Vakaa avioliitto -ongelma

Anis Moubarik

Aine

HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 28. helmikuuta 2013

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Anis Moubarik

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Vakaa avioliitto -ongelma

Oppiaine — Läroämne — Subject

Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Aine	28. helmikuuta 2013	7

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

pariutus, gale-shapley, avioliitto-peli

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Kun puhumme avioliitosta tarkoitamme kahden alkion, *"nainen"* $n \in N$ ja *"mies"* $m \in M$ paria, siten että N ja M ovat samansuuruiset erilliset joukot, avioliitto merkitään (n, m). Alkioita kutsutaan myöhemmin myös henkilöiksi. Kun joukon alkiot asettavat toisen joukon alkiot mieltymys järjestykseen $1 \ldots k$, missä k on joukkojen alkioiden määrä, kutsutaan tätä avioliitto-peliksi, jonka tarkoituksena on löytää jokaiselle joukkojen alkioille pari.

2 Vakaat parit

Notaatio on seuraavanlainen pariutuksissa, olkoon meillä alkiot $\{x, y, z\} \subset N$ mieltymykset m:lle voidaan kuvata seuraavasti; $x >_m y >_m z$ mieltymykset ovat myös transitiivisia eli $x >_m z$ pätee.

Vakaa pariutus on ekvivalentti *esteparin* poissaololle. Esteparin määritelmä; olkoon meillä neljä alkiota avioliitto-pelistä $\{n_1, n_2\} \subset N, \{m_1, m_2\} \subset M$ ja pariutus $\{(n_1, m_1), (n_2, m_2)\} \subset \mu$. Jos $m_2 >_{n_1} m_1$ ja $n_1 >_{m_2} n_2$,niin (n_1, m_2) on estepari. Haluamme välttää epävakautta, jotta pariutukset olisivat mahdollisimman kestäviä. Ongelma on löytää pariutus δ joukoille N ja M, joka olisi vakaa. Pariutuksilla ja pareilla on erillaisia ominaisuuksia. Paras-miehelle pari on pari, jossa mies saa haluamansa naisen ja vastaavasti paras-naiselle pari on pari, jossa nainen saa haluamansa miehen. Pariutuksissa voi esiintyä jommankumman joukon ylivaltaa, jos $\forall j \in N$, j saavat haluamansa parin, tätä kutsutaan N-joukon ylivallaksi ja samoin $\forall i \in M$, i saavat haluamansa parin, tällöin se on M-joukon ylivalta. Joskus ylivaltoja kutsutaan myös *Nais-* tai *Miesylivallaksi.* Jos ylivaltaa ei synny pariutuksessa, voidaan pariutusta kutsua ylivaltavapaaksi. Päinvastoin jos mies tai nainen saa huonoimman tai vähiten haluamansa parin, kutsutaan sitä *huonoin-naiselle* tai *-miehelle* pariksi. Samoin pariutusta kutsutaan huonoinnaiselle tai -miehelle pariksi jos kaikki jommankumman joukon alkioista saavat vähiten haluamansa parit.

Esittelemme myöhemmin teoreeman, jonka mukaan jokaisesta avioliitto pelistä löytyy ainakin yksi vakaa pariutus. Ensin kuitenkin esittelemme algoritmin joka tarkastaa pariutuksen vakauden. Olkoon $x = |M|$, $m \in M$ ja $n \in N$. Olkoon μ meidän pariutus ja jos n ja m on pariutettu μ:ssa, niin merkitään sitä $n = p_\mu(m)$.

for $i = 1$ to x **do**
    for all n niin että m suosii n:ää ennemmin kuin $p_\mu(m)$ **do**
        if n suosii m:ää ennemmin kuin $p_\mu(n)$ **then**
            return pariutus on epävakaa
        end if
    end for
end for

return pariutus on vakaa [3, p. 8].

Etsimme siis tapauksia jossa mies suosii naista enemmän kuin omaa pariaan pariutuksessa p_μ. Jos löydämme tälläisen miehen, tarkastelemme jos nainen jota hän suosii, suosii myös miestä enemmän kuin pariaan, jos tämä pitää paikkansa, ei pariutus voi olla vakaa. Huonoimmassa tapauksessa käymme läpi kaikki miehet ja kaikki naiset paitsi yhden, eli $x * (x - 1)$, tästä saamme aikavaativuudeksi $O(x^2)$.

