Vakaa avioliitto ongelma

Anis Moubarik

Referaatti
Helsingin Yliopisto
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 31. tammikuuta 2013

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Anis Moubarik

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Vakaa avioliitto ongelma

Oppiaine — Läroämne — Subject

Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Referaatti	31. tammikuuta 2013	4

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

vakaa avioliitto ongelma, vakaat parit

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

1 Mikä on vakaa avioliitto ongelma

Avioliitto ongelmassa on kyse kahdesta erillisestä joukosta ja näiden joukkojen keskinäisestä parituksesta, ongelmana on löytää paritus joka on vakaa. Paritus on vakaa, kun ei löydy paria (m, w) jossa m ja w olisivat erikseen paremmassa asemassa kuin yhdessä.

Tarkoituksena on lähestyä ongelmaa suunnattujen verkkojen kautta. Verkot voidaan ajatella matriiseina, joissa riveinä ovat miehet ja sarakkeina naiset ja nuoli osoittaa solusta soluun, huonoimmasta parista parhaimpaan.

2 Vakaat parit

Jos haluamme esittää ongelman suunnattuna verkkona, meillä on kaksi ääreellistä joukkoa, $M = \{m_1, m_2, ..., m_{|M|}\}$, ja $N = \{n_1, n_2, ..., n_{|N|}\}$. Jokaisella joukon jäsenellä on selvät mieltymykset toisen joukon jäsenistä, ja sijoitus parhaasta parista huonoimpaan. Paritus verkossa Γ on parit (m, w) $m \in M$, $n \in N$, niin että w on m:lle sopiva pari ja päinvastoin. Joukkojen jäsenten on mahdollista jäädä selibaateiksi, mutta jos tälläistä jäsentä ei ole ollenkaan vakaus on ekvivalentti esteparin (m, w) poissaololle. (m, w) on estepari paritukselle μ, jos he suosivat toisiaan enemmeän kuin parejaan parituksessa μ.
Paras-miehelle solmu on pari, jossa mies saa haluamansa naisen, ja parasnaiselle solmu, jossa nainen saa haluamansa miehen.

2.1 Vakaitten parien löytäminen

Esitämme alkuperäisen Gale-Shapley algoritmin. Miehet aloittavat kosimalla suosikki naistaan. Jokainen nainen joka saa enemmän kuin yhden kosinnan hylkää kaikki paitsi suosikkinsa, miehistä jotka kosi häntä. Nainen ei kuitenkaan hyväksy miestä vielä, vaan pitää häntä ”langan päässä”salliakseen mahdollisuuden sille, että parempi mies tulisi vielä kosimaan.

Seuraavassa vaiheessa miehet jotka hylättiin kosivat seuraavia vaihtoehtoja, ja naiset taas hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon.

Koska niin kauan kun joku naisista ei ole saanut kosintaa tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja, ja mies ei voi kuin kerran kosia samaa naista, niin lopuksi jokaista naista on kosittu. Kun viimeinen nainen on saanut kosinnan, on kosimisvaihe päättynyt ja jokaisen naisen on hyväksyttävä langan päässä oleva mies. [GS62, p. 12-13]

2.2 Vakaa paritus

Haluamme todistaa, että aiemman pelin avioliitot ovat vakaita. Oletetaan, että Matti ja Mari eivät ole naimisissa keskenään, mutta Matti suosii Mariaa hänen oman vaimonsa yli. Matin on siis jossain vaiheessa peliä pitänyt kosia

Maria ja Marin jossain vaiheessa hylätä Matti jonkun toisen, paremman parin, edestä. On siis selvää, että Mari suosii omaa aviomiestään Matin sijaan eikä epävakautta synny. [GS62, p. 13] Algoritmin aikavaativuus on $O(n^2)$. Täytyy myös huomauttaa, että algoritmi tuottaa tälläisenaan miehille optimaalisia tuloksia, jos halutaan tuottaa naisille optimaalisia tuloksia voidaan osat vaihtaa päittäin algoritmissa ja aloittaa alusta.

