Part I
Introducció a la teoria de grafs

Aquest primer apartat consisteix en la part més teòrica del treball. Explicarè breument l'història d'aquesta branca de la matemàtica i posteriorment ens endinsarem en la teoria de grafs com a tal. La teoria de grafs pot ser bastant abstracta i a vegades complicada d'entendre, però estarà acompanyada de demostracions i exemples propis que pretenen facilitar el seguiment del treball.

1 Història del grafs

1.1 Els primers passos

Tot sovint, les noves branques de la matemàtica sorgeixen de solucions a problemes. Problemes que no poden ser resolts ni demostrats amb el que coneixem, que forcen a desenvolupar nous mètodes i teories. La teoria de grafs no n'és una excepció i tot seguit presentaré els problemes determinants per a la creació d'aquesta branca.

Euler i els ponts de Königsberg

La teoria de grafs neix a partir de la solució de Leonhard Euler d'un problema curiós. Aquest matemàtic va reoldre el problema dels ponts de la ciutat de Königsberg (l'actual Kaliningrad, Rusia), que diu així :

> *"El riu Pregel divideix Königsberg en quatre parts separades, i connectades per set ponts. És possible caminar per la ciutat passant per tots els ponts tan sols una vegada?"*

Cap dels ciutadans de Königsberg ho havia aconseguit, i ja sabien que no era possible, però mai ningú ho havia demostrat fins que Euler ho va fer. La demostració de que això no era possible queda recollida en el *"Solutio problmatis ad geometriam situs pertinentis"* publicat el 1736, i l'article també va ser inclòs en el volum 8 de *"Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae"* publicat el 1741. En aquest text, Euler diu el següent:

> *A més d'aquella part de la geometria que s'ocupa de les quantitats, la qual sempre ha generat un interés preferent, hi ha una altra part -encara pràcticament desconeguda- que ja fou esmentada per Leibniz amb el nom de geometria de la posició. Aquesta part de la geometria estudia tot allò que pot ésser determinat únicament per la posició, aixì com les propietats de la posició; en aquest camp hom no hauria de preocupar-se de quantitats ni de com obtenir-les. No obstant això, els tipus de problemes que pertanyen a aquesta geometria de posició i els métodes usats per resoldre'ls encara no són ben definits. Així doncs, quan darrerement s'em va plantejar un problema que*

> *semblava bàsicament geomètric, però que no demanava l'obtenció de quantitats ni admetia una sol·lució basada en el càlcul de quantitats, em vaig adonar que pertanyia a la geometria de la poició, sobretot perquè només es podia usar la posició per resolde'l, mentre que el càlcul es mostrava inútil. Així, he decidit exposar ací, com a mostra de la geometria de a posició, el mètode que he deduït per a resoldre problemes d'aquesta mena."*

Per aconseguir demostrar que el problema no tenia sol·lució, Euler va haver de representar el problema com un mapa topològic, posant les masses de terra com a punts i els ponts com a segments que unien aquests punts, creant d'aquesta manera el primer graf de l'història. Aquest resulat es considera el primer en toeria de grafs, ja que conté un important teorema d'aquesta branca. A més d'iniciar la teoria de grafs, amb aquest resultat també comença l'estudi dels grafs planars, introdueix el concepte de característica d'Euler de l'espai i el teorema de poliedres d'Euler (teorema que després va utilitzar per demostrar que no hi havia mes sòlids regulars que els sòlids platònics). Amb tot això, Euler posa les bases no tan sols de l'estudi dels grafs, sinó també de la topología, una altra branca que també serà tractada en aquest treball.

Vandermonde i el tour del cavall

A partir de l'article d'Euler, diversos matemàtics van començar a interessar-se pel camp de la topologia (o geometria de la posició, com li deien en aquell moment). Concretament hi ha un personatge important: Alexandre-Théophile Vandermonde. Vandermore va treballar i estudiar el problema dels cavalls, que pregunta quins moviments hem de fer per tal que un cavall passi per totes les caselles del tauler d'escacs, problem a que també va tractaar Euler. Els estudis que va fer sobre aquest problema van ser publicats el 1771 en el "*Remarques sur des problèmes de situation*", i per la relativa proximitat als treballs d'Euler, encara no parlava de grafs, tot i que ara el problema es resol mitjançant aquests. Aquest treball inicia l'estudi de la teoria de nusos, una altra branca de la topologia.

