que é denotada por det.

Definição 4.2: O número $\det(A) = |A|$ é chamado determinante da matriz quadrada A e define-se como sendo a soma de todos os termos de A, afectados do sinal $(+)$ ou $(-)$ consoante se trate de um termo par ou de um termo ímpar.

4.7 Determinantes de 1ª, 2ª e 3ª ordem

Relativamente a dimensão da matriz, podemos ter:

- Matrizes de ordem (1×1);
- Matrizes de ordem (2×2);
- Matrizes de ordem (3×3);
- Matrizes de ordem n.

Definição 4.3: Dada uma matriz com um único elemento, $A = [a]$, definimos o **determinante** de A como

$$\det(A) = a$$

Exemplo 4.5 O determinante da matriz

$$A = [3], \text{ é}$$

$$\det(A) = \det[3] = 3$$

Definição 4.4: Dada uma matriz quadrada $n \times n$, $A_{2\times 2}$, definimos o **determinante** de A como

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 4.6 Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \text{ seu determinante é}$$

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = (3 \times 7) - (5 \times 4) = 21 - 20 = 1$$

Para matrizes de ordem $(\mathbf{3} \times \mathbf{3})$ com elementos genéricos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$, podemos usar uma das seguintes

Regras práticas:

a) Adicionar à direita as duas primeiras colunas ou inferiormente as duas primeiras linhas e formar os termos pares e ímpares de acordo com a inclinação das diagonais. Os termos positivos são o produto dos elementos da diagonal principal e das duas paralelas a esta e os termos negativos são o produto dos elementos da diagonal secundária e das duas paralelas a esta.

b) **Regra de Sarrus**:
Os **termos positivos** são o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elementos que formam os triângulos de bases paralelas à diagonal principal.
Os **termos negativos** são o produto dos elementos da diagonal secundária e os produtos dos elementos que formam os triângulos de bases paralelas à diagonal secundária.

Exemplo 4.7 Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolução 1: Regra a) – Podemos adicionar à direita as duas primeiras colunas ou inferiormente as duas primeiras linhas e formar os termos pares e ímpares de acordo com a inclinação das diagonais. Neste exemplo concreto, adicionamos à direita as duas primeiras colunas.

$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right] \text{ ou } \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right|$$

$$|A| = (1 \times 0 \times 6) + (4 \times 5 \times 7) + (2 \times 2 \times 0) - (2 \times 0 \times 7) - (1 \times 5 \times 0) - (4 \times 2 \times 6)$$
$$\det(A) = 0 + 140 + 0 - 0 - 0 - 48$$
$$\det(A) = 140 - 48$$
$$\det(A) = 92$$

Resolução 2: Regra de Sarrus b)

$$|A| = (1 \times 0 \times 6) + (4 \times 5 \times 7) + (2 \times 0 \times 2) - (2 \times 0 \times 7) - (2 \times 4 \times 6) - (5 \times 0 \times 1)$$
$$\det(A) = 0 + 140 + 0 - 0 - 48 - 0$$
$$\det(A) = 140 - 48$$
$$\det(A) = 92$$

Para matrizes de ordem superior à terceira não é viável usar a definição de determinante (por exemplo, no caso (4×4) temos $4! = 24$ termos, 12 pares e 12 ímpares). Nestes casos, existem métodos mais eficazes para o cálculo de determinante.

4.8. Sub-matriz. Menor do elemento

Definição 4.4: Uma sub-matriz $p \times q$ de uma matriz $A_{m\times n}$, (com $p \leq m$ e $q \leq n$), é a matriz formada pelos elementos comuns a p linhas e q colunas, não necessariamente consecutivas, da matriz A.

Definição 4.5: Dada uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, define-se o menor do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, como a submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de A obtida por eliminação da $\mathrm{i}-$ésima linha e da $\mathrm{j}-$ésima coluna de A.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4.9 Cofactor

Definição 4.6: Dada uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, define-se o cofactor (ou complemento algébrico) do elemento a_{ij}, e escrevemos $\mathrm{cof}(a_{ij})$, como

$$\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{A_{ij}}),$$

ou seja, $+$ ou $-$ (conforme $i+j$ seja par ou ímpar)

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

o determinante do menor do elemento a_{ij}.

