Задача распределения ресурсов

Остапчук А.В.

28 декабря 2023 г.

Вариант 5

Для развития двух предприятий П1 и П2 на 4 года выделено x средств. Количество средств y, вложенных в П1, обеспечивает годовой доход в размере $1{,}4y^2$ и уменьшается за год до величины $0{,}55y$. Количество средств $x-y$, вложенных в П2 обеспечивает годовой доход в размере $2\,(x-y)^2$ и уменьшается за год до величины $0{,}6x-0{,}6y$. Необходимо так распределить выделенные средства по годам планируемого периода, чтобы получить максимальный доход.

Решение.

Период времени продолжительностью 4 лет разобьем на 4 этапов, поставив в соответствие каждому году один этап, т.е. $N=4$, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Хотя рассматривается непрерывный процесс, величины x и y для наглядности на каждом этапе будем отмечать индексами.

1. Отыскание оптимального решения начинаем с 4-го этапа, в начале которого необходимо распределить средства x_3, оставшиеся после 3-го этапа. Для этого следует определить оптимальное значение y_4. Составим выражения для функций, входящих в уравнение:

$$t_4(x_3,y_4)=\varphi(y_4)+\xi(x_3-y_4)=1{,}4y_4^2+2\,(x_3-y_4)^2\,;$$

$$f_4(x_3)=\max_{0\le y_4\le x_3}\left[1{,}4y_4^2+2\,(x_3-y_4)^2\right].$$

Для определения значения переменной y_4 на отрезке $[0,\ x_3]$, в которой функция $t_4(x_3,y_4)=1{,}4y_4^2+2\,(x_3-y_4)^2$ принимает наибольшее значение можно использовать метод дифференциального исчисления. Однако, если учесть, что x_3 для 4-го этапа есть величина постоянная, нетрудно заметить, что $g_4(x_3,y_4)=1{,}4y_4^2+2\,(x_3-y_4)^2$ – уравнение параболы, ветви которой направлены вверх. Стало быть, наибольшее значение на отрезке $[0,\ x_3]$ функция принимает на одном из его концов.

Определим значение функции на концах отрезка $[0,\ x_3]$:

$$t_4(x_3,y_4)=2x_3^2 \text{ при } y_4=0,$$

$$t_4(x_3,y_4)=1{,}4x_3^2 \text{ при } y_4=x_3.$$

Так как $2x_3^2>1{,}4x_3^2$, то функция $t_4(x_3,y_4)$ принимает максимальное значение на отрезке $[0,\ x_3]$ при $y_4=0$, следовательно, $f_4(x_3)=2x_3^2$.

Таким образом, максимальный доход на последнем этапе достигается в том случае, если в начале его все оставшиеся средства вложить в развитие предприятия П2.

Последовательно определим оптимальные распределения средств на 3, 2 и 1-м этапах.

2. Ищем оптимальное распределение для 2 последних этапов – 3-го и 4-го. Средства, доступные после 2-го этапа равны x_2. Функциональное уравнение имеет вид:

$$f_3(x_2) = max_{0\le y_3 \le x_2}\{t_3(x_2, y_3) + f_4(x_3))\} = max_{0\le y_3\le x_2}\left\{1{,}4y_3^2 + 2\left(x_2 - y_3\right)^2 + 2x_3^2\right\}.$$

Здесь x_3 – сумма оставшихся средств после 3-го этапа (на 3-м этапе было израсходовано y_3 средств на предприятии П1 и $x_2 - y_3$ – на предприятии П2), т.е.

$$x_3 = 0{,}55y_3 + 0{,}6x_2 - 0{,}6y_3 = 0{,}6x_2 - 0{,}05y_3.$$

Заменяя x_3 его выражением через x_2 и y_3, окончательно получаем функциональное уравнение:

$$f_3(x_2) = max_{0\le y_3\le x_2}\left\{2{,}72x_2^2 - 4{,}12x_2y_3 + 3{,}405y_3^2\right\}.$$

Находим значение y_3, при котором функция, заключенная в фигурные скобки, на отрезке $[0,\, x_2]$ достигает наибольшего значения (для простоты обозначим ее через Z_3). Так как x_2 – для 3-го этапа есть величина постоянная, то

$$Z_3 = Z_3(y_3) = 2{,}72x_2^2 - 4{,}12x_2y_3 + 3{,}405y_3^2$$

есть уравнение параболы, ветви которой направлены вверх. Наибольшее значение на отрезке $[0,\, x_2]$ функция $Z_3(y_3)$ принимает на одном из его концов. Имеем:

$$Z_3(0) = 2{,}72x_2^2,$$

$$Z_3(x_2) = 2{,}005x_2^2.$$

Поэтому $f_3(x_2) = 2{,}72x_2^2$. Следовательно, максимальный доход на 3-м этапе будет достигнут в том случае, если в начале его все оставшиеся средства вложить в развитие предприятия П2.

