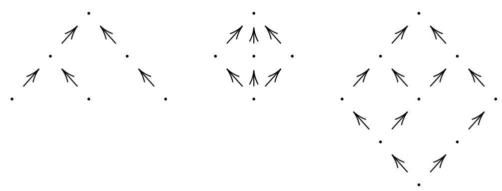
Devoir Maison

30 septembre 2016

1 Treillis et compagnie

Question 1 Parmis les ordres ci-dessous, lesquels sont des treillis complets ? L'ensemble vide est-il un treillis ?



Question 2 Montrer que si $(P, \leq)$ a tous les suprema, alors P est un treillis complet.

Question 3 Soit $f : P \to P'$ une fonction entre treillis complets. Si f préserve tous les suprema, f préserve-t-elle nécessairement tous les infima ?

Question 4 Soit X un ensemble quelconque, P un treillis complet et $f : X \to P$ une application. Montrer qu'il existe une unique application $\tilde{f} : \mathcal{P}(X) \to P$ tel que $\tilde{f}(\bigcup A) = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ et $f(x) = \tilde{f}(\{x\})$.

Question 5 Rappeler la preuve du théorème de Knaster-Tarski.

2 Relations bien fondées

Définition 1 *Soit $R \subseteq A \times A$ une relation arbitraire.*

x est un élément minimal de $X \subseteq A$ pour R si pour tout $y \in X$, $y \; R \; x$ implique $x = y$.

Une relation $R \subseteq A \times A$ est bien fondée dès que toute partie $X \subseteq A$ admet un élément minimal.

Question 6 Donner un exemple et un contre-exemple de relation bien fondée.

Question 7 Montrer que toutes les relations bien fondées sont irréflexives.

Question 8 Montrer que la cloture transitive d'une relation bien fondée est une relation bien fondée.

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation. On définit $Acc(R) \subseteq A$ l'ensemble des éléments de a accessibles par R par la règle inductive suivante (x est fixé) :

Si pour tout y tel que $y \; R \; x$ on a $y \in Acc(R)$, alors $x \in Acc(R)$.

Question 9 Expliquer comment légitimer cette définition via le théorème de Knaster-Tarski. Quel est le principe d'induction associé ?

Question 10 Instancier cette définition sur $\mathbb{N}$ muni de la relation $\{(x, x+1), x \in \mathbb{N}\}$. Que remarquez-vous sur le principe d'induction associé ?

Question 11 Montrer que si $Acc(R) = A$ si et seulement si R est une relation bien fondée.

3 Induction up-to

4 Un énième théorème de point fixe

Définition 2 *Soit $(A, \leq)$ un ordre partiel.*

Une partie $X \subseteq A$ est dirigée *si tout $x, y \in A$ admettent un majorant commun.*

On appelle A un dCPO *si toutes les parties dirigées de A admettent un supremum.*

Le but de cet exerice est de démontrer le théorème suivant (qui est une généralisation du théorème de Knaster-Tarski).

Théorème 1 *Soit $(U, \leq)$ un* dCPO *et $f : U \to U$ une fonction monotone. f admet un plus petit point fixe.*

Pour le restant de l'exercice, supposons que $(U, \leq)$ est un dCPO.

Question 12 Remarquer que tout dCPO admet un plus petit élément $\perp$.

Définition 3 *Si $(P, \leq)$ est un ordre, une fonction $f : P \to P$ sera appelée* gonflante *si $\forall x \in P \; x \leq f(x)$.*

Question 13 Montrer que la composée de deux fonctions monotones et gonflantes est une fonction monotone et gonflante.

Définition 4 *X est un* dCPO *induit par $(U, \leq)$ si $X \subseteq U$, $\perp \in X$ et que les suprema dans X et U pour $\leq$ sont les mêmes.*

Question 14 Démontrer que $A := \{x \in U \mid x \leq f(x)\}$ est un dCPO induit par U. Que remarquez-vous sur l'ensemble $\mathsf{Fix}(f)$ des points fixes de f ?

À l'aune de cette dernière remarque, on se ramène au cas où $A = U$. **En conséquence, f sera désormais supposée gonflante sur U.**

Quêtons des points fixes.

Question 15 Montrer que U^U est un dCPO pour l'ordre point à point (que l'on notera aussi $\leq$).

Question 16 Posons G l'ensemble des fonctions de U^U qui sont à la fois monotones et gonflantes. Montrer que G est un dCPO induit par U^U. Quel est son plus petit élément ?

Question 17 Montrer que G est dirigée. En conclure qu'il existe un plus grand élément $\top \in G$.

Question 18 Montrer que pour tout $x \in U$, $\top(x)$ est un point fixe de f.

Question 19 Exhiber un exemple où $\top(x)$ n'est pas le plus petit point fixe de f, et ce quelque soit le x choisi.

C'est frustrant. Mais retenons que l'on a quand même prouvé le lemme suivant.

Lemme 1 *Toute fonction monotone sur un* dCPO *admet un point fixe.*

Question 20 Appelons $\mathcal{D}(U)$ l'ensemble des dCPO induits par U. Montrer que $\mathcal{D}(U)$ est stable par intersection (et donc un treillis complet).

U est trop gros.

Question 21 Montrer qu'il existe un plus petit dCPO que l'on nommera S induit par U et stable par f (c'est à dire $f(S) \subseteq S$). Appliquer notre lemme à S et conclure.