Exemplo 4.8 Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

O cofactor do elemento a_{32} é

$$\begin{aligned} \mathrm{cof}(a_{32}) &= (-1)^{3+2}\det(\boldsymbol{A_{32}}) \\ &= (-1)^5\det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -[(1\times 5)-(2\times 2)] = -5+4 = -1 \end{aligned}$$

O cofactor do elemento a_{13} é

$$\operatorname{cof}(a_{13}) = (-1)^{1+3}\det(\boldsymbol{A}_{13}) = 1 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

4.10 Determinante de Ordem *n*. Fórmula de Laplace. Expansão em Cofactores

O determinante de uma matriz de ordem *n*, pode ser encontrado de maneiras diferentes, mas ressaltamos aqui, a Fórmula de Laplace, conforme a definição a seguir:

Definição 4.6: Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ tem um determinante igual à soma dos produtos dos elementos de uma qualquer linha ou coluna, pelos seus cofactores.
Ou seja, o determinante da matriz A pode ser calculado em termos da **expansão em cofactores** da i − ésima linha

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}(a_{ij}),$$

ou da j − ésima coluna

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}(a_{ij})$$

Exemplo 4.9 Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \text{ recorrendo à fórmula de Laplace.}$$

Resolução: Calculemos o determinante em termos da expansão em cofactores, escolhendo, por exemplo, a 1ª linha:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\operatorname{cof}(a_{ij})$$
$$= a_{11}\operatorname{cof}(a_{11}) + a_{12}\operatorname{cof}(a_{12}) + a_{13}\operatorname{cof}(a_{13})$$
$$= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det(\boldsymbol{A}_{11}) + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\det(\boldsymbol{A}_{12}) + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\det(\boldsymbol{A}_{13})$$
$$= a_{11}\cdot(-1)^{2}\cdot\det(\boldsymbol{A}_{11}) + a_{12}\cdot(-1)^{3}\cdot\det(\boldsymbol{A}_{12}) + a_{13}\cdot(-1)^{4}\cdot\det(\boldsymbol{A}_{13})$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 1\times 1\times\det\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + 4\times(-1)\times\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + 2\times 1\times\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = (1\times 1\times 0) + 4\times(-1)[(2\times 6) - (5\times 7)] + (2\times 1\times 0)$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 0 + (-4)(12 - 35) + 0$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = (-4)(-23)$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 92.$$

Nota: O determinante de uma matriz A pode ser calculado em termos da **expansão em cofactores (Fórmula de Laplace),** escolhendo-se qualquer linha ou qualquer coluna e o resultado mantém-se inalterável.

Exemplo 4.10 Calcular o determinante da matriz **(**anterior)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \text{ recorrendo à fórmula de Laplace.}$$

Resolução: Calculemos o determinante em termos da expansão em cofactores, desta vez, escolhendo a 3ª coluna:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{3} a_{i3}\operatorname{cof}(a_{ij})$$
$$= a_{13}\operatorname{cof}(a_{13}) + a_{23}\operatorname{cof}(a_{23}) + a_{33}\operatorname{cof}(a_{33})$$
$$= a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{13}) + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{23}) + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{33})$$
$$= a_{13} \cdot (-1)^{4} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{13}) + a_{23} \cdot (-1)^{5} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{23}) + a_{33} \cdot (-1)^{6} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{33})$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 2 \times 1 \times \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + 5 \times (-1) \times \det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + 6 \times 1 \times \det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = (2 \times 1 \times 0) + 5 \times (-1) \times [(1 \times 0) - (4 \times 7)] + 6 \times 1 \times [(1 \times 0) - (4 \times 2)]$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 0 + (-5) \times (0 - 28) + 6 \times (-8)$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = (-5) \times (-28) + 6 \times (-8)$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 92$$

A Fórmula de Laplace é particularmente, útil quando a matriz tem muitos zeros. Deve ter-se o cuidado de, na expansão em cofactores, escolher em cada passo a linha ou coluna com maior número de zeros, de modo a reduzir o esforço de cálculo.

