Vakaa avioliitto -ongelma

Anis Moubarik

Aine

HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 10. maaliskuuta 2013

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Anis Moubarik

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Vakaa avioliitto -ongelma

Oppiaine — Läroämne — Subject

Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Aine	10. maaliskuuta 2013	7

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

pariutus, gale-shapley, avioliitto-peli

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Vakaa avioliitto -ongelma on Galen ja Shapleyn vuonna 1962 tulleessa artikkelissa [2], esille tuoma ongelma joka sivuuttaa kombinatoriikkaa ja peliteoriaa. Ongelma on seuraava. Olkoon meillä n miestä ja n naista, miehet ovat pistäneet naiset järjestykseen mieluisimmasta morsiammesta huonoimpaan ja vastaavasti jokainen nainen on pistänyt miehet järjestykseen mieluisimmasta sulhasesta huonoimpaan. Tehtävänä on pariuttaa miehet ja naiset niin, että meillä ei ole estepareja, ja kun näitä ei esiinny ovat avioliitot vakaita.
Ongelmalla on monia käytännön sovelluksia, kuten elinluovutukset, joissa osapuolina on miesten ja naisten sijaan luovuttajat ja vastaanottajat sekä omien mieltymysten sijaan vastaanottajien kriteerit ovat elinten sopivuus heille.

Gale ja Shapley esittivät algoritmin, joka toteuttaa yhden vakaan pariutuksen jokaiselle olemassa olevalle avioliittopelille, tämä tarkoittaa sitä että jokainen avioliittopeli sisältää vakaan pariutuksen. Algoritmi toimii oletuksena miehet kosii; naiset hylkää periaatteella, tämä antaa kosijalle, tässä tapauksessa siis miehille, aina parhaan mahdollisen parin mitä he voivat pelin kontekstissa saada. Peliteoria nousee esille ongelmassa, koska joukkojen alkiot voivat vääristellä mieltymyksiään, tästä nousee kysymyksiä kuinka tähän olisi reagoitava, algoritmi ei pysty siihen, ja kuinka alkiot vääristelystä hyötyvät.

Tekstin tarkoituksena on esitellä vakaa avioliitto -ongelma, sen ratkaisut ja sovellukset. Notaatio on matemaattisesti kevyttä ja ongelma on, sovellusten kautta, helposti lähestyttävissä.

2 Vakaat pariutukset

Olkooon M *miesten* joukko ja N naisten joukko, missä $|M| = |N| = n$. Avioliitosta tai parista puhuttaessa tarkoitamme paria $(m, n) \in M \times N$. Avioliittopelissä jokaisella joukkojen alkiolla on mieltymykset toisen joukon alkioista parhaimmasta kumppanista huonoinmpaan. Olkoon meillä alkiot $\{x, y, z\} \subset N$ mieltymykset m:lle voidaan kuvata seuraavasti; $x >_m y >_m z$ mieltymykset ovat myös transitiivisia eli $x >_m z$ pätee. Merkitään pariutusten joukkoa μ:llä, eli $(m, n) \in \mu$. Pariutus μ on joukko $\mu \subseteq M \times N$, missä pariutus on injektio $\mu : M \mapsto N$

Määritelmä 1. *Vakaa* pariutus on ekvivalentti *esteparin* poissaololle. Esteparin määritelmä; olkoon meillä neljä alkiota avioliittopelistä $\{n_1, n_2\} \subset N, \{m_1, m_2\} \subset M$ ja pariutus $\{(n_1, m_1), (n_2, m_2)\} \subset \mu$. Jos $m_2 >_{n_1} m_1$ ja $n_1 >_{m_2} n_2$,niin (n_1, m_2) on estepari. Haluamme välttää epävakautta, jotta pariutukset olisivat mahdollisimman kestäviä. Ongelma on löytää pariutus δ joukoille N ja M, joka olisi vakaa.

Pariutuksilla ja pareilla on erillaisia ominaisuuksia. Paras-miehelle pari on pari, jossa mies saa haluamansa naisen ja vastaavasti paras-naiselle pari on pari, jossa nainen saa haluamansa miehen. Pariutuksissa voi esiintyä jommankumman joukon ylivaltaa, jos $\forall j \in N$, j saavat haluamansa parin, tätä kutsutaan N-joukon ylivallaksi ja samoin $\forall i \in M$, i saavat haluamansa parin, tällöin se on M-joukon ylivalta. Joskus ylivaltoja kutsutaan myös *Nais-* tai *Miesylivallaksi*. Jos ylivaltaa ei synny pariutuksessa, voidaan pariutusta kutsua ylivaltavapaaksi. Päinvastoin jos mies tai nainen saa huonoimman tai vähiten haluamansa parin, kutsutaan sitä *huonoin-naiselle* tai *-miehelle* pariksi. Samoin pariutusta kutsutaan huonoin-naiselle tai -miehelle pariksi jos kaikki jommankumman joukon alkioista saavat vähiten haluamansa parit.

