

Vakaa avioliitto ongelma

Anis Moubarik

Referaatti
Helsingin Yliopisto
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 29. tammikuuta 2013

[illegible]

1 Mikä on vakaa avioliitto ongelma

Avioliitto ongelmassa on kyse kahdesta erillisestä joukosta, kutsutaan niitä N :ksi ja M :ksi, naisiksi ja miehiksi. Molempien joukkojen jäsenillä on mieltymykset joiden mukaan he haluavat pariutua toisen joukon jäsenen kanssa. Tätä kutsutaan avioliitto peliksi. Vakaudella näiden joukkojen välisessä pariutuksessa tarkoitetaan sitä, että alkioille $n \in N$ ja $m \in M$ ei löydy vaihtoehtoista paritusta, jossa n ja m olisivat paremmassa asemassa, kun mitä he ovat pariutettuna keskenään. Artikkelin paino on vakaitten parien analyysissä.

On myös matemaattisesti todistettu, että vakaa pariutus löytyy aina. Artikkelin tarkoituksena on lähestyä ongelmaa suunnattujen verkkojen kautta. Verkot voidaan ajatella matriiseina, joissa riveinä ovat miehet ja sarakkeina naiset ja nuoli osoittaa solusta soluun, huonoimmasta parista parhaimpaan.

2 Vakaat parit

Jos haluamme esittää ongelman suunnattuna verkkona, meillä on kaksi äärellistä joukkoa, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{|M|}\}$, ja $N = \{n_1, n_2, \dots, n_{|N|}\}$. Jokaisella joukon jäsenellä on selvät mieltymykset toisen joukon jäsenistä, ja sijoitus parhaasta parista huonoimpaan. Paritus verkossa Γ on parit (m, w) $m \in M$, $n \in N$, niin että w on m :lle sopiva pari ja päinvastoin. Joukkojen jäsenten on mahdollista jäädä selibaateiksi, mutta jos tällaista jäsentä ei ole ollenkaan vakaus on ekvivalentti esteparin (m, w) poissaololle. Estepari on m ja w , jotka eivät ole pari, mutta estävät pariutuksen, jos he olisivat yhdessä paremmassa asemassa kun erillään. Paras-miehelle solmu on pari, jossa mies saa haluamansa naisen, ja paras-naiselle solmu, jossa nainen saa haluamansa miehen.

3 Vakaitten parien löytäminen ja Gale-Shapley algoritmi

Esitämme alkuperäisen Gale-Shapley algoritmin. Miehet aloittavat kosimalla suosikki naistaan. Jokainen nainen joka saa enemmän kuin yhden kosinnan hylkää kaikki paitsi suosikkinsa, miehistä jotka kosi häntä. Nainen ei kuitenkaan hyväksy miestä vielä, vaan pitää häntä ”langan päässä”salliakseen mahdollisuuden sille, että parempi mies tulisi vielä kosimaan.

Seuraavassa vaiheessa miehet jotka hylättiin kosivat seuraavia vaihtoehtoja, ja naiset taas hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon.

Koska niin kauan kun joku naisista ei ole saanut kosintaa tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja, ja mies ei voi kuin kerran kosi samaa naista, niin lopuksi jokaista naista on kosittu. Kun viimeinen nainen on saanut kosinnan, on kosimisvaihe päättynyt ja jokaisen naisen on hyväksyttävä langan päässä oleva mies. [GS62, p. 12-13]

3.1 Vakaa paritus

Haluamme todistaa, että aiemman pelin avioliitot ovat vakaita. Oletetaan, että Matti ja Mari eivät ole naimisissa keskenään, mutta Matti suosii Mariaa hänen oman vaimonsa yli. Matin on siis jossain vaiheessa peliä pitänyt kosia Maria ja Marin jossain vaiheessa hylätä Matti jonkun toisen, paremman parin, edestä. On siis selvää, että Mari suosii omaa aviomiestään Matin sijaan eikä epävakautta synny. [GS62, p. 13] Algoritmin aikavaativuus on $O(n^2)$. Täytyy myös huomauttaa, että algoritmi tuottaa tällaisenaan naisille optimaalisia tuloksia, jos halutaan tuottaa miehille optimaalisia tuloksia voidaan osat vaihtaa päittäin algoritmissa ja aloittaa alusta.

4 Lähteet

- [BR97] Balinski, Michel ja Guillaume Ratier: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes*. SIAM Rev., 39(4):575–604, joulukuu 1997, ISSN 0036-1445. <http://dx.doi.org/10.1137/S0036144595294515>.
- [GS62] Gale, D. ja L. S. Shapley: *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962, ISSN 00029890. <http://jmvidal.cse.sc.edu/library/gale62a.pdf>.