Московский Авиационный Институт
(государственный технический университет)

Кафедра 308

***Дисциплина***

# ***«Теория и методы оптимизации»***

**Лабораторная работа №1**

# **«Методы минимизации функций одной переменной»**

(методические указания)

Объем – 8 часов

Составил доцент, к.т.н. В.Г.Герасименко

Москва, 2002г.

*Работа 1.* **МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Минимизация функций одной переменной (или *одномерная минимизация*) при помощи численных методов занимает достаточно важное место в практических оптимизационных задачах. Это связано с тем, что, во-первых, в инженерной практике возникает множество одномерных задач, имеющих самостоятельное значение и, во-вторых, при минимизации многомерных целевых функций существенно важной частью алгоритмов является процедура одномерной минимизации вдоль некоторого направления поиска минимума.

Одномерные методы минимизации можно классифицировать следующим образом:

- методы исключения интервалов:
  - равномерный поиск;
  - деление интервала пополам;
  - золотое сечение;
- методы полиномиальной аппроксимации:
  - квадратическая аппроксимация;
  - кубическая аппроксимация;
- минимизация с использованием производных:
  - метод Ньютона-Рафсона;
  - метод средней точки;
  - метод секущих;
  - метод Вегстейна.

Первая группа методов определяет оценку точки минимума в виде интервала заданной длины, зависящего от требуемой точности (*интервальные методы*), а вторая и третья группы вычисляют оценку в виде определенного числа, и поэтому называются *точечными*.

## 2. ТЕОРЕМА ИСКЛЮЧЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ

Прежде чем переходить к алгоритмам минимизации рассмотрим *теорему об исключении интервалов*, на которой основаны итерационные методы.

Фактически все одномерные методы поиска основаны на предположении, что исследуемая функция в допустимой области, *по крайней мере*, обладает свойством унимодальности.

Полезность этого свойства в том, что для унимодальной функции $f(x)$ сравнение ее значений в двух различных точках интервала позволяет сказать, в каком из подынтервалов, заданных двумя указанными точками, точка минимума *отсутствует*.

### ❑ *Формулировка теоремы исключения интервалов*

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на замкнутом интервале $a \le x \le b$, а ее минимум достигается в точке $x^*$. Рассмотрим точки $x_1$ и $x_2$, расположенные в интервале таким образом, что $a < x_1 < x_2 < b$. Сравнивая значения функции в точках $x_1$ и $x_2$, можно сделать следующие выводы.

1. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то точка минимума $f(x)$ не лежит в интервале $(a, x_1)$, т.е. $x^* \in (x_1, b)$ (рис.1.1,а).

2. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то точка минимума $f(x)$ не лежит в интервале $(x_2, b)$, т.е. $x^* \in (a, x_2)$ (рис.1.1,б).

### ❑ *Доказательство теоремы*

Рассмотрим случай, когда $f(x_1) > f(x_2)$, и пусть утверждение теоремы неверно, т.е. $a \le x^* \le x_1$. Поскольку $x^*$ - точка минимума, то по определению $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Получаем двойное неравенство

$$f(x^*) \le f(x_1) > f(x_2) \text{ при } x^* < x_1 < x_2 .$$

Это неравенство не может выполняться, так как унимодальная функция должна быть монотонной по обе стороны от точки $x^*$. Таким образом, получено противоречие, доказывающее утверждение теоремы. Аналогичные рассуждения справедливы также в случае, когда $f(x_1) < f(x_2)$, и теорема доказана.

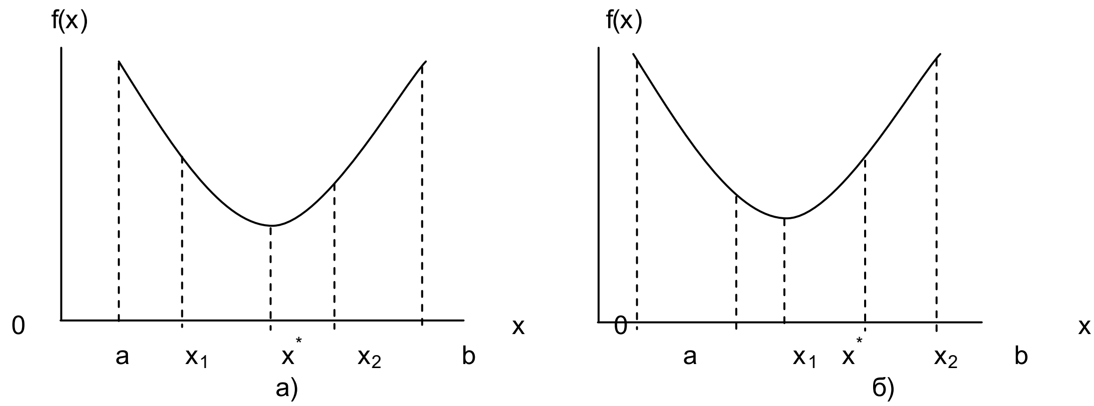


**Рис.1.1.** Иллюстрация к доказательству правила исключения интервалов

Теперь рассмотрим основные процедуры алгоритмов одномерной минимизации:

- ❑ нахождение (или *локализация*) интервала унимодальности;
- ❑ поиск минимума в найденном интервале.

