UDESC Joinville
Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática

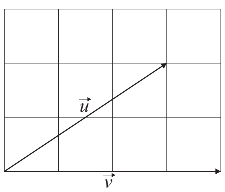
Álgebra Linear e Geometria Analítica I - ALG1002
Geometria Analítica - GAN0001
Lista 1: Vetores
Prof. Jeferson Zappelini Petry

1. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar num gráfico um representante do vetor:

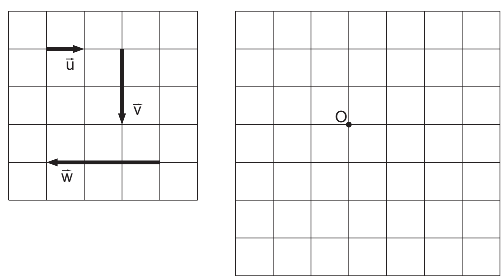
   (a) $\vec{u} - \vec{v}$

   (b) $\vec{v} - \vec{u}$

   (c) $\vec{u} + \dfrac{3}{4}\vec{v}$



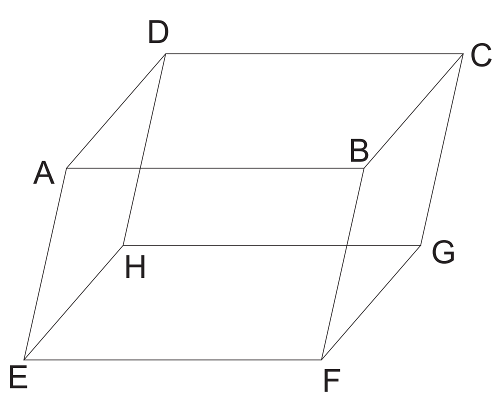
2. Represente o vetor $\vec{x} = -2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}$ com origem no ponto O da figura abaixo, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como na figura.



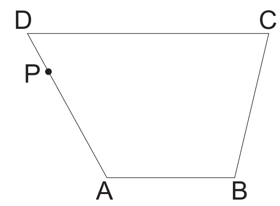
3. Com base no paralelepípedo representado a seguir determine os seguintes vetores usando H como origem.

   (a) $(E - F) + (B - D) + (C - D)$

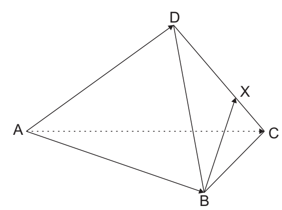
   (b) $-(G - B) + (B - A)$



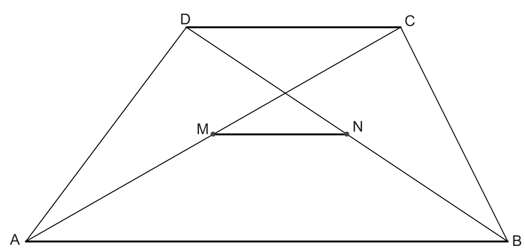
4. Dado o trapézio $ABCD$ em que $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\vec{DC} = 2\vec{b}$ e $\overrightarrow{DP} = \dfrac{\overrightarrow{DA}}{4}$, expressar $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CP}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



5. Considere o tetraedro $ABCD$ dado a seguir, em que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{c}$ e $\overline{CX} = \dfrac{1}{3}\overline{DC}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{BX}$ em função dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$.



6. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente, do trapézio $ABCD$ representado na figura abaixo.



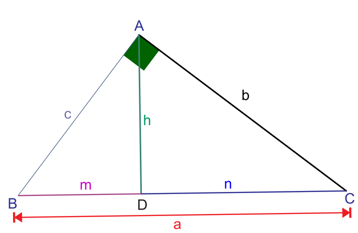
Sendo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, escreva o vetor $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

7. Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e tem a metade de sua medida.

8. No triângulo retângulo abaixo, demonstre vetorialmente as seguintes relações:

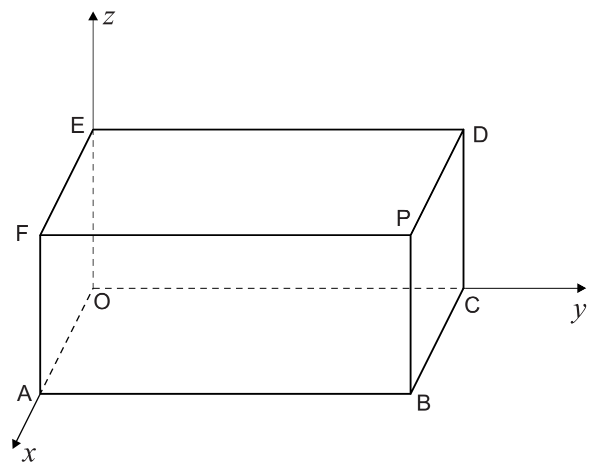
   (a) O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa, ou seja $b^2 = an$ e $c^2 = am$.

