Московский Авиационный Институт
(Технический университет)

Кафедра 308

Дисциплина:

«Теория и методы оптимизации»

Лабораторная работа №5
«Линейное программирование»

(методические указания)

Составил доцент, к.т.н. В.Г.Герасименко

Москва, 2006г.

Работа 4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Три практические задачи линейного программирования
Графический метод решения
Симплекс метод
Анализ решения на чувствительность

1. Введение.

В данной работе нужно **самостоятельно сформулировать и решить** 3 задачи линейного программирования (ЛП), соответствующие 3-м разным типам задач.

Решение этих 3-х задач нужно найти:

- графическим и
- симплекс методом.

После решения этих задач требуется:

- провести анализ полученного решения на чувствительность;
- написать выводы по работе.

Основной теоретический материал по линейному программированию, методы решения содержится в лекциях по данному курсу, а также в рекомендованной литературе.

Приступая к выполнению работы, прежде всего, определим, что в рамках данной работы в **формулировку** задачи ЛП входит две ее формы:

- **словесное описание**, которое определяет физический (или практический) смысл задачи;
- **формальная запись задачи** в виде аналитической целевой функции и ограничений, которая называется математической моделью.

Выдвинутое выше требование о том, чтобы задача имела словесное описание с определенным физическим смыслом, здесь введено для того, чтобы студент мог практически интерпретировать не только оптимальное решение, но и смысл процедур анализа решения на чувствительность. Кроме того, конкретную практическую задачу легче «защищать» при сдаче отчета преподавателю.

Для того, чтобы научиться самостоятельно формулировать задачи линейного программирования практической направленности, вначале нужно уметь **классифицировать** задачи ЛП.

В теории и практике линейного программирования принято разделять задачи ЛП на **3 типа** задач, которые перечислены ниже.

Именно эти 3 типа задач вы должны сформулировать, решить и проанализировать на чувствительность.

1. Задачи **первого типа** связаны с нахождением оптимального плана использования ограниченного количества сырья (или «комплектующих»

изделий) для производства некоторой продукции. Такой план **максимизирует доход** от реализации продукции. Задачи этого типа называются **задачами об использовании сырья**.

2. Ко **второму типу** можно отнести задачи нахождения оптимального набора продуктов, которые нужно включить в рацион для питания. Такой набор минимизирует стоимость этого рациона, обеспечивая требуемое качество питания. Это **задачи о рационе**.
3. **Третий** тип – **транспортные задачи**. В них требуется перевезти груз со складов до пунктов назначения за минимальную стоимость, причем общее количество грузов, подлежащих отправке, равно количеству грузов, поступающих в пункты назначения

Теперь сделаем следующий шаг к изучению стадии формулирования задач линейного программирования: **конкретизируем описание и формализацию** вышеперечисленных типов задач.

- **Задача об использовании сырья**.

Для изготовления продукции видов A_1, A_2, …, A_n используется сырье видов B_1, B_2, …, B_m. Запасы этого сырья ограничены и составляют соответственно b_1, b_2, …, b_m.

Пусть далее a_j означает количество единиц сырья вида B_i, необходимое для изготовления единицы продукции вида A_j.

Наконец, обозначим c_j доход, получаемый от сбыта (продажи) единицы продукции вида A_j.

Требуется составить такой план выпуска продукции видов A_1, A_2, …, A_n, при котором доход от сбыта всей этой продукции будет максимальным.

Полезно свести данные задачи в таблицу 4.1.

Таблица 4.1.

Сырье	**Продукция**						**Запасы сырья**
	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n	
B_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
B_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
Доход	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	

Далее, запишем задачу в аналитическом, «формульном» виде.

Обозначим через x_j количество единиц продукции вида A_j, которое мы должны производить.

Тогда при сбыте этой продукции получим доход равный

$c_j x_j$ единиц стоимости (например, *рублей*), а общий доход от сбыта всей продукции будет равен

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ ед. стоимости.}$$

Количество сырья вида B_i, необходимое для изготовления x_j единиц продукции вида A_j равно

$$a_{ij}x_j,$$

при этом общее количество сырья вида B_i, необходимое для изготовления всей продукции всех видов, равно

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ .$$

Но так как имеется только ограниченное количество b_i сырья каждого i-го вида, то должно выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i.$$

Теперь ясно, что решение данной задачи будет заключаться **в максимизации дохода**, выражаемого линейной целевой функцией:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при системе линейных ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i.$$

Примечание.

