

Part I

Introducció a la teoria de grafs

Aquest primer apartat consisteix en la part més teòrica del treball. Explicaré breument la història d'aquesta branca de la matemàtica i posteriorment ens endinsarem en la teoria de grafs com a tal. La teoria de grafs pot semblar bastant abstracta i, a vegades, complicada d'entendre, però estarà acompanyada de demostracions i exemples propis que pretenen facilitar el seguiment del treball.

1 Història del grafs

1.1 Els primers passos

Tot sovint, les noves branques de la matemàtica sorgeixen de cercar solucions a problemes. Problemes que no poden ser resolts ni demostrats amb el que coneixem i que forcen a desenvolupar nous mètodes i teories. La teoria de grafs no n'és una excepció i tot seguit presentaré els problemes que van forjar la creació d'aquesta branca.

Euler i els ponts de Königsberg

La teoria de grafs neix a partir de la solució d'un problema curiós: el problema dels ponts de Königsberg (l'actual Kaliningrad, Rússia). El planteig del problema és el següent:

“El riu Pregel divideix Königsberg en quatre parts separades, i connectades per set ponts. És possible caminar per la ciutat passant per tots els ponts tan sols una vegada?”

Els ciutadans de Königsberg sabien que no era possible, però mai ningú ho havia demostrat fins que Leonhard Euler ho va fer. La demostració de que això no era possible queda recollida en el *“Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”* publicat el 1736, i l'article també va ser inclòs en el volum 8 de *“Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae”* publicat el 1741. En aquest text, Euler diu el següent:

“A més d'aquella part de la geometria que s'ocupa de les quantitats, la qual sempre ha generat un interès preferent, hi ha una altra part -encara pràcticament desconeguda- que ja fou esmentada per Leibniz amb el nom de geometria de posició. Aquesta part de la geometria estudia tot allò que pot ésser determinat únicament per la posició, així

com les propietats de la posició; en aquest camp hom no hauria de preocupar-se de quantitats ni de com obtenir-les. No obstant això, els tipus de problemes que pertanyen a aquesta geometria de posició i els mètodes usats per resoldre'ls encara no són suficientment definits. Així doncs, quan darrerament se'm va plantejar un problema que semblava bàsicament geomètric, però que no demanava l'obtenció de quantitats ni admetia una sol·lució basada en el càlcul de quantitats, em vaig adonar que pertanyia a la geometria de posició, sobretot perquè només es podia usar la posició per resoldre'l, mentre que el càlcul es mostrava inútil. Així, he decidit exposar ací, com a mostra de la geometria de posició, el mètode que he deduït per a resoldre problemes d'aquesta mena."

Per aconseguir demostrar que el problema no tenia sol·lució, Euler va haver de representar el problema com un mapa topològic, posant les masses de terra com a punts i els ponts com a segments que unien aquests punts, i creant d'aquesta manera el primer graf de la història. Aquest resultat es considera el primer en teoria de grafs ja que conté un important teorema d'aquesta branca. A més d'iniciar la teoria de grafs, amb aquest resultat també comença l'estudi dels grafs planars, introdueix el concepte de característica d'Euler de l'espai i el teorema de poliedres d'Euler (teorema que després va utilitzar per demostrar que no hi havia més sòlids regulars que els sòlids platònics). Amb tot això, Euler posa les bases, no tan sols de l'estudi dels grafs, sinó també de la topologia, una altra branca que també serà tractada en aquest treball.

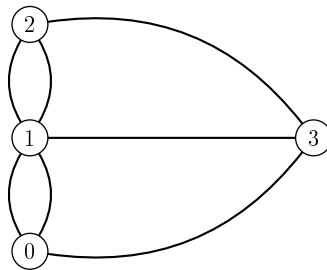


Figura 1: Representació topològica dels ponts de Königsberg

Vandermonde i el tour del cavall d'escacs

A partir de l'article d'Euler, diversos matemàtics van començar a interessar-se pel camp de la topologia (o geometria de la posició, com li deien en aquell moment). Un d'ells fou Alexandre-Théophile Vandermonde. Vandermonde va treballar i estudiar el problema dels cavalls, que pregunta quins moviments hem de fer per tal que un cavall passi per totes les caselles del tauler d'escacs, problema que també va tractar Euler. Els estudis que Vandermonde va fer sobre aquest problema van

ser publicats el 1771 en el “*Remarques sur des problèmes de situation*”, i per la relativa proximitat als treballs d'Euler, encara no parlava de grafs, tot i que en l'actualitat el problema es resol mitjançant aquests. Aquest treball inicia l'estudi de la teoria de nusos, una altra branca de la topologia.

1.2 Les primeres descobertes i aplicacions

Un cop establert l'inici, és difícil veure com va continuar desenvolupant-se la teoria, ja que en els primers treballs es volien resoldre problemes concrets sense establir relacions entre ells. Tot i així, durant el segle XIX es van plantejar una gran quantitat de problemes i es van desenvolupar molts teoremes referents als grafs.

Francis Guthrie

El 1852, Francis Guthrie, matemàtic britànic, es planteja el següent problema mentre intenta pintar un mapa del Regne Unit:

“És possible pintar qualsevol mapa de països de tal manera que un país tingui un color diferent al de tots els seus veïns, utilitzant tan sols quatre colors?”

D'aquest problema en surt el teorema a partir del qual s'estableix que qualsevol mapa pot ser pintat únicament amb quatre colors diferents, de tal manera que dues regions adjacents (entenem com a adjacents dues regions que comparteixin frontera, no tan sols un punt) no tinguin colors iguals. Aquest problema, que pot semblar tan trivial, no va ser demostrat fins l'any 1976. Va passar per mans de pioners com De Morgan, Hamilton, Cayley, Kempe (que va fer una demostració publicada el 1879), Heawood (que va concloure que la demostració de Kempe no era correcta)... Finalment el 1976 Appel i Haken van demostrar, mitjançant un programa d'ordinador, que tot mapa es podia pintar només amb quatre colors. Pel fet de basar-se en un programa d'ordinador, no va acabar de convèncer la demostració. Així doncs, aquest problema no va ser solucionat de manera formal fins l'any 1996 quan, recorrent a la teoria de grafs ja desenvolupada, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas van publicar-ne una demostració. En els treballs d'Appel i Haken es van definir alguns dels conceptes i fonaments de l'actual teoria de grafs.

Arthur Cayley

Arthur Cayley, matemàtic que treballava en la teoria de grups, topologia i combinatòria, també va aportar una gran quantitat de coneixement a la teoria de grafs. Va

treballar amb grafs de tipus arbre i va desenvolupar la fórmula n^{n-2} , que determina el nombre d'arbres expansius que té un graf complet de n vèrtex (veure apartat 3.4). Una fórmula semblant apareixia en treballs de Carl Wilhelm Borchardt, en els quals Cayley es va basar i va estendre, tot i que el que actualment dona nom a la fórmula és el mateix Cayley.

També va treballar en el desenvolupament d'una representació de l'estructura abstracta d'un grup, creant els grafs de Cayley i el teorema de Cayley. Finalment va contribuir també, l'any 1857, en la representació i enumeració dels isòmers alcans (composts químics que comparteixen fórmula o composició però tenen diferent estructura molecular), representant cada compost mitjançant un graf de tipus arbre. Tot i això, Cayley no només va ser actiu en teoria de grafs, sinó que també va desenvolupar teoremes en àlgebra lineal, topologia i geometria.

William Hamilton i Thomas Kirkman

William Rowan Hamilton va plantejar un problema el 1859 que consistia a trobar un camí que passés pels 20 vèrtex d'un dodecaedre una sola vegada a través de les seves arestes. Hamilton va comercialitzar el joc sota el nom de "The Icosian game" (és important dir que el nom de icosian no va ser degut a que utilitzés un icosaedre, sinó que feia referència als 20 vèrtexs del dodecaedre per on s'havia de passar). Entorn aquest joc existeix un gran controvèrsia, ja que Euler anteriorment havia plantejat un problema semblant mentre estudiava el problema dels cavalls d'escacs, i Kirkman va plantejar exactament el mateix problema que Hamilton a la Royal Society un temps abans.

Gustav Kirchhoff

Gustav Kirchhoff, conegut majoritàriament en el camp de l'electrotècnia per les lleis de Kirchhoff, també va fer aportacions importants a la teoria de grafs. Les seves lleis, publicades el 1874, es basen en la teoria de grafs, però a més, va ser el primer d'utilitzar els grafs en aplicacions industrials. Va estudiar sobretot els grafs de tipus arbre i, amb l'investigació que va dur a terme sobre aquest tipus de grafs, va formular el teorema de Kirchhoff, referent al nombre d'arbres d'expansió que es poden trobar en un graf. Aquest teorema es considera una generalització de la fórmula de Cayley.

1.3 Teoria de grafs moderna

Durant el segle XX, la teoria de grafs es va continuar desenvolupant. Amb les bases ja establertes durant el segle XIX, els matemàtics hi van començar a treballar i el 1936 Dénes König va escriure el primer llibre de teoria de grafs. Frank

Harary va escriure un altre llibre el 1969, fent més accessible la teoria de grafs. El desenvolupament de l'informàtica i les noves tècniques de computació van permetre treballar amb grafs a molt més gran escala, fent possible, per exemple, la ja citada primera demostració del teorema dels quatre colors per Appel i Haken.

Actualment la teoria de grafs és una part molt important de la matemàtica discreta i està relacionada amb molts àmbits diferents, com per exemple la topologia, la combinatòria, la teoria de grups, la geometria algebraica... Des del seu desenvolupament s'han utilitzat els grafs per resoldre i representar de manera visual problemes en aquests camps. Té aplicacions en molts altres àmbits com per exemple la computació, la informàtica, la física, la química, l'electrònica, les telecomunicacions, la biologia, la logística i fins i tot en l'àmbit econòmic.

2 Principis bàsics

Un *graf* $G = (V, E)$ es defineix com un conjunt de *vèrtexs* (o nodes) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i un conjunt d'*arestes* $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, cadascuna de les quals uneix dos vèrtex de V . Si v_i i v_j , amb $v_i, v_j \in V$, estan units per l'aresta e_k escriurem $e_k = \{v_i, v_j\}$. Quan volguem especificar el graf concret empararem les notacions $V(G)$ i $E(G)$. Així doncs un graf està format per un conjunt de punts i un conjunt d'arestes que uneixen alguns d'aquests punts. El nombre de vèrtexs d'un graf queda determinat pel nombre d'elements que hi ha en el conjunt V , per tant ens referirem a ell com a $|V|$ (cardinal de V). Amb les arestes passa el mateix, i també utilitzarem $|E|$ per indicar el nombre d'arestes d'un graf. Definim també que dos vèrtexs són *adjacents* si estan units per una aresta i, com a conseqüència, són *incidentes* a l'aresta.

