Raport 4

Aleksandra Niedziela

2023-06-16

Symulacja rozkładu jednostajnego

Zastanówmy się jak możemy wygenerować punkt równomiernie rozłożony na pewnym “skomplikowanym” zbiorze S? Załóżmy, że S jest ograniczony i zamknijmy go w pewnym prostokącie R.

1. Generujemy w sposób jednostajny losowy punkt w prostokącie R.
2. Jeśli punkt zawiera się w S, akceptujemy go jako żądany punkt.
3. Jeśli punky nie zawiea się w S odrzucamy go.

Uzasadnienie, że powyższą metodę generujemy losowe punkty rozłożone równomiernie w S

Weźmy dowolny pozdbiór $S_1 \subset S$ Chcemy pokazać:

$$P((X,Y) \in S_1 | (X,Y) \in S) = \frac{|S_1|}{|S|}$$

Przyjmijmy, że $P((X,Y) \in S) = |S|$ oraz $P((X,Y) \in S_1) = |S_1|$, gdzie $|S|$ i $|S_1|$ to pola odpowiednio S i S_1.

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy:

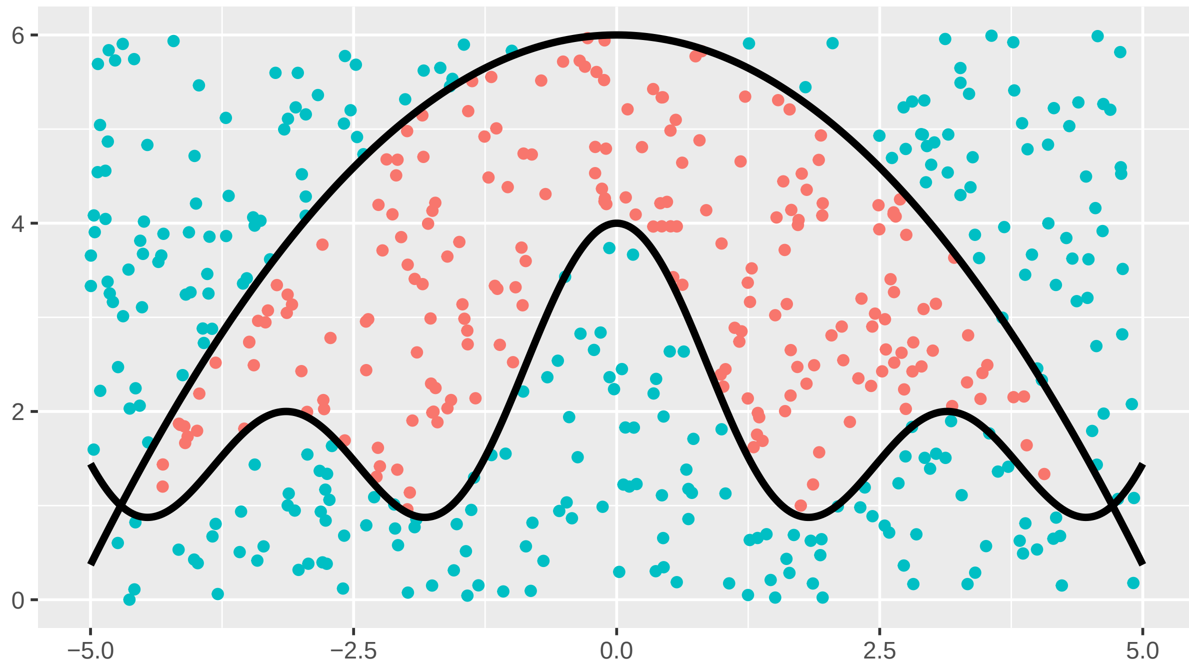
$$P((X,Y) \in S_1 | (X,Y) \in S) = \frac{P((X,Y) \in S_1 \wedge (X,Y) \in S)}{P((X,Y) \in S)} = \frac{P((X,Y) \in S_1 \cap S)}{|S|} = \frac{P((X,Y) \in S_1}{|S|} = \frac{|S_1|}{|S|}$$