1). Знак неравенства в системе ограничений означает, что наибольший доход может быть получен и в том случае, когда сырье вида B_i используется не полностью.

2). По смыслу задачи значения переменных x_i всегда неотрицательны. Это типично для задач ЛП.

Теперь **рассмотрим второй тип** задач ЛП.

- **Задача о составлении рациона**.

Для откорма некоторых животных используются корма видов A_1, A_2, …, A_n, в которых находятся питательные вещества видов B_1, B_2, …, B_m и пусть установлено, что в суточном рационе животных питательного вещества вида B_i должно быть не менее b_i единиц.

Пусть далее a_{ij} означает количество единиц питательного вещества вида B_i, содержащегося в единице корма вида A_j, при этом c_j означает стоимость единицы корма вида A_j.

Данные этой задачи о рационе сведем в табл. 4.2.

Таблица 4.2.

Питательные вещества	**Корма**						**Минимальная норма**
	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n	
B_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
B_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
Стоимость	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	

Сравнивая таблицы 4.1 и 4.2, мы видим, что их структура идентична, обозначения элементов таблиц также одинаковы, и только названия столбцов разные из-за разного физического содержания задач. Кроме того, различается цель – в первом случае необходимо найти максимум, во втором – минимум.

Наконец, обсудим последний, **третий тип** задач линейного программирования.

- **Задача транспортного типа.**

Пусть требуется перевезти некоторый однородный груз в пункты

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

из пунктов

$$B_1, B_2, \dots, B_m,$$

причем потребность в этом грузе в пунктах назначения соответственно равна $a_1, a_2, \dots, a_n$ единиц.

Запасы груза в пунктах отправления соответственно равны $b_1, b_2, \dots, b_m$. При этом нужно перевезти весь груз, что формально запишется в виде балансового уравнения:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1, + b_2 + \dots + b_m$$

Далее обозначим c_{ij} стоимость перевозки единицы груза из пункта отправления B_i в пункт назначения A_j.

Требуется найти такой план перевозок, при котором общая стоимость будет минимальной.

Данные этой задачи сведем в табл. 4.3.

Таблица 4.3.

Пункты отправления	**Пункты назначения**						**Запасы груза**
	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n	
B_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	b_1
B_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
B_i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…
B_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	b_m
Потребности в грузе	a_1	a_2	…	a_j	…	a_n	

Формально транспортная задача запишется исходя из следующих соображений.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, перевозимого из пункта B_i в пункт A_j, и проанализируем ограничения задачи.

Количество единиц груза, ввозимого в пункт A_j, равно $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$.

Но так как в пункт A_j требуется ввезти a_j единиц груза, то должно выполняться ограничение – равенство

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j.$$

С другой стороны, количество единиц груза, вывозимого из пункта B_j равно

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}.$$

Коль скоро нужно вывезти весь груз, то должно выполнятся второе равенство-ограничение:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i.$$

Закончив с ограничениями, перейдем к целевой функции задачи.

Ясно, что стоимость одной перевозки груза равна $c_{ij}x_{ij}$, а общая стоимость всех перевозок представляется выражением:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}.$$

Таким образом, транспортная задача заключается в том, чтобы минимизировать f(x) при вышеуказанных ограничениях-равенствах.

2. Этапы постановки задачи линейного программирования.

Как же самостоятельно сформулировать учебную задачу линейного программирования с вполне определенным физическим содержанием?

Очевидно, нужно мысленно смоделировать некоторую конкретную ситуацию, связанную либо с производством некоторых изделий, рационов питания (смесей), либо с транспортировкой груза – в зависимости от того, какой Вы сделали выбор из трех вышеперечисленных типов задач.

Кроме того, ясно, что для двумерных задач, которые изучаются в данной работе, количество видов изделий (или рационов, складов-источников) должно быть равно двум, а количество ограничений неравенств не менее семи (включая простые ограничения на переменные).

Далее нужно описать некоторый технологический процесс, например, комплектации автомашин определенными деталями. На первой стадии постановки формулировки задачи может быть нет необходимости задавать конкретные цифры, а обойтись обозначениями предельных значений лимитирующих условий.

