Vakaa avioliitto -ongelma

Anis Moubarik

Referaatti
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 20. helmikuuta 2013

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Anis Moubarik

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Vakaa avioliitto -ongelma

Oppiaine — Läroämne — Subject

Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Referaatti	20. helmikuuta 2013	4

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

vakaa avioliitto -ongelma, vakaat parit

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

1 Mikä on vakaa avioliitto -ongelma

Teksti pohjautuu Michel Balinskin ja Guillaume Ratierin, Of Stable Marriages and Graphs, And Strategy and Polytopes, artikkeliin.
Kun puhumme avioliitosta tässä kontekstissa, tarkoitamme kahden alkion pariutumista kahdesta erillisestä joukosta. $m \in M$ *"miehet"* ja $n \in N$ *"naiset"*, pariutus on (m, n). Kutsutaan peliä avioliitto peliksi, kun kummankin joukon alkiot sijottavat vastapuolisen joukon alkion mieltymys järjestykseen $1 \ldots n$, missä n on vastapuolisen joukon alkioiden määrä. Pelin tarkoitus on löytää pari jokaiselle alkiolle. Vakaa avioliitto -ongelman kysymys on, voiko mille tahansa alkioiden mieltymyksille löytää vakaat pariutukset? Pariutus (m_1, w_1) on vakaa, joss ei ole olemassa alkiota w_2 tai m_2, jossa m_1 ja w_2 pariutuisivat mieluummin keskenään, kuin omien pariensa kanssa, ja m_2 ja w_1 pariutuisivat mieluummin keskenään, kuin omien pariensa kanssa, tälläisiä pareja kutsutaan estepareiksi. Haluamme siis välttää epävakautta, jotta pariutukset olisivat mahdollisimman kestäviä.

Tarkoituksena on lähestyä ongelmaa suunnattujen verkkojen kautta. Verkot voidaan ajatella matriiseina, joissa riveinä ovat miehet ja sarakkeina naiset ja nuoli osoittaa solusta soluun, huonoimmasta parista parhaimpaan.

2 Vakaa pari

Jos haluamme esittää ongelman suunnattuna verkkona, meillä on kaksi ääreellistä joukkoa, $M = \{m_1, m_2, ..., m_{|M|}\}$, ja $N = \{n_1, n_2, ..., n_{|N|}\}$. Jokaisella joukon jäsenellä on selvät mieltymykset toisen joukon jäsenistä, ja sijoitus parhaasta parista huonoimpaan. Joukkojen jäsenten on mahdollista jäädä selibaateiksi, mutta jos tälläistä jäsentä ei ole ollenkaan vakaus on ekvivalentti esteparin (m, w) poissaololle.
Paras-miehelle solmu on pari, jossa mies saa haluamansa naisen, ja paras-naiselle solmu, jossa nainen saa haluamansa miehen. Paras-miehelle tai -naiselle ylivalta tapahtuu, kun jokainen mies pariutuksessa μ saa haluamansa naisen, tai päinvastoin, jokainen nainen saa pariutuksessa μ haluamansa miehen. Jos tälläistä ylivaltaa ei tapahdu, pariutusta voidaan kutsua ylivalta vapaaksi.
Voidaan puhua myös huonoin-miehelle tai -naiselle pariutuksesta, jossa mies tai nainen saa vähiten haluamansa parin.

3 Vakaitten parien löytäminen

Esitämme alkuperäisen Gale-Shapley *"miehet kosii, naiset määrää"* algoritmin. Miehet aloittavat kosimalla suosikki naistaan. Jokainen nainen joka saa enemmän kuin yhden kosinnan hylkää kosineista miehistä kaikki paitsi suosikkinsa. Nainen ei kuitenkaan hyväksy miestä vielä, vaan pitää häntä odottavassa tilassa salliakseen mahdollisuuden sille, että parempi mies tulisi vielä kosimaan seuraavilla kierroksilla.

Seuraavassa vaiheessa miehet jotka hylättiin kosivat seuraavia vaihtoehtoja, ja naiset taas hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon.