Korzystając z powyższej metody możemy wygenerować w sposób losowy, punkty zawarte pomiędzy wykresami funkcji:

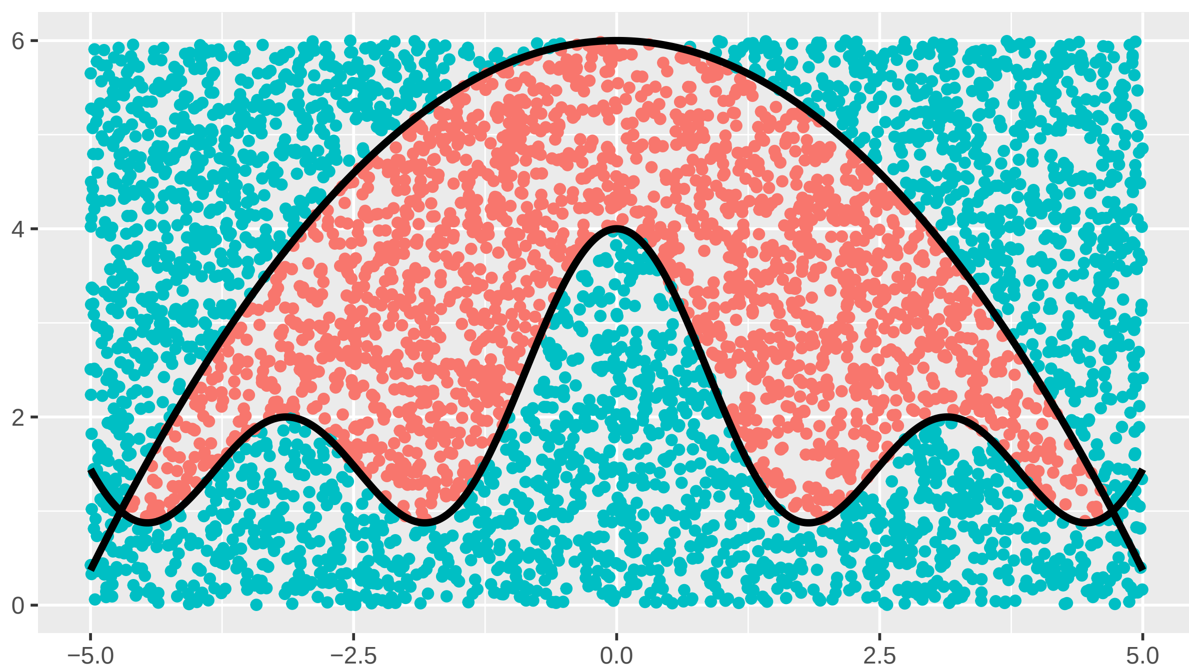
$$f(x) = 6 - \frac{20x^2}{9\pi^2}, \qquad g(x) = \cos(x) + \cos(2x) + 2$$

Przedstawmy to na wykresach, gdzie zaznaczymy punkty, które wpadły do obszaru, dla wylosowanych $n = 500$ oraz $n = 5000$.

Losowanie 500 punktów



Losowanie 5000 punktów



Dla $n = 500$ do zadanego obszaru wpadło 210 punktów co stanowi 42.00 % wszystkich punktów. Dla $n = 5000$ do zadanego obszaru wpadło 2014 punktów, co stanowi 40.28 % wszystkich punktów.

Metoda transformacji zmiennych losowych.

