

## Part I

# Introducció a la teoria de grafs

Aquest primer apartat consisteix en la part més teòrica del treball. Explicarem breument l'història d'aquesta branca de la matemàtica i posteriorment ens endinsarem en la teoria de grafs com a tal. La teoria de grafs pot ser bastant abstracta i a vegades complicada d'entendre, però estarà acompanyada de demostracions i exemples propis que pretenen facilitar el seguiment del treball.

## 1 Història del grafs

### 1.1 Els primers passos

Tot sovint, les noves branques de la matemàtica sorgeixen de solucions a problemes. Problemes que no poden ser resolts ni demostrats amb el que coneixem, que forcen a desenvolupar nous mètodes i teories. La teoria de grafs no n'és una excepció i tot seguit presentaré els problemes determinants per a la creació d'aquesta branca.

#### Euler i els ponts de Königsberg

La teoria de grafs neix a partir de la solució de Leonhard Euler d'un problema curiós. Aquest matemàtic va reordre el problema dels ponts de la ciutat de Königsberg (l'actual Kaliningrad, Rússia), que diu així :

*“El riu Pregel divideix Königsberg en quatre parts separades, i connectades per set ponts. És possible caminar per la ciutat passant per tots els ponts tan sols una vegada?”*

Cap dels ciutadans de Königsberg ho havia aconseguit, i ja sabien que no era possible, però mai ningú ho havia demostrat fins que Euler ho va fer. La demostració de que això no era possible queda recollida en el “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” publicat el 1736, i l'article també va ser inclòs en el volum 8 de “*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*” publicat el 1741. En aquest text, Euler diu el següent:

*A més d'aquella part de la geometria que s'ocupa de les quantitats, la qual sempre ha generat un interès preferent, hi ha una altra part -encara pràcticament desconeguda- que ja fou esmentada per Leibniz amb el nom de geometria de la posició. Aquesta part de la geometria estudia tot allò que pot ésser determinat únicament per la posició, així com les propietats de la posició; en aquest camp hom no hauria de preocupar-se de quantitats ni de com obtenir-les. No obstant això, els tipus de problemes que pertanyen a aquesta geometria de posició i els mètodes usats per resoldre'ls encara no són ben definits. Així doncs, quan darrerament s'em va plantejar un problema que*

*semblava bàsicament geomètric, però que no demanava l'obtenció de quantitats ni admetia una sol·lució basada en el càlcul de quantitats, em vaig adonar que pertanyia a la geometria de la posició, sobretot perquè només es podia usar la posició per resoldre'l, mentre que el càlcul es mostrava inútil. Així, he decidit exposar ací, com a mostra de la geometria de la posició, el mètode que he deduït per a resoldre problemes d'aquesta mena."*

Per aconseguir demostrar que el problema no tenia sol·lució, Euler va haver de representar el problema com un mapa topològic, posant les masses de terra com a punts i els ponts com a segments que unien aquests punts, creant d'aquesta manera el primer graf de l'història. Aquest resultat es considera el primer en teoria de grafs, ja que conté un important teorema d'aquesta branca. A més d'iniciar la teoria de grafs, amb aquest resultat també comença l'estudi dels grafs planars, introdueix el concepte de característica d'Euler de l'espai i el teorema de poliedres d'Euler (teorema que després va utilitzar per demostrar que no hi havia més sòlids regulars que els sòlids platònics). Amb tot això, Euler posa les bases no tan sols de l'estudi dels grafs, sinó també de la topologia, una altra branca que també serà tractada en aquest treball.

### **Vandermonde i el tour del cavall**

A partir de l'article d'Euler, diversos matemàtics van començar a interessar-se pel camp de la topologia (o geometria de la posició, com li deien en aquell moment). Concretament hi ha un personatge important: Alexandre-Théophile Vandermonde. Vandermonde va treballar i estudiar el problema dels cavalls, que pregunta quins moviments hem de fer per tal que un cavall passi per totes les caselles del tauler d'escacs, problema a que també va tractar Euler. Els estudis que va fer sobre aquest problema van ser publicats el 1771 en el "*Remarques sur des problèmes de situation*", i per la relativa proximitat als treballs d'Euler, encara no parlava de grafs, tot i que ara el problema es resol mitjançant aquests. Aquest treball inicia l'estudi de la teoria de nusos, una altra branca de la topologia.

## **1.2 Les primeres descobertes i aplicacions**

Un cop establert l'inici, és difícil veure com va continuar desenvolupant-se la teoria, ja que en els primers treballs volien resoldre problemes concrets, sense buscar la relació entre ells. Tot i així durant el segle XIX es van plantejar una gran quantitat de problemes i es van desenvolupar molts teoremes respecte els grafs.

### **Francis Guthrie**

El 1852 aquest matemàtic britànic es planteja el següent problema mentres intenta pintar un mapa del regne unit:

*“És possible pintar qualsevol mapa de països de tal manera que un país tingui un color diferent al de tots els seus veïns, utilitzant tan sols quatre colors?”*

D'aquest problema en surt el teorema de que qualsevol mapa pot ser pintat únicament amb quatre colors diferents, de tal manera que dues regions adjacents no tinguin colors iguals. Aquest problema que pot semblar tan trivial no va ser demostrat fins l'any 1976. Va passar per mans de personatges com De Morgan, Hamilton, Cayley, Kempe (que va fer una demostració publicada el 1879), Heawood (que va demostrar que la demostració de Kempe no era correcta)... Finalment el 1976 Appel i Hanken van demostrar a través d'un programa d'ordinador que tot mapa es podia pintar només amb quatre colors. Pel fet de basar la demostració en un programa d'ordinador, molta gent no va acceptar la demostració. Així doncs, aquest problema no va ser solucionat de manera formal 1996 quan, recorrent a la teoria de grafs ja desenvolupada, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas van publicar una demostració. En els treballs d'Appel i Hanken es van definir alguns dels conceptes i fonaments de l'actual teoria de grafs.