Esittelemme myöhemmin teoreeman, jonka mukaan jokaisesta avioliittopelistä löytyy ainakin yksi vakaa pariutus. Ensin kuitenkin esittelemme algoritmin joka tarkastaa pariutuksen vakauden. Olkoon $x = |M|$, $m \in M$ ja $n \in N$. Olkoon μ meidän pariutus ja jos n ja m on pariutettu μ:ssa, niin merkitään sitä $n = p_\mu(m)$.

for $i = 1$ to x **do**
    for all n niin että m suosii n:ää ennemmin kuin $p_\mu(m)$ **do**
        if n suosii m:ää ennemmin kuin $p_\mu(n)$ **then**
            return pariutus on epävakaa
        end if
    end for
end for
return pariutus on vakaa [3, p. 8].

Etsimme siis tapauksia jossa mies suosii naista enemmän kuin omaa pariaan pariutuksessa p_μ. Jos löydämme tälläisen miehen, tarkastelemme jos nainen jota hän suosii, suosii myös miestä enemmän kuin pariaan, jos tämä pitää paikkansa, ei pariutus voi olla vakaa. Huonoimmassa tapauksessa käymme läpi kaikki miehet ja kaikki naiset paitsi yhden, eli $x \cdot (x - 1)$, tästä saamme aikavaativuudeksi $O(x^2)$.

3 Gale–Shapley-algoritmi

Avioliittopelistä löytyy aina ainakin yksi vakaa pariutus. Gale–Shapley algoritmi on yksinkertainen algoritmi, joka tuottaa vakaan parituksen avioliittopelille. Esittelemme algoritmin ja näytämme, että se päättyy aina.

Algoritmi 2.
1. Miehet aloittavat kosimalla mieltymyksiltään parasta naista.
2. Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaiten sijoitetun miehen.
3. Nainen ei hyväksy miestä vaan odottaa, jos parempi mies kosisi häntä
4. Hylätyt miehet kosivat mieltymyksiltään toisiksi parasta naista.

5. Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon
6. Niin kauan kuin joku naisista ei ole saanut kosintaa, tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja. Lopuksi jokaista naista on kosittu, koska mies ei voi kuin kerran kosia samaa naista.
7. Viimeinen nainen on saanut kosinnan ja kosimisvaihe on päättynyt. Jokainen nainen hyväksyy langan päässä olevan kosijan [2, p. 13].

Mies ei voi jäädä ilman paria. Nainen voi hylätä vain jos hänellä on langan päässä mies (ensimäisellä kierroksella naisen on siis valittava paras vaihtoehto langan päähän, hän ei voi hylätä kaikkia kosijoita), ja kun hänellä on langan päässä mies hänestä ei tule missään vaiheessa vapaata algoritmin suorittamisessa. Jos viimeinen nainen jota kositaan hylkää miehen, tarkoittaisi tämä sitä, että jokaisella naisella olisi mies jo langan päässä. Mutta naisia ja miehiä on sama määrä ja yksikään mies ei voi olla kahden naisen langan päässä, niin jokainen miehistäkin pitäisi olla lankojen päässä, mikä on ristiriita. Jokainen iteraatio sisältää yhden kosinnan eikä yksikään mies kosi samaa naista kahta kertaa, joten iteraatioiden määrä on n^2, kun $n =$ miesten lukumäärä = naisten lukumäärä. Algoritmi siis on päättyvä.

Nyt siis päättyminen on selvää, mutta onko pariutukset aina vakaita? Todistetaan se nyt. Oletetaan, että Matti ja Mari eivät ole pari, mutta Matti suosii Mariaa hänen oman parinsa yli. Matin on siis jossain vaiheessa peliä (algoritmiä) pitänyt kosia Maria ja Marin jossain vaiheessa hylätä Matti paremman miehen edestä. On siis selvää, että Mari suosii omaa aviomiestään Matin sijaan eikä epävakautta voi syntyä [2, p. 588]. Algoritmi tuottaa tälläisenään optimaalisia tuloksia, eli tällä algoritmilla tuotettu pariutus on kyseiselle miehille paras mahdollinen mitä he siinä kyseisessä avioliittopelissä tulevat saamaan. Naisille optimaalisia tuloksia voidaan saada, kun osat vaihdetaan päittäin algoritmissä.