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiannymi losowymi o wspólnym rozkładzie wykładniczym $Exp(1)$ wtedy:

Rozkład chi-kwadrat

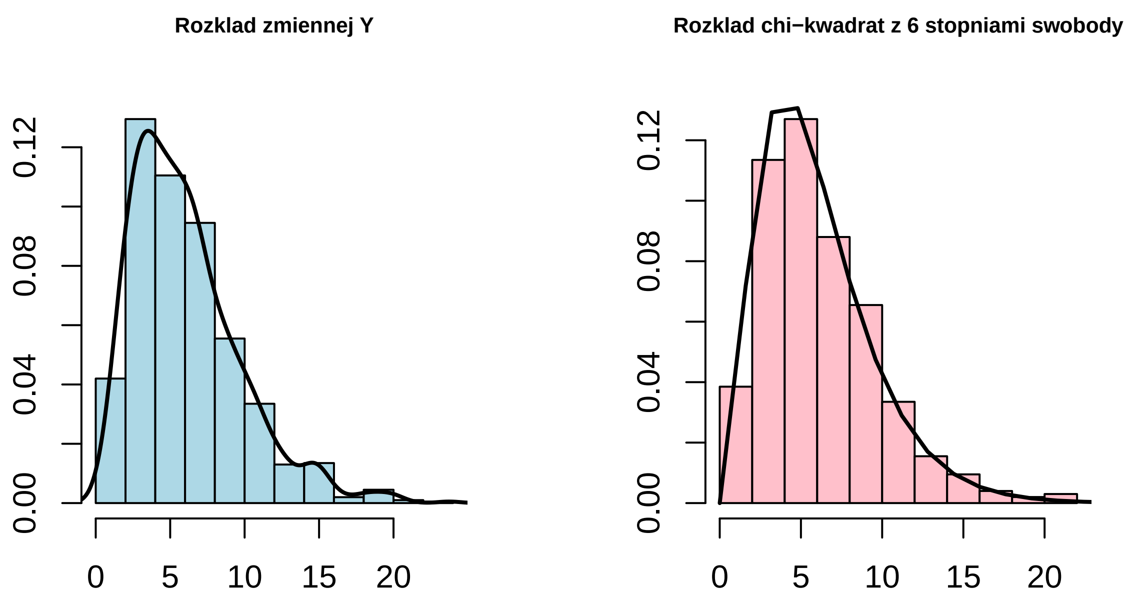
$$Y = 2\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$$

ma rozkład chi-kwadrat z 2n stopniami swobody.

Aby wygenerować 1000 niezależnych realizacji rozkładu χ^2_{6n} zauważmy najpierw, że:

$$\chi^2_{6n} \sim 2\sum_{i=1}^{3} X_i = 2 \cdot (X_1 + X_2 + X_3) = Y$$

Wyniki możemy przedstawić na wykresie i porównać do rozkładu zmiennej chi-kwadrat z 6 stopniami swobody.



Rozkład gamma

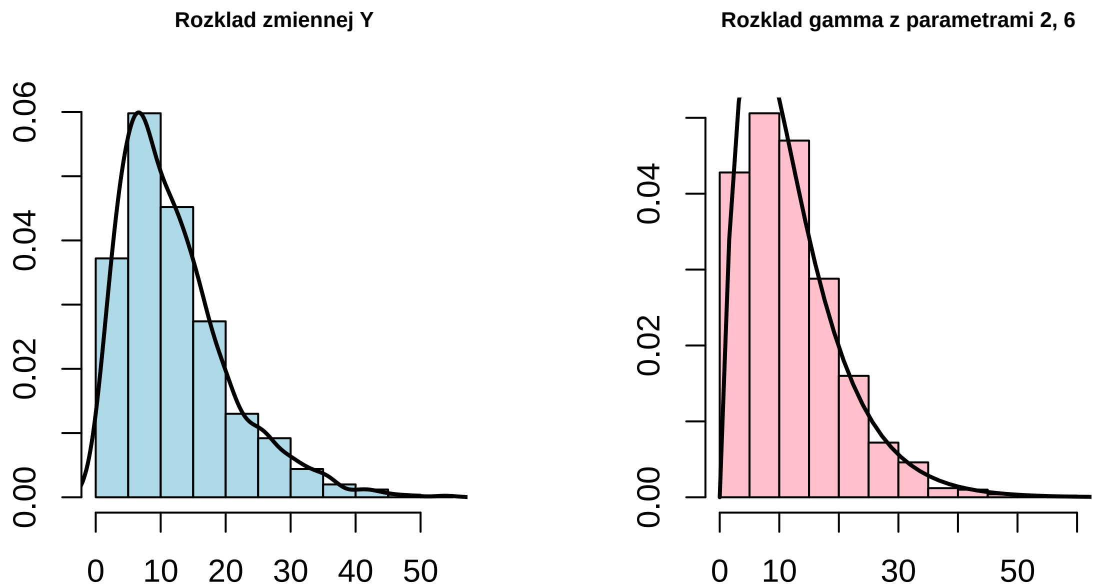
$$Y = \beta\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{G}(n, \beta)$$