## 3. АЛГОРИТМ ПОИСКА ИНТЕРВАЛА УНИМОДАЛЬНОСТИ

Алгоритм локализации интервала унимодальности работает пошагово: из начальной точки $x_0$ вначале определяется направление убывания функции, после чего каждая очередная ($k+1$)-я точка вычисляется по итерационной формуле

$$x_{k+1} = x_k + step_k,$$

где $step_k$–*шаг поиска интервала унимодальности*, для вычисления которого применяются разные формулы;

$k$=0,1,…,- номер шага поиска.

Очевидно самым простым способом вычисления $x_{k+1}$ является формула, реализующая поиск с постоянным шагом

$$x_{k+1} = x_k + \Delta, \tag{1}$$

где $\Delta$- параметр, определяющий длину и направление шага поиска (задается пользователем).

Второй способ вычисления $x_{k+1}$ заключается в пропорциональном увеличении длины пробного шага на каждой итерации

$$x_{k+1} = x_k + k\Delta. \tag{2}$$

И, наконец, представим эмпирическую формулу Свенна для вычисления очередной точки поиска

$$x_{k+1} = x_k + 2^k\Delta. \tag{3}$$

Как видно, величина шага Свенна $2^k\Delta$ будет достаточно быстро увеличиваться по мере роста количества шагов поиска k. Такая стратегия поиска может быть достаточно эффективна особенно в тех случаях, когда начальная точка поиска находится далеко от искомой точки минимума.

В данной работе будут исследоваться операционные свойства алгоритмов локализации именно с шагами (1)-(3).

- ***Алгоритм локализации интервала унимодальности***

1. Задать: $x_0$ , $\Delta$.
2. Вычислить: $f(x_0)$, $f(x_0+\Delta)$, $f(x_0-\Delta)$.
3. Если $f(x_0-\Delta) \ge f(x_0) \ge f(x_0+\Delta)$,

то $\Delta=\Delta$; перейти к 6.

4. Если $f(x_0-\Delta)\le f(x_0)\le f(x_0+\Delta)$,

   то $\Delta=-\Delta$; перейти к 6.

5. Если $f(x_0-\Delta)\ge f(x_0)\le f(x_0+\Delta)$,

   *то* $a=x_0-\Delta$, $b=x_0+\Delta$; перейти к 9.

6. $k$=0.

7. $x_{k+1}=x_k+step_k$ *(здесь программируется конкретная формула для вычисления шага* $step_k$*).*

8. Если $f(x_{k+1})>f(x_k)$,

   то $a=x_{k-1}$, $b=x_{k+1}$ ; перейти к 9.

   Иначе $k=k+1$; перейти к 7.

9. Стоп.

Как уже отмечалось выше, эффективность алгоритмов зависит от выбора величины параметра $\Delta$ и способа вычисления шага. Если параметр $\Delta$ велик, то можно получить слишком большой интервал унимодальности, и заодно при этом пропустить локальный минимум.

С другой стороны, если задать параметр $\Delta$ слишком малым, то для определения интервала унимодальности может потребоваться много шагов вычислений.

## 4. МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ

**4.1. Метод равномерного поиска** наиболее простой. Алгоритм, построеннный на этом методе предусматривает вычисление функции в N равноотстоящих друг от друга точках интервала унимодальности $[a,b]$ и выбор на основе сравнения той точки, которая соответствует минимальному значению $f(x)$.

Ясно, что в этом методе искомая точка минимума $x^*$ будет заключена в интервале

$$\left[\left(x^*-\frac{b-a}{N+1}\right),\ \left(x^*+\frac{b-a}{N+1}\right)\right] \quad . \qquad (4)$$

**4.2. Метод деления пополам** (или *метод трехточечного поиска на равных интервалах*) на каждой итерации позволяет исключать ровно половину предыдущего интервала. Значение функции для каждой итерации здесь вычисляются в трех равномерно распределенных точках интервала.

Приведем основные шаги алгоритма поиска. В качестве входных данных, как обычно, задается величина интервала унимодальности [$a$, $b$] и требуемая точность поиска минимума $\varepsilon$.

***Алгоритм метода деления пополам***

1. Вычислить $x_m = (a+b)/2$, $L = (b-a)$, $f(x_m)$.
2. Вычислить $x_1 = a + L/4$, $x_2 = b - L/4$, $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
3. Если $f(x_1) < f(x_m)$, то $b = x_m$, $x_m = x_1$; перейти к 6.
4. Если $f(x_2) < f(x_m)$, то $a = x_m$, $x_m = x_2$; перейти к 6.
5. Положить $a = x_1$, $b = x_2$; перейти к 6.
6. Вычислить $L = (b-a)$; если величина $L$ удовлетворяет требуемой точности, то закончить поиск, иначе перейти к 2.