### **Arthur Cayley**

Arthur Cayley, matemàtic que treballava en la teoria de grups, topologia i combinatoria, també va aportar una gran quantitat de coneixement a la branca. Va treballar amb grafs de tipus arbre i va desenvolupar, la fórmula  $n^{n-2}$ , que determina el nombre d'arbres expansius que té un graf complet de  $n$  vèrtex. Una fórmula semblant apareixia en treballs de Carl Wilhelm Borchardt, en els quals Cayley es va basar i va estendre, però el que actualment dona nom a la fórmula és el mateix Cayley.

També va treballar en desenvolupar una representació de l'estructura abstracta d'un grup, creant els grafs de Cayley i el teorema de Cayley referent a aquests. Finalment, Cayley va contribuir també el 1857 en la representació i enumeració dels isòmers alcans (composts químics que comparteixen fórmula o composició però tenen diferent estructura molecular), representant cada compost mitjançant un graf de tipus arbre. Tot i això, Cayley no només va ser actiu en teoria de grafs, sinó que també va desenvolupar teoremes en àlgebra lineal, topologia i geometria.

### **William Hamilton i Thomas Kirkman**

William Rowan Hamilton va plantejar un problema el 1859 que consistia en trobar un camí que passés pels 20 vèrtex d'un dodecaedre una sola vegada a través de les seves arestes. Hamilton va comercialitzar el joc sota el nom de “The Icosian game” (és important dir que el nom de icosian no va ser degut a que utilitzés un icosaedre, sinó que feia referència als 20 vèrtex del dodecaedre per on s'havia de passar). Entorn aquest joc existeix una gran controvèrsia, ja que Euler va plantejar un problema semblant mentre estudiava el problema dels

cavalls, i Kirkman va plantejar exactament el mateix problema que Hamilton a la Royal Society un temps abans.

### **Gustav Kirchhoff**

Gustav Kirchhoff, conegut majoritàriament en el camp de l'electrotècnia per les seves lleis de Kirchhoff, també va fer aportacions importants en teoria de grafs. Les seves lleis, publicades el 1874, es basen en la teoria de grafs, però a més, va ser el primer d'utilitzar els grafs en aplicacions industrials. Va estudiar sobretot els grafs de tipus arbre i, amb l'investigació que va dur a terme sobre aquest tipus de grafs, va formular el teorema de Kirchhoff, sobre del nombre d'arbres d'expansió que es poden trobar en un graf. Aquest teorema es considera una generalització de la fórmula de Cayley.

## **1.3 Teoria de grafs moderna**

Durant el segle XX, la teoria de grafs es va anar desenvolupant més. Amb les bases ja establertes durant el segle XIX, els matemàtics hi van començar a treballar i el 1936 Dénes König va escriure el primer llibre de teoria de grafs. Frank Harary va escriure un altre llibre el 1969, que va fer accessible la teoria de grafs a àmbits diferents a les matemàtiques. El desenvolupament de l'informàtica i les noves tècniques de computació van permetre treballar amb grafs a molt més gran escala, fent possible, per exemple, la primera demostració del teorema dels quatre colors per Appel i Haken.

Actualment la teoria de grafs és una part molt important de la matemàtica discreta i està relacionada amb molts àmbits diferent, com per exemple la topologia, la combinatòria, la teoria de grups, la geometria algebraica... Des del seu desenvolupament s'han utilitzat els grafs per resoldre i representar de manera visual problemes en aquests camps. Té aplicacions en molts altres àmbits com per exemple la computació, l'informàtica, la física, la química, l'electrònica, les telecomunicacions, la biologia, la logística i fins i tot en l'àmbit econòmic.

## **2 Principis bàsics**

Un graf  $G = (V, E)$  es defineix com un conjunt de vèrtex (o nodes)  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i un conjunt d'arestes  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , que uneixen dos vèrtexs  $v_i$  i  $v_j$ , tals que  $v_i, v_j \in V$ . És a dir: un graf està format per un conjunt de punts i un conjunt d'arestes que uneixen alguns d'aquests punts. El nombre de vèrtexs d'un graf queda determinat pel nombre d'elements que hi ha en el grup  $V$ , per tant ens referirem a ell com a  $|V|$  (cardinal de  $V$ ). Amb les arestes passa el mateix, i també utilitzarem  $|E|$  per determinar el nombre d'arestes d'un graf. Definim també que dos vèrtexs són adjacents si estan units per una aresta, i com a conseqüència, són incidents a l'aresta.

En la figura (index de la figura) es mostra un graf simple  $G$  format per:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_6)\}$
- (adjuntar fiura del garf anterior)

Si una aresta comença i acaba en el mateix vèrtex (per exemple  $e_m = \{v_i, v_i\}$ ) s'anomena llaç. També pot ser que hi hagi dues arestes idèntiques, és a dir, dues arestes que comencin en el vèrtex  $v_i$  i acabin en el vèrtex  $v_j$ . En qualsevol d'aquests dos casos anteriors, el graf s'anomena multigraf o pseudograf. En cas contrari, el graf serà simple i simètric. Amb el que hem vist fins ara, podem dir que  $e_1 = (v_1, v_2)$  és equivalent a  $e_2 = (v_2, v_1)$ , però en els grafs dirigits això no es compleix. En aquest tipus de graf, les arestes només permeten viatjar en un sentit. En la següent imatge es mostren els grafs esmentats anteriorment:

(Adjuntar imatge de graf amb llaços, graf amb arestes múltiples i graf dirigit)

