

# **Vakaa avioliitto -ongelma**

Anis Moubarik

Tutkielma  
HELSINGIN YLIOPISTO  
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 5. toukokuuta 2013

Tiedekunta — Fakultet — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Tietojenkäsittelytieteen laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Anis Moubarik			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Vakaa avioliitto -ongelma			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Tietojenkäsittelytiede			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Tutkielma		5. toukokuuta 2013	20
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Vakaa avioliitto -ongelma on tilanne jossa meillä on kaksi erillistä samansuuruista joukkoa joilla on jonkilainen mieltymys vastakkaisen joukon alkioista, kutsumme tilannetta avioliittopeliksi. Tutkielmassa tulee esille vakauden määritelmä ja sen vaikutuksia pareihin ja pariutuksiin ja kuinka näitä vakaita pariutuksia löydetään avioliittopeleistä. Näiden ohella esitellään Gale-Shapley-algoritmi, joka tuottaa yhden vakaan pariutuksen jokaiselle avioliittopelille.</p> <p>Tutkielma käy läpi myös yleisimpiä muunnoksia alkuperäiseen ongelmaan, kuten erisuuriset joukot ja parien kieltäminen. Sovelluksista tulee esille elinluovutus tapaukset, joka on muokattu vakaa huonetoveri -ongelma (<i>stable roommate problem</i>), koulujen opiskelijavalinnat sekä opetussairaaloiden ja lääkettieteen opiskelijoiden pariutus.</p> <p>Lopuksi käydään läpi strategioita sekä koalitioita avioliittopeleissä, kuinka ne vaikuttavat tai parantavatko ne strategioivien alkioden pareja, kuinka koalitiot voivat manipuloida Gale-Shapley-algoritmiä ja onko petos kannattavaa koalitioissa.</p>			
<p>ACM Computing Classification System (CCS):</p> <p><b>Theory of computation</b> → <b>Algorithmic game theory</b>; <i>Mathematics of computing</i> → <i>Combinatoric problems</i>;</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
vakaat pariutukset, avioliittopeli, Gale-Shapley			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

## Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Vakaat pariutukset</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Gale–Shapley-algoritmi</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Vakaitten pariutusten joukko</b>	<b>7</b>
4.1	Vakaitten pariutusten määrä . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Laajennettu Gale–Shapley-algoritmi</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Erisuuruiset joukot</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Parien kieltäminen</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Parien yhdenmukaisuus</b>	<b>12</b>
<b>9</b>	<b>Vakaa huonetoveri -ongelma</b>	<b>13</b>
<b>10</b>	<b>Sovellukset</b>	<b>14</b>
10.1	Elinluovutus . . . . .	14
10.2	Koulujen valinnat . . . . .	15
10.3	Lääketieteen opiskelijat ja opetussairaalat . . . . .	15
<b>11</b>	<b>Strategiat avioliittopeleissä</b>	<b>17</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>19</b>