Exemplo 4.11 Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução: Identifiquemos primeiro, a linha ou coluna com maior número de zeros. A 4ª linha e a 4ª coluna ajudam-nos a reduzir o esforço de cálculo. Definamos o complemento algébrico do elemento $a_{43} = 2$, ou seja, o elemento da 4ª linha e 3ª coluna:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{4} a_{4j}\operatorname{cof}(a_{ij})$$
$$= a_{43}\operatorname{cof}(a_{43}) = a_{43} \cdot (-1)^{4+3} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{43}) = a_{43} \cdot (-1)^{7} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{43})$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 2 \times (-1) \times \det\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Escolhemos agora, o complemento algébrico do elemento $a_{13} = 2$:

$$\det(\boldsymbol{A}) = (-2) \times 2 \times \det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = (-2) \times 2 \times [(1 \times 3) - (4 \times 2)]$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = (-2) \times 2 \times [3 - 8]$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = (-2) \times 2 \times (-5)$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 20.$$

Exemplo 4.12 Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução: Calculemos o determinante em termos da expansão em cofactores, escolhendo, por exemplo, a 2ª coluna:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{cof}(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{4} a_{4j}\mathrm{cof}(a_{ij})$$
$$= a_{12}\mathrm{cof}(a_{12}) + a_{22} \cdot \mathrm{cof}(a_{22}) + a_{32}\mathrm{cof}(a_{32}) + a_{42}\mathrm{cof}(a_{42})$$
$$a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{12}) + a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{22}) + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{32}) + a_{42} \cdot (-1)^{4+2} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{42})$$
$$a_{12} \cdot (-1)^{3} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{12}) + a_{22} \cdot (-1)^{4} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{22}) + a_{32} \cdot (-1)^{5} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{32}) + a_{42} \cdot (-1)^{6} \cdot \det(\boldsymbol{A}_{42})$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 0$$

Escolhemos os complementos algébricos dos elementos a_{32} do menor de A_{12}, a_{21} do menor de A_{22} e a_{32} do menor de A_{32}, respectivamente.

$$\det(\boldsymbol{A}) = (-5) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + (-3) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 10 \cdot 0 + (-8) \cdot [(3 \times 0) - (2 \times 2)] + 6 \cdot (-2)$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = [(-8) \cdot (-4) - 12]$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 32 - 12$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = 20.$$

4.10.1 Propriedades dos determinantes

Sendo A e B matrizes quadradas de ordem *n*, demonstra-se que

1. $\det(A^T) = \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Note bem: Em geral, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
3. $\det(A^k) = (\det(A))^k, \forall\, k \in \mathbb{N}$
4. Se A tem duas linhas ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$
5. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$
6. Uma matriz quadrada é regular (não singular) se e somente se, $\det(A) \neq 0$. Se A é invertível, então
   $$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$
   e (de 3.)
   $$\det(A^k) = (\det(A))^k, \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

7. Se numa linha ou uma coluna da matriz A cada elemento é a soma de m parcelas, então $\det(A)$ é a soma de m determinantes que se obtêm substituindo os elementos dessa linha ou coluna, sucessivamente, pelas diversas parcelas e mantendo as outras linhas ou colunas inalteradas.

Exemplo 4.13 Simplificar a expressão seguinte, aplicando as propriedades dos determinantes

$$\frac{\det(ABA^T)}{\det(A^2B^{-1})}$$

Resolução: Vamos combinar as propriedades acima enumeradas, resultando

$$\frac{\det(ABA^T)}{\det(A^2B^{-1})} = \frac{\det(AB)\det(A^T)}{\det(A^2)\det(B^{-1})} = \frac{\det(A)\det(B)\det(A)}{\det(A)^2\det(B)^{-1}} = \frac{\det(A)^2\det(B)}{\det(A)^2\det(B)^{-1}}$$
$$= \frac{\det(B)}{\det(B)^{-1}} = \det(B)\det(B) = \det(B)^2$$