*Nota de l'autor: a partir d'ara, i si no s'indica el contrari, quan es parli de grafs, s'exclouràn els multigrafs i grafs dirigits.*

El nombre d'arestes que són incidents a un vèrtex  $v$  (contant els llaços com a dues arestes) determinen el grau de  $v$ , que es representa amb  $g(v)$ . La successió de graus d'un graf serà la successió que s'obté al ordenar de manera creixent els graus dels seus vèrtex. Cal dir que no és un problema gens trivial saber si una successió determinada pot ser una successió de graus d'un graf. El grau mínim d'un graf  $G$  queda determinat de la següent manera:  $\delta(G) = \min\{g(v) : v \in V(G)\}$ . De manera similar, el grau màxim de  $G$ ,  $\Delta(G) = \max\{g(v) : v \in V\}$ . Si a un graf en treiem una aresta o un node, en resulta un altre (o més d'un) graf connex. D'aquesta manera, si  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  és el graf que s'obté al suprimir el vèrtex  $v$  i totes les seves arestes incidents. De la mateixa manera, si  $e \in E(G)$ ,  $G - e$  és el graf que s'obté al eliminar la aresta  $e$ .

Amb tots aquests conceptes ja podem veure el teorema d'Euler, un dels primers teoremes en teoria de grafs i un dels més importants.

### **Teorema 1 (Euler)**

“En tot graf, la suma dels graus dels vèrtex és igual al doble del nombre d'arestes.”

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|$$

*Demostració:* Només cal veure que cada aresta té dos extrems i que suma dos en el total dels graus. La demostració formal és més complicada, i es troba mitjançant el nombre d'arestes:

Si  $|E| = 0$ , no cal considerar el cas. Si  $|E| = 1$ , o  $|V| = 2$  i cada vèrtex té grau 1 o la aresta és un llaç i hi ha un sol vèrtex de grau 2. En qualsevol d'aquests dos casos, el teorema es verifica. Ara suposem que el teorema està demostrat per a  $|E| \leq k$  i que  $G$  és un graf amb  $|E| = k + 1$ . Si  $e$  és una aresta de  $G$  i el graf  $H = G - e$ , llavors tots els vèrtexs de  $H$  tenen el mateix grau a

$H$  que a  $G$  excepte 2 que tenen un grau menys o un que té dos graus menys (només en el cas que  $e$  sigui un llac). En tots dos casos obtenim que:

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) = \sum_{v \in V(H)} g(v) + 2 = 2(|E| - 1) + 2 = 2|E|$$

D'aquesta demostració en treiem una altra afirmació:

*“En tot graf, el nombre de vèrtex amb grau imparell, és parell.”*

### 3 Tipus de grafs

Fins ara hem vist els conceptes bàsics en teoria de grafs i algunes de les propietats que compleixen tots els grafs. No obstant, existeixen diversos tipus de grafs que tenen propietats especials:

#### 3.1 Grafs complementaris

El graf complementari del graf  $G$  és el graf  $H$  amb els mateixos vèrtexs que  $G$ , de manera que dos vèrtexs de  $H$  seràn adjacents si i només si a  $G$  no ho són. Formalment, si  $G = (V, E)$  és un graf simple i  $K$  és el conjunt de totes les possibles combinacions de dos elements de  $V$ , llavors  $H = (V, K \setminus E)$ . Pel complementari de  $G$  s'escriu  $\bar{G}$  o  $G'$ . Per obtenir el graf complementari de  $G$  tan sols s'han de posar les arestes que falten per obtenir un graf complet i trure totes les que hi eren inicialment (ja que  $|E(G)| + |E(\bar{G})| = |E(K_n)|$ , on  $n = |V(G)|$ ).

(Adjuntar imatge de grafs complementaris)

#### 3.2 Grafs regulars

Es diu que un graf és regular de grau  $r$  quan tots els seus vèrtexs tenen grau  $r$ . Formalment, un graf és  $r$ -regular quan  $\Delta = \delta = r$ . Un graf 0-regular és un graf nul (veure apartat 2.3), un graf 1-regular consisteix en arestes separades entre elles i un graf 2-regular consisteix en un o més cicles separats. A partir d'aquí, els més importants tenen noms propis, com per exemple els 3-regulars, que són els cúbics; els 4-regulars, quàrtics; els 7-regulars, grafs de Witt truncats dobles; els 8-regulars, grafs de 24 cel·les... Evidentment, per un  $r$ -regular no necessàriament existeix només un graf, sinó que sovint s'en poden fer d'altres amb diferent nombre de vèrtexs. A la següent imatge es poden veure diversos exemples de grafs regulars, alguns d'ells amb el mateix ordre i diferent nombre de vèrtexs:

Per a tots els grafs  $r$ -regulars amb  $n$  vèrtexs es compleix que

$$|E| = \frac{1}{2}nr$$

on  $|E|$  és el nombre d'arestes.

(Adjuntar imatge de grafs regulars)

### 3.3 Grafs nuls o buits

Els grafs nuls o buits són grafs sense arestes, conjunts de  $n$  vèrtexs. Són els complementaris dels grafs complets, i per tant la seva nomenclatura és  $\bar{K}_n$  o simplement  $N_n$ . S'anomena grafs nuls a  $N_0$  i buits a la resta, però com que normalment no s'utilitza  $N_0$ , convencionalment es diuen nuls a tot el conjunt dels buits. (Adjuntar imatge dels grafs buits).