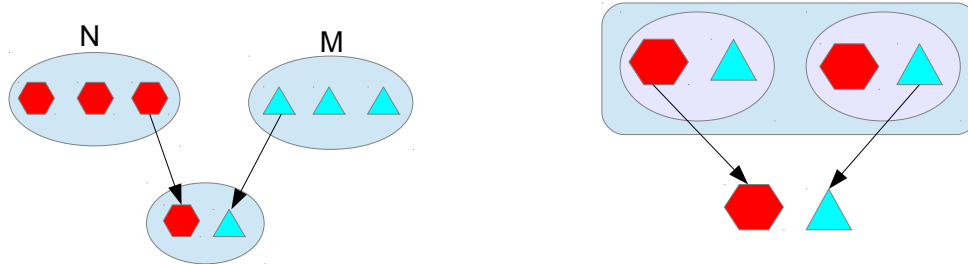
# 1 Johdanto

Vakaa avioliitto -ongelma (*stable marriage problem*) sivuaa kombinatoriikkaa ja peliteoriaa. Ongelma on seuraava: Olkoon olemassa  $n$  miestä ja  $n$  naista ja miehet ovat pistäneet naiset järjestykseen mieluisimmasta parista huonoimpaan ja jokainen nainen on pistänyt miehet vastaavaan järjestykseen, tätä tilannetta kutsutaan *avioliittopeliksi*. *Pari* on tässä kontekstissa siis mies-nais pari, tätä kutsutaan myös *avioliitoksi*. Tehtävänä on pariuttaa miehet ja naiset niin, että meillä ei ole kahta vastakkaisen sukupuolen henkilöä, jotka olisivat mielummin pari keskenään kuin pysyisivät avioliitossaan nykyisessä pariutuksessa. Avioliitot ovat vakaita, kun näitä *estepareja* ei esiinny. Pariutus on joukko pareja ja parit voidaan pariuttaa Gale-Shapley-algoritmillä, joka esitellään myöhemmin. Vakaassa pariutuksessa on siis tarkoitus pariuttaa kahden joukon alkiot niin että jokin kriteeri täyttyy, alkuperäisessä vakaa avioliitto -ongelmassa tuo kriteeri on parien vakaus suhteessa alkioiden mieltymyksiin.

Ongelmalla on monia käytännön sovelluksia. Se voidaan yleistää kaikkiin *kaksipuolisiin markkinoihin*, joissa eettisistä tai laillisista syistä ei käytetä vaihtovälineenä rahaa. Kaksipuolisilla markkinoilla tarkoitetaan tilannetta, jossa on olemassa alusta joka palvelee kahta erillistä ryhmää, jotka toimittavat toisilleen hyödykkeitä. Seuraavat markkinat ovat hyviä esimerkkejä: elinluovuttajat ja vastaanottajat, työntekijät ja työnantajat sekä opiskelijat ja korkeakoulut. Elinluovutusten tapauksessa haaste on se, että luovuttajapotilas kaksikot eivät ole yhteensopivia, voimme kuitenkin käyttää vakaa avioliitto -ongelman ratkaisuja elinluovutuksissa. Jos on olemassa kaksikot  $A$ ,  $B$  ja  $C$ , eli jokainen kaksikoista sisältää luovuttajan ja potilaan, mutta syystä tai toisesta elin ei sovi potilaalle, voidaan soveltaa ratkaisuja tähän tapaukseen ja saada vakaita pariutuksia potilaitten ja luovuttajien välille. Oletetaan, että  $A$ :n luovuttaja sopii  $B$ :lle,  $B$ :n  $C$ :lle ja  $C$ :n  $A$ :lle, nyt saamme ketjun ja vakaan pariutuksen, jossa jokainen potilas saa uuden elimen. Näitä *kaksipuolisia pariutusmarkkinoita* tutkimme paperissa.

Vastaan tulee myös pieniä variaatioita klassiseen avioliitto-ongelmaan, kuten erisuuruiset joukot ja alkioiden hyvin erilaiset mieltymykset, eli tapaukset joissa he eivät halua pariutua tietyn henkilön kanssa ollenkaan. Näissä tapauksissa vakauden määritelmää muokataan niin että pariutukset joissa alkio on ilman paria voi olla myös vakaa. Erisuuruisten joukkojen tapauksessa suuremman joukon alkioista jää pariuttamatta suuremman ja pienemmän joukon alkioiden lukumäärään erotuksen verran alkioita.

Gale ja Shapley esittivät vuonna 1962 ilmestyneessä artikkelissa [2] algoritmin alkuperäiselle ongelmalle, joka löytää yhden vakaan pariutuksen jokaiselle olemassa olevalle avioliittopelille. Jokaisella avioliittopelillä on siis vähintään yksi vakaa pariutus. Algoritmi toimii oletuksena "miehet kosii, naiset hylkää"periaatteella. Tämä antaa kosijalle, tässä tapauksessa siis miehille, aina parhaan mahdollisen parin mitä he voivat pelin kontekstissa saada.