Метод деления пополам имеет следующие характерные свойства:

- точки $x_1$, $x_2$ и $x_m$ на каждой итерации делят интервал унимодальности на четыре равные части, и исключается всегда ровно половина интервала;
- средняя точка последовательно получаемых интервалов всегда совпадает с одной из пробных точек $x_1$, $x_2$ или $x_m$, найденных на предыдущей итерации, следовательно на каждой итерации требуется не более двух вычислений значения функции;
- если проведено $n$ вычислений значения функции, то длина полученного интервала составляет $(1/2)^{n/2}$ величины исходного интервала.

## 4.2. Метод золотого сечения

Поскольку местоположение искомой точки минимума $x^*$ в интервале унимодальности априори неизвестно, то логично будет предположить, что размещение двух пробных точек должно быть таким, чтобы они располагались на одинаковых расстояниях от середины интервала, а отношение длины исключаемого подынтервала к величине интервала поиска оставалось постоянным. Такое расположение пробных точек требует вычисления *только одного* значения функции на каждой итерации, что безусловно увеличивает эффективность алгоритма.

Для того, чтобы реализовать эту идею, рассмотрим интервал унимодальности в виде единичного отрезка, на котором пробные точки 1 и 2 располагаются на некотором, пока неизвестном расстоянии $\tau$ от границ (рис.1.2,а).

Если начальный интервал не единичный, то к нему всегда можно перейти путем замены переменной $z=(x-a)/(b-a)$. Предположим, что исключается правый подынтервал длины $(1-\tau)$.

На рис.1.2,б показано, что оставшийся подынтервал длины $\tau$ содержит одну пробную точку на расстоянии $(1-\tau)$ от левой граничной точки. Для сохранения симметрии поиска, расстояние $(1-\tau)$ должно составлять $\tau$-ю часть длины $\tau$. При таком выборе $\tau$ следующая пробная точка размещается на расстоянии, равном $\tau$-й части длины интервала от правой граничной точки (рис.1.2,в).

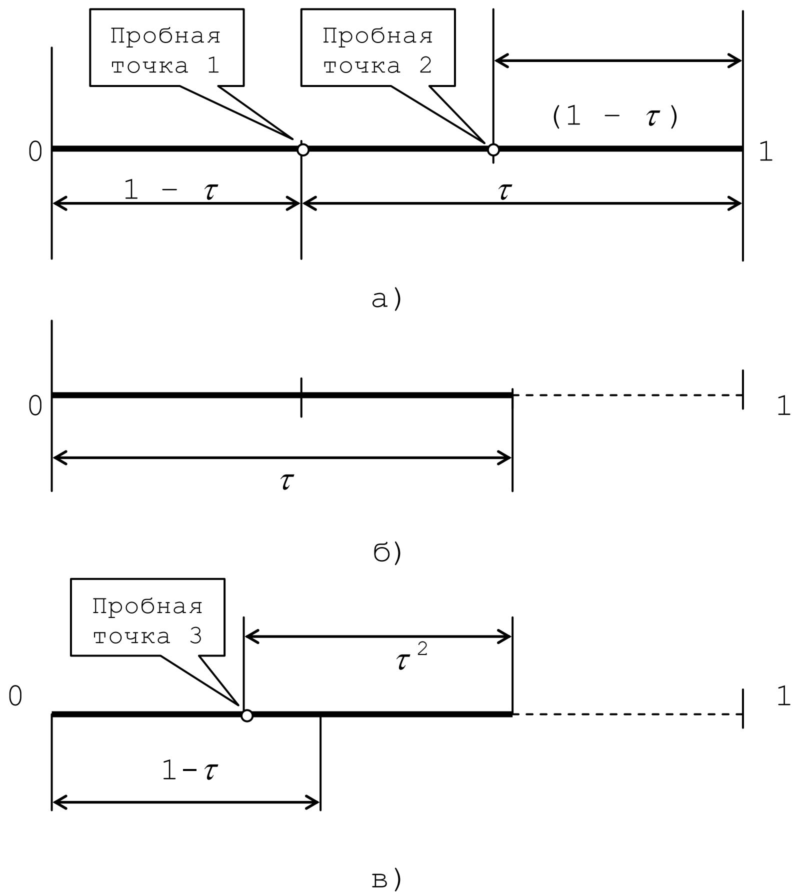


**Рис.1.2.**Расположение пробных точек в методе золотого сечения

Отсюда следует, что при выборе $\tau$ в соответствии с условием $1-\tau=\tau^2$ симметрия поиска, показанного на рис.1.2,а, сохраняется при переходе к уменьшенному интервалу (рис.1.2,в). Решая приведенное квадратное уравнение относительно неизвестного $\tau$, получим $\tau=0.61803$. Схема поиска, при котором пробные точки делят интервал в этом соотношении, называется *методом золотого сечения*[1].