### 3.4 Grafs complets

Un graf complet és un graf on cada vèrtex està unit a tots els altres una sola vegada. Un graf complet amb  $n$  nodes és un graf simple i  $(n-1)$ -regular i la seva nomenclatura és  $K_n$ . Els grafs complets tenen  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  arestes. El nombre de cicles que conté un graf complet queda determinat per la següent igualtat:

$$C_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)!$$

(Adjuntar imatge de grafs complets)

### 3.5 Cicles

Els cicles són grafs 2-regulars amb  $n$  vèrtexs i  $n$  arestes, i s'anomenen  $C_n$ . El graf lineal d'un cicle és ell mateix. (Adjuntar imatge de cicles)

### 3.6 Grafs bipartits

Els grafs bipartits són aquells en els quals els vèrtexs es poden separar en dos conjunts disjunts  $U$  i  $V$  (és a dir, que els dos conjunts no tinguin elements comuns) de tal manera que un vèrtex d'un conjunt no sigui mai adjacent a un altre vèrtex del seu mateix conjunt. Es pot dir també que un graf és bipartit si no conté cicles de longitud senar. Llavors, podem deduir que tots els grafs  $C_n$  amb  $n$  parell, són també grafs bipartits. (adjuntar imatge de grafs bipartits)

### 3.7 Grafs bipartits complets

Els grafs bipartits complets són grafs bipartits en els quals cada element del conjunt  $U$  està unit a tots els elements del conjunt  $V$ . S'anomenen  $K_{m,n}$ , on  $m = |U|$  i  $n = |V|$ . En els grafs bipartits  $K_{m,n} = K_{n,m}$ ,  $|V| = n + m$  i  $|E| = mn$ .

### 3.8 Grafs estrella

Un graf estrella de grau  $n$ , conté un vèrtex amb grau  $n-1$  i els  $n-1$  vèrtexs restants tenen grau 1. S'anomena  $S_n$  i són estrelles tots els grafs bipartits de

la forma  $K_{1,n-1}$  o  $K_{n-1,1}$ . El graf lineal de  $S_n$  és  $K_{n-1}$ . (Afegir imatge de graf estrella)

### 3.9 Graf lineal

Un graf lineal  $L(G)$  d'un graf  $G$  és un graf que representa les adjacències entre les arestes de  $G$ . Formalment, donat un graf  $G$ , el graf lineal  $L(G)$  és aquell en el qual cada vèrtex correspon a una aresta de  $G$  i dos vèrtexs són adjacents només si les arestes corresponents a  $G$  són adjacents (comparteixen un vèrtex). El graf lineal d'un graf amb  $n$  nodes,  $e$  arestes i amb vèrtexs de graus  $d_i$  té  $n' = e$  nodes i

$$e' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 - e$$

arestes. (Afegir procediment de creació del graf lineal)

### 3.10 Rodes

Un graf roda amb  $n$  vèrtex és un graf que conté un cicle de longitud  $n - 1$ , on cada vèrtex del cicle està connectat a un altre vèrtex fora del cicle, anomenat node central. El node central té grau  $n - 1$ , i la resta de nodes tenen grau 3. S'escriu  $W_n$ , i a vegades simplement s'estudia com a  $C_{n-1} + K_1$ . El nombre de cicles que conté un graf amb  $n$  vèrtexs està determinat per  $n^2 - 3n + 3$ . (Afegir exemple de graf roda)

### 3.11 Xarxes

Els grafs xarxes bidimensionals  $G_{m,n}$  són grafs bipartits que formen una xarxa de  $m \times n$  vèrtexs. Un graf xarxa té  $mn$  vèrtexs i  $(m - 1)n + (n - 1)m$ . Es pot generalitzar per a xarxes de més dimensions com a  $G_{m,n,o,\dots}$ . (afegir exemple de graf xarxa)

### 3.12 Arbres

Els arbres són un tipus molt important de grafs: són grafs connexos sense cicles, de manera que existeix un únic camí entre dos vèrtexs. Si a un arbre se li afegeix una aresta, es genera un cicle, i se s'en treu una, el graf deixa de ser connex. Hi ha un tipus especial d'arbres anomenats elementals o camins, que són els arbres amb  $|V| = 1$ ,  $|V| = 2$  i en general tots aquells on  $\delta = 1$  i  $\Delta = 2$ . S'anomenen  $P_n$ , on  $n = |V|$ . També es pot pensar en grafs elementals com a  $G_{n,1}$ . (adjuntar exemples de grafs elementals)

#### Teorema 2

Un arbre amb  $n$  nodes té  $n - 1$  arestes.



*Demostració:* Si comprovem el cas on un arbre  $T$  té  $n = 1$  vèrtexs, veiem que no té cap aresta, per tant el teorema es compleix. Si treiem una aresta de l'arbre, en sorgiran 2 arbres més  $T_1$  i  $T_2$ . Per hipòtesi,  $T_1$  tindrà  $v_1 = |V|(T_1)$  vèrtexs i  $v_1 - 1 = |E|(T_1)$  arestes, i  $T_2$  tindrà  $v_2 = |V|(T_2)$  vèrtexs i  $v_2 - 1 = |E|(T_2)$  arestes. Deduïm llavors que el nombre de nodes de  $T$  és  $v_1 + v_2$ . Llavors el nombre d'arestes de  $T$  és  $(v_1 - 1) + (v_2 - 1) + 1 = (v_1 + v_2) - 1$ . Dit d'una altra manera,  $|E|(T) = |V|(T) - 1$ . Com a conseqüència d'aquest teorema, en podem arribar a un altre:

### Teorema 3

En un arbre  $T$  amb  $|V| \geq 2$ , hi ha com a mínim dos vèrtexs de grau 1 (anomenats fulles).