(a) Yksi mahdollinen pari joukoista  $M$  ja  $N$  (b) Kuva epävakautta aiheuttavasta kaksikosta

$m_1$	$n_1$	$n_3$	$n_2$	$n_1$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$m_2$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_2$	$m_2$	$m_1$	$m_3$
$m_3$	$n_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$m_3$	$m_2$	$m_1$

Taulukko 1: Miesten ja naisten mieltymykset

Naisten kosiessa roolit tietysti vaihtuvat ja pariutukset ovat silloin naisille optimoituja. Peliteoria tulee esille, kun joukkojen alkiot vääristelevät mieltymyksiään. Tähän vääristelyyn Gale–Shapley-algoritmi ei osaa puuttua ja se nostaakin kysymyksiä kuinka siihen pitäisi reagoida ja miten ylipäätään alkiot vääristelystä hyötyvät, jos hyötyvät ollenkaan.

## 2 Vakaat pariutukset

Olkoon  $M$  miesten joukko ja  $N$  naisten joukko, missä  $|M| = |N| = n$ . Avioliitosta tai parista puhuttaessa tarkoitamme paria  $(m, n) \in M \times N$ . Avioliittopelissä jokaisella joukkojen alkiolla on mieltymykset toisen joukon alkioista parhaimmasta kumppanista huonoinpaan.

Olkoon  $M = m_1, m_2, m_3$  ja  $N = n_1, n_2, n_3$ . Mieltymykset voidaan kuvata esimerkiksi taulukossa. Järjestys taulukossa ?? on vasemmalta oikealle laskevassa järjestyksessä, eli esimerkiksi miehelle  $m_1$  miellyttävin pari olisi  $n_2$ . Henkilön mieltymyksiä kuvaavaa järjestystä kutsutaan mieltymyslistaksi (*preference list*), jossa toisen joukon alkiot ovat mieltymysjärjestyksessä.

Mieltymyksiä voidaan myös kuvata transitiivisella relaatiolla  $>$ . Esimerkiksi miehen  $m_1$  mieltymykset voidaan esittää seuraavasti:  $n_2 >_m n_1 >_m n_3$ , relaatio on myös transitiivinen eli  $n_2 >_m n_3$  pätee.

Pariutus  $\mu$  on joukko  $\mu \subseteq M \times N$ , joka tulkittuna funktioksi on  $\mu : M \mapsto N$ . Alkion  $m$  paria pariutuksessa  $\mu$  merkitään seuraavasti  $p_\mu(m)$ .

**Määritelmä 1.** Pariutus  $\mu$  on *vaka*, jos ei ole olemassa kaksikkoa  $m_1$  ja  $n_2$ , jolle

1.  $n_2 >_{m_1} p_\mu(m_1)$ , ja
2.  $m_1 >_{n_2} p_\mu(n_2)$

Kuvassa ?? meillä on pariutus, jossa on kaksi paria. Ensimmäisen parin nainen ja toisen parin mies pitävät toisistaan enemmän kuin omista pareistaan ja tämä aiheuttaa epävakautta.

**Ongelma 1** (Vakaa pariutus). Löytää vakaa pariutus joukoille  $N$  ja  $M$ .

Pariutuksilla ja pareilla on erillaisia ominaisuuksia. Paras-miehelle pari on pari, jossa mies saa haluamansa naisen ja vastaavasti paras-naiselle pari on pari, jossa nainen saa haluamansa miehen. Pariutuksissa voi esiintyä jommankumman joukon ylivaltaa, jos kaikilla  $j \in N$ ,  $j$  saavat haluamansa parin, tätä kutsutaan  $N$ -joukon ylivaltaksi ja samoin kaikilla  $i \in M$ ,  $i$  saavat haluamansa parin, tällöin se on  $M$ -joukon ylivalta. Joskus ylivaltoja kutsutaan myös *nais-* tai *miesylivallaksi*. Jos ylivaltaa ei synny pariutuksessa, voidaan pariutusta kutsua ylivaltavapaaksi. Päinvastoin jos mies tai nainen saa huonoimman tai vähiten haluamansa parin, kutsutaan sitä *huonoin-naiselle* tai *-miehelle* pariksi. Samoin paria kutsutaan huonoin-naiselle tai -miehelle pariksi jos kaikki jommankumman joukon alkioista saavat vähiten haluamansa parit.

Esittelemme myöhemmin teoreeman, jonka mukaan jokaisesta avioliittopelistä löytyy ainakin yksi vakaa pariutus. Ensin kuitenkin esittelemme algoritmin joka tarkastaa pariutuksen vakauden. Olkoon  $m \in M$  ja  $n \in N$  ja  $\mu$  pariutus.