La idea intuïtiva de graf convida a utilitzar representacions gràfiques. Així, en la figura 2 es mostra un graf simple G format per:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}\}$

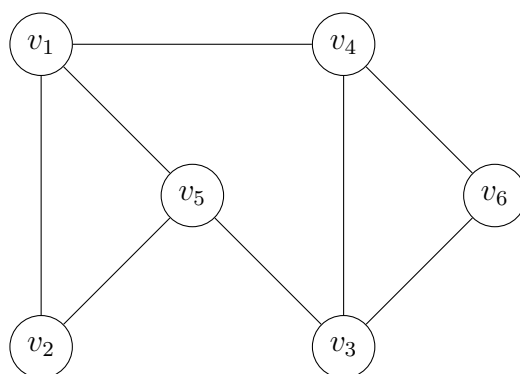


Figura 2: Representació gràfica del graf $G = (V, E)$ que s'ha presentat

Si una aresta comença i acaba en el mateix vèrtex (per exemple $e_m = \{v_i, v_i\}$ s'anomena llaç (figura 3, cas (a)). També pot ser que hi hagi dues arestes idèntiques, és a dir, dues arestes que uneixin v_i i v_j (figura 3, cas (b)). En qualsevol d'aquests dos casos anteriors, el graf s'anomena *multigraf* o *pseudograf*. En cas contrari, el graf serà anomenat *simple*. Amb el que hem vist fins ara, podem dir que $e_1 = \{v_1, v_2\}$ és equivalent a $e_2 = \{v_2, v_1\}$ (ja que es tracta de parells no ordenats). Tanmateix, existeixen grafos en els quals les arestes han de ser recorregudes en una direcció determinada. S'anomenen grafos *dirigits* i, en aquest cas, si $e_1 = (v_1, v_2)$ i $e_2 = (v_2, v_1)$, $e_1 \neq e_2$, ja que es tracta de parells ordenats (figura 3, cas (c)). En la següent imatge es mostren els grafos esmentats anteriorment:

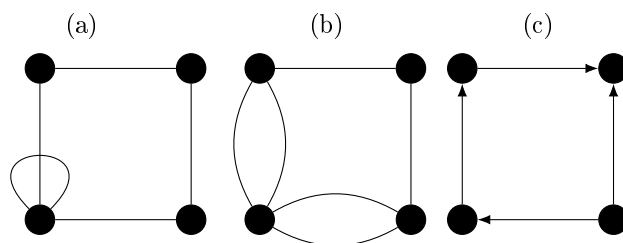


Figura 3: Graf amb un llaç (a), graf amb arestes múltiples (b) i graf dirigit (c)

Nota de l'autor: a partir d'ara, i si no s'indica el contrari, quan es parli de grafos, s'exclouran els multigrafos i grafos dirigits.

Direm que un graf no dirigit $G = (V, E)$ és *connex* si per a qualsevol $v_i, v_j \in V$ $v_i \neq v_j$ existeix un *camí* (successió d'arestes) que els uneix.

El nombre d'arestes que són incidents a un vèrtex v (comptant els llaços com a dues arestes) determinen el que anomenarem *grau* de v , que es representa amb $g(v)$. La successió de graus d'un graf serà la successió que s'obté a l'ordenar de manera creixent els graus dels seus vèrtex. Cal dir que no és un problema gens

trivial saber si una successió de nombres naturals donada pot ser una successió de graus d'un graf. El grau mínim d'un graf $G = (V, E)$ queda determinat de la següent manera: $\delta(G) = \min\{g(v) : v \in V(G)\}$. De manera similar, el grau màxim de G , $\Delta(G) = \max\{g(v) : v \in V(G)\}$.

Si d'un graf connex en treiem una aresta o un node, en resulta un altre (o més d'un) graf connex. Si $v \in V(G)$, indicarem per $G - v$ al graf que s'obté al suprimir el vèrtex v i totes les seves arestes incidents. De la mateixa manera, si $e \in E(G)$, $G - e$ indicarà el graf que s'obté a l'eliminar la aresta e .

Amb tots aquests conceptes ja podem veure el teorema d'Euler, un dels primers teoremes en teoria de grafs i un dels més importants.

Teorema 1 (Euler)

En tot graf $G = (V, E)$, la suma dels graus dels vèrtex és igual al doble del nombre d'arestes.

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2|E|(G)$$

Demostració: Només cal veure que cada aresta té dos extrems i que suma dos en el total dels graus. La demostració formal és més complicada, i comporta desenvolupar una inducció respecte del nombre d'arestes:

- Si $|E| = 0$, no cal considerar el cas. Si $|E| = 1$, o $|V| = 2$ i cada vèrtex té grau 1 o la aresta és un llaç i hi ha un sol vèrtex de grau 2. En qualsevol d'aquests dos casos, el teorema es verifica.
- Ara suposem que el teorema està demostrat per a $|E| \leq k$ i que G és un graf amb $|E| = k + 1$. Si e és una aresta de G prenem $H = G - e$.
- Llavors tots els vèrtexs de H tenen el mateix grau a H que a G excepte 2 que tenen un grau menys o un que té dos graus menys (només en el cas que e sigui un llaç). En tots dos casos obtenim que:

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) = \sum_{v \in V(H)} g(v) + 2 = 2(|E| - 1) + 2 = 2|E|$$

D'aquesta demostració en treiem una altra afirmació:

En tot graf, el nombre de vèrtex amb grau imparell, és parell.

3 Tipus de grafs

Fins ara hem vist els conceptes bàsics en teoria de grafs i algunes de les propietats que compleixen tots els grafs. No obstant, existeixen diversos tipus de grafs que tenen propietats especials. A continuació se'n presenten alguns

3.1 Grafs complementaris

El graf complementari del graf G és el graf H amb els mateixos vèrtexs que G , de manera que dos vèrtexs d' H seran adjacents si i només si a G no ho són. Formalment, si $G = (V, E)$ és un graf simple i $K = E(K_n)$ és el conjunt d'arestes derivades de totes les possibles combinacions de dos elements de V , essent $n = |V(G)|$, llavors $H = (V, K \setminus E)^1$. Per indicar el complementari de G s'escriu \bar{G} o G' .

Propietat 1 Per obtenir el graf complementari de G tan sols s'han de posar les arestes que falten per obtenir un graf complet i treure totes les que hi eren inicialment (ja que $|E(G)| + |E(\bar{G})| = |K|$). Veure figura 4.

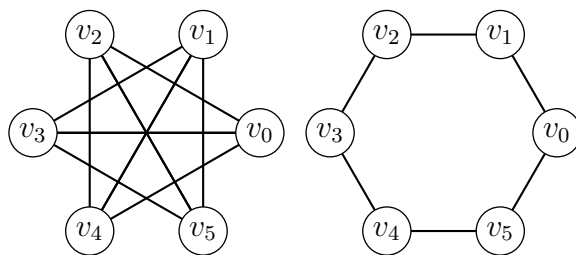


Figura 4: Un graf G i el seu complementari \bar{G}

3.2 Grafs regulars

Es diu que un graf $G = (V, E)$ és *regular de grau r* quan tots els seus vèrtexs tenen grau r . Formalment, un graf és r -regular quan $\Delta(G) = \delta(G) = r$. Un graf 0-regular és un graf nul ², un graf 1-regular consisteix en arestes separades entre elles i un graf 2-regular consisteix en un o més cicles ³ separats. A partir d'aquí, els grafs regulars més importants tenen noms propis, com per exemple els 3-regulars, que són els *cúbics*; els 4-regulars, *quàrtics*; els 7-regulars, *grafs de Witt truncats dobles*; els 8-regulars, *grafs de 24 cel·les*...

¹La notació $K \setminus E$ indica el conjunt dels elements de K que no són a E

²Veure apartat 3.3

³Veure apartat 3.5

Propietat 1 No necessàriament existeix un únic graf r -regular, sinó que sovint s'en poden fer amb diferent nombre de vèrtexs. A l'imatge 4 es poden veure diversos exemples de grafs regulars, alguns d'ells amb el mateix grau i diferent nombre de vèrtexs.

Propietat 2 Com a conseqüència del teorema 2, per a tots els grafs r -regulars amb n vèrtexs es compleix que

$$|E|(G) = \frac{1}{2}nr$$

on $|E|(G)$ és el nombre d'arestes.

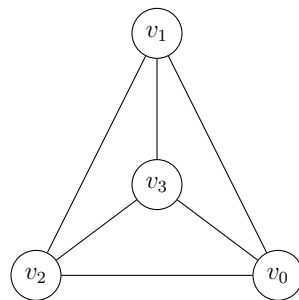


Figura 5: Graf cúbic (3-regular)

3.3 Graf nul i grafs buits

Els *grafs buits* són grafs sense arestes, és a dir, conjunts d' n vèrtexs. Són els complementaris dels grafs complets K_n ⁴, i per tant la seva nomenclatura és \bar{K}_n o, simplement, N_n . Estrictament s'anomena *graf nul* a N_0 i buits a la resta, però com que normalment no s'utilitza N_0 , convencionalment es diuen nuls tots els elements del conjunt dels buits.

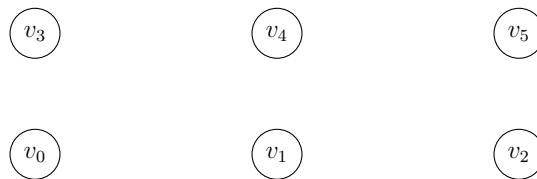


Figura 6: Graf buit N_6

⁴Veure apartat 3.4

3.4 Grafs complets

Un *graf complet* és un graf on cada vèrtex està unit a tots els altres una sola vegada. Un graf complet amb n nodes és un graf simple i $(n - 1)$ -regular i la seva nomenclatura és K_n .

Propietat 1 Els grafs complets tenen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestes.

Propietat 2 El nombre de cicles que conté un graf complet queda determinat per la següent igualtat:

$$C_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{2} \binom{n}{k} (k-1)!$$

On:

$\frac{1}{2}$ es multiplica perquè es contenen dues vegades els cicles, ja que no són dirigits.

$\binom{n}{k}$ és el nombre de grups de k elements que es poden agafar.

$(k-1)!$ és el nombre de permutacions circulars de k elements.

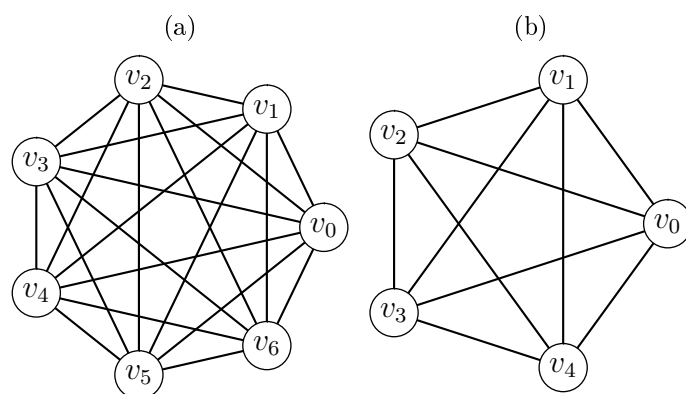


Figura 7: Grafs complets K_7 (a) i K_5 (b)

3.5 Cicles

Els *cicles* són grafs 2-regulars amb n vèrtexs i n arestes, i s'anomenen C_n .

Propietat 1 El graf lineal ⁵ d'un cicle és ell mateix.