*Demostració:* Com a conseqüència del Teorema 1 i Teorema 2 podem dir que en un arbre

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E| = 2|V| - 2$$

També podem deduir que si tots els vèrtexs tinguessin un grau  $g(v_i) > 1$ , llavors

$$\sum_{v \in V} g(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

Sabem que això no és correcte, ja que estem dient que  $2|V| - 2 \geq 2|V|$ . Amb això ja podem veure que necessitem treure com a mínim dos graus, però demostrarem també que amb un sol node de grau 1 tampoc és suficient. Suposem ara que l'arbre té un sol node tal que  $g(v) = 1$  i els altres tenen com a mínim grau 2. Llavors

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} g(v) = 1 + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{si } g(v) \neq 1}} g(v) \geq 1 + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{si } g(v) \neq 1}} 2 = 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1$$

Ara estem dient que  $2|V| - 2 \geq 2|V| - 1$ , que torna a ser una contradicció. Sabem que si treiem un grau més, el teorema es complirà, i hem demostrat que el mínim nombre de vèrtexs de grau 1 és 2.

Hi ha un altre teorema que relaciona el nombre de fulles amb el grau màxim d'un arbre:

### Teorema 4

El nombre de fulles d'un arbre  $T$  és més gran o igual a  $\Delta$ .

*Demostració:* Si eliminem el node de grau  $\Delta$  de l'arbre, juntament amb totes les seves arestes incidents, obtenim un conjunt de  $\Delta$  grafs. Si alguns d'aquests grafs consisteixen en tan sols un node, vol dir que abans eren adjacents al node que hem eliminat, per tant, només tenien grau 1. Si, pel contrari, formen nous

arbres, pel teorema 3 podem dir que hi haurà com a mínim dues fulles. Encara que hi ha la possibilitat que un dels nodes amb grau 1 sigui l'adjacent a el node que hem tret, sempre podem garantir que hi ha com a mínim una fulla. Per tant, també podem garantir que hi haurà com a mínim  $\Delta$  fulles.

## 4 Camins i algorismes

Sovint, quan utilitzem un graf per modelitzar quelcom, ens interessa poder-hi fer algunes operacions. Podem, per exemple, voler trobar un camí entre dos punts, recórrer el graf sencer o trobar el camí més curt per anar d'un vèrtex a un altre. Per aquest motiu utilitzem els camins, que trobarem o generarem mitjançant diversos algorismes. En aquesta secció mostraré diverses maneres de recórrer un graf, torbant la manera més eficient per a cada cas.

### 4.1 Grafs ponderats i dirigits

#### Grafs ponderats

Els grafs ponderats són grafs on cada aresta  $e$  està associada a un nombre  $w(e)$  anomenat pes o cost, tal que  $w(e) \in \mathbb{R}$ . El pes pot representar diverses quantitats, segons el que es vulgui modelitzar. Moltes vegades s'utilitza per representar distàncies, però si per exemple modelitzem una xarxa de distribució d'aigua, ens pot interessar representar el cabal de les canonades, o en una xarxa de bus, la densitat de trànsit de cada tram.

#### Grafs dirigits

Els grafs dirigits són grafs les arestes dels quals només admeten una direcció. D'aquesta manera, una aresta  $e_0 = (v_0, v_1) \neq e_1 = (v_1, v_0)$ , contràriament als grafs no dirigits. DE fet, no necessàriament ha d'existir una aresta contrària a una altra. Aquest tipus de grafs poden ser útils per representar carreteres, o moviments vàlids en algun joc.

### 4.2 Camins

Un camí  $p$  és una seqüència finita i ordenada d'arestes que connecta una seqüència ordenada de vèrtexs. Un camí  $p$  de longitud  $k$  (expressat com a  $l(p) = k$ ) entre el vèrtex inicial  $v_0$  i el vèrtex final  $v_k$  sempre que  $v_0 \neq v_k$ ) és una successió de  $k$  arestes i  $k+1$  vèrtexs de la forma  $\overline{v_0, v_1}, \overline{v_1, v_2}, \dots, \overline{v_{k-1}, v_k}$ . Per definició, també es pot representar un camí  $p$  entre  $v_0$  i  $v_k$  com a successió de vèrtex  $p = v_0 v_1 \dots v_k$ . En aquest cas, pot ser tractat com un graf elemental  $P_n$ . Un cas especial és quan el camí comença i acaba al mateix vèrtex ( $v_0 = v_k$ ). Llavors el camí és un cicle, i és l'equivalent a un graf cicle  $C_n$ . Quan un camí té totes les arestes diferents, s'anomena simple, i si a més té tots els vèrtexs diferents, s'anomena elemental.

En els grafs, ponderats, la longitud d'un camí  $c = v_0, v_1, \dots, v_n$  no es defineix pel nombre d'arestes per on passa el camí, sinó fent el sumatori dels pesos de les arestes

$$\text{longitud}_w(c) = \sum_{i=0}^{n-1} w(\overline{v_i, v_{i+1}})$$

La distància entre dos vèrtexs  $v$  i  $u$ ,  $d_w(v, u)$ , és la que s'obté al agafar la menor longitud d'entre tots els camins elementals entre  $v$  i  $u$ . (adjuntar exemple de distància)

## 5 Estructures de dades dels grafs

En els grafs, normalment s'ha de tractar una gran quantitat d'informació: nodes, arestes, pesos, sentits... Tota aquesta informació no és difícil de gestionar si el graf que s'estudia és petit, ja que fins i tot es pot dibuixar. El problema sorgeix quan el graf en qüestió és més gran, com per exemple podria ser una xarxa de clavagueram o de metro. Llavors la informació a tractar és molta, i és convenient organitzar-la en estructures de dades. Les estructures de dades solen ser utilitzades en la programació, però en aquest cas sol ser beneficiós tenir-ne fins i tot quan no es treballa amb informàtica.