- Algoritmi 2.**
1. Kaikilla  $n$  siten että  $m$  suosii naista  $n$  enemmän kuin omaa paria  $p_\mu(m)$
  2. Jos  $n$  suosii miestä  $m$  enemmän kuin omaa paria  $p_\mu(n)$ , ilmoitetaan että pariutus  $\mu$  ei ole vakaa.
  3. Muuten ilmoitetaan että pariutus on vakaa.

Etsimme siis tapauksia jossa mies suosii naista enemmän kuin omaa pariaan pariutuksessa  $p_\mu$ . Jos löydämme tällaisen miehen, tarkastelemme jos nainen jota hän suosii, suosii myös miestä enemmän kuin pariaan, jos tämä pitää paikkansa, ei pariutus voi olla vakaa. Huonoimmassa tapauksessa käymme läpi kaikki miehet ja kaikki naiset paitsi yhden, eli  $x \cdot (x - 1)$ , tästä saamme aikavaativuudeksi  $O(x^2)$ .

### 3 Gale–Shapley-algoritmi

Avioliittopelistä löytyy aina ainakin yksi vakaa pariutus. Gale–Shapley-algoritmi on yksinkertainen algoritmi, joka tuottaa vakaan parituksen avioliittopelille. Esittelemme algoritmin ja näytämme, että se päättyy aina.

**Algoritmi 3.** [2, p. 13] .

1. Miehet aloittavat kosimalla mieltymyksiltään parasta naista.
2. Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaiten sijoitetun miehen.
3. Nainen ei hyväksy miestä vaan jättää miehen *langan* päähän siltä varalta että parempi mies kosisi häntä
4. Hylätyt miehet kosivat mieltymyksiltään toiseksi parasta naista.
5. Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon
6. Niin kauan kuin joku naisista ei ole saanut kosintaa, tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja. Lopuksi jokaista naista on kosittu, koska mies ei voi kuin kerran kosia samaa naista.
7. Viimeinen nainen on saanut kosinnan ja kosimisvaihe on päättynyt. Jokainen nainen hyväksyy langan päässä olevan kosijan

**Lause 4.** *Algoritmi 3 pysähtyy kaikilla syötteillä*

*Todistus.* Mies ei voi jäädä ilman paria. Nainen voi hylätä vain jos hänellä on langan päässä mies (ensimmäisellä kierroksella naisen on siis valittava paras vaihtoehto langan päähän, hän ei voi hylätä kaikkia kosijoita), ja kun hänellä on langan päässä mies hänestä ei tule missään vaiheessa vapaata algoritmin suorittamisessa. Jos viimeinen nainen jota kositaan hylkää miehen, tarkoittaisi tämä sitä, että jokaisella naisella olisi mies jo langan päässä. Mutta naisia ja miehiä on sama määrä ja yksikään mies ei voi olla kahden naisen langan päässä, niin jokainen miehistäkin pitäisi olla lankojen päässä, mikä on ristiriita. Jokainen iteraatio sisältää yhden kosinnan eikä yksikään mies kosi samaa naista kahta kertaa, joten iteraatioiden määrä on  $n^2$ .  $\square$

Algoritmi on siis päättävä. Nyt siis päättyminen on selvää, mutta onko pariutukset aina vakaita? Todistetaan tämä.

**Lause 5.** *Ovatko Algoritmin 3 tuottamat pariutukset aina vakaita?*

*Todistus.* [2, p. 588] Olkoon meillä mies  $m$  ja nainen  $n$  ja oletetaan, että he eivät ole pari pariutuksessa  $\mu$ . Oletetaan myös, että  $n >_m p_\mu(m)$ . Miehen  $m$  on siis jossain vaiheessa algoritmiä kosia naista  $n$  ja naisen  $n$  on pitänyt jossain vaiheessa hylkää  $m$  paremman miehen tieltä. On siis selvää, että  $n$  suosii omaa pariaan pariutuksessa  $\mu$  miehen  $m$  sijaan, eikä epävakautta voi syntyä.  $\square$

Algoritmi tuottaa tälläisenään miehelle optimaalisia tuloksia, eli tällä algoritmilla tuotettu pariutus on kyseiselle miehille paras mahdollinen mitä he siinä kyseisessä avioliittopelissä tulevat saamaan. Naisille optimaalisia tuloksia voidaan saada, kun osat vaihdetaan päittäin algoritmissä.

