Els grafs: xarxes, camins i connexions.

De la matemàtica discreta a la realitat

Aniol Garcia i Serrano

Tutor: Xavier Aguilera Colmenero

Presentació

El tema d'aquest treball, tal com diu el títol, tracta sobre els grafs: xarxes, camins i connexions. Pretén fer el pas de la matemàtica discreta a la realitat. La matemàtica discreta s'encarrega de l'estudi de conjunts, estructures i processos formats per elements que es poden comptar un a un i de manera separada. La teoria de grafs n'és una branca. Els grafs sovint formen part de l'entramat de mecanismes que fan funcionar moltes de les coses que ens envolten, que ens permeten relacionar-nos, o bé que ens faciliten el dia a dia, per exemple. Però, malgrat tot, són uns grans desconeguts. Al llarg del treball intento crear lligams entre la part més teòrica i abstracta i algunes de les aplicacions que se'n deriven. Intento endinsar-me en el coneixement per comprendre aquests mecanismes. Intento crear els mecanismes per que el coneixement esdevingui una eina pràctica i funcional.

Metodologia

Al tractar-se d'un treball fonamentalment teòric, primer va caldre familiaritzar-me amb els grafs en sí i tots els conceptes que d'ells se'n deriven. A partir d'aquest punt el treball esdevé un procés de descoberta que enllaça amb la part més pràctica: es demostren propietats de diversos tipus de grafs, s'estudia el funcionament d'algorismes que es basen en aquestes propietats i, finalment, es creen diversos algorismes gràcies al conjunt de tot el coneixement adquirit.

Les fonts d'informació utilitzades han estat molt diverses. En la bibliografia he detallat els documents i les pàgines Webs consultades. Malgrat tot, el gruix més important de la informació prové d'altres fonts que per a mi han estat més significatives pel fet que han estat més properes i, sobretot, vivencials: el guiatge de la UB ha estat clau; la participació en el Math Summer Camp i en el programa Bojos per les Matemàtiques també em va aportar moltíssima informació; les xerrades i consells per part dels investigadors de l'IRI m'han obert moltes portes; les converses amb l'Anton Aubanell, imprescindibles.

Per a l'elaboració d'aquest treball s'han utilitzat eines informàtiques provinents, en tots els casos, de programari lliure. Aquest programari m'ha permès escriure les fórmules i confegir els esquemes dels grafs que apareixen en el treball, els quals són tots d'elaboració pròpia. Esmentar l'ús del sistema operatiu GNU/Linux, el processador de text LaTeX, el programa GeoGebra, el llenguatge Python i el sistema de control de versions Git. L'ús d'aquestes eines ha estat una part important del meu aprenentatge.

Cos del treball

El cos del treball s'estructura en quatre capítols que permeten endinsar-se, de manera seqüenciada, en el coneixement del grafs i les seves aplicacions.

En el primer capítol es fa una introducció a la teoria de grafs. Es comença fent un recorregut per la història dels grafs, des dels seus orígens, amb el planteig dels primers problemes, fins la teoria de grafs moderna. Tot seguit s'expliquen els conceptes bàsics: és la part més teòrica en la qual es defineix el graf i es fa referència a la seva estructura i els seus components. S'explica també què són els isomorfismes i, finalment, es fa una descripció dels diferents tipus de grafs. En aquest apartat s'han exposat les propietats fonamentals i s'han inclòs demostracions sempre que ha estat possible.

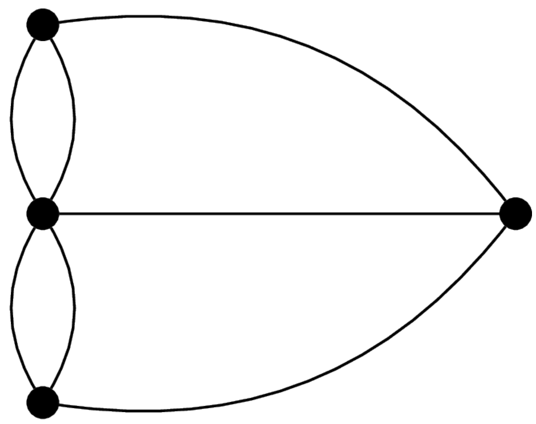

Figura 1: El primer graf de la història; modelització dels ponts de Königsberg

En el segon capítol es fa un pas més enllà: es descriu què són els grafs ponderats i els dirigits, els tipus de camins i les maneres diferents de gestionar tota aquesta informació afegida. Finalment s'estudien diferents algorismes segons la seva finalitat. S'analitza el funcionament, les propietats fonamentals i les aplicacions més comuns de cadascun d'aquests procediments i s'especifica el pseudocodi. En el treball, adjunto els programes amb llenguatge Python que permeten resoldre els algorismes, juntament amb exemples d'entrada i de sortida.

El tercer capítol és un incís al disseny de grafs. Es fa referència al punt de Fermat i a l'arbre de Steiner per la seva rellevància. Se'n mostra un bonic exemple mitjançant les bombolles de sabó.

Finalment, en el darrer capítol, s'exposen algunes aplicacions pràctiques. Una d'elles és el recorregut per la xarxa de metro de Barcelona. Aporto al treball un algorisme que, a partir d'una estació de sortida i una altra d'arribada, ofereix, com a resposta, el trajecte que permet fer el recorregut amb el mínim temps possible. Aquesta resposta inclou les estacions per on es passarà, els transbordaments que caldrà fer i el temps total que es trigarà per anar d'un punt a l'altre.