Exemplo 4.14 Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ 2\cos(t) - 3\mathrm{sen}(t) & 2\mathrm{sen}(t) + 3\cos(t) \end{bmatrix}, \text{ aplicando propriedades.}$$

Resolução: Recorrendo à propriedade (7), vem

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ 2\cos(t) - 3\mathrm{sen}(t) & 2\mathrm{sen}(t) + 3\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ 2\cos(t) & 2\mathrm{sen}(t) \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -3\mathrm{sen}(\mathrm{t}) & 3\cos(t) \end{bmatrix}$$

Dado que a primeira matriz tem duas linhas proporcionais, o seu determinante é nulo. Temos então

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -3\mathrm{sen}(\mathrm{t}) & 3\cos(t) \end{bmatrix} = 3\cos^2(t) + 3\mathrm{sen}^2(t)$$

$$\det(A) = 3.$$

$$\because \ \mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

4.10.2 Determinante de uma Matriz Triangular

1. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
2. Se a matriz B se obtém da matriz A trocando entre si duas linhas ou duas colunas de A, então
$$\det(A) = -\det(B)$$
3. O Se a matriz B se obtém da matriz A multiplicando uma linha ou uma coluna de A por um escalar $\alpha \neq 0$, então
$$\det(A) = \frac{1}{\alpha}\det(B)$$

Em particular, sendo A de ordem n,
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

4. Se a matriz B se obtém da matriz A somando a uma linha ou uma coluna de A um múltiplo escalar de uma outra linha ou coluna, então
$$\det(A) = \det(B)$$

Com base nas operações elementares sobre linhas, é possível transformar uma matriz, A, numa matriz triangular, B, cujo determinante é fácil de calcular e relacionar com o determinante de A. Este método de cálculo do determinante de uma matriz é designado por método de condensação ou escalonamento ou ainda método de eliminação de Gauss.

Exemplo 4.15 O determinante de matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$ recorrendo, por exemplo, à expansão em cofactores da 3ª linha, é

$$\det(\mathrm{A}) = \det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \times 1 \times \det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\det(A) = 2 \times [(1 \times 3) - (4 \times 0)]$$
$$\det(A) = 6.$$

Mas facilmente, reconhecendo que A é uma matriz triangular, o cálculo do determinante é imediato a partir do produto dos elementos da diagonal principal

$$\det(\mathrm{A}) = \det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \times 3 \times 2$$
$$\det(A) = 6.$$

Exemplo 4.16 Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$, recorrendo ao método de condensação.

Resolução: Pretende-se a partir da aplicação sucessiva das operações elementares e das propriedades dos determinantes, encontrar uma matriz triangular superior e efectuar o produto dos elementos da diagonal principal.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_4 \leftrightarrow L_1$$

$$= (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ L_4 - 2L_1 \to L_4 \end{matrix}$$

$$= (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$= (-1) \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} L_4 + 2L_3 \to L_4$$

$$= (-1) \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1) \times (-1) \times [1 \times (-3) \times (-1) \times 10]$$

$$\det(A) = 30.$$

4.11 Aplicações dos Determinantes

4.11.1 Cálculo da Matriz Inversa

A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, é invertível se, e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Neste caso, a inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observe que o cálculo fornece uma regra para se encontrar a inversa de uma matriz A de ordem 2×2, procedendo da seguinte forma:

Troca-se a posição dos elementos da diagonal principal, troca-se o sinal dos elementos da diagonal secundária e divide-se todos os elementos pelo determinante de A.

Exemplo 4.17 Considere o sistema de equações lineares de 2 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}$$

A matriz deste sistema é

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Se $\det(A) \neq 0$, então a solução do sistema é

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} dg - bh \\ -cg + ah \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} det \begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\det\begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

Esta é a chamada **Regra de Cramer** para sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.

