

Vakaa avioliitto -ongelma

Anis Moubarik

Kypsyysnäyte
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 9. huhtikuuta 2013

1 Johdanto

Vakaa avioliitto -ongelma sivuaa kombinatoriikkaa ja peliteoriaa. Ongelma on seuraava: Olkoon olemassa n miestä ja n naista ja miehet ovat pistäneet naiset järjestykseen mieluisimmasta parista huonoimpaan ja jokainen nainen on pistänyt miehet vastaavaan järjestykseen, tätä tilannetta kutsutaan *avioliittopeliksi*. *Pari* on tässä kontekstissa siis mies-nais pari, tätä kutsutaan myös *avioliitoksi*. Tehtävänä on pariuttaa miehet ja naiset niin, että meillä ei ole kahta vastakkaisen sukupuolen henkilöä, jotka olisivat mielummin pari keskenään kuin pysyisivät avioliitossaan nykyisessä pariutuksessa. Avioliitot ovat vakaita, kun näitä *estepareja* ei esiinny. Pariutus on joukko pareja ja parit voidaan pariuttaa Gale-Shapley-algoritmilla, joka esitellään myöhemmin. Vakaassa pariutuksessa on siis tarkoitus pariuttaa kahden joukon alkiot niin että jokin kriteeri täyttyy, alkuperäisessä vakaa avioliitto -ongelmassa tuo kriteeri on parien vakaus suhteessa alkioden mieltymyksiin.

Ongelmalla on monia käytännön sovelluksia. Se voidaan yleistää kaikkiin *kaksipuolisiin markkinoihin*, joissa eettisistä tai laillisista syistä ei käytetä vaihtovälineenä rahaa. Kaksipuolisilla markkinoilla tarkoitetaan tilannetta, jossa on olemassa alusta joka palvelee kahta erillistä ryhmää, jotka toimittavat toisilleen hyödykkeitä. Seuraavat markkinat ovat hyviä esimerkkejä: elinluovuttajat ja vastaanottajat, työntekijät ja työnantajat sekä opiskelijat ja korkeakoulut. Elinluovutusten tapauksessa haaste on se, että luovuttajapotilas kaksikot eivät ole yhteensopivia, voimme kuitenkin käyttää vakaa avioliitto -ongelman ratkaisuja elinluovutuksissa. Jos on olemassa kaksikot A , B ja C , eli jokainen kaksikoista sisältää luovuttajan ja potilaan, mutta syystä tai toisesta elin ei sovi potilaalle, voidaan soveltaa ratkaisuja tähän tapaukseen ja saada vakaita pariutuksia potilaitten ja luovuttajien välille. Oletetaan, että A :n luovuttaja sopii B :lle, B :n C :lle ja C :n A :lle, nyt saamme ketjun ja vakaan pariutuksen, jossa jokainen potilas saa uuden elimen. Näitä *kaksipuolisia pariutusmarkkinoita* tutkimme paperissa.

Vastaan tulee myös pieniä variaatioita klassiseen avioliitto-ongelmaan, kuten erisuuruiset joukot ja alkioden hyvin erilaiset mieltymykset, eli tapaukset joissa he eivät halua pariutua tietyn henkilön kanssa ollenkaan. Näissä tapauksissa vakauden määritelmää muokataan niin että pariutukset joissa alkio on ilman paria voi olla myös vakaa. Erisuuruisten joukkojen tapauksessa suuremman joukon alkioista jää pariuttamatta suuremman ja pienemmän joukon alkioden lukumäärään erotuksen verran alkioita.

Gale ja Shapley esittivät vuonna 1962 ilmestyneessä artikkelissa [1] algoritmin alkuperäiselle ongelmalle, joka löytää yhden vakaan pariutuksen jokaiselle olemassa olevalle avioliittopelille. Jokaisella avioliittopelillä on siis vähintään yksi vakaa pariutus. Algoritmi toimii oletuksena "miehet kosii, naiset hylkää" periaatteella. Tämä antaa kosijalle, tässä tapauksessa siis miehille, aina parhaan mahdollisen parin mitä he voivat pelin kontekstissa saada.

Naisten kosiessa roolit tietysti vaihtuvat ja pariutukset ovat silloin naisille optimoituja. Peliteoria tulee esille, kun joukkojen alkiot vääristelevät mieltymyksiään. Tähän vääristelyyn Gale–Shapley-algoritmi ei osaa puuttua ja se nostaakin kysymyksiä kuinka siihen pitäisi reagoida ja miten ylipäättään alkiot vääristelystä hyötyvät, jos hyötyvät ollenkaan.

Lähteet

- [1] Gale, D. ja Shapley, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962.
- [2] Gusfield, D. ja Irving, R.W.: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. Foundations of Computing Series. MIT Press, 1989, ISBN 9780262071185.