⁵Veure apartat 3.9

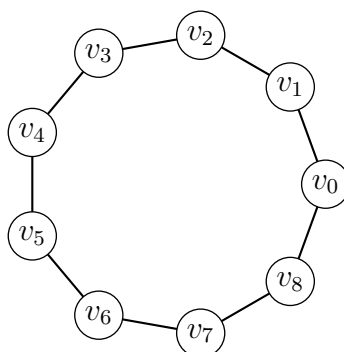


Figura 8: Cicle C_9

3.6 Grafs bipartits

Els *grafs bipartits* són aquells en els quals els vèrtexs es poden separar en dos conjunts disjunts U i W (és a dir, que els dos conjunts no tinguin elements comuns) de tal manera que un vèrtex d'un conjunt no sigui mai adjacent a un altre vèrtex del mateix conjunt. Es pot dir també que un graf és bipartit si i sols si no conté cicles de longitud senar.

Propietat 1 Tots els grafs C_n amb n parell, són també grafs bipartits.

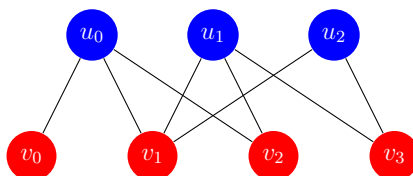


Figura 9: Graf bipartit

3.7 Grafs bipartits complets

Els *grafs bipartits complets* són grafs bipartits ⁶ en els quals cada element del conjunt U està unit a tots els elements dels del conjunt W . S'anomenen $K_{m,n}$, on $m = |U|$ i $n = |W|$.

Propietat 1 En els grafs bipartits $K_{m,n} = K_{n,m}$, $|V| = n + m$ i $|E| = mn$.

⁶Veure apartat 3.6

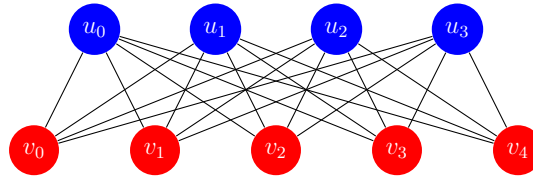


Figura 10: Graf bipartit complet $K_{4,5}$

3.8 Grafs estrella

Un *graf estrella* de grau n és aquell que conté un vèrtex amb grau $n - 1$ i els $n - 1$ vèrtexs restants de grau 1. La seva nomenclatura és S_n .

Propietat 1 Són estrelles tots els grafs bipartits de la forma $K_{1,n-1}$ o $K_{n-1,1}$.

Propietat 2 El graf lineal de S_n és K_{n-1} .

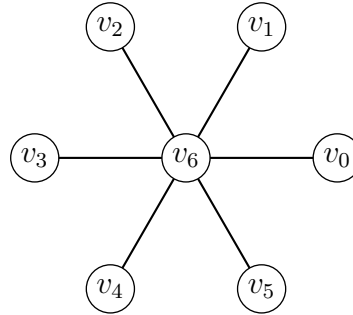


Figura 11: Graf estrella S_7

3.9 Graf lineal

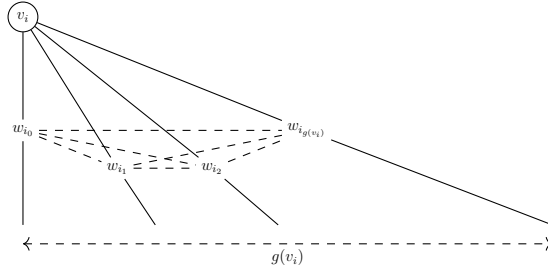
Un graf lineal $L(G)$ d'un graf G és un graf que representa les adjacències entre les arestes de G . Formalment, donat un graf G , el graf lineal $L(G)$ és aquell en el qual cada vèrtex correspon a una aresta de G i dos vèrtexs són adjacents només si les arestes corresponents a G comparteixen un vèrtex.

Propietat 1 El graf lineal d'un graf amb n nodes, e arestes i amb vèrtexs de graus $g(v_i)$ té $n' = e$ nodes i

$$e' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g(v_i)^2 - e$$

arestes.

Demostració: Cada node v_i amb grau $g(v_i)$ del graf original generarà un graf complet de $g(v_i)$ nodes ($K_{g(v_i)}$).



Tal com s'ha vist a l'apartat 3.4, un graf complet té $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{2}$, per tant en aquest cas se'n generen $\frac{g(v_i)(g(v_i)-1)}{2}$. Però això es compleix per a cada vèrtex, i llavors podem escriure

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} g(v_i)(g(v_i)-1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (g(v_i)^2 - g(v_i)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g(v_i)^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^n g(v_i)}_{\substack{2|E| \\ |E|}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g(v_i)^2 - e$$

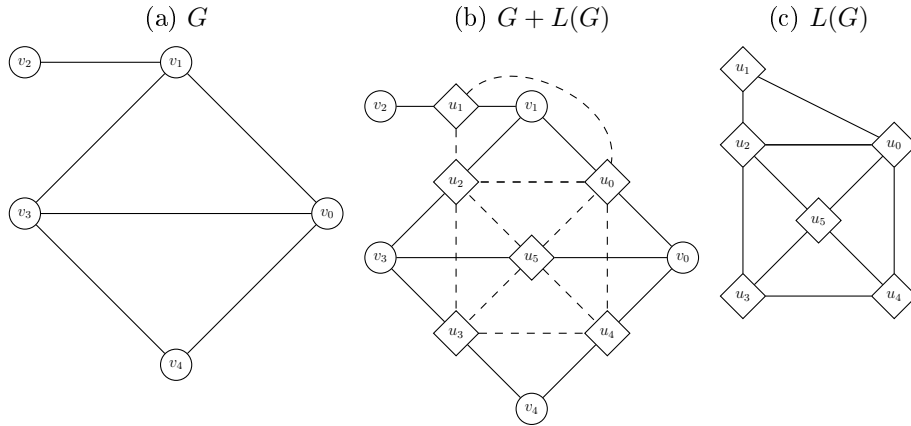


Figura 12: Procés de construcció d'un graf lineal

3.10 Rodes

Un *graf roda* amb n vèrtex és un graf que conté un cicle de longitud $n - 1$, on tots els vèrtex del cicle estan connectats a un vèrtex fora del cicle, anomenat node central. S'escriu W_n , i a vegades simplement s'estudia com a $C_{n-1} + K_1$.

Propietat 1 El node central té grau $n - 1$, i la resta de nodes tenen grau 3.

Propietat 2 El nombre de cicles que conté un graf roda amb n vètxes està determinat per $n^2 - 3n + 3$.

Demostració: El nombre de cicles que conté un graf roda és la suma del nombre de cicles de longitud des de 3 fins a n ($\sum_{i=3}^n C_i$). Amb l'excepció de C_{n-1} , el nombre de cicles per a cada i és $n - 1$. En el cas de C_{n-1} n'hi ha n de possibles, però ho representem de la manera $n - 1 + 1$, per tal que sigui més còmode operar. Com que els cicles són possibles a partir de longitud 3, en total hi ha $n - 2$ longituds possibles. D'aquesta manera podem escriure $(n - 2)(n - 1) + 1 = \boxed{n^2 - 3n + 3}$.

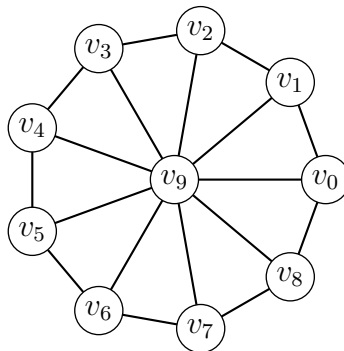


Figura 13: Roda W_{10}

3.11 Xarxes

Els *grafs xarxes* bidimensionals $G_{m,n}$ són grafs bipartits que formen un entramaten forma de quadrícula de mn vètxes.

Propietat 1 Es pot generalitzar per a xarxes de més dimensions com a $G_{m,n,o,\dots}$.

Propietat 2 Un graf xarxa té mn vètxes i $(m - 1)n + (n - 1)m$ arestes.

Demostració: Tal com es pot veure a la figura ??, un graf xarxa té

$$(n-2)(m-2) + 2(m-2) + 2(n-2) + 4 = nm - 2m - 2n + 4 + 2m - 4 + 2n - 4 + 4 = mn$$

vètxes. D'altra banda, la suma dels graus de tots els vètxes és

$$\frac{4(m-2)(n-2) + 3 \times 2(m-2+n-2) + 4 \times 2}{2} = 2(m-2)(n-2) + 3(m-2) + 3(n-2) + 4$$

Si es desenvolupa, s'obté

$$(n-2)(m-2) + (n-2)(m-2) + 2(m-2) + (m-2) + 2(n-2) + (n-2) + 4$$

on la suma dels elements marcats equival a mn . Si es continua desenvolupant tinguent en compte aquest detall, s'obté

$$mn - 2m - 2n + 4 + m - 2 + n - 2 + mn = 2mn - m - n = \boxed{m(n - 1) + n(m - 1)}$$

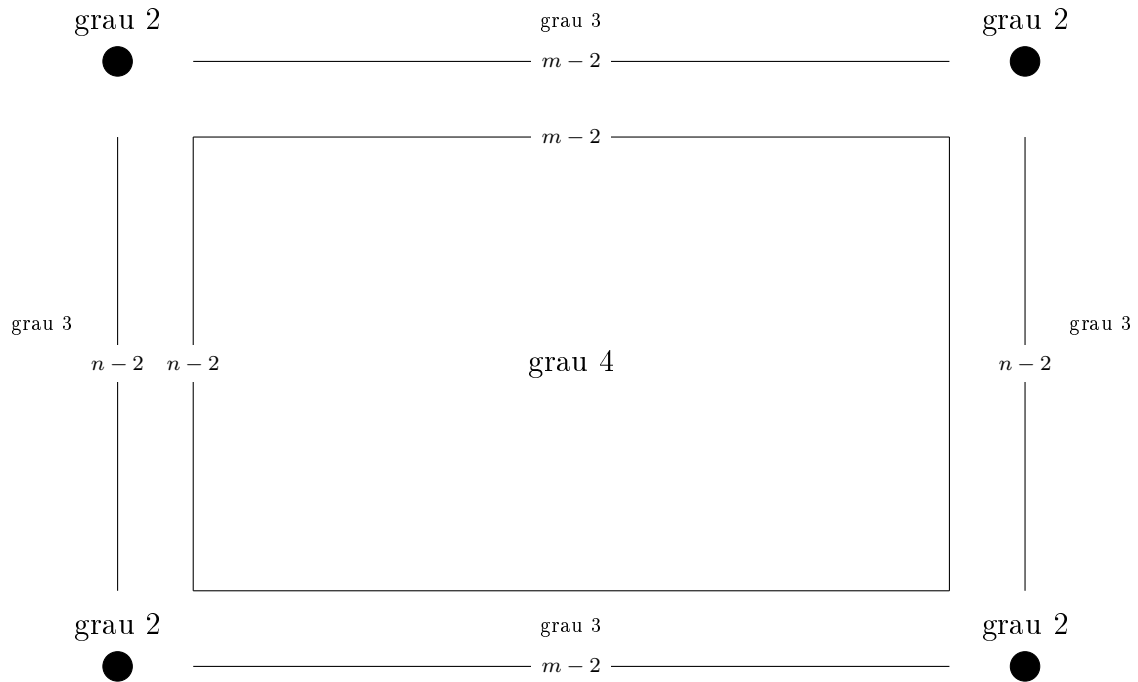


Figura 14: Representació dels graus dels diferents nodes d'un gra xarxa

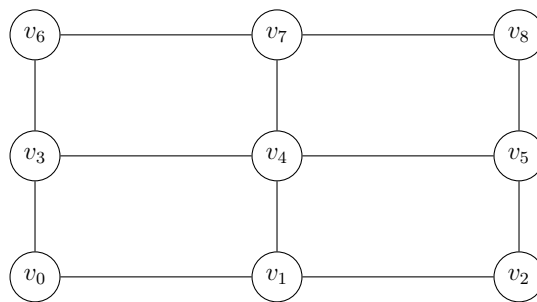


Figura 15: Graf xarxa $G_{3,3}$

3.12 Arbres

Els *arbres* són un tipus molt important de grafs: són grafs connexos sense cicles, de manera que existeix un únic camí entre dos vèrtexs.