1.2 Les primeres descobertes i aplicacions

Un cop establert l'inici, és difícil veure com va continuar desesenvolupant-se la teoria, ja que en els primers treballs volien resoldre problemes concrets, sense buscar la relació entre ells. Tot i així durant el segle XIX es van plantejar una gran qüantitat de problemes i es van desenvolupar molts teoremes respecte els grafs.

Francis Guthrie

El 1852 aqust matemàtic britànic es planteja el següent problema mentres intenta pintar un mapa del regne unit:

> *"És possible pintar qualsevol mapa de països de tal manera que un país tingui un color diferent al de tots els seus veïns, utilitzant tan sols quatre colors?"*

D'aquest problema en surt el teorema de que qualsevol mapa pot ser pintat únicament amb quatre colors diferents, de tal manra que dues regions adjacents no tinguin colors iguals. Aquest problema que pot semblar tan trivial no va ser demostrat fins l'any 1976. Va passar per mans de personatges com De Morgan, Hamilton, Cayley, Kempe (que va fer una demostració publicada el 1879), Heawood (que va demostrar que la demostració de Kempe no era correcta)... Finalment el 1976 Appel i Hanken van demostrar a través d'un programa d'ordinador que tot mapa es podia pintar només amb quatre colors. Pel fet de basar la demostració en un programa d'ordinador, molta gent no va acceptar la demstració. Així doncs, aquest problema no va ser solucionat de manera formal 1996 quan, recorrent a la teoria de grafs ja desenvolupada, Neil Robertson, Daniel P. anders, Paul Seymour i Robin Thomas van publicar un demostració. En els treballs d'Appel i Hanken es van definir alguns dels conceptes i fonaments de l'actual teoria de grafs.

Arthur Cayley

Arthur Cayley, matemàtic que treballava en la teoria de grups, tpologia i combiantoria, també va aportar una gran quantitat de coneixement a la branca. Va treballar amb grafs de tipus arbre i va desenvolupar, la fòrmula n^{n-2}, que determina les nombre d'arbres expansius que té un graf complet de n vèrtex. Una fòrmula semblant apareixia en treballs de Carl Wilhelm Borchardt, en els quals Cayley es va basar i va extendre, però el que actualment dóna nom a la fòrmula és el mateix Cayley.

També va treballar en desenvolupar una representació de l'estructura abstracta d'unc grup, creant els grafs de Cayley i el teorema de Cayley referent a aquests. Finalment, Cayley va contribuïr també el 1857 en la representació i enummeració dels isòmers alcans (composts químics que comparteixen fòrmula o composició però tenen diferent estructura molecular), representant cada compost mitjançant un graf de tipus arbre. Tot i això, Cayley no només va ser actiu en teoria de grafs, sinó que també va desenvolupar teoremes en àlgebra linea, topologia i geometreia.

William Hamilton i Thomas Kirkman

William Rowan Hamilton va plantejar un problema el 1859 que consistia en trobar un camí que passés pels 20 vértex d'un dodecahedre una sola vegada a través de les seves arestes. Hamilton va comercissalitzar el joc sota el nom de "The Icosian game" (és important dir que el nom de icosian no va ser degut a que utilitzés un icosahedre, sninó que feia referència als 20 vértex del dodecahedre per on s'havia de passar). Entorn aquest joc existeix un gran controvèrsia, ja que Euler va plantejar un problema semblant mentre estudiava el problema dels cavalls, i Kirkman va plantejar exactament el mateix problema que Hamilton a la Royal Society un temps abans.

Gustav Kirchhoff

Gustav Kirchhoff, conegut majoritàriament en el camp de l'electrotècnia per les seves lleis de Kirchhoff, també va fer aportacions importants en teoria de grafs. Les seves lleis, publicades el 1874, es basen en la teoria de grafs, però a més, va ser el primer d'utilitzar els grafs en aplicacions industrials. Va estudiar sobretot els grafs de tipus arbre i, amb l'investigació que va dur a terme sobre aquest tipus de grafs, va formular el teorema de Kirchhoff, sobre del nombre d'arbres d'expansió que es poden trobar en un graf. Aquest teorema es considera una generalització de la fòrmula de Cayley.