   (b) O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja, $h^2 = mn$



9. Prove que as diagonais de um losango são ortogonais entre si.

10. No paralelepípedo da figura abaixo tem-se que $P(2, 4, 3)$.



Determine:

(a) os pontos $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ e O.

(b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}$.

(c) $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{PB}$.

(d) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OE}$.

11. Determine a origem A do segmento que representa o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$, sendo sua extremidade o ponto $B(0, 4, 2)$.

12. Determine o ponto do eixo das ordenadas equidistante dos pontos $A(1, -1, 3)$ e $B(2, 2, 1)$.

13. Prove que o triângulo $A(1, 2, 0)$, $B(4, 0, -1)$ e $C(2, -1, 2)$ é equilátero.

14. Determine os pontos do plano xz cuja distância ao ponto $A(1, 1, 0)$ é 2 e ao ponto $B(2, 0, 1)$ é 3.

15. Determine o ponto P pertencente ao eixo z e equidista dos pontos $A(2, 3, 0)$ e $B(0, 1, 2)$.

16. Dados os vértices $A(9, -5, 12)$ e $B(6, 1, 19)$ de um paralelogramo $ABCD$ e $P(4, -1, 7)$ o ponto de interseção de suas diagonais determine os vértices C e D.

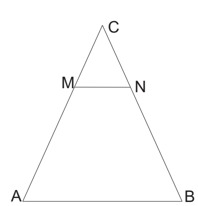
17. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$ expresse $\overrightarrow{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

18. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$ determine o vetor $\vec{w}$ tal que $4(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} - 2\vec{w}$.

19. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $60°$, determinar o ângulo formado pelos vetores $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$.

20. Determine a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3, a, b)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(-3, 13, 7)$.

21. Na figura abaixo tem-se $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA}}{3}$ e $\overrightarrow{CN} = \dfrac{\overrightarrow{CB}}{3}$. Prove que os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, e que o comprimento do primeiro é $\dfrac{1}{3}$ do comprimento do segundo.



22. Sabendo que a distância entre os pontos $A(-1,2,3)$ e $B(1,-1,m)$ é 7 determine o valor de m.

23. Determine α para que o vetor $\vec{u} = (\frac{\sqrt{11}}{4}, -\frac{1}{2}, \alpha)$ seja unitário.

24. Prove que os pontos $A(5,1,5)$, $B(4,3,2)$ e $C(-3,-2,1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

25. Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, sabendo-se que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ e $|\overrightarrow{u}| = 2$, $|\overrightarrow{v}| = 3$ e $|\overrightarrow{w}| = 4$.

26. Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ e $-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, sabendo-se que $|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{c}| = 1$ e $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ são mutuamente ortogonais.

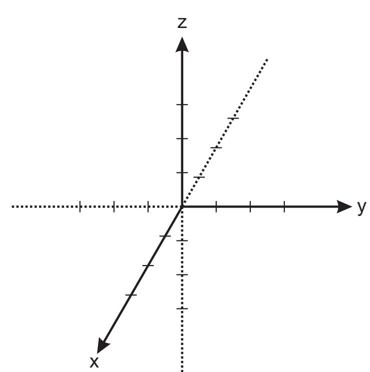
27. Um jovem parte de um ponto A, caminha 100 metros para norte, até um ponto B; em seguida, orienta-se para o leste e caminha mais 50 metros do ponto B até um ponto C.
    (a) Determine o módulo do deslocamento resultante.
    (b) Encontre o ângulo formado pelo entre vetor que representa o deslocamento resultante e o vetor $\overrightarrow{AB}$.

28. Encontre o vetor $\overrightarrow{w}$ de forma que $\overrightarrow{w}$ seja paralelo ao vetor $\overrightarrow{r} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, sendo $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = (1,3,-2)$, $|\overrightarrow{w}| = 6$ e $\overrightarrow{w}$ forme um ângulo agudo com o eixo das abscissas.

29. Dado o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B, determine a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa AC, sendo $A(0,0,2)$, $B(3,-2,8)$ e $C(-3,-5,10)$.

30. Considere os pontos $A(2,4,1)$, $B(3,3,5)$ e $C(2,1,3)$.
    (a) O triângulo determinado pelos pontos ABC é retângulo? Justifique.
    (b) Determine a área do triângulo ABC.

31. Calcule $\vec{x} = \vec{j} \times 2\vec{i}$, determine o versor de $\vec{x}$ e represente no gráfico abaixo os vetores $\vec{x}$ e seu versor.