3 Gale-Shapley algoritmi

Avioliitto pelistä löytyy aina ainakin yksi vakaa pariutus. Gale-Shapley algoritmi on yksinkertainen algoritmi, joka tuottaa vakaan parituksen avioliitto pelille. Esittelemme algoritmin ja näytämme, että se päättyy aina.

- Miehet aloittavat kosimalla mieltymyksiltään parasta naista.
- Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaiten sijoitetun miehen.
- Nainen ei hyväksy miestä vaan odottaa, jos parempi mies kosisi häntä
- Hylätyt miehet kosivat mieltymyksiltään toisiksi parasta naista.
- Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon
- Niin kauan kuin joku naisista ei ole saanut kosintaa, tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja. Lopuksi jokaista naista on kosittu, koska mies ei voi kuin kerran kosia samaa naista.
- Viimeinen nainen on saanut kosinnan ja kosimisvaihe on päättynyt. Jokainen nainen hyväksyy langan päässä olevan kosijan [2, p. 13].

Mies ei voi jäädä ilman paria. Nainen voi hylätä vain jos hänellä on langan päässä mies (ensimäisellä kierroksella naisen on siis valittava paras vaihtoehto langan päähän, hän ei voi hylätä kaikkia kosijoita), ja kun hänellä on langan päässä mies hänestä ei tule missään vaiheessa vapaata algoritmin suorittamisessa. Jos viimeinen nainen jota kositaan hylkää miehen, tarkoittaisi tämä sitä, että jokaisella naisella olisi mies jo langan päässä. Mutta naisia ja miehiä on sama määrä ja yksikään mies ei voi olla kahden naisen langan päässä, niin jokainen miehistäkin pitäisi olla lankojen päässä, mikä on ristiriita. Jokainen iteraatio sisältää yhden kosinnan eikä yksikään mies kosi samaa naista kahta kertaa, joten iteraatioiden määrä on n^2, kun $n =$ miesten lukumäärä $=$ naisten lukumäärä. Algoritmi siis on päättyvä.

Nyt siis päättyminen on selvää, mutta onko pariutukset aina vakaita? Todistetaan se nyt. Oletetaan, että Matti ja Mari eivät ole pari, mutta Matti suosii Mariaa hänen oman parinsa yli. Matin on siis jossain vaiheessa peliä (algoritmiä) pitänyt kosia Maria ja Marin jossain vaiheessa hylätä Matti paremman miehen edestä. On siis selvää, että Mari suosii omaa aviomiestään Matin sijaan eikä epävakautta voi syntyä [2, p. 588]. Algoritmi tuottaa tälläisenään optimaalisia tuloksia, eli tällä algoritmilla tuotettu pariutus on kyseiselle miehille paras mahdollinen mitä he siinä kyseisessä avioliitto pelissä tulevat saamaan. Naisille optimaalisia tuloksia voidaan osat vaihtaa päittäin algoritmissä.

4 Vakaitten pariutuksien joukko

Gale-Shapley algoritmi tuottaa meille yhden vakaan pariutuksen, mutta niitä voi olla enemmän. Olkoon meillä pariutus μ ja $\mu^{'}$. Henkilö x suosii pariutusta μ pariutukseen $\mu^{'}$ nähden, jos x suosii enemmän pariaan μ pariutuksessa kuin $\mu^{'}$ pariutuksessa. Henkilölle voi olla myös välinpitämätön pariutuksista, jos molemmat antavat hänelle yhtä hyvän parin.

Olkoon nyt μ ja $\mu^{'}$ vakaat pariutukset. Olkoon m ja w pari pariutuksesssa μ, mutta ei $\mu^{'}$:ssa. Nyt toinen suosii pariutusta μ ja toinen pariutusta $\mu^{'}$ [3, p. 18]. Tästä seuraa nyt, se että jos μ ja $\mu^{'}$ ovat vakaita pariutuksia samalle avioliitto pelille, niin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta μ on sama kuin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta $\mu^{'}$. Esitellään hieman myös notaatiota ylivaloille, tässä yhteydessä keskitymme miesylivaltaan. Vakaa pariutus μ dominoi vakaata pariutusta $\mu^{'}$, merkitään $\mu \preceq \mu^{'}$, jos jokainen mies saa vähintään yhtä hyvän parin pariutuksessa μ kuin $\mu^{'}$. Jos meillä on yo. miesylivalta, se tarkoittaa että toiseen suuntaan meillä on oltava naisylivalta, joka merkitään seuraavasti $\mu \succeq \mu^{'}$. Käytämme symbolia $\mathcal{M}$ kuvaamaan kaikkia vakaita pariutuksia avioliitto pelissä. $(\mathcal{M}, \preceq)$ on osittain järjestetty joukko. Naisylivalta $(\mathcal{M}, \succeq)$ on kaksinkertainen osittain järjestetty joukko.