Propietat 1 Si a un arbre se li afegeix una aresta, es genera un cicle, i se s'en treu una, el graf deixa de ser connex.

Propietat 2 Hi ha un tipus especial d'arbres anomenats *elementals* o *camins*, que són els arbres amb $|V| = 1$, $|V| = 2$ i en general tots aquells on $\delta = 1$ i $\Delta = 2$. S'anomenen P_n , on $n = |V|$. També es pot pensar en grafs elementals com a $G_{n,1}$.

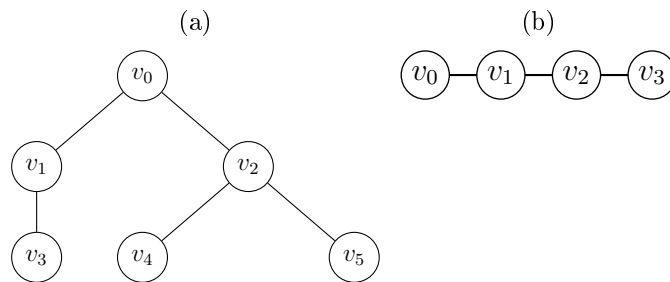


Figura 16: Arbre (a) i graf elemental P_4 (b)

Teorema 2

Un arbre amb n nodes té $n - 1$ arestes.

Demostració: Si comprovem el cas on un arbre T té $n = 1$ vèrtexs, veiem que no té cap aresta, per tant el teorema es compleix. Si treiem una aresta de l'arbre, en sorgiran 2 arbres més T_1 i T_2 . Per hipòtesi, T_1 tindrà $n_1 = |V(T_1)|$ vèrtexs i $n_1 - 1 = |E(T_1)|$ arestes, i T_2 tindrà $n_2 = |V(T_2)|$ vèrtexs i $n_2 - 1 = |E(T_2)|$ arestes. Llavors el nombre d'arestes de T és $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1$. Deduïm llavors que el nombre de nodes de T és $n_1 + n_2$. Dit d'una altra manera, $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Com a conseqüència d'aquest teorema, en podem arribar a un altre:

Teorema 3

En un arbre T amb $|V| \geq 2$, hi ha com a mínim dos vèrtexs de grau 1 (anomenats fulles).

Demostració: Fem un raonament per reducció a l'absurd. Suposem que no es compleix el teorema que volem demostrar, és a dir, que $g(v_i) > 1$ per a tots els vèrtexs. Llavors es compleix que

$$\sum_{v \in V} g(v) > \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

Però això no és correcte, ja que, com a conseqüència del Teorema 1 i Teorema 2 podem dir que en un arbre

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E| = 2|V| - 2$$

i estem dient que $2|V| - 2 \geq 2|V|$. Amb això ja podem veure que necessitem treure com a mínim dos graus, però demostrem també que amb un sol node de grau 1 tampoc és suficient. Suposem ara que l'arbre té un sol node tal que $g(v) = 1$ i els altres tenen com a mínim grau 2. Llavors

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} g(v) = 1 + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{si } g(v) \neq 1}} g(v) \geq 1 + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{si } g(v) \neq 1}} 2 = 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1$$

Ara estem dient que $2|V| - 2 \geq 2|V| - 1$, que torna a ser una contradicció. Sabem que si treiem un grau més, el teorema es complirà, i hem demostrat que el mínim nombre de vèrtexs de grau 1 és 2.

Hi ha una altra manera de demostrar-ho, més directa: Suposem que a l'arbre hi ha k vèrtexs de grau 1, i $|V| - k$ de grau $g(v_i) \geq 2$. D'aquesta manera

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} g(v) \geq k + 2(|V| - k) = 2|V| - k$$

Llavors podem dir que $-2 \geq -k$ i per tant $2 \leq k$.

Hi ha un altre teorema que relaciona el nombre de fulles amb el grau màxim d'un arbre:

Teorema 4

El nombre de fulles d'un arbre T és més gran o igual a Δ .

Demostració: Si eliminem un node de grau Δ de l'arbre, juntament amb totes les seves arestes incidents, obtenim un conjunt de Δ grafs disconnexos. Si alguns d'aquests grafs consisteixen en tan sols un node, vol dir que abans eren adjacents al node que hem eliminat, per tant, només tenien grau 1. Si, pel contrari, formen nous arbres, pel teorema 3 podem dir que hi haurà com a mínim dues fulles. Encara que hi ha la possibilitat que un dels nodes amb grau 1 sigui l'adjacent al node que hem tret, sempre podem garantir que hi ha com a mínim una fulla. Per tant, també podem garantir que hi haurà com a mínim Δ fulles.

Part II

Camins i algorismes

Sovint, quan utilitzem un graf per modelitzar quelcom, ens interessa poder-hi fer algunes operacions. Podem, per exemple, voler trobar un camí entre dos punts, recórrer el graf sencer o trobar el camí més curt per anar d'un vèrtex a un altre. Per aquest motiu utilitzem els camins, que trobarem o generarem mitjançant diversos algorismes.

En aquesta secció es mostraran i s'implementaran diverses maneres de recórrer un graf, torbant la manera més eficient per a cada cas.

3.13 Grafs ponderats i dirigits

Grafs ponderats

Els grafs ponderats són grafs on cada aresta e està associada a un nombre $w(e)$ anomenat pes o cost, tal que $w(e) \in \mathbb{R}$. El pes pot representar diverses quantitats, segons el que es vulgui modelitzar. Moltes vegades s'utilitza per representar distàncies, però si per exemple modelitzem una xarxa de distribució d'aigua, ens pot interessar representar el cabal de les canonades, o en una xarxa de bus, la densitat de trànsit de cada tram.

Grafs dirigits

Els grafs dirigits són grafs les arestes dels quals només admeten una direcció. D'aquesta manera, una aresta $e_0 = (v_0, v_1) \neq e_1 = (v_1, v_0)$ ⁷. De fet, no necessàriament ha d'existir una aresta contrària a una altra.

Aquest tipus de grafs poden ser útils per representar carreteres, o moviments vàlids en algun joc.

3.14 Camins

Un *camí* p és una seqüència finita i ordenada d'arestes que connecta una seqüència ordenada de vèrtexs. Un camí p de longitud k (expressat com a $l(p) = k$) entre el vèrtex inicial v_0 i el vèrtex final v_k (sempre que $v_0 \neq v_k$) és una successió de k arestes i $k + 1$ vèrtexs de la forma $\overline{v_0, v_1}, \overline{v_1, v_2}, \dots, \overline{v_{k-1}, v_k}$. Per definició, també es pot representar un camí p entre v_0 i v_k com a successió de vèrtex $p = v_0 v_1 \dots v_k$. En aquest cas, pot ser tractat com un graf elemental P_n .

⁷Observi's la diferència de notació per a les arestes dels grafs dirigits i no dirigits, atenent al fet que l'ordre dels vèrtexs en un cas importa i en l'altre no

Un cas especial és quan el camí comença i acaba al mateix vèrtex ($v_0 = v_k$). Llavors el camí és un cicle, i és l'equivalent a un graf cicle C_n .

Quan un camí té totes les arestes diferents, s'anomena *simple*, i si a més té tots els vèrtexs diferents, s'anomena *elemental*.

En els grafs, ponderats, la *longitud* d'un camí $p = v_0v_1 \cdots v_n$ no es defineix pel nombre d'arestes per on passa el camí, sinó fent el sumatori dels pesos de les arestes

$$\text{longitud}_w(c) = \sum_{i=0}^{n-1} w(\overline{v_i, v_{i+1}})$$

La *distància* entre dos vèrtexs v i u , $d_w(v, u)$, és la que s'obté a l'agafar la menor longitud d'entre tots els camins elementals entre v i u . (adjuntar exemple de distància)

4 Estructures de dades dels grafs

En els grafs, normalment s'ha de tractar una gran quantitat d'informació: nodes, arestes, pesos, sentits... Tota aquesta informació no és difícil de gestionar si el graf que s'estudia és petit, ja que fins i tot es pot dibuixar. El problema sorgeix quan el graf en qüestió és més gran, com per exemple podria ser una xarxa de clavagueram o de metro. Llavors la informació a tractar és molta, i és convenient organitzar-la en estructures de dades. Les estructures de dades solen ser utilitzades en la programació, però en aquest cas sol ser beneficiós usar-ne fins i tot quan no es treballa amb informàtica.

Matrius

Matriu d'adjacència

La matriu d'adjacència d'un graf és una matriu quadrada que conté informació respecte el nombre d'arestes que uneixen qualsevol parella de nodes, i s'organitza de la següent manera:

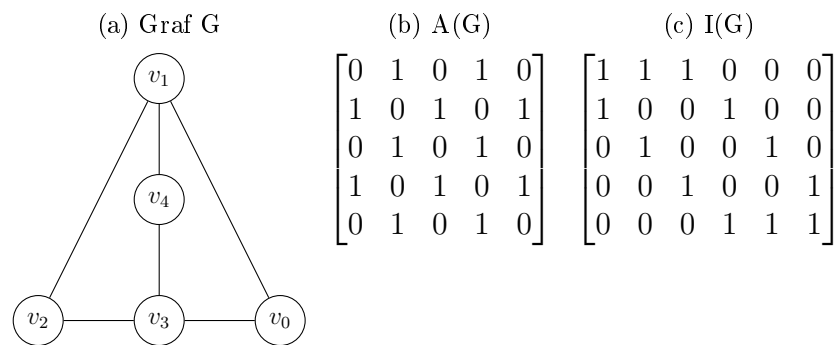
Si G és un graf amb $|V|$ nodes, $A(G) = (a_{ij})_{ij=1, \dots, |V|}$ és la seva matriu d'adjacència de $|V| \times |V|$, on a_{ij} correspon al nombre d'arestes que uneixen els nodes i i j , comptant com a 2 els llaços, que sempre es trobaràn a la diagonal. La matriu serà simètrica si el graf ho és, i podrem conèixer el grau d'un node i fent el sumatori de les caselles de la i -èsima fila. A vegades, quan s'utilitzen grafs ponderats, les matrius d'adjacència s'omplen amb els pesos de les arestes, per no haver d'utilitzar altres estructures per emmagatzemar la resta d'informació. En aquest tipus de grafs, els llaços no necessàriament valdran 2, però es podran diferenciar perquè

estaràn a la diagonal. En aquest cas, el problema serà que no es podràn representar arestes múltiples amb pesos diferents. Tot i això, en termes de programació, utilitzar aquesta estructura de dades (sobretot en grafs grans) no és el més eficient, ja que la matriu creix molt ràpidament. La matriu d'un graf de $|V|$ nodes té $|V|^2$ espais, i en grafs poc densos, la majoria d'espais estan ocupats per 0, de tal manera que s'està utilitzant molta memòria que no conté informació útil. De la mateixa manera, si afegim un nou node al graf, que serà l' n -èssim, s'hauràn d'afegir $2n - 1$ espais a la matriu.

