

## Part I

# Introducció a la teoria de grafs

Aquest primer apartat consisteix en la part més teòrica del treball. Explicarem breument l'història d'aquesta branca de la matemàtica i posteriorment ens endinsarem en la teoria de grafs com a tal. La teoria de grafs pot ser bastant abstracta i a vegades complicada d'entendre, però estarà acompanyada de demostracions i exemples propis que pretenen facilitar el seguiment del treball.

## 1 Història del grafs

### 1.1 Els primers passos

Tot sovint, les noves branques de la matemàtica sorgeixen de solucions a problemes. Problemes que no poden ser resolts ni demostrats amb el que coneixem, que forcen a desenvolupar nous mètodes i teories. La teoria de grafs no n'és una excepció i tot seguit presentaré els problemes determinants per a la creació d'aquesta branca.

#### Euler i els ponts de Königsberg

La teoria de grafs neix a partir de la solució de Leonhard Euler d'un problema curiós. Aquest matemàtic va reordre el problema dels ponts de la ciutat de Königsberg (l'actual Kaliningrad, Rússia), que diu així :

*“El riu Pregel divideix Königsberg en quatre parts separades, i connectades per set ponts. És possible caminar per la ciutat passant per tots els ponts tan sols una vegada?”*

Cap dels ciutadans de Königsberg ho havia aconseguit, i ja sabien que no era possible, però mai ningú ho havia demostrat fins que Euler ho va fer. La demostració de que això no era possible queda recollida en el “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” publicat el 1736, i l'article també va ser inclòs en el volum 8 de “*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*” publicat el 1741. En aquest text, Euler diu el següent:

*A més d'aquella part de la geometria que s'ocupa de les quantitats, la qual sempre ha generat un interès preferent, hi ha una altra part -encara pràcticament desconeguda- que ja fou esmentada per Leibniz amb el nom de geometria de la posició. Aquesta part de la geometria estudia tot allò que pot ésser determinat únicament per la posició, així com les propietats de la posició; en aquest camp hom no hauria de preocupar-se de quantitats ni de com obtenir-les. No obstant això, els tipus de problemes que pertanyen a aquesta geometria de posició i els mètodes usats per resoldre'ls encara no són ben definits. Així doncs, quan darrerement s'em va plantejar un problema que*

*semblava bàsicament geomètric, però que no demanava l'obtenció de quantitats ni admetia una sol·lució basada en el càlcul de quantitats, em vaig adonar que pertanyia a la geometria de la posició, sobretot perquè només es podia usar la posició per resoldre'l, mentre que el càlcul es mostrava inútil. Així, he decidit exposar aquí, com a mostra de la geometria de la posició, el mètode que he deduït per a resoldre problemes d'aquesta mena."*

Per aconseguir demostrar que el problema no tenia sol·lució, Euler va haver de representar el problema com un mapa topològic, posant les masses de terra com a punts i els ponts com a segments que unien aquests punts, creant d'aquesta manera el primer graf de l'història. Aquest resultat es considera el primer en teoria de grafs, ja que conté un important teorema d'aquesta branca. A més d'iniciar la teoria de grafs, amb aquest resultat també comença l'estudi dels grafs planars, introdueix el concepte de característica d'Euler de l'espai i el teorema de poliedres d'Euler (teorema que després va utilitzar per demostrar que no hi havia més sòlids regulars que els sòlids platònics). Amb tot això, Euler posa les bases no tan sols de l'estudi dels grafs, sinó també de la topologia, una altra branca que també serà tractada en aquest treball.

### **Vandermonde i el tour del cavall**

A partir de l'article d'Euler, diversos matemàtics van començar a interessar-se pel camp de la topologia (o geometria de la posició, com li deien en aquell moment). Concretament hi ha un personatge important: Alexandre-Théophile Vandermonde. Vandermonde va treballar i estudiar el problema dels cavalls, que pregunta quins moviments hem de fer per tal que un cavall passi per totes les caselles del tauler d'escacs, problema a que també va tractar Euler. Els estudis que va fer sobre aquest problema van ser publicats el 1771 en el "*Remarques sur des problèmes de situation*", i per la relativa proximitat als treballs d'Euler, encara no parlava de grafs, tot i que ara el problema es resol mitjançant aquests. Aquest treball inicia l'estudi de la teoria de nusos, una altra branca de la topologia.