1.3 Teoria de grafs moderna

Durant el segle XX, la teoria de grafs es va anar desenvolupant més. Amb les bases ja establertes durant el segle XIX, els matemàtics hi van començar a treballar i el 1936 Dénes König va escriure el primer llibre de teoria de grafs. Frank Harary va escriure un altre llibre el 1969, que va fer accessible la teoria de grafs a àmbits diferents a les matemàtiques. El desenvolupament de l'informàtica i les noves tècniques de computació van permetre treballar amb grafs a molt més gran escala, fent possible, per exemple, la primera demostració del teorema dels quatre colors per Appel i Hanken.

Actualment la teoria de grafs és una part molt important de la matemàtica discreta i està relacionada amb molts àmbits diferent, com per exemple la topologia, la combinatòria, la teoria de grups, la geometria algebraica... Des del seu desenvolupament s'han utilitzat els grafs per resoldre i representar de manera visual problemes en aquests camps. Té aplicacions en molts altres àmbits com per exemple la computació, l'informàtica, la física, la química, l'electrònica, les telecomunicacions, la biologia, la logística i fins i tot en l'àmbit econòmic.

2 Principis bàsics

Un graf $G = (V, E)$ es defineix com un conjunt de vèrtex (o nodes) $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i un conjunt d'arestes $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, que uneixen dos vèrtexs v_i i v_j, tals que $v_i, v_j \in V$. És a dir: un graf està format pe un conjunt de punts i un conjunt d'arestes que uneixen alguns d'aquests punts. El nombre de vèrtexs d'un graf queda determinat pel nombre d'elements que hi ha en el grup V, per tant ens referirem a ell com a $|V|$(cardinal de V). Amb les arestes passa el mateix, i també utilitzarem $|E|$per determinar el nombre d'arestes d'un graf. Definim també que dos vèrtexs són adjacents si estàn units per una aresta, i com a conseqüència, són incidents a l'aresta.

En la figura (index de la figura) es mostra un graf simple G format per:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

- $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_6)\}$
- (adjuntar fiura del garf anterior)

Si una aresta comença i acaba en el mateix vèrtex (per exemple $e_m = \{v_i, v_i\}$) s'anomena llaç. També pot ser que hi hagi dues arestes idèntiques, és a dir, dues arestes que comencin en el vèrtex v_i i acabin en el vèrtex v_j. En qualsevol d'aquests dos casos anteriors, el graf s'anomena multigraf o pseudograf. En cas contrari, el graf serà simple i simètric. Amb el que hem vist fins ara, podem dir que $e_1 = (v_1, v_2)$ és equivalent a $e_2 = (v_2, v_1)$, però en els grafs dirigits això no es compleix. En aquest tipus de graf, les arestes només permeten viatjar en un sentit. En la següent imatge es mostren els grafs esmentats anteriorment:

(Adjuntar imatge de graf amb llaços, graf amb arestes múltiples i graf dirigit)

Nota de l'autor: a partir d'ara, i si no s'indica el contrari, quan es parli de grafs, s'exclouràn els multigrafs i grafs dirigits.

El nombre d'arestes que són incidents a un vèrtex v (contant els llaços com a dues arestes) determinen el grau de v, que es representa amb $g(v)$. La successió de graus d'un graf serà la successió que s'obté al ordenar de manera creixent els graus dels seus vèrtex. Cal dir que no és un problema gens trivial saber si una successió determinada pot ser una successió de graus d'un graf. El grau mínim d'un graf G queda determinat de la següent manera: $\delta(G) = min\{g(v) : v \in V(G)\}$. De manera similar, el grau màxim de G, $\Delta(G) = max\{g(v) : v \in V\}$. Si a un graf en treiem una aresta o un node, en resulta un altre (o més d'un) graf connex. D'aquesta manera, si $v \in V(G)$, $G - v$ és el graf que s'obté al suprimir el vèrtex v i totes les seves arestes incidents. De la mateixa manera, si $e \in E(G)$, $G - e$ és el graf que s'obté al eliminiar la aresta e.

Amb tots aquests conceptes ja podem veure el teorema d'Euler, un dels primers teoremes en teoria de grafs i un dels més importants.