### Matrius

#### Matriu d'adjacència

La matriu d'adjacència d'un graf és una matriu quadrada que conté informació respecte el nombre d'arestes que uneixen dos nodes, i s'organitza de la següent manera:

Si  $G$  és un graf amb  $n$  nodes,  $A(G) = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$  és la seva matriu d'adjacència de  $n \times n$ , on  $a_{i,j}$  correspon al nombre d'arestes que uneixen els nodes  $i, j$ , contant com a 2 els llaços, que sempre es trobaràn a la diagonal. La matriu serà simètrica si el graf ho és, i podrem conèixer el grau d'un node  $i$  fent el sumatori de les caselles de la  $i$ -èsima fila. A vegades, quan s'utilitzen grafs ponderats, les matrius d'adjacència s'omplen amb els pesos de les arestes, per no haver d'utilitzar altres estructures per emmagatzemar la resta d'informació. En aquest tipus de grafs, els llaços no necessàriament valdràn 2, però es podran diferenciar perquè estaràn a la diagonal. En aquest cas, el problema serà que no es podran representar arestes múltiples amb pesos diferents. Tot i això, en termes de programació, utilitzar aquesta estructura de dades (sobretot en grafs grans) no és el més eficient, ja que creix molt ràpidament. La matriu d'un graf de  $n$  nodes té  $n^2$  espais, i en grafs poc densos, la majoria d'espais estan ocupats per 0, de tal manera que s'està utilitzant molta memòria que no conté informació útil. De la mateixa manera, si afegim un nou node al graf, que serà l' $n$ -èssim, s'hauràn d'afegir  $2n - 1$  espais a la matriu.

## Matriu d'incidència

La matriu d'incidència d'un graf  $G$  sense llaços,  $I(G) = (b_{i,j})_{i=1,\dots,v,j=1,\dots,\alpha}$ , on  $v = |V|$  i és la matriu binària  $v \times \alpha$  on  $b_{i,j}$  indica si la aresta  $j$  és incident al node  $i$ .

(afegir exemple de graf amb les seves dues matrius)

## Llistes d'adjacència

Aquesta estructura de dades és la més utilitzada per tractar grafs, ja que ocupa menys memòria i només inclou l'informació necessària. Les llistes d'adjacència consisteixen en un conjunt de  $n$  llistes. Cada llista correspon a un node del graf, i conté els nodes al quals és adjacent. En informàtica s'acostumen a fer mitjançant apuntadors, de tal manera que, a partir de cada element de la llista, es pugui accedir a la seva pròpia llista, seguint així molt més senzill fer iteracions. Amb l'esquema següent es pot veure més clarament:

(afegir esquema de les llistes d'adjacència)

## 5.1 Algorismes

Un algorisme és un conjunt d'instruccions precises i ben definides que, donada una entrada, calculen la sortida corresponent segons les instruccions que té. A continuació s'en mostren uns quants d'importants.

### 5.1.1 BFS

Aquest algorisme serveix per examinar l'estructura d'un graf o fer-ne un recorregut sistemàtic. La recerca per amplada prioritària (*breadth-first search* en anglès, d'aquí **BFS**) fa l'exploració en paral·lel de totes les alternatives possibles per nivells des del vèrtex inicial. A la següent imatge es pot veure com funcionaria aquest algorisme en un graf: (Adjuntar imatge de BFS)

Per programar aquest algorisme s'acotuma a utilitzar un contenidor de tipus cua, que només permet afegir elements al final de la cua i treure'n de l'inici, sense poder accedir a elements del mig de la cua. El que farà això és bàsicament imprimir per pantalla la seqüència de vèrtexs ordenada segons l'ordre en que els ha visitat.

Aquesta és una manera bastant usual de programar el BFS, i encara que és eficient, s'està desaprofitant propietats de l'algorisme. Amb BFS es pot saber a quina distància del punt inicial està cada node, el camí més curt per anar del node inicial a qualsevol altre i fins i tot es pot generar un arbre expansiu mínim, agafant les arestes per on passa el BFS. El següent algorisme té en compte aquests detalls. Està pensat per ser implementat en el llenguatge Python, i per aquest motiu utilitza diccionaris (llestes on cada element té un nom i una clau), però en llenguatges basats en C, es poden utilitzar maps de la mateixa manera.

Encara que aquest algorisme sembli molt senzill, ens pot aportar informació important, i fins i tot permet resoldre problemes senzills on haguem de trobar

---

**Algorisme 1: BFS**

---

**Data:** Un graf  $G$  i un node inicial  $v$   
**Result:** Seqüència de de nodes visitats  
nova cua  $Q$   
marca  $v$  com a visitat  
imprimeix( $v$ )  
afegeix  $v$  a la cua  $Q$   
nou node *auxiliar*  
nou node *següent*  
**while** la cua no estigui buida **do**  
    *auxiliar* = primer element de  $Q$   
    imprimeix(*auxiliar*)  
    elimina(primer element de  $Q$ )  
    **while** hi hagi nodes adjacents a *auxiliar* i aquests no s'hagin visitat  
        **do**  
            marca adjacent(*auxiliar*) com a visitat  
            afegeix adjacent(*auxiliar*) a la cua  
        **end**  
    **end**  
**end**  
**foreach** node de  $G$  **do**  
    marca'l com a no visitat  
**end**

---

distàncies o el camí més curt entre dos nodes. Aquest algorisme s'utilitza també per operacions més complexes, com les següents:

- Google l'utilitza per indexar pàgines web noves al seu buscador. Amb BFS pot recórrer tota la xarxa d'internet sencera, i ,si cada pàgina web és un node i cada enllaç és una aresta, si es posa un link d'una pàgina no indexada a una que sí ho està, l'algorisme trobarà el nou node).
- Les xarxes socials l'utilitzen per suggerir amistats. Amb BFS poden trobar els amics d'una persona (els nodes que estàn a distància 2 d'aquesta), que són susceptibles a ser amics seus. Com més amistats en comú amb la persona a distància 2, més probable és que es coneguin.
- Es pot sil·lucionar un cub de rubik amb aquest algorisme. Si s'aconsegueix generar un graf on cada node sigui un estat diferent del cub i les arestes siguin un moviment d'una cara, donat un estat inicial, amb BFS arribes a l'estat resolt amb els mínims moviments possibles.