Matriu d'incidència

La matriu d'incidència d'un graf G sense llaços, $I(G) = (b_{i,j})_{i=1,\dots,|V|(G), j=1,\dots,|E|(G)}$, és la matriu binària de $|V|(G) \times |E|(G)$ on $b_{i,j}$ indica si la aresta j és incident al node i .

(afegir exemple de graf amb les seves dues matrius)



Llistes d'adjacència

Aquesta estructura de dades és molt utilitzada per tractar grafs, ja que ocupa menys memòria i només inclou l'informació necessària. Les llistes d'adjacència consisteixen en un conjunt de n llistes. Cada llista correspon a un node del graf, i conté els nodes al quals és adjacent. En informàtica s'acostumen a fer mitjançant apuntadors, de tal manera que, a partir de cada element de la llista, es pugui accedir a la seva pròpia llista, seguint així molt més senzill fer iteracions. Amb l'esquema següent es pot veure més clarament:

(afegir esquema de les llistes d'adjacència)

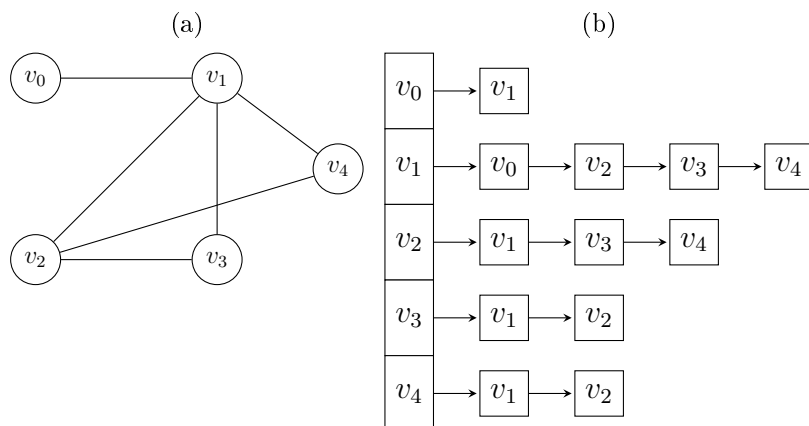


Figura 17: Un graf G (a) i la seva llista d'adjacència (b)

5 Algorismes

Un algorisme és un conjunt d'instruccions precises i ben definides que, donada una entrada, calculen la sortida corresponent segons les instruccions que té.

(Reescriure la definició d'algorisme...)

A continuació se'n mostren uns quants d'importants per fer operacions sobre grafs.

5.1 Algorisme BFS

Aquest algorisme serveix per examinar l'estructura d'un graf o fer-ne un recorregut sistemàtic. La recerca per amplada prioritària (*breadth-first search* en anglès, d'aquí **BFS**) fa l'exploració en paral·lel de totes les alternatives possibles per nivells des del vèrtex inicial. A la següent imatge es pot veure com funcionaria aquest algorisme en un graf: (Adjuntar imatge de BFS)

Per programar aquest algorisme s'acotuma a utilitzar un contenidor de tipus cua, que només permet afegir elements al final de la cua i treure'n de l'inici, sense poder accedir a elements del mig de la cua. El que farà això és bàsicament imprimir per pantalla la seqüència de vèrtexs ordenada segons l'ordre en que els ha visitat.

5.1.1 Funcionament

Donat un node inicial v , es busquen tots els nodes no visitats que estiguin a distància i de v . Inicialment $i = 0$ i l'únic a distància 0 de v és ell mateix. Després, $i = 1$ i per tant, en aquesta iteració es visitaran tots els nodes adjacents a v . Quan

$i = 2$ es visitaran els nodes adjacents als adjacent de v que no s'hagin visitat, i així consecutivament fins a visitar tots els nodes.

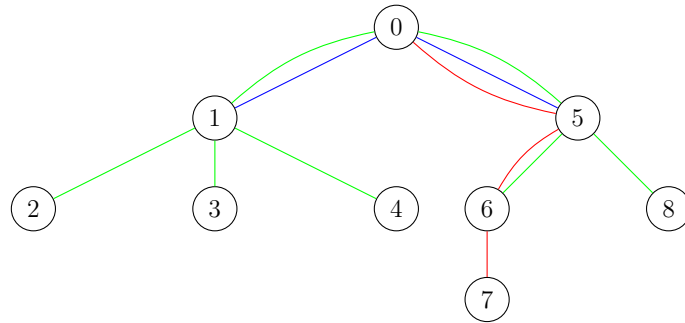


Figura 18: Exemple del recorregut que realitzaria l'algorisme

5.1.2 Pseudocodi

Algorisme 1: BFS

Data: Un graf G i un node inicial v

Result: Seqüència de de nodes visitats

nova cua Q

marca v com a visitat

afegeix v a la cua Q

nou node *auxiliar*

nou node *següent*

while la cua no estigui buida **do**

auxiliar = primer element de Q

 imprimeix(*auxiliar*)

 elimina(primer element de Q)

while hi hagi nodes adjacents a *auxiliar* i aquests no s'hagin visitat **do**

 marca adjacent(*auxiliar*) com a visitat

 afegeix adjacent(*auxiliar*) a la cua

end

end

foreach node de G **do**

 marca'l com a no visitat

end

Aquesta és una manera bastant usual de programar l'algorisme BFS, i encara que és eficient, s'està desaprofitant propietats de l'algorime. Amb l'algorisme BFS es pot saber a quina distància del punt inicial està cada node, el camí més curt per anar del node inicial a qualsevol altre i fins i tot es pot generar un arbre expansiu mínim, agafant les arestes per on "passa" l'algorisme. El següent algorisme té en

compte aquests detalls. Està pensat per ser implementat en el llenguatge Python, i per aquest motiu utilitza diccionaris (l·listes on cada element té una clau i un valor), però en llenguatges basats en C, es poden utilitzar maps de la mateixa manera.

```

Data: Un graf  $G$  i un node inicial  $v$ 
Result: Seqüència de nodes visitats, distància de cada node respecte  $v$ 
nou diccionari  $dist$ 
 $dist[v] = 0$ 
nou diccionari  $anterior$ 
 $anterior[v] = Nul$ 
 $i = 0$ 
nova llista  $frontera$  afegeix  $v$  a  $frontera$ 
imprimeix( $v$ )
while  $frontera$  no estigui buida do
    nova llista  $següent$ 
    foreach node  $x$  de  $frontera$  do
        /* A cada iteració,  $x$  agafarà un valor diferent de  $frontera$  */
        foreach node  $y$  adjacent a  $x$  do
            if  $y$  no existeix dins  $dist$  then
                 $dist[y] = i$ 
                 $anterior[y] = x$ 
                afegeix  $y$  a  $següent$ 
                imprimeix( $y$ )
            end
        end
    end
     $frontera = següent$ 
     $i = i + 1$ 
end
imprimeix( $dist$ )

```

5.1.3 Aplicacions

Encara que aquest algorisme sembli molt senzill, ens pot aportar informació important, i fins i tot permet resoldre problemes senzills on haguem de trobar distàncies o el camí més curt entre dos nodes. Aquest algorisme s'utilitza també per operacions més complexes, com les següents:

- Google l'utilitza per indexar pàgines web noves al seu buscador. Amb l'algorisme BFS pot recórrer tota la xarxa d'internet sencera, i, si cada pàgina web és un node i cada enllaç és una aresta, si es posa un link d'una pàgina no indexada a una que sí ho està, l'algorisme trobarà el nou node).
- Les xarxes socials l'utilitzen per suggerir amistats. Amb aquest algorisme es poden trobar els amics d'una persona (els nodes que estàn a distància 2 d'aquesta), que són susceptibles a ser amics seus. Com més amistats en comú amb la persona a distància 2, més probable és que es coneguin.
- Es pot solucionar un cub de rubik. Si s'aconsegueix generar un graf on cada node sigui un estat diferent del cub i les arestes siguin un moviment d'una cara, donat un estat inicial, amb BFS es pot arribar a l'estat resolt amb els mínims moviments possibles.

5.2 DFS

La recerca per profunditat prioritària (*depth-first search* en anglès, d'aquí **DFS**) és un algorisme que utilitza uns principis semblants als de l'algorisme BFS, però en lloc de cobrir tota l'amplada d'un nivell abans de passar al següent, el que fa és cobrir tota la profunditat possible (arribar el més lluny possible) abans de tornar enrere. En la següent imatge es pot veure un esquema del funcionament de l'algorisme:

5.2.1 Funcionament

L'algorisme DFS arriba el mes lluny possible abans de retrocedir. Això significa que quan arriba a un node se'n va a un d'adjacent no visitat i va emmagatzemant l'ordre amb el qual els visita. Quan un node no té nodes adjacents no visitats, torna al node anterior i continua a partir d'allà. A la figura 18 es mostra un graf amb els nodes numerats segons l'ordre en el qual es visiten i amb el recorregut que faria l'algorisme:

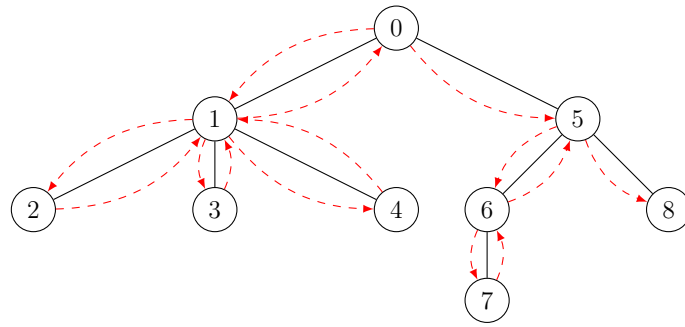


Figura 19: Exemple del recorregut que realitzaria l'algorisme

5.2.2 Pseudocodi

Tal com en el BFS, també hi ha diverses maneres d'implementar l'algorisme, i en presentaré dues. La primera utilitza un contenidor de tipus pila, on només es pot manipular, afegir o treure l'element de dalt de tot de la pila.