Teorema 1 (Euler)

"En tot graf, la suma dels graus dels vèrtex és igual al doble del nombre d'arestes."

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|$$

Demostració: Només cal veure que cada aresta té dos extrems i que suma dos en el total dels graus. La demostració formal és més complicada, i es troba mitjançant el nombre d'arestes:

Si $|E| = 0$, no cal considerar el cas. Si $|E| = 1$, o $|V| = 2$ i cada vèrtex té grau 1 o la aresta és un llaç i hi ha un sol vèrtex de grau 2. En qualsevol d'aquests dos casos, el toerema es verifica. Ara suposem que el teorema està demostrat per a $|E| \leq k$ i que G és un graf amb $|E| = k + 1$. Si e és una aresta de G i el graf $H = G - e$, llavors tots els vèrtexs de H tenen el mateix grau a

H que a G excepte 2 que tenen un grau menys o un que té dos graus menys (només en el cas que e sigués un llaç). En tots dos casos obtenim que:

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) = \sum_{v \in V(H)} g(v) + 2 = 2(|E| - 1) + 2 = 2|E|$$

D'aquesta demostració en treiem una altra afirmació:

"En tot graf, el nombre de vèrtex amb grau imparell, és parell."

3 Tipus de grafs

Fins ara hem vist els conceptes bèsics en teoria de grafis i algunes de les propietats que compleixen tots els grafs. No obstant, existeixen diversos tipus de grafs que tenen propietats especials:

3.1 Grafs complementaris

El graf complementari del graf G és el graf H amb els mateixos vèrtexs que G, de manera que dos vèrtexs de H seràn adjacents si i només si a G no ho són. Formalment, si $G = (V, E)$ és un graf simple i K és el conjunt de totes les possibles combinacions de dos elements de V, llavors $H = (V, K \setminus E)$. Pel complementari de G s'escriu $\bar{G}$ o G'. Per obtenir el graf complementari de G tan sols s'han de posar les arestes que falten per obtenir un graf complet i trure totes les que hi eren inicialment (ja que $|E(G)| + |E(\bar{G})| = |E(K_n)|$, on $n = |V(G)|$).

(Adjuntar imatge de grafs complementaris)

3.2 Grafs regulars

Es diu que un graf és regular de grau r quan tots els seus vèrtexs tenen grau r. Formalment, un graf és r-regular quan $\Delta = \delta = r$. Un graf 0-regular és un graf nul (veure apartat 2.3), un graf 1-regular consisteix en arestes separades entre elles i un graf 2-regular consisteix en un o més cicles separats. A partir d'aquí, els més importants tenen noms propis, com per exemple els 3-regulars, que són els cúbics; els 4-regulars, quàrtics; els 7-regulars, grafs de Witt truncats dobles; els 8-regulars, grafs de 24 cel·les... Evidentment, per un r-regular no necessàriament existeix només un graf, sinó que sovint s'en poden fer d'altres amb diferent nombre de vèrtexs. A la següent imatge es poden veure diversos exemples de grafs regulars, alguns d'ells amb el mateix ordre i diferent nombre de vèrtexs:

Per a tots els grafs r-regulars amb n vèrtexs es compleix que

$$|E| = \frac{1}{2} nr$$

on $|E|$ és el nombre d'arestes.

(Adjuntar imatge de grafs regulars)

3.3 Grafs nuls o buits

Els grafs nuls o buits són grafs sense arestes, conjunts de n vértexs. Són els complementaris dels grafs complets, i per tant la seva nomenclatura és $\bar{K}_n$ o simplement N_n. S'anomena grafs nuls a N_0 i buits a la resta, però com que normalment no s'utilitza N_0, convencionalment es diuen nuls a tot el conjunt dels buits. (Adjuntar imatge dels grafs buits).

