Vakaa avioliitto ongelma

Anis Moubarik

Referaatti
Helsingin Yliopisto
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 28. tammikuuta 2013

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Anis Moubarik

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Vakaa avioliitto ongelma

Oppiaine — Läroämne — Subject

Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Referaatti	28. tammikuuta 2013	3

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
vakaa avioliitto ongelma, vakaat parit

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

1 Mikä on vakaa avioliitto ongelma

Avioliitto ongelmassa on kyse kahdesta erillisestä joukosta, kutsutaan niitä N:ksi ja M:ksi, naisiki ja miehiksi. Molempien joukkojen jäsenillä on mieltymykset joiden mukaan he haluavat pariutua toisen joukon jäsenien kanssa. Tätä kutsutaan avioliitto peliksi. Vakaudella näiden joukkojen välisessä parituksessa tarkoitetaan sitä, että alkioille $n \in N$ ja $m \in M$ ei löydy vaihtoehtoista paritusta, jossa n ja m olisivat paremmassa asemassa, kun mitä he ovat pariutettuna keskenään. Artikkelin paino on vakaitten parien analyysissä.

On myös matemaattisesti osoitettu ja todistettu, että vakaa pariutus löytyy aina. Artikkelin tarkoituksena on lähestyä ongelmaa suunnattujen verkkojen kautta.

2 Vakaat parit

Jos haluamme esittää ongelman suunnattuna verkkona, meillä on kaksi joukkoa ääreellistä joukkoa, $M = \{m_1, m_2, ..., m_{|M|}\}$, ja $N = \{n_1, n_2, ..., n_{|N|}\}$. Jokaisella joukon jäsenellä on selvät mieltymykset toisen joukon jäsenistä, ja sijoitus parhaasta parista huonoimpaan. Paritus verkossa γ on parit (m, w) $m \in M$, $n \in N$, niin että w on m:lle sopiva pari ja päinvastoin. Joukkojen jäsenten on mahdollista jäädä selibaateiksi, mutta jos tälläistä jäsentä ei ole ollenkaan vakaus on ekvivalentti esteparin (m, w) poissaololle. Siis jos m ja w, jotka eivät ole pari, estävät pariutuksen, jos he olisivat yhdessä paremmassa asemassa kun erillään.

2.1 Vakaa paritus

Haluamme todistaa, että jokaiselle avioliitto pelille löytyy vakaa paritus. Esitellään artikkelin *Lemma 1.*

Olkoon meillä avioliitto verkko Γ, joka on seuraavanlainen:

$$\left| \begin{array}{ccccc} & & & & w^* \\ & & & & \uparrow \\ m^* & \blacksquare & \rightarrow & \rightarrow & \blacksquare \\ & & & & \uparrow \\ & & & & \uparrow \\ m & & & & \blacksquare \end{array} \right|$$

Nyt avioliitto verkko Γ', josta on poistettu pari (m, w^*), on verkon Γ kanssa ekvivalentti.

Todistus. Olkoon μ vakaa paritus joukossa Γ. Näinollen jokainen alkio $x \in \Gamma$ kuuluu μ:n tai sisältää seuraajan μ:ssä, ja tämä ominaisuus periytyy Γ':lle. Koska $\mu \in \Gamma'$, sen täytyy olla myös siellä vakaa pari.

Olkoon vakaa pari $\mu' \in \Gamma'$, Jokainen alkio $x \in \Gamma'$ kuuluu μ':lle tai sillä on seuraaja μ':ssä, ja tämä ominaisuus periytyy alkioille $x \in (\Gamma' \cap \Gamma)$.Koska (m, w^*)

on seuraaja (m^*, w^*), joka tyydyttää ominaisuuden, säilyy se poistetulla alkiolla (m, w^*) Γ:ssa. Nyt $\mu^{'}$ on paritus Γ:ssa, sen täytyy olla myös sitä $\Gamma^{'}$:ssa. □ [BR97, p. 579]

Teoreema 1. Jokaisesta avioliitto pelistä löytyy vakaa paritus.

Todistus. Lemman 1 kaltainen alkioiden poisto ei voi jatkua loputtomiin, joten niiden täytyy suuntautua ekvivalentiksi avioliitto verkoksi, joka ei sisällä paras-miehelle ylivaltaa äärellisessä määrässä vaiheita. Mutta tälläisessä avioliitto verkoss, ainakin yksi vakaa paritus on ilmeinen. □ [BR97, p. 580]

3 Gale-Shapley algoritmi

4 Lähteet

[BR97] Balinski, Michel ja Guillaume Ratier: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes.* SIAM Rev., 39(4):575–604, joulukuu 1997, ISSN 0036-1445. `http://dx.doi.org/10.1137/S0036144595294515`.