Algorisme 2: DFS

Data: Un graf G i un node inicial v
Result: Seqüència de nodes visitats
 nova pila S
 nou node *següent*
 marca v com a visitat
 imprimeix(v)
 afegeix v a la pila S
while la pila no estigui buida **do**
 següent = node adjacent no visitat de l'element superior de S
 /* En cas que no n'hi hagi cap, *següent* = Nul */
 if *següent* = Nul **then**
 elimina(element superior de S)
 else
 marca *següent* com a visitat
 imprimeix(*següent*)
 afegeix *següent* a S
 end
end

Aquest mètode, però, té un problema, i és que només funciona per a grafs no dirigits. Hi ha la possibilitat que, treballant amb un graf dirigit, un node del graf no sigui accessible des del node inicial que hem determinat. Aquest cas excepcional es pot arreglar fent que cada node no visitat per les iteracions anteriors sigui l'inicial. El segon algorisme, a part d'arreglar això, utilitza una funció recursiva (una funció

que es crida a si mateixa).

```
Data: Un graf  $G$ 
Result: Seqüència de nodes visitats des de cada node
nou diccionari anterior
nova llista ordre
foreach node u del graf do
    if u no existeix dins anterior then
        imprimeix( $u$ )
         $anterior[u] = Nul$ 
        DFSrecursiu( $G, u$ )
    end
end
inverteix ordre
imprimeix(ordre)

/* La funció DFSrecursiu queda determinada pel següent algorisme: */
Funció DFSrecursiu( $G, v$ )
    foreach node x adjacent a v do
        if x no existeix a anterior then
            imprimeix( $x$ )
             $anterior[x] = Nul$ 
            DFSrecursiu( $G, x$ )
        end
    end
    /* Només si es vol obtenir la seqüència de recursió o ordenació
       topològica per a grafs dirigits acíclics, */
    afegeix  $v$  a ordre
```

5.2.3 Propietats

Propietat 1 En grafs dirigits es passa una vegada per cada aresta, mentre que en grafs no dirigits es passa dues vegades (una des de cada vèrtex).

Propietat 2 El segon algorisme, implementat en Python amb llistes d'adjacència, té un temps d'execució de $O(|V| + |E|)$, i per tant, un temps lineal.

Demostració: El bucle principal s'executa $|V|$ vegades (d'aquí $O(|V|)$). D'aquesta manera, s'executa la funció recursiva una vegada per vèrtex, i dins d'aquest es miren tots els nodes adjacents. El temps total que triguen totes les funcions recursives és de $O(\sum_{v \in V} |adjacents[v]|)$ que equival a $O(|E|)$.

Propietat 3 A través de l'algorisme es podrien classificar les arestes en 4 tipus diferents:

- Arestes de l'arbre: Són les arestes que pertanyen a l'arbre expansiu del graf.
- Arestes cap endavant: Són les que van d'un node cap a un dels seus descendents de l'arbre.
- Arestes cap enrere: Són les que van d'un node cap a un dels seus antecessors de l'arbre.
- Arestes creuades: Són les que no pertanyen a cap de les categories anteriors.

En el cas de grafs no dirigits, només hi ha arestes de l'arbre i arestes cap enrere.

Propietat 4

5.2.4 Aplicacions

Aquest algorisme no té tantes utilitats pràctiques com l'algorisme BFS, però també té propietats útils, com per exemple, que passa per totes les arestes. A través d'ell podem obtenir informació importanat d'un graf:

- Es pot saber si un graf té cicles, comprovant si quan estem a l'iteració d'un node (encara no n'hem explorat tots els nodes adjacents) el trobem a ell mateix. De la mateixa manera, es pot dir que un graf conté un cicle si i només si conté una aresta cap enrere.
- Es pot saber si un graf és bipartit assignant un color (entre un total de 2 colors possibles) a cada node mentre es recorre el graf, de manera que un node tingui un color diferent al dels nodes adjacents. Si això és possible voldrà dir que el graf és bipartit.
- Es pot dur a terme una ordenació topològica, si es tracta d'un graf dirigit sense cicles. Un exemple d'ordenació topològica és quan hi ha una llista de tasques a fer però per fer-ne una determinada, cal haver-ne fet primer una altra. Amb l'algorisme DFS, podem obtenir una de les seqüències vàlides per completar totes les tasques. A continuació es presenta un exemple d'ordenació topològica utilitzat durant la creació d'aquest treball:

Resulta que, a la secció 3, quan explicava un tipus concret de graf, sovint utilitzava altres tipus de graf. Per determinar en quin ordre havien d'estar els apartats, de tal manera que quan apareixès un tipus de graf (a una altra definició) aquest ja s'hagués explicat, es va utilitzar una ordenació topològica. Es va construir un graf dirigit representant les dependències de cada apartat (veure figura 20), i es va executar l'algorisme d'ordenació topològica.

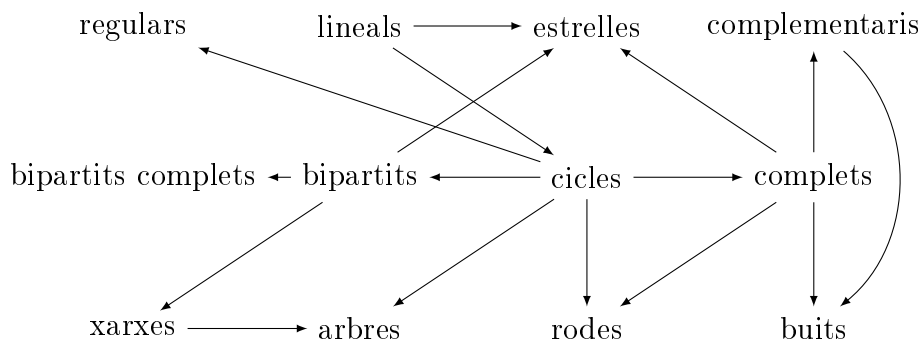


Figura 20: Graf de les dependències de cada apartat

5.3 Dijkstra

Aquest algorisme, desenvolupat per Edsger W. Dijkstra el 1956, serveix per trobar el camí més curt entre dos nodes d'un graf ponderat. De fet, això és el que feia la variant original, però la variant presentada aquí troba el camí més curt entre un node inicial i tota la resta de nodes del graf. Tot i això es pot modificar lleugerament el programa perquè pari quan hagi trobat el camí més curt entre dos nodes específics. El que fa el programa és suposar quines són les distàncies mínimes des del node inicial fins la resta, i va descobrint el graf fins que pot assegurar el camí més curt. Al principi, suposa que el moviment amb menys cost és no moure's (això serà cert si el graf no conté arestes amb pesos negatius, que l'algorisme no pot tractar). Després busca els nodes adjacents al node inicial, i suposa que les distàncies mínimes entre l'inicial i aquests és simplement l'aresta que els uneix. Es pot assegurar que serà cert pel node unit amb l'aresta de menys pes, per la desigualtat triangular (si s'hi pogués accedir per un altre camí, aquest seria més llarg, ja que per força alguna de les arestes amb més pes que s'han descartat ha de formar part del camí alternatiu, i la suma serà sempre superior). Un cop hi ha el primer node amb mínim pes assegurat (i per tant ja sap un camí), es busquen els seus adjacents, el pes dels quals inicialment és infinit. La suposició del pes equivaldrà a el pes del node d'on venen més el de l'aresta que els uneix, i es canviarà pel pes que tenen si aquest és més gran que el nou. Ara es torna a agafar el node amb el pes menor (que segur que és el mínim) i es torna a mirar els adjacents i assignar pesos. Quan tots els nodes hagin estat visitats, el pes de cada node serà la distància mínima que s'ha de recórrer per anar del node inicial fins a aquest.

5.3.1 Funcionament

L'algorisme de Dijkstra es basa en dos principis:

- La desigualtat triangular: La desigualtat triangular com a tal diu que per a qualsevol triangle, la suma de dos dels seus costats serà igual o superior que al costat restant. Si a, b i c són les longituds dels costats d'un triangle i c és la més gran, llavors $c \leq a + b$. Aplicant la desigualtat a un graf ponderat (sense pesos negatius) s'obté que per tots els vèrtex $v, u, x \in V$, $d(v, u) \leq d(v, x) + d(x, u)$ (cal recordar que la distància entre dos vèrtexs ve donada pel camí més curt entre aquests vèrtexs).
- La subestructura òptima: En programació dinàmica, el concepte de subestructura òptima significa que es poden fer servir les solucions òptimes de problemes més petits per solucionar de manera òptima un problema més gran. En aquest cas en particular diem que un subcamí d'un camí mínim és també un camí mínim.

Donat un node inicial s , l'algorisme suposa que la distància mínima per arribar als seus nodes adjacents és simplement el pes de l'arsta que els uneix i per la resta de nodes és ∞ . Aquesta serà una distància provisional, ja que posteriorment potser es trobarà un camí més curt. No obstant, hi ha una única distància que es pot determinar de manera definitiva: la del node v que està unit a s amb l'aresta de menys pes. Si existís un camí més curt entre s i v , aquest per força hauria de passar per a algun node x adjacent a s , però per la desigualtat triangular $d(s, v) \leq d(s, x) + d(x, v)$.

Això també es pot veure d'una manera més intuïtiva: si v està unit a s amb l'aresta de menys pes incident a s , per força l'aresta que uneix s i x ja té un pes superior a la primera, i per tant el camí no podrà ser més curt.

Un cop fet aquest pas s'obtenen les distàncies provisionals des del node s fins a tots els seus adjacents i el camí més curt entre dos nodes que, com a conseqüència de la subestructura òptima, forma part de l'arbre expansiu mínim.

A partir del node v , es busquen els seus adjacents i es calcula la distància a la qual estan respecte s (és a dir, la suma del camí acumulat i el pes de l'aresta). Si la nova distància calculada és menor a la provisional (cosa que passarà quan es trobi un camí més curt), la provisional passarà a ser la calculada. Un cop s'hagi fet tots els canvis necessaris, es buscarà el node no visitat que estigui a menor distància de s (i que per tant formarà part de l'arbre expansiu mínim), que passarà a ser v i es tornarà a fer el mateix procediment. Això s'anirà repetint fins que s'hagi visitat tots els vèrtexs.

(Adjuntar esquema de procediment de Dijkstra)

5.3.2 Pseudocodi

Algorisme 3: Dijkstra

Data: Un graf ponderat G i un node inicial s

Result: Distància mínima entre s i la resta de nodes del graf, arbre
expensiu mínim

nou diccionari $dist$

nou diccionari Q

foreach node v de G **do**

$Q[v] = \infty$
 $dist[v] = \infty$

end

$Q[s] = 0$

while Q no estigui buit **do**

$u = \text{minvalorde}Q$

$dist[u] = Q[u]$

foreach node v adjacent a u **do**

if v existeix dins Q **then**

if $Q[v] > Q[u] + w(u, v)$ **then**

 /* $w(u, v)$ és el pes de l'aresta (u, v) */

$Q[v] = Q[u] + w(u, v)$

end

end

end

 elimina($Q[u]$)

end

imprimeix($dist$)

5.3.3 Propietats

Propietat 1 L'algorisme de Dijkstra és el que s'anomena un *algorisme voraç*. Això significa que sempre agafa la millor opció en aquell moment, suposant que les opcions que es trobin posteriorment no la podran millorar. Aquest és el motiu per al qual l'algorisme de Dijkstra no funciona amb pesos negatius. En un graf amb pesos negatius això no necessàriament es complirà.

Propietat 2 L'algorisme de Dijkstra no troba únicament el camí mínim entre un node i un altre perquè la millor manera de fer-ho que es coneix és precisament trobar els camins mínims des d'un node fins a tota la resta.

Propietat 3 L'algorisme té un temps d'execució de $O(|E| + |V|\log(|V|))$.