[1] Золотое сечение (гармоническое деление) – деление отрезка на две части таким образом, что большая его часть является средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей его частью. Приближенно такое деление выражается дробями 2/3, 3/5, 5/8, 8/13 … , где 2, 3, 5, 8, 13 … -числа Фибоначчи. *Математический энциклопедический словарь.Москва.1988.*

Основные шаги алгоритма для начального интервала унимодальности $[a, b]$ и требуемой точности $\varepsilon$ таковы:

1. Положить $k = 1$.
2. Вычислить $L = |b - a|$.
3. Если $L$ удовлетворяет требуемой точности, то перейти к 7.
4. Вычислить $x_k = a+\tau^k$, $x_{k+1} = b-\tau^k$, $f(x_k), f(x_{k+1})$.
5. Если $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, то $b = x_k$, $k=k+1$, перейти к 2.
6. Положить $a = x_{k+1}$, $k=k+1$, перейти к 2.
7. Стоп.

Для сравнения методов исключения интервалов в качестве показателя эффективности принято использовать относительное уменьшение исходного интервала унимодальности:

$$E(N)=L_N/L_1 ,$$

где $L_1$ – длина исходного интервала неопределенности;

$L_N$ – длина интервала, получаемого в результате $N$ вычислений значений функции.

Напомним, что при использовании метода деления интервала пополам и метода золотого сечения длина получаемого интервала составляет $L_1(0.5)^{N/2}$, и $L_1(0.618)^{N-1}$ соответственно. Следовательно, относительное уменьшение интервала после N вычислений значений функции равно

$E_{МДП}(N)= (0.5)^{N/2}$ – для метода деления интервала пополам;

$E_{МЗС}(N)= (0.618)^{N-1}$ – для метода золотого сечения.

Для сравнения приведем относительную эффективность метода равномерного поиска. Поскольку этот метод, как было показано выше, предписывает деление начального интервала $L_1$ на $(N+1)$ равных интервалов длины $L_1/(N+1)$, то искомое относительное уменьшение интервала равно

$$E_{МРП} = 2/(N+1).$$

С другой стороны, можно также сравнить количества вычислений значения функции, требуемые для достижения заданной величины относительного уменьшения интервала или заданной степени точности.

Для заданной степени точности $\varepsilon$, значение $N$ вычисляется по следующим формулам:



- для метода деления интервала пополам
$$N=2\ln(\varepsilon)/\ln(0.5),$$
- для метода золотого сечения
$$N=1+[\ln(\varepsilon)/\ln(0.618)],$$
- для метода равномерного поиска
$$N=(2/\varepsilon)-1.$$

## 5. МЕТОДЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Применение методов исключения интервалов, рассмотренных выше накладывает единственное требование на исследуемую функцию: она должна быть унимодальной. Следовательно, указанные методы можно использовать для анализа как непрерывных, так и разрывных функций, а также в случаях, когда переменные принимают значения из дискретного множества.

Теперь рассмотрим методы, основанные на приближении исходной функции некоторой *модельной* функцией, минимум которой будет служить искомой оценкой минимума.Такой подход часто является более эффективным, однако при этом на исследуемую функцию накладывается дополнительное ограничение-функция должна быть достаточно гладкой. Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации, если функция непрерывна в некотором интервале, то ее с любой степенью точности можно аппроксимировать полиномом достаточно высокого порядка.

Следовательно, если функция унимодальна и найден полином, который достаточно точно ее аппроксимирует, то координату точки оптимума функции можно оценить путем вычисления координаты точки оптимума полинома.

Согласно этой же теореме Вейерштрасса, качество оценок координаты точки оптимума можно повысить двумя способами: использованием полинома более высокого порядка и уменьшением интервала аппроксимации. Второй способ, вообще говоря, является более предпочтительным, поскольку построение аппроксимирующего полинома порядка выше третьего становится сложной вычислительной процедурой.

**5.1. Квадратичная аппроксимация** – простейший вариант полиномиальной интерполяции, основанный на том, что любую нелинейную функцию в интервале унимодальности $[a,b]$ можно приближенно представить в виде аппроксимирующего полинома второй степени, а затем вычислить точку $\tilde{x}^*$ минимума этого полинома, которая, очевидно и будет оценкой искомой точки минимума $x^*$.

Пусть квадратичный аппроксимирующий полином $f_a(x)$записан в виде:



$$f_a(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2, \qquad (5)$$

где $a_0$, $a_1$, $a_2$ – неизвестные коэффициенты.

Тогда, метод квадратичной аппроксимации заключается в выборе трех пробных точек $x_1,x_2,x_3$ внутри интервала унимодальности и последующем вычислении коэффициентов $a_0,a_1,a_2$. Относительно расположения пробных точек нет специальных рекомендаций.