Koska niin kauan kun joku naisista ei ole saanut kosintaa tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja, ja mies ei voi kuin kerran kosia samaa naista, niin lopuksi jokaista naista on kosittu. Kun viimeinen nainen on saanut kosinnan, on kosimisvaihe päättynyt ja jokaisen naisen on hyväksyttävä langan päässä oleva mies. [2, p. 12-13] On myös ilmeistä, että algoritmi on päättyvä.

Haluamme todistaa, että aiemman pelin avioliitot ovat vakaita. Oletetaan, että Matti ja Mari eivät ole naimisissa keskenään, mutta Matti suosii Mariaa hänen oman vaimonsa yli. Matin on siis jossain vaiheessa peliä pitänyt kosia Maria ja Marin jossain vaiheessa hylätä Matti jonkun toisen, paremman parin, edestä. On siis selvää, että Mari suosii omaa aviomiestään Matin sijaan eikä epävakautta synny. [2, p. 13] Algoritmin aikavaativuus on $O(n^2)$ [1, p. 588], ja vakaitten pariutusten määrä on eksponentiaalinen pelissä. [1, p. 591] Täytyy myös huomauttaa, että algoritmi tuottaa tälläisenaan miehille optimaalisia tuloksia, eli tällä algoritmilla tuotettu pariutus on kyseisille miehille paras mahdollinen mitä he siinä kyseisessä avioliitto pelissä tulevat saamaan.
Jos halutaan tuottaa naisille optimaalisia tuloksia voidaan osat vaihtaa päittäin algoritmissa ja aloittaa alusta.

4 Sovellukset

Vakaa avioliitto algoritmin sovellukset ovat laajat. Sitä voidaan käyttää kaksipuolisissa markkinoissa, kuten vuokra-asunnon hakemisessa, jossa vuokraajat ja hakijat ovat pelaavat joukot, vuokraajat hakevat vuokraaja-optimaalisinta pariutusta. Vuokraajat lähettävät ”pelin”alussa ”kosinnan”suosikki vuokralaisehdokkaalleen, peli toimii täsmälleen samalla tavalla kuin naisten ja miesten kanssa. Vuokralaisehdokas voi myös pelata peliä, jossa saadaan tulokseksi vuokralais-optimaalinen tulos, kun hän hakee asuntoa ja aloittaa suosikki kohteestaan.

Toinen esimerkki on elinluvotus tapaukset, jossa suurin tekijä on elimen sopivuus vastaanottajalle. Tässä tapauksessa on siis kaksi joukkoa, luovuttajat ja vastaanottajat, ja haemme vain vastaanottaja-optimaalista pariutusta.

Yleisesti ongelmaa ja sen ratkaisua voidaan soveltaa kaksipuolisissa markkinoissa, nämä ovat taloudellisia alustoja joilla on kaksi erillistä käyttäjäryhmää, jotka tarjoavat toisilleen tavaroita tai palveluita. Esimerkiksi työnhakusivustot, ryhminä hakijat ja työnantajat, hakukoneet, jossa ryhminä käyttäjät ja mainostajat.

5 Yhteenveto

Vakaa avioliitto -ongelma vaikuttaa aluksi yksinkertaiselta ja reaalimaailman implikaatiot eivät ole heti itsestäänselviä. Mutta ongelmaan paneuduttaessa huomataan kuinka hyvin ongelma kuvaa erilaisia ongelmia oikeassa maailmassa, ja ongelman ratkaisu ratkaisee monia näistä ongelmista. Ongelma on myös mielenkiintoinen siltä osalta, että sen ja ratkaisun ymmärtämiseksi ei vaadita vaikeaa matematiikkaa, ja sen voi selittää täysin ymmärrettävästi luonnollisen kielen avulla.

6 Lähteet

[1] Balinski, Michel ja Guillaume Ratier: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes.* SIAM Rev., 39(4):575–604, 1997, ISSN 0036-1445.

[2] Gale, D. ja L. S. Shapley: *College Admissions and the Stability of Marriage.* The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962, ISSN 00029890.