4.1 Vakaitten paritusten määrä

Haluamme nyt näyttää, että vakaita pariutuksia on eksponentiaalinen määrä. Joten jos käytämme brute-force algoritmia löytääksemme kaikki vakaat pariutukset, joudumme tyytymään eksponentiaaliseen aikavaativuuteen.

Lemma 1. *Olkoon meillä avioliittopelit kooltaan i ja k, ja vastaavasti niissä on x ja y määrä vakaita pariutuksia. On olemassa peli ik jolla on vähintään* $max(xy^i, yx^k)$ *määrä vakaita pariutuksia.*

Miehet ja naiset ovat merkitty seuraavasti $a_1, \ldots, a_i$, $b_1, \ldots, b_i$ ja $c_1, \ldots, c_k$, $d_1, \ldots, d_k$. ik kokoisessa pelissä missä

1. miehet on merkitty $(a_z, c_j), z = 1, \ldots, i, j = 1, \ldots, k$
2. naiset on merkitty $(b_z, d_j), z = 1, \ldots, i, j = 1, \ldots, k$

3. mies (a_z, c_j) suosii enemmän (b_n, d_m) kuin $(b_{n'}, d_{m'})$, jos c_j suosii enemmän d_n kuin $d_{n'}$, tai jos $m = m^{'}$ ja a_z suosii enemmän b_n kuin $b_{n'}$.

4. nainen (b_z, d_j) suosii enemmän (a_n, c_m) kuin $(a_{n'}, c_{m'})$, jos d_j suosii enemmän c_n kuin $c_{n'}$, tai jos $m = m^{'}$ ja b_z suosii enemmän a_n kuin $a_{n'}$.

Olkoon $M_1, \ldots, M_n$ mikä tahansa sekvenssi vakaita pariutuksia pelissä jonka koko on i, ja olkoon M mikä tahansa vakaa pariutus pelissä jonka koko on i. Vaihtoehtojen määrä pariutuksille $M_1, \ldots, M_n$ ja M on yx^k. Kuvaus

$$(a_z, c_j) \longrightarrow (p_{M_j}(a_z, p_M(c_j))$$

on yhdistetyssä pelissä. Koska M_j ja M ovat pariutuksia, niin myös kuvaus on myös pariutus. Jos meillä on estepari $((a, c), (b, d))$, niin seuraavista ehdoista, 1. tai 2. täytyy päteä joko 3. tai 4. ehdon kanssa.

1. c suosii enemmän d kuin $p_M(c)$
2. $d = p_M(c)$ ja a suosii enemmän b kuin $p_{M_j}(a)$
3. d suosii enemmän c kuin $p_M(d)$
4. $c = p_M(d)$ ja b suosii enemmän a kuin $p_{M_j}(b)$

Neljästä vaihtoehdoista, jos 1. ja 3. toteutuvat estävät M:n vakauden. 2. ja 4. ehdon toteutuessa ne estävät M_j:n vakauden.

Nyt Meidän alkuperäinen väite on oikeutettu ja olemme näyttäneet pelin missä on vähintään yx^k vakaata paritusta [3, p. 23]. □

Lemma 2. *Jokaiselle $n \geq 0$, n kahden potenssi, on olemassa vakaa avioliitto peli jonka koko on n ja sisältää vähintään 2^{n-1} vakaata pariutusta*

Todistus induktiolla. Kun pelin koko on 1, niin $n = 2^0$, eli meillä on yksi vakaa pariutus. Induktio-oletus $n = 2^k$, käytämme Lemmaa 1, missä $i = 2$. Löydämme kaksi vakaata pariutusta, joten $x = 2$ ja induktio-oletuksen mukaan $y = 2^{2^{k-1}}$. Joten Lemman 1. perusteella on olemassa peli jonka koko on $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, jolla on vähintään $max(2 \cdot (2^{2^k-1})^2, 2^{2^k-1} \cdot 2^{2^k}) = 2^{2^{k+1}-1})$ vakaata paritusta [3, p. 24]. □

Lähteet

[1] Balinski, Michel ja Ratier, Guillaume: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes.* SIAM Rev., 39(4):575–604, 1997.

[2] Gale, D. ja Shapley, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage.* The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962.

[3] Gusfield, D. ja Irving, R.W.: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* Foundations of Computing Series. MIT Press, 1989, ISBN 9780262071185.