**Esimerkki 6.** Katsotaan 3 kokoista avioliittopeliä ja mieltymyslistaa taulukosta ??.

Yksi mahdollinen suoritus olisi seuraava: mies  $m_1$  aloittaa kosimalla naista  $n_1$  (nainen hyväksyy); mies  $m_2$  kosii naista  $n_1$  (nainen hylkää, hänellä on parempi mies langan päässä); mies  $m_3$  kosii naista  $n_3$  (nainen hyväksyy); mies  $m_2$  kosii uudestaan, nyt listalla toista olevaa naista  $n_2$  (nainen hyväksyy). Jokaista naista on kosittu ja jokaisella on joku mies langan päässä, kosinta on päättynyt ja naiset hyväksyvät langan päässä olevan miehen lopullisesti. Lopullinen vakaa pariutus on seuraava  $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)\}$ .

## 4 Vakaitten pariutusten joukko

Gale-Shapley algoritmi tuottaa meille yhden vakaan pariutuksen, mutta niitä voi olla enemmän. Olkoon meillä pariutus  $\mu$  ja  $\delta$ . Henkilö  $x$  suosii pariutusta  $\mu$  pariutukseen  $\delta$  nähden, jos  $x$  suosii enemmän pariaan  $\mu$  pariutuksessa kuin  $\delta$  pariutuksessa. Henkilölle voi olla myös välinpitämätön pariutuksista, jos molemmat antavat hänelle yhtä hyvän parin.

**Lause 7.** [3, p. 18] *Olkoon  $\mu$  ja  $\delta$  vakaita pariutuksia, ja oletetaan että  $m$  ja  $n$  ovat pari pariutuksessa  $\mu$  muttei  $\delta$ :ssa. Nyt jompikumpi henkilöistä  $m$  ja  $n$  suosii pariutusta  $\mu$  enemmän kuin pariutusta  $\delta$  ja toinen pariutusta  $\delta$  enemmän kuin pariutusta  $\mu$ .*

*Todistus.* [3, s. 18] Olkoon  $\mathcal{X}$  ja  $\mathcal{Y}$  naisten ja miesten joukot jotka pitävät pariutusta  $\mu$  parempana, kuin pariutusta  $\delta$ . Vastaavasti joukot  $\mathcal{X}'$  ja  $\mathcal{Y}'$  pitävät pariutusta  $\delta$  parempana, kuin pariutusta  $\mu$ .

Pariutuksessa  $\mu$  ei voi olla paria  $(m, n)$  missä  $m \in \mathcal{X}$  ja  $n \in \mathcal{Y}$ , koska tämä pari estäisi pariutuksen  $\delta$ . Joten jokaisella miehellä joukossa  $\mathcal{X}$  on  $\mu$ -pari ( $\mu$ -partner) joukosta  $\mathcal{Y}'$ , näin ollen  $|\mathcal{X}| \leq |\mathcal{Y}'|$ .

Samoin pariutuksessa  $\delta$  ei voi olla paria  $(m, n)$  missä  $m \in \mathcal{X}'$  ja  $n \in \mathcal{Y}$ , koska tämä pari estäisi pariutuksen  $\mu$ . Joten jokaisella miehellä joukossa  $\mathcal{X}'$  on  $\delta$ -pari joukosta  $\mathcal{Y}$ , näin ollen  $|\mathcal{X}'| \leq |\mathcal{Y}|$ .

Huomataan, että  $|\mathcal{X}| + |\mathcal{X}'| = |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'|$ , koska vasen puoli on miesten lukumäärä ja oikea puoli naisten lukumäärä, joilla en eri parit kyseisissä pariutuksissa. Tästä seuraa  $|\mathcal{X}'| = |\mathcal{Y}|$  ja  $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}'|$ . Näin ollen jokaisella miehellä joukossa  $\mathcal{X}'$  on  $\mu$ -pari joukosta  $\mathcal{Y}$ , ja koska jokaisella miehellä joukossa  $\mathcal{X}$  on  $\mu$ -pari joukosta  $\mathcal{Y}'$  lemma 7 pitää paikkansa.  $\square$

Tästä seuraa nyt korollaari 8.