Demostració: Les operacions que es fan són les següents:

- S'inicialitzen la cua i les distàncies per a cada node, operació que triga $O(|V|)$.
- Es busca el valor mínim de la cua que, en cas d'estar optimitzada, triga $O(\log|V|)$. En cas de no estar optimitzada, s'hauia de recórrer tota la cua i anar comparant tots els elements, cosa que suposaria un temps de $O(|V|)$.
- Es calcula la distància provisional per a cada node, que en principi tan sols ha de trigar $O(1)$.

La iteració principal acaba quan no queden nodes a la pila. Inicialment tots els nodes són a la pila i cada node es treu només una vegada. Per tant, per a cada node es buscarà una vegada el valor mínim de la pila. Això és un total de $O(|V|\log(|V|))$ amb la cua optimitzada i $O(|V|^2)$ sense. El procediment per calcular la nova distància s'executarà, com a màxim, una vegada per aresta, i com que el temps de cada operació és de $O(1)$, el total és de $O(|E|)$.

D'aquesta manera el temps d'execució total és de $O(|E| + |V|\log(|V|))$ per cues optimitzades i de $O(|E| + |V|^2)$ per a cues normals.

5.3.4 Aplicacions

Aquest algorisme, encara que no pot treballar amb pesos negatius és molt útil té una gran quantitat d'aplicacions pràctiques:

- Navegadors GPS, on les arestes són carrers i carreteres, els nodes cruïlles i els pesos distàncies. S'utilitza l'algorisme de Dijkstra per trobar els camins més curts entre dues destinacions.
- Problemes de canvis de divisa, on volem trobar la millor manera de canviar divises successives i guanyar més diners. Aquí els nodes són les diferents monedes o divises, les arestes les transaccions i els pesos les taxes de canvi. Amb aquest algorisme podem trobar la millor manera de fer els canvis de moneda. En aquest context prenen sentit les arestes amb pesos negatius, encara que l'algorisme de Dijkstra no els pot tractar.
- Els routers utilitzen l'algorisme per portar-te a través d'internet al servidor desitjat amb la menor quantitat de passos possibles.
- En robòtica s'utilitza per fer la planificació de moviment del robot. Cada node és una posició i representa una unitat d'espai, i omplint tot l'espai de nodes excepte els obstacles i executant l'algorisme en el graf resultant, s'obté el camí més òptim per arribar a la posició desitjada.

- En epidemiologia aquest algorisme es pot utilitzar per modelitzar un grup de persones i els seus familiars per veure qui és més susceptible a emmalaltir. Això també pot funcionar entre ciutats o col·lectius més grans.

5.4 Bellman-Ford

Aquest algorisme té un funcionament i utilitats molt semblants a les de l'algorisme de Dijkstra, però té la particularitat de poder tractar sense problemes les arestes amb pesos negatius, mentre que l'algorisme de Dijkstra no ho permet. L'algorisme de Dijkstra es basa en la desigualtat triangular per trobar el camí més curt, però amb pesos negatius no es pot suposar que la desigualtat triangular es compleixi. A més, permet saber si un graf conté cicles negatius. Si un camí entre dos nodes conté un cicle de pes negatiu, no es pot trobar un camí mínim entre aquests dos nodes. Això es deu a que recorrent aquest cicle sempre es podria escurçar el camí, i llavors el mínim possible seria de $-\infty$.

5.4.1 Funcionament

L'algorisme de Bellman-Ford utilitza una part de l'algorisme de Dijkstra, concretament la part on comprova si la distància suposada és major a la distància calculada en aquell moment. La diferència amb l'algorisme de Dijkstra és que, en lloc de seleccionar el node amb menor distància i fer l'operació sobre totes les arestes incidents, simplement fa l'operació sobre totes les arestes del graf. Aquesta operació sobre les arestes es fa un total de $|V| - 1$ vegades, i a cada iteració el nombre de nodes amb distàncies mínimes augmenta, fins que tots els nodes tenen la distància correcta.

5.4.2 Pseudocodi

Algorisme 4: Bellman-Ford

Data: Un graf ponderat G i un node inicia s

Result: Distància mínima entre s i la resta de nodes del graf, arbre expansiu mínim

nou diccionari $dist$;

nou diccionari $anterior$;

foreach node v de G **do**

$dist[v] = \infty$;

$anterior[v] = Nul$;

end

$dist[s] = 0$;

for i in range($0, len(Adj)-1$) **do**

foreach u dins Adj **do**

foreach v dins $Adj[u]$ **do**

if $dist[v] > dist[u] + w(u, v)$ **then**

 /* $w(u, v)$ és el pes de l'aresta $\{u, v\}$ */

$dist[v] = dist[u] + w(u, v)$;

end

end

end

end

foreach u dins Adj **do**

foreach v dins $Adj[u]$ **do**

if $dist[v] > dist[u] + w(u, v)$ **then**

 imprimeix("Hi ha cicles de pesos negatius");

end

end

end

imprimeix($dist$);

imprimeix($anterior$);

5.4.3 Propietats

Propietat 1 L'algorisme de Bellman-Ford pot treballar amb pesos negatius ja que no es basa en la desigualtat triangular.

En el graf de la figura 21, l'algorisme de Dijkstra calcularia malament el camí mínim entre s i v : la distància provisional seria de 3 per arribar a v i de 4 per arribar a x . Llavors, com que 3 és la distància més petita que ha trobat (i suposa

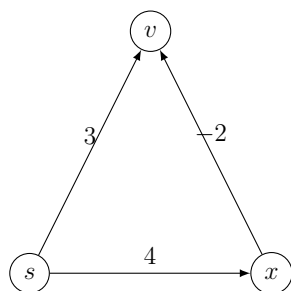


Figura 21: Graf on la desigualtat triangular no es compleix

que és la correcta), visita v . Però v no té nodes adjacents, per tant acaba l'iteració del node v . El següent node no visitat amb mínim valor és x . Encara que v sigui adjacent a x , com que v ja ha estat visitat i per la desigualtat triangular s'asegurava que era el mínim, no el pot canviar.

En canvi, si s'executés l'algorisme de Bellman-Ford en aquest graf, el procediment que faria seria el següent: tal com l'algorisme de Dijkstra, posaria una distància provisional de 3 per arribar a v i de 4 per arribar a x . Ara visitaria v , però com que no té nodes adjacents, no hi faria res. A continuació visitaria x , que té v com a node adjacent. Com que la distància calculada des de x és de $4 - 2 = 2$ i $2 < 3$, simplement canviaria el valor de la distància entre s i v .

Propietat 2 Es pot aconseguir reduir el temps d'execució amb una implementació diferent de l'algorisme, que funciona per a grafs dirigits sense ccles. En aquesta nova implementació es fa una ordenació topològica del graf i es visiten de manera ordenada tots els nodes. A cada node es comprova si el pes suposat per arribar a cadascun dels seus adjacents pot millorar. Aquesta implementació permet reduir el temps d'execució fins a $O(|V| + |E|)$.

Propietat 3 L'algorisme de Bellman-Ford té un temps d'execució de $O(|E| \times |V|)$. Es fan $|V| - 1$ iteracions, i a cada iteració es comproven totes les arestes. A tot això cal afegir-hi el temps de l'inicialització, que és de $O(|V|)$. Per simplificar-ho, es sol dir que té un temps d'execució de $O(|E| \times |V|)$, un temps que sempre serà lleugerament superior al temps real.

5.5 Kruskal

L'algorisme de Kruskal serveix per trobar un arbre expansiu mínim. Aquest algorisme utilitza una estructura de dades especial, anomenada union-find. Aquesta estructura permet fer tres operacions diferents: crear conjunts (*make set*), determinar a quin conjunt està un element (*find*) i unir dos subconjunts en un de nou

(*union*). L'ús d'aquesta estructura especialitzada fa que en grafs petits o poc densos l'algorisme sigui molt ràpid, però en grafs més grans es relantitzi el procés, siguent més eficient utilitzar altres algorismes en aquest cas.

5.5.1 Funcionament

L'algorisme es basa en les següents propietats:

- Si un graf ponderat conté un cicle C i e és l'aresta de més pes de C , e no forma part de l'arbre expansiu mínim del graf. *Demostració:* Suposem que e pertany a l'arbre expansiu mínim. Llavors, si s'elimina e , l'arbre queda trencat en dos arbres, cadascun dels quals conté un extrem de e . Però la resta del cicle fa que els dos arbres siguin connexos, i en particular hi haurà una aresta f que tindrà un extrem a cadascun dels arbres i que tindrà un pes inferior que e . Concretament f formarà part de l'arbre expansiu mínim.
- Si en un graf $G = (V, E)$ es fa un *tall*, es parteixen els vèrtex del graf en dos conjunts disjunts $(S, V(G) - S)$. D'entre les arestes que tenen un extrem a S i l'altre a $V(G) - S$, e és la de menor pes i forma part de l'arbre expansiu mínim. *Demostració:* Suposem que e no forma part de l'arbre expansiu mínim. Llavors, si s'afegeix e a aquest arbre expansiu, es genera un cicle C . Això comporta que hi ha una altra aresta f amb un un extrem a S i l'altre a $V(G) - S$. D'aquesta manera, si es canvia f per e es genera també un arbre expansiu que és mínim, ja que $w(e) < w(f)$.

El que fa l'algorisme és anar construint arbres expansius separats per acabar unint-los si el graf és connex. Per aconseguir-ho, l'algorisme crea un conjunt per a cada node del graf (representant cadascun dels arbres) i ordena les arestes amb ordre creixent segons el seu pes i itera sobre elles. Quan es visita una aresta, s'uneixen els conjunts que les contenen (és a dir, es connecten els arbres). Si una aresta uneix nodes que formen part del mateix conjunt (és a dir, es crea un cicle), vol dir que l'aresta en concret no forma part de l'arbre expansiu del graf, tal com estableix la primera propietat.

5.5.2 Pseudocodi

```
Data: Un graf  $G$  i un node inicial  $s$ 
Result: Arbre expansiu mínim de  $G$ 
nova estructura union-find  $subgraf$ 
nova llista  $arbre$ 
ordena  $E(G)$  per ordre creixent de pesos
foreach node  $u$  de  $G$  do
    foreach node  $v$  adjacent a  $u$  do
        if  $subgraf[u] \neq subgraf[v]$  then
            afegeix  $(u, v)$  a  $arbre$ 
             $union(subgraf[u], subgraf[v])$ 
        end
    end
end
imprimeix( $arbre$ )
```

5.5.3 Propietats

Propietat 1 Com que l'algorisme construeix l'arbre expansiu mínim a partir de diversos components inicialment disconnexos, encara que el graf no sigui connex funcionarà correctament. En particular, trobarà l'arbre expansiu mínim de cadascun dels conjunts de nodes connexos.

Propietat 2 El temps d'execució aproximat de l'algorisme de Kruskal és de $O(|E| \times \log(|V|))$. L'operació d'ordenar les arestes triga $O(|E| \times \log(|E|))$ i el total de les operacions find i union és de $O(|E| \times \log(|V|))$. La suma total és de $O(|E| \times \log(|V|) + |E| \times \log(|E|))$. Tot i això, com que $|E|$ pot ser com a màxim $|V|^2$ podem escriure que $\log(|E|) = \log(|V|)$ ($\log(|E|) = \log(|V|^2) = 2 \times \log(|V|)$), però en la notació de Landau $2 \times \log(|V|)$ és essencialment $\log(|V|)$. D'aquesta manera el total és de $O(2 \times (|E| \times \log(|V|))) = O(|E| \times \log(|V|))$.