2.3 Vakaitten parien määrä

Aiemmista tuloksista näemme, että jokaisesta avioliitto pelistä löytyy ainakin yksi vakaa paritus. Tapauksissa joissa pari mieltymykset menevät yhteen, on tasan yksi vakaa paritus. Muissa tapauksissa näitä voi olla maksimissaan eksponentiaalinen määrä. [BR97, p. 591]

2.4 Vakaitten parien vertailu

Olkoon meillä joukko $M = \{A, B, C\}$ ja $N = \{X, Y, Z\}$. Heidän preferenssit menevät seuraavanlaisesti:
$A : Y \leftarrow X \leftarrow Z$, $B : Z \leftarrow Y \leftarrow X$, $C : X \leftarrow Z \leftarrow Y$
$X : B \leftarrow A \leftarrow C$, $Y : C \leftarrow B \leftarrow A$, $Z : A \leftarrow C \leftarrow B$
Meillä on nyt kolme mahdollista vakaata paritusta. M saa ykkösvalintansa ja N kolmannen, $(A, Y), (B, Z), (C, X)$. Molemmat saavat toiseksi parhaan valinnan, $(A, X), (B, Y), (C, Z)$. N saa ykkösvalinnan ja M kolmannen, $(A, Z), (B, X), (C, Y)$. Tässä tapauksessa algoritmi antaa M optimaalisen tuloksen, sillä jokainen joukon N elementti saa tasan yhden kosinnan joka sen täytyy hyväksyä (koska se tulee olemaan paras vaihtoehto mitä se tulee saamaan). Tämä johtuu siitä, että joukon M elementillä on valittavanaan koko joukko N, kun taas N joutuu karsimaan kosijoistaan.

3 Sovellukset

Vakaa avioliitto algoritmin sovellukset ovat laajat. Sitä voidaan käyttää kaksipuolisissa markkinoissa, kuten vuokra-asunnon hakemisessa, jossa vuokraajat ja hakijat ovat pelaavat joukot.

Toinen esimerkki on elinluvotus tapaukset, jossa suurin tekijä on elimen sopivuus vastaanottajalle. Tässä tapauksessa on siis kaksi joukkoa, luovuttajat ja vastaanottajat, ja haemme vastaanottaja-optimaalista paritusta.

4 Avioliitto pelien strategia

Algoritmille annettu alkion preferenssi ei välttämättä vastaa alkion oikeita mieltymyksiä. Algoritmin toispuolisuus johtaa tähän, yksittäinen alkio voi parannella omaa pariutumista antamalla vääriä preferenssejä, kun käytämme ”miehet kosii, naiset tarkastelee-algoritmiä. Esimerkkinä, neljän miehen ja

neljän naisen avioliitto peli, missä naisella w_1 on seuraavanlainen todellinen mieltymys: $(m_1 <_{w1} m_2 <_{w1} m_3 <_{w1} m_4)$, nyt hän voi joutua paritetuksi kenenkä tahansa kansa. Kuitenkin jos hän ilmoittaa seuraavanlaisen mieltymyksen:
$(m_3 <_{w1} m_4)$ Hän varmistaa parikseen ainakin m_3:n, selvä parannus aikaisempaan.

Mekanismi on yhden vakaan parituksen valinta. Eikä yhtäkään mekanismia ole olemassa, jossa totuus olisi paras strategia, aikasempi esimerkki riittää todistukseksi.

5 Lähteet

[BR97] Balinski, Michel ja Guillaume Ratier: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes.* SIAM Rev., 39(4):575–604, joulukuu 1997, ISSN 0036-1445. `http://dx.doi.org/10.1137/S0036144595294515`.

[GS62] Gale, D. ja L. S. Shapley: *College Admissions and the Stability of Marriage.* The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962, ISSN 00029890. `http://jmvidal.cse.sc.edu/library/gale62a.pdf`.