## **1.2 Les primeres descobertes i aplicacions**

Un cop establert l'inici, és difícil veure com va continuar desenvolupant-se la teoria, ja que en els primers treballs volien resoldre problemes concrets, sense buscar la relació entre ells. Tot i així durant el segle XIX es van plantejar una gran quantitat de problemes:

### **Francis Guthrie**

El 1852 aquest matemàtic britànic es planteja el següent problema mentres intenta pintar un mapa del regne unit:

*“És possible pintar qualsevol mapa de països de tal manera que un país tingui un color diferent al de tots els seus veïns, utilitzant tan sols quatre colors?”*

D'aquest problema en surt el teorema de que qualsevol mapa pot ser pintat únicament amb quatre colors diferents, de tal manera que dues regions adjacents no tinguin colors iguals. Aquest problema que pot semblar tan trivial no va ser demostrat fins l'any 1976. Va passar per mans de personatges com De Morgan, Hamilton, Cayley, Kempe (que va fer una demostració publicada el 1879), Heawood (que va demostrar que la demostració de Kempe no era correcta)... Finalment el 1976 Appel i Hanken van demostrar a través d'un programa d'ordinador que tot mapa es podia pintar només amb quatre colors. Pel fet de basar la demostració en un programa d'ordinador, molta gent no va acceptar la demostració. Així doncs, aquest problema no va ser solucionat de manera formal 1996 quan, recorrent a la teoria de grafs ja desenvolupada, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas van publicar una demostració. En els treballs d'Appel i Hanken es van definir alguns dels conceptes i fonaments de l'actual teoria de grafs.

### **Arthur Cayley**

Arthur Cayley, matemàtic que treballava en la teoria de grups, topologia i combinatoria, també va aportar una gran quantitat de coneixement a la branca. Va treballar amb grafs de tipus arbre i va desenvolupar, la fórmula  $n^{n-2}$ , que determina el nombre d'arbres expansius que té un graf complet de  $n$  vèrtex. Una fórmula semblant apareixia en treballs de Carl Wilhelm Borchardt, en els quals Cayley es va basar i va estendre, però el que actualment dona nom a la fórmula és el mateix Cayley.

També va treballar en desenvolupar una representació de l'estructura abstracta d'un grup, creant els grafs de Cayley i el teorema de Cayley referent a aquests. Finalment, Cayley va contribuir també el 1857 en la representació i enumeració dels isòmers alcans (composts químics que comparteixen fórmula o composició però tenen diferent estructura molecular), representant cada compost mitjançant un graf de tipus arbre. Tot i això, Cayley no només va ser actiu en teoria de grafs, sinó que també va desenvolupar teoremes en àlgebra lineal, topologia i geometria.

### **William Hamilton i Thomas Kirkman**

William Rowan Hamilton va plantejar un problema el 1859 que consistia en trobar un camí que passés pels 20 vèrtex d'un dodecahedre una sola vegada a través de les seves arestes. Hamilton va comercialitzar el joc sota el nom de “The Icosian game” (és important dir que el nom de icosian no va ser degut a que utilitzés un icosaedre, sinó que feia referència als 20 vèrtex del dodecahedre per on s'havia de passar). Entorn aquest joc existeix una gran controvèrsia, ja que Euler va plantejar un problema semblant mentre estudiava el problema dels

cavalls, i Kirkman va plantejar exactament el mateix problema que Hamilton a la Royal Society un temps abans.

### **Gustav Kirchhoff**

Gustav Kirchhoff, conegut majoritàriament en el camp de l'electrotècnia per les seves lleis de Kirchhoff, també va fer aportacions importants en teoria de grafs. Les seves lleis, publicades el 1874, es basen en la teoria de grafs, però a més, va ser el primer d'utilitzar els grafs en aplicacions industrials. Va estudiar sobretot els grafs de tipus arbre i, amb l'investigació que va dur a terme sobre aquest tipus de grafs, va formular el teorema de Kirchhoff, sobre del nombre d'arbres d'expansió que es poden trobar en un graf. Aquest teorema es considera una generalització de la fórmula de Cayley.

## **1.3 Teoria de grafs moderna**

Durant el segle XX, la teoria de grafs es va anar desenvolupant més. Amb les bases ja establertes durant el segle XIX, els matemàtics hi van començar a treballar i el 1936 Dénes König va escriure el primer llibre de teoria de grafs. Frank Harary va escriure un altre llibre el 1969, que va fer accessible la teoria de grafs a àmbits diferents a les matemàtiques. El desenvolupament de l'informàtica i les noves tècniques de computació van permetre treballar amb grafs a molt més gran escala, fent possible, per exemple, la primera demostració del teorema dels quatre colors per Appel i Haken.

Actualment la teoria de grafs és una part molt important de la matemàtica discreta i està relacionada amb molts àmbits diferent, com per exemple la topologia, la combinatòria, la teoria de grups, la geometria algebraica... Des del seu desenvolupament s'han utilitzat els grafs per resoldre i representar de manera visual problemes en aquests camps. Té aplicacions en molts altres àmbits com per exemple la computació, l'informàtica, la física, la química, l'electrònica, les telecomunicacions, la biologia, la logística i fins i tot en l'àmbit econòmic.