3.4 Grafs complets

Un graf complet és un graf on cada vèrtex està unit a tots els altres una sola vegada. Un graf complet amb n nodes és un graf simple i $(n-1)$-regular i la seva nomenclatura és K_n. Els grafs complets tenen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestes. El nombre de cicles que conté un graf complet queda determinat per la següent igualtat:

$$C_n = \sum_{K=3}^{n} \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)!$$

(Adjuntar imatge de grafs complets)

3.5 Cicles

Els cicles són grafs 2-regulars amb n vèrtexs i n arestes, i s'anomenen C_n. El graf lineal d'un cicle és ell mateix. (Adjuntar imatge de cicles)

3.6 Grafs bipartits

Els grafs bipartits són aquells en els quals els vèrtexs es poden separar en dos conjunts disjunts U i V (és a dir, que els dos conjunts no tinguin elements comuns) de tal manera que un vèrtex d'un conjunt no sigui mai adjacent a un altre vèrtex del seu mateix conjunt. Es pot dir també que un graf és bipartit si no conté cicles de longitud senar. Llavors, podem deduïr que tots els els grafs C_n amb n parell, són també grafs bipartits. (adjuntar imatge de grafs bipartits)

3.7 Grafs bipartits complets

Els grafs bipartits complets són grafs bipartits en esl quals cada element del conjunt U està unit a tots els elements dels del conjunt V. S'anomenen $K_{m,n}$, on $m = |U|$ i $n = |N|$. En els grafs bipartits $K_{m,n} = K_{n,m}$, $|V| = n + m$ i $|E| = mn$.

3.8 Grafs estrella

Un graf estrella de grau n, conté un vèrtex amb grau $n-1$ i els $n-1$ vèrtexs restants tenen grau 1. S'anomena S_n i són estrelles tots els grafs bipartits de la forma $K_{1,n-1}$o $K_{n-1,1}$. El graf lineal de S_n és K_{n-1}. (Afegir imatge de graf estrella)

3.9 Graf lineal

Un graf lineal $L(G)$ d'un graf G és un graf que representa les adjacències entre les arestes de G. Formalment, donat un graf G, el graf lineal $L(G)$ és aquell en el qual cada vèrtex correspon a una aresta de G i dos vèrtexs són adjacents només si les arestes corresponents a G són adjacents (comparteixen un vèrtex). El graf lineal d'un graf amb n nodes, e arestes i amb vèrtexs de graus d_i té $n' = e$ nodes i

$$e' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - e$$

arestes. (Afegir procediment de creació del graf lineal)

3.10 Rodes

Un graf roda amb n vèrtex ès un graf que conté un cicle de longitud $n-1$, on cada vèrtex del cicle està connectat a un alte vèrtex fora del cicle, anomenat node cenmtral. El node central té grau $n-1$, i la resta de nodes tenen grau 3. S'escriu W_n, i a vegades simplement s'estudia com a $C_{n-1} + K_1$. El nombre de cicles que conté un graf amb n vètrexs està determinat per $n^2 - 3n + 3$. (Afegir exemple de graf roda)

3.11 Xarxes

Els grafs xarxes bidimensionsals $G_{m,n}$ són grafs bipartits que formen una xarxa de mxn vèrtexs. Un graf xarxa té mn vèrtexs i $(m-1)n + (n-1)m$. Es pot greneralitzar per a xarxes de més dimensions com a $G_{m,n,o,...}$.

(afegir exemple de graf xarxa)

3.12 Arbres

Els arbres són un tipus molt important de grafs: són grafs connexos sense cicles, de manera que existeix un únic camí entre dos vèrtexs. Si a un arbre se li afegeix una aresta, es genera un cicle, i se s'en treu una, el graf deixa de ser connex.
Hi ha un tipus especial d'arbres anomenats elementals o camins, que són els arbres amb $|V| = 1$, $|V| = 2$ i en general tots aquells on $\delta = 1$ i $\Delta = 2$. S'anomenen P_n, on $n = |V|$. També es pot pensar en grafs elementals com a $G_{n,1}$.(adjuntar exemples de grafs elementals)

Teorema 2

Un arbre amb n nodes té $n-1$ arestes.

Demostració: Si comprovem el cas on un arbre T té $n = 1$ vèrtexs, veiem que no té cap aresta, per tant el teorema es compleix. Si treiem una aresta de l'arbre,en sorgiran 2 arbres més T_1 i T_2. Per hipòtesi, T_1 tindrà $v_1 = |V|(T_1)$ vèrtexs i $v_1 - 1 = |E|(T_1)$ arestes, i T_2 tindrà $v_2 = |V|(T_1)$ vèrtexs i $v_2 - 1 = |E|(T_2)$ arestes. Deduïm llavors que el nombre de nodes de T és $v_1 + v_2$. Llavors el nombre d'arestes de T és $(v_1 - 1) + (v_2 - 1) + 1 = (v_1 + v_2) - 1$. Dit d'una altra manera, $|E|(T) = |V|(T) - 1$ Com a conseqüència d'aquest teorema, en podem aarribar a un altre:

Teorema 3

En un arbre T amb $|V| \geq 2$, hi ha com a mínim dos vèrtexs de grau 1 (anomenats fulles).