Вычислив значения $f_1,f_2,f_3$ целевой функции в пробных точках, необходимо решить систему линейных уравнений (6) относительно неизвестных коэффициентов $a_0,a_1,a_2$ :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 &= f_1, \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 &= f_2, \\ a_0 + a_1x + a_2x^2 &= f_3. \end{aligned} \qquad (6)$$

Зная $f_a(x)$, минимум полинома теперь определяется исходя из необходимого условия экстремума

$$df_a/dx=0,$$

которое определяет искомую оценку минимума в виде

$$\tilde{x}^*=-a_1/2a_2. \qquad (7)$$

***Рассмотрим другой возможный вариант*** вычисления минимума при квадратичной аппроксимации. Если полином $f_a(x)$записать в виде

$$f_a(x)=c_0+c_1(x-x_1)+c_2(x-x_1)(x-x_2), \qquad (8)$$

в котором теперь неизвестные коэффициенты обозначены как $c_0$, $c_1$ и $c_2$, то исходя из того, что аппроксимирующий полином в пробных точках должен быть равен исходной функции, вычислим $f_a(x)$ в каждой пробной точке. Прежде всего, так как

$$f_1=f(x_1)=q(x_1),$$

то имеем

$$c_0=f_1.$$

Далее, поскольку

$$f_2=f(x_2)= f_a(x_2)= f_1+c_1(x_2-x_1),$$

получаем

$$c_1=(f_2-f_1)/(x_2-x_1).$$

Наконец, при $x=x_3$

$$f_3=f(x_3)=q(x_3)=f_1+(f_2-f_1)/(x_2-x_1)(x_3-x_1)+c_2(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

Разрешая последнее уравнение относительно $c_2$, получаем



$$c_2=\frac{1}{x_3-x_2}\left(\frac{f_3-f_2}{x_3-x_1}-\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}\right).$$

Искомая оценка точки минимума исходя из необходимого условия экстремума вычисляется по формуле

$$\tilde{x}^*=(x_2+x_1)/2-(c_1/2c_2).$$

Заметим, что при необходимости обеспечения *высокой точности* метод аппроксимации нужно применять на последовательно уменьшаемых интервалах $[x_1, x_3]$.

## 6. МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ

Все рассмотренные выше методы поиска основываются на предположениях об унимодальности и в ряде случаев о непрерывности исследуемой целевой функции. Целесообразно предположить, что если в дополнение к условию непрерывности ввести требование дифференцируемости функции, то эффективность поисковых процедур существенно повышается.

**6.1. Метод Ньютона-Рафсона** в своей вычислительной схеме начинает работу в точке $x_0$, которая представляет начальное приближение (или начальную оценку) координаты стационарной точки, или корня уравнения $f'(x)=0$. Затем строится линейная аппроксимация функции $f'(x)$ в точке $x_0$, и точка, в которой аппроксимирующая линейная функция обращается в нуль, принимается в качестве следующего приближения. Если точка $x_k$ принята в качестве текущего $k$-го приближения к стационарной точке, то линейная функция, аппроксимирующая функцию $f'(x)$ в точке $x_k$ записывается в виде

$$\tilde{f}'(x;\ x_k)=f'(x_k)+f''(x_k)(x-x_k).$$

Приравняв правую часть этого уравнения к нулю, получим следующее приближение

$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k) / f''(x_k)].$$

Итерации должны продолжаться до тех пор, пока не будет выполняться равенство

$$|f'(x_k)| < \varepsilon \ ,$$



где $\varepsilon$ - заранее установленная величина допустимого отклонения.

Рис.1.3 иллюстрирует основные шаги реализации метода Ньютона.

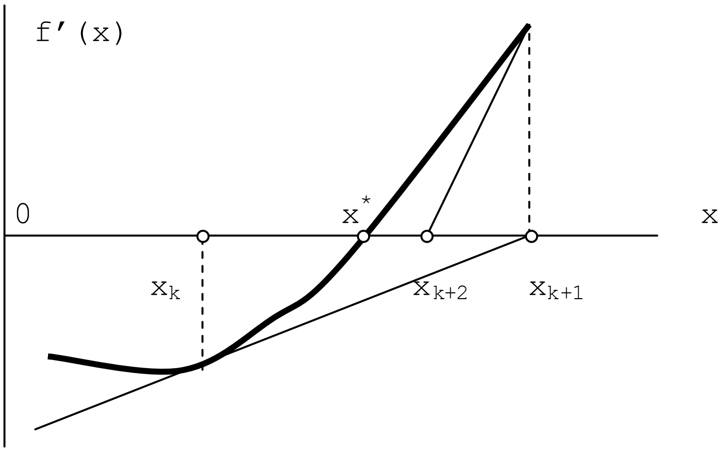


**Рис.1.3.** Иллюстрация метода Ньютона-Рафсона

**6.2. Метод средней точки (поиск Больцано).** Этот метод является итерационным методом исключения интервалов с одной пробной точкой.

Для унимодальной $f(x)$ точкой оптимума является точка в которой $f'(x)=0$. Если в задаче имеется возможность вычислять как значение функции, так и ее производной, то для нахождения корня уравнения $f'(x)=0$ можно воспользоваться эффективным алгоритмом исключения интервалов.