5.6 Prim

L'algorisme de Prim, tal com el de Kruskal, serveix per trobar l'arbre expansiu mínim d'un graf ponderat no dirigit. Aquest algorisme funciona amb diccionaris, estructures de dades més normalitzades que les Union-Find. Com a conseqüència, l'algorisme de Prim és més lent en grafs petits, però més ràpid en grafs molt densos.

5.6.1 Funcionament

L'algorisme de Prim es basa en la mateixa propietat dels talls que l'algorisme de Kruskal. L'algorisme de Prim divideix els nodes en dos grups S i $V(G) - S$, els que pot arribar amb les arestes de l'arbre que va construint i els que encara no. Sempre selecciona l'aresta de menys pes entre les que surten de nodes del primer grup i van a nodes del segon que ebem que formarà part de l'arbre expansiu mínim, i afegeix el node final de l'aresta al primer grup (el que seria euivalent a la funció union de l'algorisme de Kruskal). D'aquesta manera obté l'arbre expansiu mínim del graf. Aquest algorisme funciona per grafs connexos, però executant-lo per a cada node del graf, trobaria el *bosc* (conjunt d'arbres) mínim d'un graf no connex.

5.6.2 Pseudocodi

Algorisme 5: Prim

Data: Un graf G
Result: Arbre expansiu mínim de G
nou diccionari *anterior*
nou diccionari Q
foreach *node* v *de* G **do**
 | $Q[v] = \infty$
end
 $Q[0] = 0$
while Q *no estigui buit* **do**
 | $u = \min\{\text{valor de } Q\}$
 | **foreach** *node* v *adjacent a* u **do**
 | **if** v *existeix dins* Q **then**
 | **if** $Q[v] > w(u, v)$ **then**
 | $Q[v] = w(u, v)$
 | $\text{anterior}[v] = 0$
 | **end**
 | **end**
 | **end**
 | elimina($Q[u]$)
end
imprimeix(*anterior*)

5.6.3 Propietats

Propietat 1 En l'algorisme de Prim tan sols es necessiten dos conjunts, un que contindrà els nodes de l'arbre expansiu mínim i l'altre els que encara no en for-

men part. D'aquesta manera l'arbre creix en només un component, mentre que a l'algorisme de Kruskal l'arbre es forma en més components. Això fa que en grafs molt densos l'algorisme de Prim sigui més ràpid, però, com a contrapartida, no pot tractar amb grafs disconnexos.

Propietat 2 El temps d'execució aproximat d'aquesta implementació de l'algorisme de Prim és de $O(|E| + |V| \times \log(|V|))$, però hi ha implementacions que aconseguixen temps de $O(|V|^2)$ o $O(|V| \times \log(|V|))$. En aquest cas es busca el mínim valor de Q un total de $|V|$ vegades, i es fan $|E|$ comparacions de cost 1.

5.6.4 Aplicacions

Tant l'algorisme de Kruskal com el de Prim tenen aplicacions semblants, però segons la mida del graf és més convenient utilitzar-ne un o altre. Entre les aplicacions d'aquests dos algorismes hi ha:

- El disseny de xarxes de telèfon, aigua, gas, internet... En aquestes xarxes s'ha d'arribar a tots els punts on s'ha de fer la distribució, i amb l'arbre expansiu mínim es pot assegurar que la xarxa és la més curta possible.
- Els arbres expansius mínims es poden utilitzar per generar laberints.
- S'utilitzen com a subrutines (o funcions) d'algorismes més complexos.

5.7 Floyd-Warshall

L'algorisme de Floyd-Warshall és un algorisme que permet calcular les distàncies entre tots els nodes d'un graf ponderat. Per fer-ho, compara els pesos de tots els camins possibles. A cada iteració, es defineix el conjunt de nodes que pot tenir cada camí i si ja s'ha trobat un camí amb els mateixos extrems es compara el pes total d'ambdós. El conjunt és de la forma $1, 2, \dots, k$ i a cada iteració es va incrementant k (a l'inici $k = 0$). El resultat d'aquest algorisme és una matriu quadrada D de $|V| \times |V|$ on $D_{ij} = w(i, j)$.

5.7.1 Funcionament

Per funcionar, l'algorisme de Floyd-Warshall manté una matriu $D^{(x)}$ de mida $|V| \times |V|$, on $D_{vu}^{(x)}$ és la longitud del camí mínim entre v i u que està passa com a màxim per x nodes. A cada iteració principal s'afegeix un node al conjunt de nodes que poden ser utilitzats, i es recalculen els valors de la matriu de la següent manera:

$$D_{vu}^{(x)} = \min(D_{vu}^{(x-1)}, D_{vk}^{(x-1)} + D_{ku}^{(x-1)})$$

on $D^{(x)}$ és la matriu on hi ha les distàncies amb camins de com a màxim x nodes intermitjos. (Comprovar notació: k vs. x)

5.7.2 Pseudocodi

Algorisme 6: Floyd-Warshall

Data: un graf G

Result: una matriu quadrada amb les distàncies entre tots els nodes
nova matriu $dist$ de $|V| \times |V|$

```

for  $i$  in  $range(0, |V|)$  do
    for  $j$  in  $range(0, |V|)$  do
        if  $i = j$  then
             $dist[i][j] = 0$ 
        else
             $dist[i][j] = \infty$ 
        end
    end
end
foreach node  $u$  de  $G$  do
    foreach node  $v$  adjacent a  $u$  do
         $dist[u][v] = w(u, v)$ 
    end
end
for  $x$  in  $range(0, |V|)$  do
    for  $u$  in  $range(0, |V|)$  do
        for  $v$  in  $range(0, |V|)$  do
            if  $dist[u][v] > dist[u][x] + dist[x][v]$  then
                 $dist[u][v] = dist[u][x] + dist[x][v]$ 
            end
        end
    end
end

```

5.7.3 Propietats

Propietat 1 Assumint que l'entrada de l'algorisme és D^0 , el temps d'execució de l'algorisme és de $O(|V|^3)$. Tan sols cal veure que hi ha tres bucles un dins l'altre, i cadascun fa $|V|$ iteracions.

(afegir propietats de l'algorisme)

5.7.4 Aplicacions

Aquest algorisme es pot utilitzar per a qualsevol de les aplicacions en que s'utilitzaria Dijkstra amb més d'un node. S'utilitza sobretot quan es vol mantenir una base de dades de pesos precalculats, per no haver d'executar Dijkstra en cada cas concret. A part d'aquesta aplicació, s'utilitza també d'altres maneres:

- Per detectar cicles de pes negatiu, cosa que passarà quan $D_{ii} < 0$, quan a la diagonal de la matriu hi hagi un valor negatiu.
- Estudiar la *clausura transitiva* d'un graf, és a dir, veure quins nodes són accessibles des de cada node. Això es pot veure a la matriu resultant, on els valors ∞ indiquen que no es pot accedir a el node concret.

Part III

Disseny de grafs

Fins ara, s'han mostrat i estudiat grafs que ja estan definits sobre els quals s'ha de fer alguna operació. Ara bé, en aplicacions reals de teoria de grafs, sovint no hi ha un graf determinat, sinó que s'ha de generar.

6 Punt de Fermat i l'arbre de Steiner

Normalment, quan s'utilitzen els grafs com a models matemàtics de situacions reals, els nodes ja estaran determinats i el problema consistirà a trobar les arestes. Si això és així, segurament es podran afegir altres nodes. Un exemple d'aquest cas consistiria a haver d'unir tres ciutats amb carreteres de tal manera que des d'una es pugui arribar directament a les altres dues. La primera sol·lució en que sol pensar una persona és fer un triangle en el qual les ciutats siguin els vèrtexs (l'equivalent a un graf K_3). Aquesta sol·lució és òptima si es vol anar d'una ciutat a l'altra amb la mínima distància possible, però si es vol construir el mínim de carreteres possibles per a la xarxa conjunta, aquesta sol·lució no és la millor. En aquest cas, el millor és posar un altre node en el punt de Fermat del triangle que formen i obtenir un graf S_4 . Donat un triangle acutangle, el punt de Fermat (també anomenat $X(13)$) és el punt tal que la suma de les distàncies des de cada vèrtex fins a aquest punt és la mínima. El punt de Fermat es determina gràficament amb el procediment següent:

- Donat un triangle T , es generen dos triangles equilàters a partir de dos costats arbitraris de T .

- S'uneixen els nous vèrtexs externs dels triangles equilàters amb els vèrtexs oposats de T .
- L'intersecció d'aquests dos segments dona la posició del punt de Fermat.

(adjuntar imatge de punt de fermat) Aquest procediment és vàlid per a triangles amb angles menors a 120° , però en cas contrari, el punt de Fermat s'identificarà amb vèrtex corresponent a l'angle que els superi.

El punt de Fermat es pot generalitzar per a altres polígons convexos a partir de triangulacions d'aquests. Un exemple senzill és el del quadrilàter, on en fer les diagonals ja es generen quatre triangles. En aquest cas, trobant els punts de Fermat en dos dels triangles oposats i unint-los ja es connecten tots els punts del quadrilàter amb la menor distància possible. (adjuntar imatge del punt de fermat en quadrilàters i superiors)

El problema de connectar amb la mínima distància un nombre determinat de punts essent possible afegir nodes és conegut com el problema de l'arbre de Steiner. Per aquest problema s'ha demostrat que l'arbre òptim té com a màxim $n - 2$ nodes afegits (siguent n el nombre inicial de nodes), que aquests tenen sempre grau 3, i que formen sempre angles de 120° .

7 Arbres expansius

Quan hi ha una situació on no es pot afegir cap node, el millor sol ser utilitzar els algorismes per trobar arbres expansius que ja s'han vist. Una opció és construir el graf complet amb totes les arestes i els seus corresponents pesos i executar algun algorisme que en trobi l'arbre expansiu mínim.

Part IV

Topologia

La topologia és la branca de les matemàtiques que estudia les propietats de l'espai i si aquestes es conserven després de deformacions. Des d'un punt de vista teòric,

8 Isomorfismes

Es diu que dos grafs són isomorfs si existeix una funció bijectiva φ entre els seus vèrtexs que conservi les arestes. Formalment dos grafs G i H són isomorfs si

$\exists \varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $\overline{\varphi(v)\varphi(u)} \in E(H)$ si i només si $\overline{vu} \in E(G)$

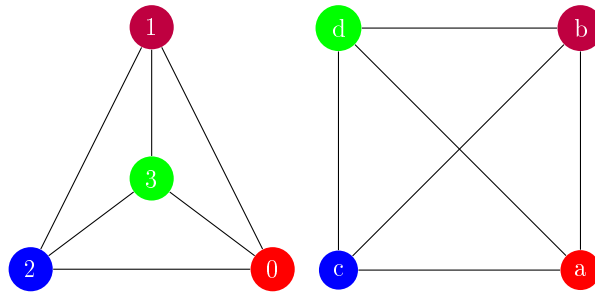


Figura 22: Grafs isomorfs