Vakaa avioliitto -ongelma

Anis Moubarik

Kypsyysnäyte
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 10. maaliskuuta 2013

1 Johdanto

Vakaa avioliitto -ongelma on Galen ja Shapleyn vuonna 1962 tulleessa artikkelissa [?], esille tuoma ongelma joka sivuuttaa kombinatoriikkaa ja peliteoriaa. Ongelma on seuraava. Olkoon meillä n miestä ja n naista, miehet ovat pistäneet naiset järjestykseen mieluisimmasta morsiammesta huonoimpaan ja vastaavasti jokainen nainen on pistänyt miehet järjestykseen mieluisimmasta sulhasesta huonoimpaan. Tehtävänä on pariuttaa miehet ja naiset niin, että meillä ei ole estepareja, ja kun näitä ei esiinny ovat avioliitot vakaita. Ongelmalla on monia käytännön sovelluksia, kuten elinluovutukset, joissa osapuolina ovat miesten ja naisten sijaan luovuttajat ja vastaanottajat sekä omien mieltymysten sijaan vastaanottajien kriteerit ovat elinten sopivuus heille.

Gale ja Shapley esittivät algoritmin, joka toteuttaa yhden vakaan pariutuksen jokaiselle olemassa olevalle avioliittopelille, tämä tarkoittaa sitä että jokainen avioliittopeli sisältää vakaan pariutuksen. Algoritmi toimii oletuksena miehet kosii; naiset hylkää periaatteella, tämä antaa kosijalle, tässä tapauksessa siis miehille, aina parhaan mahdollisen parin mitä he voivat pelin kontekstissa saada. Peliteoria nousee esille ongelmassa, koska joukkojen alkiot voivat vääristellä mieltymyksiään, tästä nousee kysymyksiä kuinka tähän olisi reagoitava, algoritmi ei pysty siihen, ja kuinka alkiot vääristelystä hyötyvät.

Tekstin tarkoituksena on esitellä vakaa avioliitto -ongelma, sen ratkaisut ja sovellukset. Notaatio on matemaattisesti kevyttä ja ongelma on, sovellusten kautta, helposti lähestyttävissä.

2 Vakaat pariutukset

Olkooon M *miesten* joukko ja N naisten joukko, missä $|M| = |N| = n$. Avioliitosta tai parista puhuttaessa tarkoitamme paria $(m, n) \in M \times N$. Avioliittopelissä jokaisella joukkojen alkiolla on mieltymykset toisen joukon alkioista parhaimmasta kumppanista huonoinmpaan. Olkoon meillä alkiot $\{x, y, z\} \subset N$ mieltymykset m:lle voidaan kuvata seuraavasti; $x >_m y >_m z$ mieltymykset ovat myös transitiivisia eli $x >_m z$ pätee. Merkitään pariutusten joukkoa μ:llä, eli $(m, n) \in \mu$. Pariutus μ on joukko $\mu \subseteq M \times N$, missä pariutus on injektio $\mu : M \mapsto N$

Määritelmä 1. *Vakaa* pariutus on ekvivalentti *esteparin* poissaololle. Esteparin määritelmä; olkoon meillä neljä alkiota avioliittopelistä $\{n_1, n_2\} \subset N, \{m_1, m_2\} \subset M$ ja pariutus $\{(n_1, m_1), (n_2, m_2)\} \subset \mu$. Jos $m_2 >_{n_1} m_1$ ja $n_1 >_{m_2} n_2$,niin (n_1, m_2) on estepari. Haluamme välttää epävakautta, jotta pariutukset olisivat mahdollisimman kestäviä. Ongelma on löytää pariutus δ joukoille N ja M, joka olisi vakaa.

Pariutuksilla ja pareilla on erillaisia ominaisuuksia. Paras-miehelle pari on pari, jossa mies saa haluamansa naisen ja vastaavasti paras-naiselle pari on pari, jossa nainen saa haluamansa miehen. Pariutuksissa voi esiintyä jommankumman joukon ylivaltaa, jos $\forall j \in N$, j saavat haluamansa parin, tätä kutsutaan N-joukon ylivallaksi ja samoin $\forall i \in M$, i saavat haluamansa parin, tällöin se on M-joukon ylivalta. Joskus ylivaltoja kutsutaan myös *Nais-* tai *Miesylivallaksi*. Jos ylivaltaa ei synny pariutuksessa, voidaan pariutusta kutsua ylivaltavapaaksi. Päinvastoin jos mies tai nainen saa huonoimman tai vähiten haluamansa parin, kutsutaan sitä *huonoin-naiselle* tai -*miehelle* pariksi. Samoin pariutusta kutsutaan huonoin-naiselle tai -miehelle pariksi jos kaikki jommankumman joukon alkioista saavat vähiten haluamansa parit.

Esittelemme myöhemmin teoreeman, jonka mukaan jokaisesta avioliittopelistä löytyy ainakin yksi vakaa pariutus. Ensin kuitenkin esittelemme algoritmin joka tarkastaa pariutuksen vakauden. Olkoon $x = |M|$, $m \in M$ ja $n \in N$. Olkoon μ meidän pariutus ja jos n ja m on pariutettu μ:ssa, niin merkitään sitä $n = p_\mu(m)$.

for $i = 1$ to x **do**
  for all n niin että m suosii n:ää ennemmin kuin $p_\mu(m)$ **do**
    if n suosii m:ää ennemmin kuin $p_\mu(n)$ **then**
      return pariutus on epävakaa
    end if
  end for
end for
return pariutus on vakaa [**?**, p. 8].

Etsimme siis tapauksia jossa mies suosii naista enemmän kuin omaa pariaan pariutuksessa p_μ. Jos löydämme tälläisen miehen, tarkastelemme jos nainen jota hän suosii, suosii myös miestä enemmän kuin pariaan, jos tämä pitää paikkansa, ei pariutus voi olla vakaa. Huonoimmassa tapauksessa käymme läpi kaikki miehet ja kaikki naiset paitsi yhden, eli $x \cdot (x-1)$, tästä saamme aikavaativuudeksi $O(x^2)$.

Lähteet

[1] Gale, D. ja Shapley, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962.

[2] Gusfield, D. ja Irving, R.W.: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. Foundations of Computing Series. MIT Press, 1989, ISBN 9780262071185.