- **Пример.** Предположим, что механический цех производит 2 типа деталей для автомобилей А и В. Максимальные производственные мощности цеха (за определенное время) позволяет изготавливать 600 деталей для автомашин типа А или 1200 деталей для машин типа В. В свою очередь, производственная мощность сборочного цеха составляет 1200 машин типа А или 800 типа В. Задача состоит в том, чтобы найти такой план выпуска автомашин, который обеспечит максимум общей выручки за реализацию автомашин, при условии, что цена обоих типов машин одинакова.

Конечно, без графического анализа трудно оценить корректность данной словесной формулировки. Поэтому словесная формулировка должна сопровождаться графическими построениями.

Графическая иллюстрация рассматриваемого примера окончательно выглядит так, как это изображено на рис. 1.

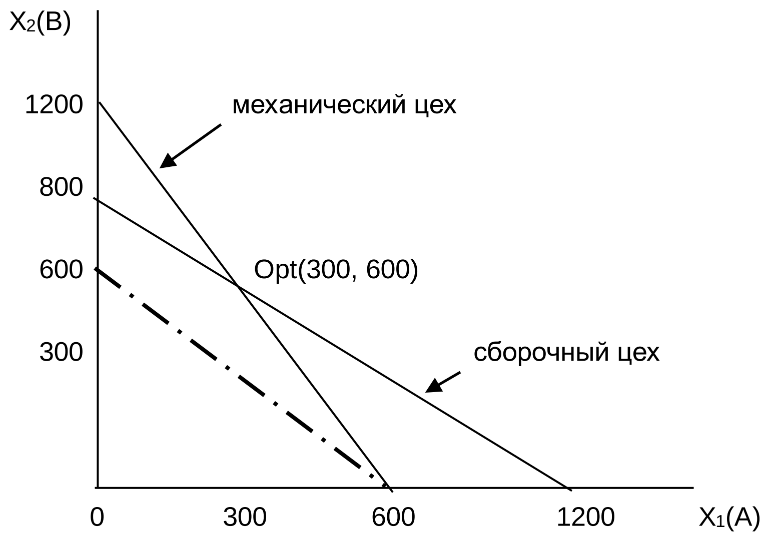

Рис. 1. Графическая иллюстрация примера о производстве автомобилей

Далее приведем решение конкретной задачи линейного программирования.

3. Пример решения задачи линейного программирования.

Прежде чем приступать к выполнению практической части работы, полезно проанализировать и решить следующую задачу линейного программирования.

Пусть автозавод производит два типа автомобилей – А и В.

Производственные мощности отдельных цехов (за определенное время) ограничены следующими максимальными количествами (в шт.):

Фазы производства автомобилей	Тип А	Тип В
Подготовка производства автомобилей типа А	75	-
Подготовка производства автомобилей типа В	-	70
Кузовной цех	80	320
Цех шасси	110	110
Цех двигателей	140	120
Сборочный цех	160	80
Участок испытаний	280	70

Необходимо определить производственную программу, оптимальную с точки зрения максимальной прибыли, при условии, что прибыль, получаемая от продажи на рынке автомобилей типа А составляет 10000$ на один автомобиль, а от продажи машин типа В – 12000$.

Решение. Формально (аналитически) эта задача записывается так (***проверьте!***):
требуется максимизировать функцию прибыли $10000x_1 + 12000x_2$
при ограничениях

$$
\begin{aligned}
x_1 + 0x_2 &\le 75, \\
0x_1 + x_2 &\le 70, \\
4x_1 + x_2 &\le 320, \\
x_1 + x_2 &\le 110, \\
6x_1 + 7x_2 &\le 840, \\
x_1 + 2x_2 &\le 160, \\
x_1 + 4x_2 &\le 280.
\end{aligned}
$$

Решите эту задачу графическим способом, и проанализируйте ограничения на избыточность.

После того, как изучена теоретическая часть, можно выполнять собственное задание согласно практической части.

4. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Самостоятельно сформулируйте **3 двумерные задачи** линейного программирования.

Согласуйте свои формулировки задач с преподавателем.

В каждой задаче должно быть **не менее 5 ограничений-неравенств** (не считая простых ограничений $x_i \geq 0$).

Как уже говорилось выше, каждую задачу нужно вначале описать **словесно, а потом дать аналитическую** формулировку.

2. Решите задачи **графическим** способом.

3. Решите какую-либо **одну задачу симплекс методом**, представив в отчете все стадии решения.

4. Для какой-либо одной задачи дайте **графический способ** анализа решения на чувствительность.