### 5.1.2 DFS

La recerca per profunditat prioritària (*depth-first search* en anglès, d'aquí **DFS**) és un algorime que utilitza uns principis semblants al BFS, però en lloc de cobrir

---

```

Data: Un graf  $G$  i un node inicial  $v$ 
Result: Seqüència de nodes visitats, distància de cada node respecte  $v$ 
nou diccionari  $dist$ 
 $dist[v] = 0$ 
nou diccionari  $anterior$ 
 $anterior[v] = Nul$ 
 $i = 0$ 
nova llista  $frontera$  afegeix  $v$  a  $frontera$ 
imprimeix( $v$ )
while  $frontera$  no estigui buida do
    nova llista  $següent$ 
    foreach node  $x$  de  $frontera$  do
        /* A cada iteració,  $x$  agafarà un valor diferent de  $frontera$  */
        foreach node  $y$  adjacent a  $x$  do
            if  $y$  no existeix dins  $dist$  then
                 $dist[y] = i$ 
                 $anterior[y] = x$ 
                afegeix  $y$  a  $següent$ 
                imprimeix( $y$ )
            end
        end
    end
     $frontera = següent$ 
     $i = i + 1$ 
end
imprimeix( $dist$ )

```

---

tota l'amplada d'un nivell abans de passar al següent, el que fa és cobrir tota la profunditat possible (arribar el més lluny possible) abans de tornar enrere. En la següent imatge es pot veure un esquema del funcionament de l'algorisme: (adjuntar imatge de DFS) Tal com en el BFS, també hi ha diverses maneres de fer l'algorisme, i en presentaré dues. La primera utilitza un contenidor de tipus pila, on només es pot manipular, afegir o treure l'element de dalt de tot de la pila.

Aquest mètode, però, té un problema, i és que només funciona per a grafs no dirigits. Hi ha la possibilitat que, treballant amb un graf dirigit, un node del graf no sigui accessible des del node inicial que hem determinat. Aquest cas excepcional es pot arreglar fent que cada node no visitat per les iteracions anteriors sigui l'inicial. El segon algorisme, a part d'arreglar això, utilitza una funció recursiva (una funció que es crida a si mateixa).

Aquest algorisme no té tantes utilitats pràctiques com el BFS, però també té propietats útils, com per exemple, que passa per totes les arestes. A través d'ell podem obtenir informació important d'un graf:

---

**Algorisme 2: DFS**

---

**Data:** Un graf  $G$  i un node inicial  $v$   
**Result:** Seqüència de nodes visitats  
nova pila  $S$   
nou node *següent*  
marca  $v$  com a visitat  
imprimeix( $v$ )  
afegeix  $v$  a la pila  $S$   
**while** *la pila no estigui buida* **do**  
    *següent* = node adjacent no visitat de l'element superior de  $S$   
    /\* En cas que no n'hi hagi cap, *següent* = Nul \*/  
    **if** *següent* = Nul **then**  
        elimina(element superior de  $S$ )  
    **else**  
        marca *següent* com a visitat  
        imprimeix(*següent*)  
        afegeix *següent* a  $S$   
    **end**  
**end**

---

- Es pot saber si un graf té cicles, comprovant si quan estem a l'iteració d'un node (encara no n'hem explorat tots els nodes adjacents) el trobem a ell mateix. En cas afirmatiu voldrà dir que hi ha un cicle.
- Es pot saber si un graf és bipartit assignant un color (entre un total de 2 colors possibles) a cada node mentre es recorre el graf, de manera que un node tingui un color diferent al dels nodes adjacents. Si això és possible voldrà dir que el graf és bipartit.
- Es pot dur a terme una ordenació topològica, si es tracta d'un graf dirigit sense cicles. Un exemple d'ordenació topològica és quan hi ha una llista de tasques a fer però per fer-ne una determinada, cal haver-ne fet primer una altra. Amb el DFS, podem obtenir una de les seqüències vàlides per completar totes les tasques. (Adjuntar exemple d'ordenació topològica i la seva sol·lució donada mitjancant DFS)

### 5.1.3 Dijkstra

Aquest algorisme, desenvolupat per Edsger W. Dijkstra el 1956, serveix per trobar el camí més curt entre dos nodes d'un graf ponderat. De fet, això és el que feia la variant original, però la variant presentada aquí troba el camí més curt entre un node inicial i tota la resta de nodes dels graf. Tot i això es pot modificar lleugerament el programa perquè pari quan hagi trobat el camí més curt entre dos nodes especificats. El que fa el programa és suposar quines són les distàncies mínimes des del node inicial fins la resta, i va descobrint el graf fins

---

**Data:** Un graf  $G$   
**Result:** Seqüència de nodes visitats des de cada node  
nou diccionari *anterior*  
nova llista *ordre*  
**foreach** *node u del graf* **do**  
    **if** *u no existeix dins anterior* **then**  
        imprimeix( $u$ )  
         $anterior[u] = Nul$   
        DFSrecursiu( $G, u$ )  
    **end**  
**end**  
inverteix *ordre*  
imprimeix(*ordre*)

*/\* La funció DFSrecursiu queda determinada pel següent algorisme: \*/*

**Funció** DFSrecursiu( $G, v$ )  
    **foreach** *node x adjacent a v* **do**  
        **if** *x no existeix a anterior* **then**  
            imprimeix( $x$ )  
             $anterior[x] = Nul$   
            DFSrecursiu( $G, x$ )  
        **end**  
    **end**  
    */\* Només si es vol obtenir la seqüència de recursió o ordenació  
    topològica per a grafs dirigits acíclics, \*/*  
    afegeix  $v$  a *ordre*