ma rozkład gamma z parametrami n i β.

Aby wygenerować 1000 niezależnych realizacji rozkładu $\mathcal{G}(2, 6)$ zauważmy najpierw, że:

$$\mathcal{G}(2,6) \sim 6 \cdot (X_1 + X_2)$$

Wykresy prezentują się następująco:



Rozkład beta

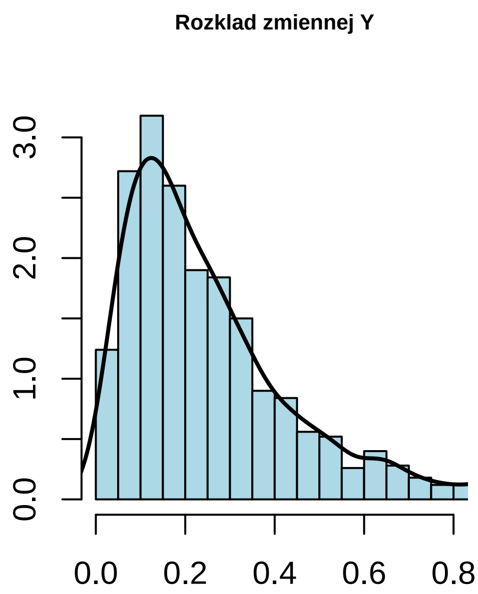
$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{a} X_i}{\sum_{i=1}^{a+b} X_i} \sim \mathcal{B}(a,b)$$

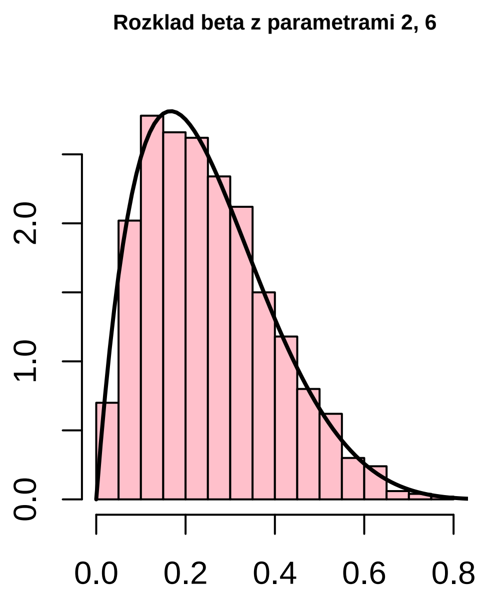
,ma rozkład beta z parametrami a i b.

Aby wygenerować 1000 niezależnych realizacji rozkładu $\mathcal{B}(2,6)$ zauważmy najpierw, że:

$$\mathcal{B}(2,6) \sim \frac{X_1 + X_2}{\sum_{i=1}^{8} X_i}$$

Otrzymujemy wykresy:





Po ocenie wizualnej możemy stwierdzić, iż przybliżenia rozkładów zmiennymi Y są poprawne.