Demostració: Com a conseqüència del Teorema 1 i Teorema 2 podem dir que en un arbre

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E| = 2|V| - 2$$

També podem deduïr que si tots els vèrtexs tinguessin un grau $g(v_i) > 1$, llavors

$$\sum_{v \in V} g(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

Sabem que això no és correcte, ja que estem dient que $2|V| - 2 \geq 2|V|$. Amb això ja podem veure que necessitem treure com a mínim dos graus, però demostrem també que amb un sol node de grau 1 tampoc és suficient. Suposem ara que l'arbre té un sol node tal que $g(v) = 1$ i elsaltres tenencom a mínim grau 2. Llavors

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} g(v) = 1 + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{si } g(v) \neq 1}} g(v) \geq 1 + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{si } g(v) \neq 1}} 2 = 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1$$

Ara estem dient que $2|V| - 2 \geq 2|V| - 1$, que torna a ser una contradicció. Sabem que si treiem un grau més, el teorema es complirà, i hem demostrat que el mínim nombre de vèrtexs de grau 1 és 2.

Hi ha un altre teorema que relaciona el nombre de fulles amb el grau màxim d'un arbre:

Teorema 4

El nombre de fulles d'un arbre T és més gran o igual a Δ.

Demostració: Si eliminem el node de grau Δ de l'arbre, juntament amb totes les seves arestes incidents, obtenim un conjunt de Δ grafs. Si alguns d'aquests grafs consisteixen en tan sols un node, vol dir que abans eren adjacents al node que hem eliminat, per tant, només tenien grau 1. Si, pel contrari, formen nous arbres, pel teorema 3 podem dir que hi haurà com a mínim dues fulles.Encara que hi ha la possibilitat que un dels nodes amb grau 1 sigués l'adjacent a el node que hem tret, sempre podem garantir que hi ha com a mínim una fulla. Per tant, també podem garantir que que hi haurà com a mínim Δ fulles.

4 Camins i algorismes

Sovint, quan utilitzem un graf per modelitzar quelcom, ens interessa poder-hi fer algunes operacions. Podem, per exemple, voler trobar un camí entre dos punts, recòrrer el graf sencer o trobar el camí més curt per anar d'un vèrtex a un altre. Per aquest motiu utilitzem els camins, que trobarem o generarem mitjnçant diversos algorismes. En aquesta secció mostraré diverses maneres de recòrrer un graf, torbant la manera més eficient per a cada cas.

4.1 Grafs ponderats i dirigits

Grafs ponderats

Els grafs ponderats són grafs on cada aresta e està asociada a un nombre $w(e)$ anomenat pes o cost, tal que $w(e) \in \mathbb{R}$. El pes pot representar diverses quantitats, segons el que es vulgui modelitzar. Moltes vegades s'utilitza per representar distàncies, però si per exemple modelitzem una xarxa de distribució d'aigua, ens pot interessar representar el cabal de les canonades, o en una xarxa de bus, la densitat de trànsit de cada tram.

Grafs dirigits

Els grafs dirigits són grafs les arestes dels quals només admeten una direcció. D'aquesta manera, una aresta $e_0 = (v_0, v_1) \neq e_1 = (v_1, v_0)$, contràriament als grafs no dirigits. DE fet, no necessàriament ha d'existir una aresta contrària a una altra. Aquest tipus de grafs poden ser útils per representar carreteres, o moviments vàlids en algun joc.