Conclusions

Algunes de les conclusions a les que he arribat mentre he estat fent la recerca han estat les següents:

La teoria de grafs ens proporciona eines per modelitzar estructures i processos i ens permet crear aplicacions pràctiques mitjançant procediments algorísmics. Es poden modelitzar una gran quantitat d'estructures: des de xarxes de telecomunicacions, fins a la panificació de moviments d'un robot o bé el funcionament de inteligències artificials, per exemple. Un cop els models estan definits, ens trobem amb tot un assortiment d'algorismes informàtics que permeten extreure dades de models teòrics i transformar-los en informació útil, resultats. Mitjançant els algorismes he aconseguit solucionar el problema de la coloració de grafs, ordenar aquest treball de manera òptima i poder conèixer el recorregut i temps de viatge entre dues estacions qualssevol del metro de Barcelona, entre d'altres.

A més, els procediments algorísmics tenen un component matemàtic molt important. Alguns es basen en conceptes matemàtics més generals, com per exemple l'algorisme de Dijkstra amb la desigualtat triangular; en canvi d'altres, com el de Prim, es basen en propietats singulars dels grafs.

Els grafs, no només formen part de la realitat que ens envolta si no que, a més, ens faciliten moltes gestions i ens proporcionen comoditats de les quals ens seria difícil prescindir: les xarxes socials, Internet, el subministrament elèctric, navegadors GPS...

Implementar algorismes, a més de la part matemàtica, en ocasions requereix un treball de camp i/o una recollida de dades, com ha estat el cas de l'algorisme de la Xarxa de metro de Barcelona: per tal de treballar amb valors precisos ha estat necessari mesurar els temps reals de viatge entre les estacions de totes les línies.

La darrera conclusió és que em queda molt camí per fer: la teoria va més enllà d'on jo he arribat; hi ha algorismes que no he tractat com el de Johnson o el de A*, per exemple; i sobretot m'agradaria endinsar-me més en la topologia, una de les branques més curioses de les matemàtiques.

Per tal de compartir tot aquest aprenentatge m'ha semblat adient publicar tant el treball en sí com tots els programes que he generat. Tot plegat ho trobareu a `https://aniolgarcia.github.io/grafs/`

Bibliografia

K. APPEL i W. HANKEN. “Every Planar Graph is Four-Colourable (I)”. A: *Illinois Journ. Maths.* 21 (1977), pàg. 429 - 490.

K. APPEL i W. HANKEN. “Every Planar Graph is Four-Colourable (II)”. A: *Illinois Journ. Maths.* 21 (1977), pàg. 491 - 567.

K. APPEL i W. HANKEN. “The Solution of the Four-Color Map Problem”. A: *Scientific American* 27 (1977), pàg. 108 - 121.

J. BASART. *Grafs: fonaments i algorismes.* Universitat Autònoma de Barcelona, 1994.

A. CAYLEY. “A theorem on trees”. A: *Quart. Journ. Maths.* 23 (1889), pàg. 376 - 378.

E. DEMAINE i S. DEVADAS. *6.006 Introduction to Algorithms.* Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. Fall 2011. URL: `https://ocw.mit.edu`.

E. DEMAINE, S. DEVADAS i N. LYNCH. *6.046J Design and Analysis of Algorithms.* Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. Spring 2015. URL: `https://ocw.mit.edu`.

E. W. DIJKSTRA. “A note on two problems in connection with graphs”. A: *Numerische Mathematik* 1 (1959), pàg. 269 - 271.

L. EULER. “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”. A: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae.* Vol. 8. 1741, pàg. 128 - 140.

Geeks for Geeks. URL: `www.geeksforgeeks.org/fundamentals-of-algorithms`.

J. GIMBERT. “Les matemàtiques de GOOGLE: l’algorisme PageRank”. A: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques.* Vol. 26. 1. 2011, pàg. 29 - 55.

F. HARARY. *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969.

A. B. KEMPE. “On the geographical problem of the four colours”. A: *Amer. Journ. Maths.* 23 (1879), pàg. 193 - 200.

D. KÖNIG. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.

J. B. KRUSKAL. "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem". A: *Proc. Amer. Math. Soc.* 7 (1956), pàg. 48 - 50.

Math Overflow. URL: mathoverflow.net.

Math Stack Exchange. URL: math.stackexchange.com.

A. MATTHES. *Gallery of named graphs.* 2008. URL: http://altermundus.fr/downloads/documents/NamedGraphs.pdf.

A. MATTHES. *tkz-berge.sty.* 2008. URL: http://www.altermundus.fr/pages/downloads/TKZdoc-berge.pdf.

Pathfinding. URL: http://www.redblobgames.com/pathfinding/.

R. C. PRIM. "Shortest connection networks and some generalizations". A: *Bell Syst. Tech. Journ.* 36 (1957), pàg. 1389 - 1401.

F.J. SORIA. *Apuntes de grafos.* Universitat de Barcelona, 2014.

Texample. URL: texample.net.

Alexandre-Théophile Vandermonde. "Remarques sur les problèmes de situation". A: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1771), pàg. 566 - 574.

ERIC W. WEISSTEIN. *Wolfram MathWorld.* URL: mathworld.wolfram.com.

Wikipedia. URL: wikipedia.org.