

# **Vakaa avioliitto ongelma**

Anis Moubarik

Referaatti  
Helsingin Yliopisto  
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 30. tammikuuta 2013

[illegible]

## 1 Mikä on vakaa avioliitto ongelma

Avioliitto ongelmassa on kyse kahdesta erillisestä joukosta ja näiden joukkojen keskinäisestä parituksesta, ongelmana on löytää paritus joka on vakaa. Paritus on vakaa, kun ei löydy paria  $(m, w)$  jossa  $m$  ja  $w$  olisivat erikseen paremmassa asemassa kuin yhdessä.

Tarkoituksena on lähestyä ongelmaa suunnattujen verkkojen kautta. Verkot voidaan ajatella matriiseina, joissa riveinä ovat miehet ja sarakkeina naiset ja nuoli osoittaa solusta soluun, huonoimmasta parista parhaimpaan.

## 2 Vakaat parit

Jos haluamme esittää ongelman suunnattuna verkkona, meillä on kaksi äärellistä joukkoa,  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{|M|}\}$ , ja  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_{|N|}\}$ . Jokaisella joukon jäsenellä on selvät mieltymykset toisen joukon jäsenistä, ja sijoitus parhaasta parista huonoimpaan. Paritus verkossa  $\Gamma$  on parit  $(m, w)$   $m \in M$ ,  $n \in N$ , niin että  $w$  on  $m$ :lle sopiva pari ja päinvastoin. Joukkojen jäsenten on mahdollista jäädä selibaateiksi, mutta jos tällaista jäsentä ei ole ollenkaan vakaus on ekvivalentti esteparin  $(m, w)$  poissaololle. Estepari on  $m$  ja  $w$ , jotka eivät ole pari, mutta estävät pariutuksen, jos he olisivat yhdessä paremmassa asemassa kun erillään. Paras-miehelle solmu on pari, jossa mies saa haluamansa naisen, ja paras-naiselle solmu, jossa nainen saa haluamansa miehen.

### 2.1 Vakaitten parien löytäminen

Esitämme alkuperäisen Gale-Shapley algoritmin. Miehet aloittavat kosimalla suosikki naistaan. Jokainen nainen joka saa enemmän kuin yhden kosinnan hylkää kaikki paitsi suosikkinsa, miehistä jotka kosi häntä. Nainen ei kuitenkaan hyväksy miestä vielä, vaan pitää häntä ”langan päässä” salliakseen mahdollisuuden sille, että parempi mies tulisi vielä kosimaan.

Seuraavassa vaiheessa miehet jotka hylättiin kosivat seuraavia vaihtoehtoja, ja naiset taas hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon.

Koska niin kauan kun joku naisista ei ole saanut kosintaa tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja, ja mies ei voi kuin kerran kosia samaa naista, niin lopuksi jokaista naista on kosittu. Kun viimeinen nainen on saanut kosinnan, on kosimisvaihe päättynyt ja jokaisen naisen on hyväksyttävä langan päässä oleva mies. [GS62, p. 12-13]

### 2.2 Vakaa paritus

Haluamme todistaa, että aiemman pelin avioliitot ovat vakaita. Oletetaan, että Matti ja Mari eivät ole naimisissa keskenään, mutta Matti suosii Mariaa hänen oman vaimonsa yli. Matin on siis jossain vaiheessa peliä pitänyt kosia

Maria ja Marin jossain vaiheessa hylätä Matti jonkun toisen, paremman parin, edestä. On siis selvää, että Mari suosii omaa aviomiestään Matin sijaan eikä epävakautta synny. [GS62, p. 13] Algoritmin aikavaativuus on  $O(n^2)$ . Täytyy myös huomauttaa, että algoritmi tuottaa tällaisenaan miehille optimaalisia tuloksia, jos halutaan tuottaa naisille optimaalisia tuloksia voidaan osat vaihtaa päittäin algoritmissa ja aloittaa alusta.

### 2.3 Vakaitten parien määrä

Aiemmista tuloksista näemme, että jokaisesta avioliitto pelistä löytyy ainakin yksi vakaa paritus. Tapauksissa joissa pari mieltymykset menevät yhteen, on tasan yksi vakaa paritus. Muissa tapauksissa näitä voi olla maksimissaan eksponentiaalinen määrä. [BR97, p. 591]

### 2.4 Vakaitten parien vertailu

Olkoon meillä joukko  $M = \{A, B, C\}$  ja  $N = \{X, Y, Z\}$ . Heidän preferenssit menevät seuraavanlaisesti:

$A : Y \leftarrow X \leftarrow Z, B : Z \leftarrow Y \leftarrow X, C : X \leftarrow Z \leftarrow Y$

$X : B \leftarrow A \leftarrow C, Y : C \leftarrow B \leftarrow A, Z : A \leftarrow C \leftarrow B$

Meillä on nyt kolme mahdollista vakaata paritusta.  $M$  saa ykkösvalintansa ja  $N$  kolmannen,  $(A, Y), (B, Z), (C, X)$ . Molemmat saavat toiseksi parhaan valinnan,  $(A, X), (B, Y), (C, Z)$ .  $N$  saa ykkösvalinnan ja  $M$  kolmannen,  $(A, Z), (B, X), (C, Y)$ . Tässä tapauksessa algoritmi antaa  $M$  optimaalisen tuloksen, sillä jokainen joukon  $N$  elementti saa tasan yhden kosinnan joka sen täytyy hyväksyä (koska se tulee olemaan paras vaihtoehto mitä se tulee saamaan). Tämä johtuu siitä, että joukolla  $M$  on valittavanaan koko joukko  $N$ , kun taas  $N$  joutuu karsimaan kosijoistaan.

## 3 Sovellukset

## 4 Avioliitto pelien strategia

## 5 Lähteet

[BR97] Balinski, Michel ja Guillaume Ratier: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes*. SIAM Rev., 39(4):575–604, joulukuu 1997, ISSN 0036-1445. <http://dx.doi.org/10.1137/S0036144595294515>.

[GS62] Gale, D. ja L. S. Shapley: *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962, ISSN 00029890. <http://jmvidal.cse.sc.edu/library/gale62a.pdf>.