Para sistemas de n equações e n incógnitas (**Regra de Cramer):**

Seja A uma matriz regular (não singular), isto é, $car(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

A solução do sistema de equações lineares $AX = B$ é dado por

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} (\text{cof}A)^T B$$

Isto é, sendo $X = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$ e $B = [b_1 \quad \cdots \quad b_n]^T$, tem-se

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A_{ij}\, b_i = \frac{\det B_j}{\det A}$$

onde B_j é a matriz obtida de A substituindo a coluna j de A pela matriz coluna B dos termos independentes.

Exemplo 4.18 Resolva o sistema de equações lineares seguinte, aplicando a regra de Cramer:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Resolução: Formemos a matriz dos coeficientes do sistema e encontremos o $\det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} |A| &= (1 \times 1 \times (-1)) + ((-1) \times (-1) \times 3) + (1 \times 2 \times (-1)) - (1 \times 1 \times 3) \\ &\quad - (1 \times (-1) \times (-1)) - ((-1) \times 2 \times (-1)) \\ \det(A) &= -1 + 3 - 2 - 3 - 1 - 2 \\ \det(A) &= -9 + 3 \\ \det(A) &= -6 \neq 0 \ \Rightarrow A \text{ é não singular} \end{aligned}$$

A solução do sistema é:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2 \ \text{ e}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Portanto, $X = [1 \quad 2 \quad 3]^T$. Verifique a solução!

4.11.2 Cálculo da Matriz Inversa pelo Método de Cofactores

Dada uma matriz A de ordem n, chama-se **matriz adjunta de $\boldsymbol{A}$**, e denota-se por adj$\boldsymbol{A}$**,** à matriz de ordem n

$$\text{adj}\boldsymbol{A} = \left[(-1)^{i+j}\det\boldsymbol{A_{ij}}\right]$$

onde $\boldsymbol{A_{ij}}$ é o menor – ij da matriz A, ou seja, os elementos de adj$\boldsymbol{A}$ são os complementos algébricos de A.

Se a matriz A é quadrada e não singular, isto é, determinante de A é diferente de zero, $\det(A) \neq 0$, sua inversa A^{-1} pode encontrar-se da seguinte forma:

$$A^{-1} = \frac{(\text{cof}A)^T}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}(\text{adjA})$$

Passos para o cálculo:

1. Encontrar o determinante de A. Se é diferente de zero, proceda-se ao segundo passo;
2. Determinar cada elemento a_{ij} de A por seu cofactor para obter a matriz dos cofactores;
3. Transpor a matriz dos cofactores para obter a matriz adjunta;
4. Dividir cada elemento da matriz adjunta por $\det(A)$.

Nota: Um cofactor calcula-se, escolhendo um elemento de uma matriz e multiplicando (-1), elevado ao número da linha mais o número da coluna do elemento escolhido, pelo determinante que resulta subtraindo a linha e a coluna em que esse elemento se insere.

Exemplo 4.19 Calcule a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ pelo método de cofactores.}$$

Resolução (Passo 1): Vamos encontrar o $\det(A)$.

$$\det(A) = \det\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$|A| = (1 \times 0 \times 2) + ((-1) \times 1 \times 3) + (2 \times 2 \times (-1)) - (2 \times 0 \times 3) - (1 \times 1 \times (-1)) - ((-1) \times 2 \times 2)$$

$$\det(A) = 0 - 3 - 4 - 0 + 1 + 4$$

$$\det(A) = -7 + 5$$

$$\det(A) = -2 \neq 0 \ \Rightarrow A \text{ é não singular.}$$

(Passo 2): Vamos determinar cada elemento a_{ij} de A por seu cofactor para obter a matriz dos cofactores.

$$\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad \det(A_{12}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2$$
$$\det(A_{21}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad \det(A_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2$$
$$\det(A_{31}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \det(A_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Afectemos o sinal $+$ ou $-$ (conforme $i + j$ seja par ou ímpar) aos valores obtidos do menor ij da matriz A, isto é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

A matriz dos cofactores,

$$\mathrm{cof}A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$$

(Passo 3): Transponhamos a matriz dos cofactores para obter a matriz adjunta.