Например, если в точке $z$ выполняется неравенство $f'(z)<0$, то с учетом предположения об унимодальности естественно утверждать, что точка минимума не может находиться левее точки $z$. Другими словами, интервал $x \le z$ подлежит исключению.

С другой стороны, если $f'(z)>0$, то точка минимума не может находиться правее z и интервал $x \ge z$ можно исключить. Приведенные рассуждения составляют логическую структуру метода средней точки.

Определим две точки $a$ и $b$ таким образом, что $f'(a)<0$ и $f'(b)>0$, т.е. стационарная точка расположена между $a$ и $b$.

Формализованное описание алгоритма выглядит так:

1. Задать $a$, $b$, $\varepsilon$.
2. Вычислить $z=(a+b)/2$, $f'(z)$.
3. Если $|f'(z)| \le \varepsilon$, закончить поиск.

4. Если $f'(z)<0$, положить $a=z$;

иначе $b=z$.

5. Перейти к 2.



**6.3. Метод секущих (метод хорд)**, являющийся комбинацией метода Ньютона и общей схемы исключения интервалов, ориентирован также на нахождение корня уравнения $f'(x)=0$ в интервале $[a,b]$.

Идея метода заключается в следующем. Предположим, что в процессе предварительного поиска стационарной точки функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$ обнаружены некоторые другие две точки $x_1$ и $x_2$, $x_1<x_2$ и в которых знаки производной различны (естественно, что априори этому условию удовлетворяют точки $[a,b]$). В этом случае алгоритм метода секущих позволяет аппроксимировать функцию $f'(x)$ "секущей прямой" и найти точку, в которой секущая графика $f'(x)$ пересекает ось абсцисс (рис.1.4). Таким образом, следующее приближение z к стационарной точке x* определяется по формуле

$$z=x_2-\frac{f'(x_2)}{[f'(x_2)-f'(x_1)]/(x_2-x_1)}.$$

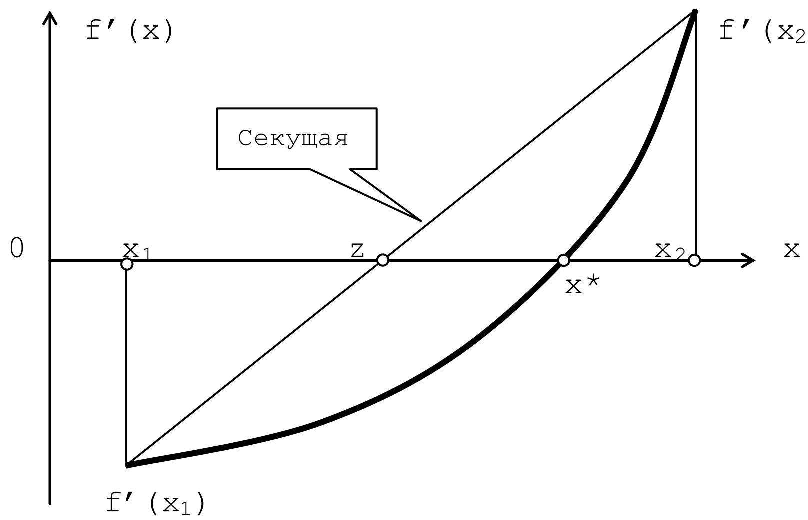


**Рис.1.4.** Иллюстрация метода секущих

# 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Прежде чем переходить к практическому выполнению работы, необходимо ответить на контрольные вопросы и поместить ответы в отчет.

**7.1.** Установите выпуклость или вогнутость, следующих функций:

$g_1(x) = e^x$,

$g_2(x) = e^{-x}$,

$g_3(x) = 1/x^2$,

$g_4(x) = x+\log x$ при $x>0$,

$g_5(x) = x\cdot\log x$ при $x>0$.

**7.2.** Проанализируйте на экстремум и постройте качественные графики функций:

$g_6(x)=e^{-x^2}$ ,

$g_7(x)=x^3-12x+3$ в интервале $-4\le x\le 4$,

$g_8(x)=x^5+x^4-(x^3/3)+2$,

$g_9(x)=(2x+1)^2(x-4)$.

# 8. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 8.1. ПОДГОТОВКА ТЕСТОВЫХ ФУНКЦИЙ

### 8.1.1. Анализ особых точек функций

Для исследовния алгоритмов одномерного поиска в качестве тестовых функций используйте следующие функции

$$f_1(x) = \sin^{11} x, \qquad 2 \le x \le 6 ,$$

$$f_2(x) = 2(x-1)^2 + \frac{0.01}{1-2x^2} , \qquad 0 \le x \le 2.$$

***Аналитически*** найдите и классифицируйте особые точки функций $f_1$, $f_2$. Точки минимумов необходимо оценить с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$.

### 8.1.2. Построение графиков тестовых функций

Постройте графики вышеуказанных функций вручную, либо используя Mcad или какие-либо другие графические программы.