---



que pot assegurar el camé més curt. Al principi, suposa que el moviment amb menys cost és no moure's (això serà cert si el graf no conté arestes amb pesos negatius, que l'algorisme no pot tractar). Després busca els nodes adjacents al node inicial, i suposa que les distàncies mínimes entre l'inicial i aquests és simplement l'aresta que els uneix. Es pot assegurar que serà cert pel node unit amb l'aresta de menys pes, per la desigualtat triangular (si s'hi pogués accedir per un altre camí, aquest seria més llarg, ja que per força alguna de les arestes amb més pes que s'han descartat ha de formar part del camí alternatiu, i la suma serà sempre superior). Un cop hi ha el primer node amb mínim pes assegurat (i per tant ja sap un camí), es busquen els seus adjacents, el pes dels quals inicialment és infinit. La suposició del pes equivaldrà a el pes del node d'on venen més el de l'aresta que els uneix, i es canviarà pel pes que tenen si aquest és més gran que el nou. Ara es torna a agafar el node amb el pes menor (que segur que és el mínim) i es torna a mirar els adjacents i assignar pesos. Quan tots els nodes hagin estat visitats, el pes de cada node serà la distància mínima que s'ha de recórrer per anar del node inicial fins a aquest.

(Adjuntar esquema de procediment de Dijkstra)

Aquest algorisme, encara que no pot treballar amb pesos negatius és molt útil té una gran quantitat d'aplicacions pràctiques:

- Navegadors GPS, on les arestes són carrers i carreteres, els nodes cruïlles i els pesos distàncies. S'utilitza l'algorisme de Dijkstra per trobar els camins més curts entre dues destinacions.
- Problemes de canvis de divisa, on volem trobar la millor manera de canviar divises i guanyar més diners. Aquí els nodes són les diferents monedes o divises, les arestes les transaccions i els pesos les taxes de canvi. Amb aquest algorisme podem trobar la millor manera de fer els canvis de moneda.
- Els routers utilitzen l'algorisme per portar-te a través d'internet al servidor desitjat amb la menor quantitat de passos possibles.
- En robòtica s'utilitza per fer la planificació de moviment del robot. Cada node és una unitat d'espai, i omplint tot l'espai de nodes excepte els obstacles i executant l'algorisme en el graf resultant, s'obté el camí més òptim per arribar a la posició desitjada.
- En epidemiologia es pot utilitzar per modelitzar un grup de persones i els seus familiars per veure qui és més susceptible a emmalaltir. Això també pot funcionar entre ciutats o col·lectius més grans.

#### 5.1.4 Bellman-Ford

Aquest algorisme té un funcionament i utilitats molt semblants a les de l'algorisme de Dijkstra, però té la particularitat de poder tractar sense problemes les arestes amb pesos negatius, mentre que Dijkstra no ho permet. Dijkstra es basa en la

---

**Algorisme 3:** Dijkstra

---

**Data:** Un graf ponderat  $G$  i un node inicial  $s$

**Result:** Distància mínima entre  $s$  i la resta de nodes del graf, arbre  
expensiu mínim

nou diccionari  $dist$

nou diccionari  $Q$

**foreach** node  $v$  de  $G$  **do**

$Q[v] = \infty$

$dist[v] = \infty$

**end**

$Q[s] = 0$

**while**  $Q$  no estigui buit **do**

$u = \text{minvalorde}Q$

$dist[u] = Q[u]$

**foreach** node  $v$  adjacent a  $u$  **do**

**if**  $v$  existeix dins  $Q$  **then**

**if**  $Q[v] > Q[u] + w(u, v)$  **then**

                /\*  $w(u, v)$  és el pes de l'aresta  $\{u, v\}$  \*/

$Q[v] = Q[u] + w(u, v)$

**end**

**end**

**end**

    elimina( $Q[u]$ )

**end**

imprimeix( $dist$ )

---

desigualtat triangular per trobar el camí més curt, però amb pesos negatius no es pot suposar que la desigualtat triangular es compleixi. A més, permet saber si un graf conté cicles negatius. Si un camí entre dos nodes conté un cicle de pes negatiu, no es pot trobar un camí mínim entre aquests dos nodes. Això es deu a que recorrent aquest cicle sempre es podria escurçar el camí, i llavors el mínim possible seria de  $-\infty$ .

---

**Algorisme 4:** Bellman-Ford

---

**Data:** Un graf ponderat  $G$  i un node inicia  $s$

**Result:** Distància mínima entre  $s$  i la resta de nodes del graf, arbre expansiu mínim

nou diccionari  $dist$ ;

nou diccionari  $anterior$ ;

**foreach** node  $v$  de  $G$  **do**

$dist[v] = \infty$ ;

$anterior[v] = Nul$ ;

**end**

$dist[s] = 0$ ;

**for**  $i$  in  $range(0, len(Adj)-1)$  **do**

**foreach**  $u$  dins  $Adj$  **do**

**foreach**  $v$  dins  $Adj[u]$  **do**

**if**  $dist[v] > dist[u] + w(u, v)$  **then**

                /\*  $w(u, v)$  és el pes de l'aresta  $\{u, v\}$  \*/

$dist[v] = dist[u] + w(u, v)$ ;

**end**

**end**

**end**

**end**

**foreach**  $u$  dins  $Adj$  **do**

**foreach**  $v$  dins  $Adj[u]$  **do**

**if**  $dist[v] > dist[u] + w(u, v)$  **then**

            imprimeix("Hi ha cicles de pesos negatius");

**end**

**end**

**end**

imprimeix( $dist$ );

imprimeix( $anterior$ );

---