$$\mathrm{adjA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Passo 4): Dividamos cada elemento da matriz adjunta de A por $\det(\mathrm{A})$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, verifiquemos o resultado mediante as relações

$$\boldsymbol{A^{-1}A = AA^{-1} = I_n}$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular não só a inversa de uma matriz (regular ou não singular) mas também encontrar as entradas concretas dessa inversa. A entrada (i, j) da matriz A^{-1} é dada por

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{1}{\det(A)}((-1)^{j+i}\det A_{j,i})$$

Exemplo 4.20. Encontre as entradas (1,1), (2,3) e (1,2) da matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Entrada (1,1)

$$\det(A) = -3 \neq 0 \;\Rightarrow A \text{ é não singular.}$$
$$(A^{-1})_{1,1} = \frac{1}{-3}((-1)^2\det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix})$$
$$(A^{-1})_{1,1} = \frac{1}{-3}\,[(5 \times 9) - (6 \times 8)]$$
$$(A^{-1})_{1,1} = \frac{1}{-3}(45 - 48)$$
$$(A^{-1})_{1,1} = 1$$

Resolução: Entrada (2,3)

$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-3}((-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix})$$
$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-3}\,(-1)[(1 \times 6) - (0 \times 4)]$$
$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-3} \times (-6)$$

A entrada $(A^{-1})_{2,3} = 2$

Resolução: Entrada (1,2)

$$(A^{-1})_{1,2} = \frac{1}{-3}((-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix})$$
$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-3}\,(-1)[(0 \times 9) - (0 \times 8)]$$
$$(A^{-1})_{1,2} = 0$$

A entrada $(A^{-1})_{1,2} = 0$

Exemplo 4.21 No exemplo 4.19, **c**alculamos a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ que é: } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Confirmemos então, as entradas (1,1), (2,3) e (1,2) da matriz inversa de A com $\det(A) = -2 \neq 0 \;\Rightarrow A$ é não singular.

Resolução: Entrada (1,1)

$$(A^{-1})_{1,1} = \frac{1}{-2}((-1)^2\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix})$$

$$(A^{-1})_{1,1} = \frac{1}{-2}\,[(0 \times 2) - (1 \times (-1))]$$
$$(A^{-1})_{1,1} = \frac{1}{-2}(0 + 1)$$
$$(A^{-1})_{1,1} = -\frac{1}{2}$$

Resolução: Entrada (2,3)

$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-2}((-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix})$$
$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-2}\,(-1)[(1 \times 1) - (2 \times 2)]$$
$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-2} \times (-1)(1 - 4)$$
$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{-2} \times (-1)(-3)$$
$$(A^{-1})_{2,3} = -\frac{3}{2}$$

Resolução: Entrada (1,2)

$$(A^{-1})_{1,2} = \frac{1}{-2}((-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix})$$
$$(A^{-1})_{1,2} = \frac{1}{-2}\,(-1)[((-1) \times 2) - (2 \times (-1))]$$
$$(A^{-1})_{1,2} = \frac{1}{-2}\,(-1)[(-2) - (-2)]$$
$$(A^{-1})_{1,2} = 0$$

4.12 Exercícios

Faça a transcrição, em papel A4, de exemplos de determinantes tratados nesse Capítulo.

Bibliografia

[1] ***Matemática – Álgebra Linear* (1996)*, volume 1, Matrizes e Determinantes, nº 5*.
Ferreira, Manuel Alberto M. e Amaral, Isabel. Edições Sílabo.

[2] ***Matemática – Exercícios: Álgebra Linear* (1994)*, volume 1, Matrizes e Determinantes*.
Ferreira, Manuel Alberto M. Edições Sílabo.

[3] ***Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada* (1997)**.
Magalhães, Luís T. 7ª ed. Texto Editora.

[4] ***Álgebra Linear* (1987)**.
Magalhães, Luís T. Universidade Nova de Lisboa.

[5] ***Sebenta de Matemáticas Gerais – Álgebra Linear***.
Santos, Fernando Borja. Plátano Editora

[6] ***Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear* (2009)**.
Santos, Reginaldo J. Imprensa Universitária da UFMG. Belo Horizonte.