3. Ищем оптимальное распределение для 3 последних этапов – 2-го, 3-го и 4-го. Средства, доступные после 1-го этапа равны x_1. Функциональное уравнение имеет вид:

$$f_2(x_1) = max_{0\le y_2\le x_1}\{t_2(x_1, y_2) + f_3(x_2))\} = max_{0\le y_2\le x_1}\left\{1{,}4y_2^2 + 2\left(x_1 - y_2\right)^2 + 2{,}72x_2^2\right\}.$$

Здесь x_2 – сумма оставшихся средств после 2-го этапа (на 2-м этапе было израсходовано y_2 средств на предприятии П1 и $x_1 - y_2$ – на предприятии П2), т.е.

$$x_2 = 0{,}55y_2 + 0{,}6x_1 - 0{,}6y_2 = 0{,}6x_1 - 0{,}05y_2.$$

Заменяя x_2 его выражением через x_1 и y_2, окончательно получаем функциональное уравнение:

$$f_2(x_1) = max_{0\le y_2\le x_1}\left\{2{,}979x_1^2 - 4{,}163x_1y_2 + 3{,}407y_2^2\right\}.$$

Находим значение y_2, при котором функция, заключенная в фигурные скобки, на отрезке $[0,\, x_1]$ достигает наибольшего значения (для простоты обозначим ее через Z_2). Так как x_1 – для 2-го этапа есть величина постоянная, то

$$Z_2 = Z_2(y_2) = 2{,}979x_1^2 - 4{,}163x_1y_2 + 3{,}407y_2^2$$

есть уравнение параболы, ветви которой направлены вверх. Наибольшее значение на отрезке $[0,\, x_1]$ функция $Z_2(y_2)$ принимает на одном из его концов. Имеем:

$$Z_2(0) = 2{,}979x_1^2,$$

$$Z_2(x_1) = 2{,}223x_1^2.$$

Поэтому $f_2(x_1) = 2{,}979x_1^2$. Следовательно, максимальный доход на 2-м этапе будет достигнут в том случае, если в начале его все оставшиеся средства вложить в развитие предприятия П2.

4. Этапы 1-й, 2-й, 3-й и 4-й. Функциональное уравнение имеет вид:

$$f_1(x) = max_{0 \le y_1 \le x}\{t_1(x, y_1) + f_2(x_1))\} = max_{0 \le y_1 \le x}\left\{1{,}4y_1^2 + 2\left(x - y_1\right)^2 + 2{,}979x_1^2\right\}.$$

Здесь x_1 – сумма оставшихся средств после 1-го этапа (на 1-м этапе было израсходовано y_1 средств на предприятии П1 и $x - y_1$ – на предприятии П2), т.е.

$$x_1 = 0{,}55y_1 + 0{,}6x - 0{,}6y_1 = 0{,}6x - 0{,}05y_1.$$

Заменяя x_1 его выражением через x и y_1, окончательно получаем функциональное уравнение:

$$f_1(x) = max_{0 \le y_1 \le x}\left\{3{,}073x^2 - 4{,}179xy_1 + 3{,}407y_1^2\right\}.$$

Находим значение y_1, при котором функция, заключенная в фигурные скобки, на отрезке $[0,\ x]$ достигает наибольшего значения (для простоты обозначим ее через Z_1). Так как x – для 1-го этапа есть величина постоянная, то

$$Z_1 = Z_1(y_1) = 3{,}073x^2 - 4{,}179xy_1 + 3{,}407y_1^2$$

есть уравнение параболы, ветви которой направлены вверх. Наибольшее значение на отрезке $[0,\ x]$ функция $Z_1(y_1)$ принимает на одном из его концов. Имеем:

$$Z_1(0) = 3{,}073x^2,$$

$$Z_1(x) = 2{,}301x^2.$$

Поэтому $f_1(x) = 3{,}073x^2$. Следовательно, максимальный доход на 1-м этапе будет достигнут в том случае, если в начале его все выделенные средства вложить в развитие предприятия П2.

Найденное оптимальное управление справедливо для любого $x > 0$, поэтому, не придавая x определенного значения, определим величину средств, подлежащих перераспределению на каждом году планируемого периода.

На основании полученного решения можно сделать вывод, что оптимальное управление процессом распределения выделенных средств состоит в следующем:

- В начале первого года все средства x вкладывают в предприятие П2, и их количество уменьшается до $0{,}6x$.

- В начале 2 года остаток средств $0{,}6x$ вкладывают в предприятие П2, и их количество уменьшается до величины $0{,}36x$.

- В начале 3 года остаток средств $0{,}36x$ вкладывают в предприятие П2, и их количество уменьшается до величины $0{,}216x$.

- В начале 4 года остаток средств $0{,}216x$ вкладывают в предприятие П2, и их количество уменьшается до величины $0{,}13x$.

При таком распределении средств за 4 лет будет получен максимальный доход, равный $f(x) = 3{,}073x^2$.