**Замечание 1.** *Прилагаемые к данной работе программы Odn_1 и Odn_4 вычисляют таблицу значений указанных функций в задаваемом пользователем диапазоне и могут быть полезны для ручного построения графиков.*

**Замечание 2**. *Каждый график по п. 8.1.2) должен занимать, как минимум, половину страницы формата А4 с координатной сеткой, чтобы в дальнейшем с ними было удобно работать.*

## 8.2. ИЗУЧЕНИЕ АЛГОРИТМА ЛОКАЛИЗАЦИИ ИНТЕРВАЛА УНИМОДАЛЬНОСТИ

### 8.2.1. Определение зависимости длины интервала унимодальности $[a,b]$ и числа шагов k локализации от параметра шага $\Delta$ для функции $f_1(x)$

Для функции $f_1(x)$ с помощью программ **Loc_01, Loc_02** и **Odn_1** испытайте работу алгоритма поиска интервала унимодальности с разными способами вычисления шага, задаваемые формулами (1) - (3).

По данным вычислительных экспериментов постройте:

- зависимость длины интервала унимодальности $[b\text{-}a]$ от величины $\Delta$ параметра шага;
- зависимость количества шагов локализации *k* от величины $\Delta$;

В качестве начальной точки задайте $x_0$ = $a$ =2.0 для всех трех способов.

Параметр $\Delta$ должен пробежать все значения от 0.001 до 0.025 с шагом 0.001, т.е. необходимо исследовать 25 точек.

Данные эксперимента сведите в таблицу следующего вида (табл.8.1):

**Таблица 8.1.** *Данные эксперимента по анализу способа вычисления шага*

| № пп | Пара-метр $\Delta$ | Нач. точка $a$ | Постоянный шаг | | | Пропорциональный шаг | | | Свенна шаг | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $b$ | $b-a$ | $k$ | $b$ | $b-a$ | $k$ | $b$ | $b-a$ | $k$ |
| 1 | 0.001 | 2.0 | 4.725 | 2.725 | 2725 | 4.775 | 2.775 | 74 | 6.095 | 4.095 | 12 |
| 2 | 0.002 | 2.0 | | | | | | | | | |
| … | … | … | | | | | | | | | |
| 25 | 0.025 | 2.0 | | | | | | | | | |
| Программы реализации : | | | Lok_11 | | | Lok_12 | | | Odn_1 | | |

### 8.2.2. Определение зависимости длины интервала унимодальности [$a,b$] и числа шагов k локализации от параметра шага $\Delta$ для функции $f_2(x)$

Выполните такое-же исследование как в пп. 8.2.1 для второй тестовой функции $f_2(x)$, используя программы **Loc_11, Loc_12 и Odn_4.**

В качестве начальной точки теперь задайте $x_0$ = $a$ = 0.0 для всех трех способов.

Данные эксперимента сведите в таблицу вида 8.1, но теперь, поскольку $x_0$ = $a$ = 0.0 столбцы [b-a] являются излишними и их можно удалить из таблицы.

По данным экспериментов постройте такие же зависимости как и в пп. 8.2.1.

Поясните характер построенных зависимостей (какие значения длины интервала являются максимальными и минимальными; как отличаются эти величины и т. д.)

Можно ли дать какие-либо рекомендации по выбору способа вычисления шага и по выбору величины параметра шага?

## 8.3. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА

### 8.3.1. Интервальные методы минимизации

В этом разделе необходимо найти оценки точек минимума функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ с помощью программ **Odn_1** и **Odn_4** интервальными методами

- равномерного поиска,
- деления пополам,
- золотого сечения.

Для этого проведите 3 вычислительных эксперимента при следующих исходных исходных данных

- для $f_1(x)$ задайте начальный интервал $[a, b]$=[2, 6];
- для $f_2(x)$ - интервал $[a, b]$=[0, 0.7];
- для $f_2(x)$ также исследуйте другой интервал: $[a, b]$=[0, 1.2].

Точность оценки задайте равной $\varepsilon=10^{-6}$ во всех трех экспериментах.

Покажите графически изменение начального интервала унимодальности после 3-х итераций для 1-го и 3-го эксперимента, используя выходные данные программ.

Для этого под графиком исходной функции нужно изобразить отрезки, соответствующие первым итерациям метода деления пополам и золотого сечения так, как это условно показано на рис. 1.6.