32. Calcule o valor de a para que o vetor $\overrightarrow{v} = \left(-28, 0, -\frac{7}{2}\right)$ seja mutuamente ortogonal aos vetores $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{u} = (a-1)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

33. Os pontos $A(2,1,-1)$, $B(-1,3,1)$ e $C(0,-1,2)$ formam um triângulo.
    (a) Determine a projeção do lado AB sobre o lado CA.
    (b) Obtenha, se possível, o valor de c para que o vetor $\overrightarrow{v} = (3c+4, -2, 9)$ seja colinear ao vetor projeção.

34. Calcule a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3,2,1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1,1,-1)$ e $C(0,1,2)$.

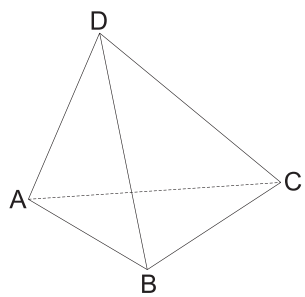
35. Determine o vetor unitário ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u} = (2,3,-1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,1,2)$.

36. Verifique se os pontos $A(2,1,3)$, $B(3,2,4)$, $C(-1,-1,-1)$ e $D(0,1,-1)$ são coplanares.

37. Determine o valor de k para que os seguintes vetores sejam coplanares: $\vec{a} = (2,k,1)$, $\vec{b} = (1,2,k)$ e $\vec{c} = (3,0,-3)$.

38. Calcule o volume de um paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, onde $\overrightarrow{u} = (-1,2,3)$, $\overrightarrow{v} = (2,-1,3)$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$.

39. Considere o tetraedro $ABCD$, ilustrado a seguir, cujos vértices da base são: $A(2,2,-1)$, $B(3,2,1)$ e $C(2,1,0)$. Calcular as coordenadas do vértice D, sobre o eixo x, de forma que o volume do tetraedro seja 8 unidades.



40. Considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, tais que $\vec{u} = (1,-1,4)$, $|\vec{w}| = 6$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é $\dfrac{\pi}{3}$. Determine:

    (a) a projeção do vetor $\vec{w}$ sobre o vetor $\vec{u}$.

    (b) a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$ e $\vec{b} = \vec{u} - \vec{w}$.

41. Considere os pontos $A(1,1,1)$, $B(-2,-1,-3)$, $C(0,2,-2)$ e $D(-1,0,-2)$. Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

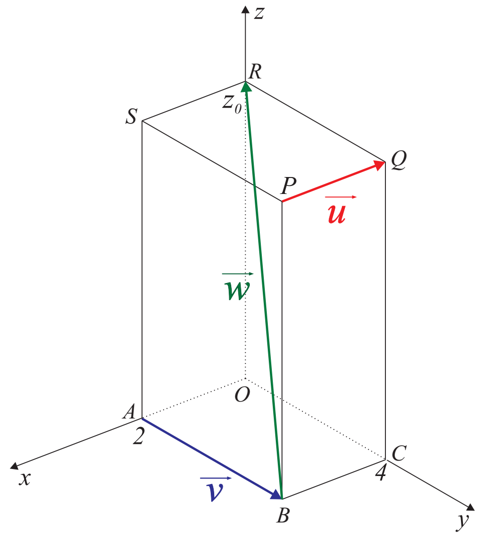
    (a) Os pontos A, B, C e D são vértices de um tetraedro com volume igual a 6 u.v..

    (b) O vetor $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ é um representante do versor de $\overrightarrow{BD}$.

    (c) Os pontos B, C e D são colineares.

42. Determine um vetor que tenha módulo igual a $\sqrt{44}$, que esteja no segundo octante e que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = (1,2,1)$.

43. Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na figura a seguir.



(a) Determine as coordenadas do ponto P para que o volume do tetraedro definido por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a 4 u.v.

(b) (1 ponto) Sabendo que $\vec{q}$ é um vetor unitário e que forma um ângulo de $\dfrac{\pi}{6}$ rad com o vetor $\vec{v}+2\vec{u}$, calcule a área do triângulo construído sobre $\vec{q}$ e $\vec{v}+2\vec{u}$.

44. Considere os vetores $\overrightarrow{v_1}=(2,-4,4)$ e $\overrightarrow{v_2}=(3,0,3)$. Determine:

(a) o módulo dos vetores $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ que satisfazem as seguintes condições: $\overrightarrow{w_1}$ é paralelo a $\overrightarrow{v_1}$; $\overrightarrow{w_2}$ é ortogonal a $\overrightarrow{v_1}$; e $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}$.