4 Vakaitten pariutuksien joukko

Gale-Shapley algoritmi tuottaa meille yhden vakaan pariutuksen, mutta niitä voi olla enemmän. Olkoon meillä pariutus μ ja $\mu^{'}$. Henkilö x suosii pariutusta μ pariutukseen $\mu^{'}$ nähden, jos x suosii enemmän pariaan μ pariutuksessa kuin $\mu^{'}$ pariutuksessa. Henkilölle voi olla myös välinpitämätön pariutuksista, jos molemmat antavat hänelle yhtä hyvän parin.

Olkoon nyt μ ja $\mu^{'}$ vakaat pariutukset. Olkoon m ja w pari pariutuksesssa μ, mutta ei $\mu^{'}$:ssa. Nyt toinen suosii pariutusta μ ja toinen pariutusta $\mu^{'}$ [3, p. 18]. Tästä seuraa nyt, se että jos μ ja $\mu^{'}$ ovat vakaita pariutuksia samalle avioliittopelille, niin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta μ on sama kuin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta $\mu^{'}$. Esitellään hieman myös notaatiota ylivaloille, tässä yhteydessä keskitymme miesylivaltaan. Vakaa pariutus μ dominoi vakaata pariutusta $\mu^{'}$, merkitään $\mu \preceq \mu^{'}$, jos jokainen mies saa vähintään yhtä hyvän parin pariutuksessa μ kuin $\mu^{'}$. Jos meillä on yo. miesylivalta, se tarkoittaa että toiseen suuntaan meillä on oltava naisylivalta, joka merkitään seuraavasti $\mu \succeq \mu^{'}$. Käytämme symbolia $\mathcal{M}$ kuvaamaan kaikkia vakaita pariutuksia avioliittopelissä. $(\mathcal{M}, \preceq)$ on osittain järjestetty joukko. Naisylivalta $(\mathcal{M}, \succeq)$ on kaksinkertainen osittain järjestetty joukko.

4.1 Vakaitten pariutusten määrä

Haluamme nyt näyttää, että vakaita pariutuksia on eksponentiaalinen määrä. Joten jos käytämme brute-force algoritmia löytääksemme kaikki vakaat pariutukset, joudumme tyytymään eksponentiaaliseen aikavaativuuteen.

Lemma 3. *Jokaiselle $n \geq 0$, n kahden potenssi, on olemassa vakaa avioliittopeli jonka koko on n ja sisältää vähintään 2^{n-1} vakaata pariutusta*

Todistus induktiolla. Kun pelin koko on 1, niin $n = 2^0$, eli meillä on yksi vakaa pariutus. Induktio-oletus $n = 2^k$, käytämme Lemmaa 1, missä $i = 2$. Löydämme kaksi vakaata pariutusta, joten $x = 2$ ja induktio-oletuksen mukaan $y = 2^{2^{k-1}}$. Joten Lemman 1.3.3 [3, p. 23] perusteella on olemassa peli jonka koko on $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, jolla on vähintään $\max(2 \cdot (2^{2^k - 1})^2, 2^{2^k - 1} \cdot 2^{2^k}) = 2^{2^{k+1} - 1})$ vakaata paritusta [3, p. 24]. $\square$

5 Erisuuruiset joukot

Aikaisemmat tulokset pätevät myös, kun meillä on kaksi joukkoa joiden alkioiden määrä on erisuuri. Oletamme, että henkilö haluaa olla ennemmin naimisissa kuin naimaton.
Olkoon X miesten joukko ja Y naisten joukko, ja $|X| = n_x < n_y = |Y|$. Pariutus μ on epävakaa, jos on olemassa mies $m \in X$ ja nainen $n \in Y$, siten että;

1. m ja w eivät ole pari pariutuksessa μ.

2. m on joko ilman paria μ:ssä tai suosii naista w enemmän kuin pariaan pariutuksessa μ.

3. w on joko ilman paria μ:ssä tai suosii miestä m enemmän kuin pariaan pariutuksessa μ.

Jokainen vakaa pariutus koostuu n_x:stä järjestettyjä pareja, missä $n_x - n_y$ on naimattomien naisten määrä.

Lause 4. *Avioliittopelissä jossa meillä on erisuuruiset joukot, on olemassa vähintään yksi vakaa pariutus, jossa pienemmän joukon kaikki alkiot saavat parin. Isompi joukko on jaettu kahteen osaan, toisen osan alkiot ovat vakaassa pariutuksessa ja toisen osan alkiot ovat pariutumattomia [3, p. 26].*

Lähteet

[1] Balinski, Michel ja Ratier, Guillaume: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes.* SIAM Rev., 39(4):575–604, 1997.

[2] Gale, D. ja Shapley, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage.* The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962.

[3] Gusfield, D. ja Irving, R.W.: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* Foundations of Computing Series. MIT Press, 1989, ISBN 9780262071185.