4.2 Camins

Un camí p és una seqüència finita i ordenada d'arestes que connecta una seqüència ordenada de vèrtexs. Un camí p de longitud k (expressat com a $l(p) = k$) entre el vèrtex inicial v_0 i el vèrtex final v_k sempre que $v_0 \neq v_k$) és una successió de k arestes i $k+1$ vèrtexs de la forma $\overline{v_0, v_1}, \overline{v_1, v_2}, \cdots, \overline{v_{k-1}, v_k}$. Per definició, també es pot representar un camí p entre v_0 i v_k com a successió de vèrtex $p = v_0 v_1 \cdots v_k$. En auqest cas,pot ser tractat com un graf elemental P_n. Un cas especial és quan el camí comenca i acaba al mateix vèrtex ($v_0 = v_k$). Llavors el camí és un cicle, i és l'equivalent a un graf cicle C_n. Quan un camí té totes les arestes diferents, s'anomena simple, i si a més té tots els vèrtexs diferents, s'anomena elemental.

En els grafs, ponderats, la longitud d'un camí $c = v_0, v_1, \cdots, v_n$ no es defineix pel nombre d'arestes per on passa el camí, sinó fent el sumatori dels pesos de les arestes

$$\textbf{longitud}_w(c) = \sum_{i=0}^{n-1} w(\overline{v_i, v_{i+1}})$$

5 Estructures de dades dels grafs

En els grafs, normalement s'ha de tractar una gran quantitat d'informació: nodes, arestes, pesos, sentits... Tota aquesta informació no és difícil de gestionar si el graf que s'estudia és petit, ja que fins i tot es pot dibuixar. El problema sorgeix quan el graf en qüestió és més gran, com per exemple podria ser una xarxa de clavagueram o de metro. Llavors la informació a tractar és molta, i és convenient organitzar-la en estructures de dades. Les estructures de dades solen ser utilitzades en la programació, però en aquest cas sol ser beneficiós tenir-ne fins i tot quan no es treballa amb informàtica.

Matrius

Matriu d'adjacència

La matriu d'adjacència d'un graf és una matriu quadrada que conté informació respecte el nombre d'arestes que uneixen dos nodes, i s'organitza de la següent manera:

Si G és un graf amb n nodes, $A(G) = (a_{i,j})_{i,j} = 1, ..., n$ és la seva matriu d'adjacència de n x n, on $a_{i,j}$ correspon al nombre d'arestes que uneixen els nodes i, j, contant com a 2 els llaços, que sempre es trobaràn a la diagonal. La matriu serà simètrica si el graf ho ès, i podrem conèixer el grau d'un node i fent el sumatori de les caselles de la i-èsima fila. A vegades, quan s'utilitzen grafs ponderats, les matrius d'adjacència s'omplen amb els pesos de les arestes, per no haver d'utilitzar altres estructures per emmagatzemar la resta d'informació. En aquest tipus de grafs, els llaços no necessàriament valdràn 2, però es podràn diferenciar perquè estaràn a la diagonal. En aquest cas, el problema serà que no es podràn representar arestes múltiples amb pesos diferents. Tot i això, en termes de programació, utilitzar aquesta estructura de dades (sobretot en grafs grans) no és el més eficient, ja que creix molt ràpidament. La matriu d'un graf de n nodes té n^2 espais, i en grafs poc densos, la majoria d'espais estan ocupats per 0, de tal manera que s'està utilitzant molta memòria que no conté informació útil. De la mateixa manera, si afegim un nou node al graf, que serà l'n-èssim, s'hauràn d'afegir $2n - 1$ espais a la matriu.

Matriu d'incidència

La matriu d'incidència d'un graf G sense llaços, $I(G) = (b_{i,j})_{i=1,...,v, j=1,...,\alpha}$, on $v = |V|$ i és la matriu binaria v x α on $b_{i,j}$ indica si la aresta j és incident al node i.

(afegir exemple de graf amb les seves dues matrius)

Llistes d'adjacència

Aquesta estructura de dades és la més utilitzada per tractar grafs, ja que ocupa menys memòria i només inclou l'informació necessària. Les llistes d'adjacència consisteixen en un conjunt de n llistes. Cada llista correspon a un node del graf, i conté els nodes al quals és adjacent. En informàtica s'acostumen a fer mitjançant apuntadors, de tal manera que, a partir de cada element de la llista, es pugui accedir a la seva pròpia llista, siguent així molt més senzill fer iteracions. Amb l'esquema següent es pot veure més clarament:

(afegir esquema de les llistes d'adjacència)