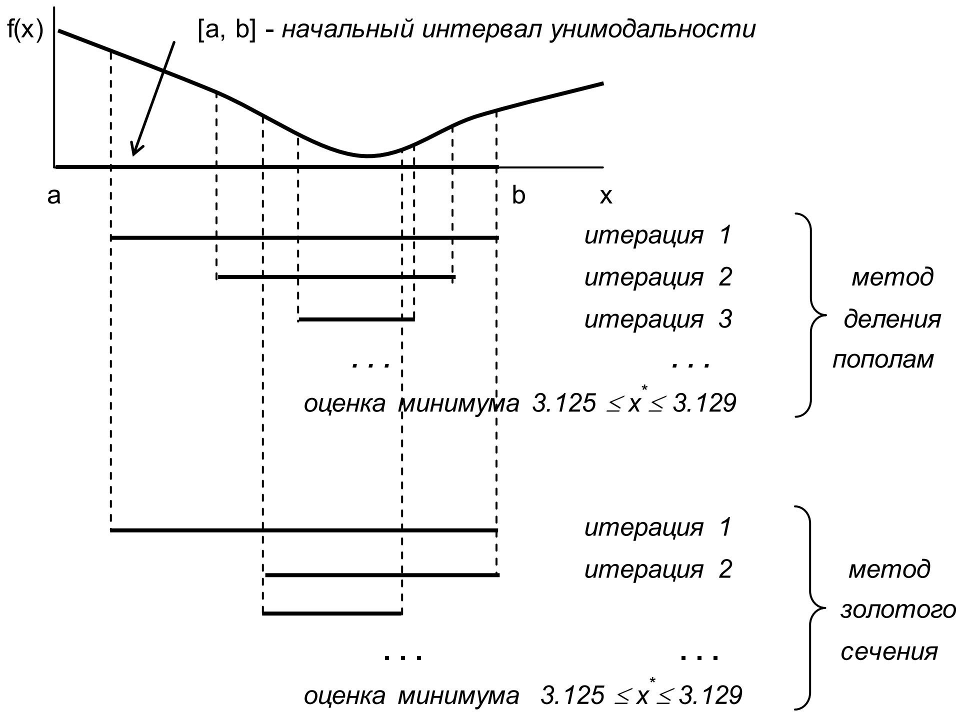


**Рис. 1.6.** (самостоятельно дайте название этому рисунку)

### 8.3.2. Оценка эффективности интервальных методов минимизации

Сравните исследуемые методы по количеству итераций (или по количеству вычислений функции).

Эксперименты проведите только с функцией $f_1$ для следующего ряда требуемой точности $\varepsilon$ оценки точки минимума:

$$\varepsilon=\{ 0.1, 0.075, 0.05, 0.025, 0.01, 0.001, 0.0001, 10^{-6}\}.$$

Начальный интервал $[a, b]$ задайте равным [2, 6].

Поясните полученные результаты; соответствуют ли они теоретическим?

### 8.3.3. Метод квадратической аппроксимации

Методом квадратической аппроксимации (программы **Odn_1, Odn_4**) найдите оценки точки минимума для следующих вариантов расположения пробных точек:

*для функции $f_1$*: вариант №1 $x_1 = 2.0$, $x_2 = 4.0$, $x_3 = 6.0$;
вариант №2 $x_1 = 2.0$, $x_2 = 5.0$, $x_3 = 6.0$;
вариант №3 $x_1 = 3.0$, $x_2 = 4.0$, $x_3 = 5.0$;

*для функции $f_2$*: вариант №1 $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2.0$;
вариант №2 $x_1 = -2$, $x_2 = -1.5$, $x_3 = 2.0$;
вариант №3 $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$.

Постройте графики аппроксимационных полиномов для всех вариантов пробных точек на фоне соответствующих функций *$f_1$ и $f_2$*.

Поясните полученные результаты; каким путем можно повысить точность квадратической аппроксимации?

## 8.4. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ

### 8.4.1. Программирование методов

Самостоятельно запрограммируйте следующие методы минимизации функций $f_1$ и $f_2$ с использованием производных

- метод Ньютона-Рафсона;
- метод средней точки (Больцано);
- метод секущих.

В качестве входных параметров используйте значения [a, b] интервала унимодальности и точность минимизации $\varepsilon$.

Выходными данными программ должна быть последовательность точек минимизации $x_k$, k = 1,2, ….

В качестве инструментария используйте либо какой-нибудь язык программирования, наиболее удобный для Вас, либо Mathcad.

Представьте в отчете листинги (исходные коды) соответствующих программ или проектов.

### 8.4.2. Исследование методов Ньютона-Рафсона, средней точки, секущих и Вегстейна

После составления соответствующих программ (или проектов Mathcad) нужно провести ряд вычислений по минимизации функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ с целью сравнения эффективности этих методов.

В качестве начальных точек :

- для $f_1(x)$ задайте $x_0$=2.0, а затем $x_0$=6.0 т.е. точки, которые являются началом и концом одного из рассматриваемых выше интервала унимодальности;
- для $f_2(x)$ задайте $x_0$=0.0, а затем $x_0$=1.2.
- если найденные оценки точки минимума не будут удовлетворять Вас, самостоятельно подберите точку (или точки), из которых процесс поиска минимума будет сходиться к искомой точке минимума.

Для всех экспериментов по данному пункту лабораторной работы точность поиска должна быть равной $\varepsilon=10^{-6}$.

## 8.5. ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

На основании проведенных вычислительных экспериментов сделайте выводы по работе, затронув вопросы сравнительной эффективности методов, сложности алгоритмов, зависимости сходимости от начальной точки и т.д.