(b) o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, sendo $\overrightarrow{w_1}$ o vetor que satisfaz as relações do item (a).

45. Classifique as seguintes afirmações em verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores unitários que formam um ângulo de $60°$, então os vetores $\vec{u}+2\vec{v}$ e $5\vec{u}-4\vec{v}$ são ortogonais.

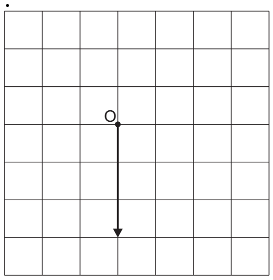
(b) Os pontos $A(1,1,1)$, $B(-2,-1,-3)$, $C(0,2,-2)$ e $D(-1,0,-2)$ são coplanares.

(c) Os vetores $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{k}$ e $\vec{w}=-2\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$, nesta ordem, formam uma base positiva (ou um triedro positivo) com $\vec{w}$ ortogonal ao plano definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

46. Calcule a área do paralelogramo construído sobre os vetores $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, sabendo que $|\overrightarrow{u}|=3$, $|\overrightarrow{v}|=4$, o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é $\frac{\pi}{4}$ e que $\overrightarrow{w}$ é a projeção do vetor $\overrightarrow{u}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$.

Respostas:

1.
2. .



3. (a) $\overrightarrow{HF}$; (b) $\overrightarrow{HB}$
4. $\overrightarrow{BD} = -(\vec{a} + 2\vec{b})$ e $\overrightarrow{CP} = \dfrac{\vec{a} - 7\vec{b}}{4}$
5. $\overrightarrow{BX} = -\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$
6. $\vec{u} = \dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$
7. Prove, usando soma de vetores, que $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}$, sendo M o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e N o ponto médio do lado $\overline{BC}$.
8. Use soma de vetores.
9. Use soma de vetores.
10. .
    (a) $A(2,0,0)$; $B(2,4,0)$; $C(0,4,0)$; $D(0,4,3)$; $E(0,0,3)$; $F(2,0,3)$; $O(0,0,0)$.
    (b) Zero, pois os vetores são ortogonais.
    (c) $-12\vec{i}$.
    (d) -24.
11. $A(-2,1,3)$
12. $\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$
13. Prove que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$
14. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$
15. $P(0,0,-2)$
16. $C(-1,3,2)$ e $D(2,-3,-5)$.
17. $\vec{w} = -2\vec{u} + 6\vec{v}$
18. $\vec{w} = \left(-\dfrac{13}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$

19. $120°$

20. $a = 1$ e $b = -2$

21. Dica: Use soma de vetores.

22. $m = 9$ ou $m = -3$

23. $\alpha = \pm\frac{1}{4}$

24. Dica: verifique que um dos ângulos é reto.

25. $\approx 75,52°$

26. $60°$

27. (a) 111,8m; (b) $\approx 26,56°$

28. $\vec{w} = (2, -4, 4)$

29. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

30. (a) Não (Justifique!); (b) $A = \frac{\sqrt{113}}{2}$u.a.

31. $\vec{x} = -2\vec{k}$ e versor de $\vec{x} = -\vec{k}$

32. $a = \frac{1}{2}$

33. (a) $\left(-\frac{16}{17}, -\frac{16}{17}, \frac{24}{17}\right)$; (b) não existe c.

34. $A = \sqrt{77}$u.a.

35. $\pm\left(\frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$

36. Sim.

37. $k = -3$ ou $k = 2$

38. Os pontos são coplanares, logo não há paralelepípedo definido.

39. $D\left(\frac{51}{2}, 0, 0\right)$ ou $D\left(-\frac{45}{2}, 0, 0\right)$

40. .

    (a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$

    (b) $18\sqrt{6}$u.a.

41. .

    (a) Falso, esses pontos são coplanares e não definem um tetraedro.

(b) Falso, é um representante do versor o vetor oposto a $\overrightarrow{BD}$, ou seja é um representante do versor de $\overrightarrow{DB}$.

(c) Falso, pois os vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são paralelos.

42. $(-6, 2, 2)$.

43. (a) $P(0, 0, 3)$

    (b) $\sqrt{2}$ u.a.

44. (a) $|\vec{w_1}| = |\vec{w_2}| = 3$

    (b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

45. (a) Verdadeira. Como justificativa prove que $(\vec{u} + 2\vec{v}) \perp (5\vec{5} - 4\vec{v})$.

    (b) Verdadeira. Como justificativa pode-se provar que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$

    (c) Falso. Pois $\vec{w} = -\vec{u} \times \vec{v}$, ou seja, a base é negativa.

46. $A = 9$ u.a.