**Korollaari 8.** [3, s. 18] *Jos  $\mu$  ja  $\delta$  ovat vakaita pariutuksia samalle avioliittopelille, niin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta  $\mu$  on sama kuin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta  $\delta$ .*



Esitellään hieman myös notaatiota (mies-orientoitunut) ylivalloille,  $\mu$  dominoi vakaata pariutusta  $\delta$ , jos jokainen mies saa vähintään yhtä hyvän parin pariutuksessa  $\mu$  kuin  $\delta$ , merkitään sitä  $\mu \preceq \delta$ . Jos meillä on miesylivalta se tarkoittaa sitä, että naisten kosiessa on oltava naisylivalta, joka merkitään seuraavasti  $\mu \succeq \delta$ . Olkoon  $\mathcal{M}$  kaikkien pelin vakaiden pariutusten joukko avioliittopelissä.  $(\mathcal{M}, \preceq)$  on osittain järjestetty joukko. Nais-orientoitunut ylivalta voidaan myös määritellä ja seuraava korollaari seuraakin lauseesta 7.

**Korollaari 9.** [3, s. 19] *Miehen näkökulmasta pariutus  $\mu$  hallitsee pariutusta  $\delta$ , joss pariutus  $\delta$  hallitsee pariutusta  $\mu$  naisten näkökulmasta. Nais-orientoitunut ylivalta relaatio on käänteinen, merkinnällä  $\succeq$ , mies-orientoituneeseen nähden. Tämä on myös osittain järjestetty joukko ja se merkitään seuraavasti  $(\mathcal{M}, \succeq)$ .*

#### 4.1 Vakaitten pariutusten määrä

Haluamme nyt näyttää, että vakaita pariutuksia on eksponentiaalinen määrä. Joten jos käytämme brute-force-algoritmia löytääksemme kaikki vakaita pariutukset, joudumme tyytymään eksponentiaaliseen aikavaativuuteen.

**Lemma 10.** [3, s. 23] *Olkoon meillä vakait avioliittopelit kooltaan  $m$  ja  $n$  ja vastaavasti olkoon  $x$  ja  $y$  vakaiden pariutuksien määrä avioliittopelissä. On olemassa peli jonka koko on  $m \cdot n$ , jolla on vähintään  $\max(xy^m, yx^n)$  vakaita pariutusta.*

*Todistus.* [3, s. 23] Merkitään miehiä ja naisia lemmän 10 avioliittopelissä seuraavasti,  $a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_m$  ja  $b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_n$ . Tarkistellaan  $mn$  kokoista peliä, missä

1. miehet on merkitty seuraavasti  $(a_i, b_j), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ,
2. naiset on merkitty seuraavasti  $(c_i, d_j), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ,
3. mies  $(a_i, b_j)$  suosii naista  $(c_k, d_l)$  enemmän kuin naista  $(c'_k, d'_l)$ , jos  $b_j$  suosii enemmän naista  $d_l$  kuin naista  $d_{l'}$ , tai  $l = l'$  ja  $a_i$  suosii naista  $c_k$  enemmän kuin naista  $c_{k'}$ ,
4. nainen  $(c_i, d_j)$  suosii miestä  $(a_k, b_l)$  enemmän kuin miestä  $(a_{k'}, b_{l'})$ , jos  $d_j$  suosii miestä  $b_l$  enemmän kuin miestä  $b_{l'}$ , tai jos  $l = l'$  ja  $c_i$  suosii miestä  $a_k$  enemmän kuin miestä  $a_{k'}$ .

Olkoon  $\mu_1, \dots, \mu_n$  mikä tahansa sarja vakaita pariutuksia avioliittopelissä, jonka koko on  $m$ , ja olkoon  $\mu$  mikä tahansa vakaa pariutus avioliittopelissä, jonka koko on  $n$ . Mahdollisten pariutusten määrä pariutuksille  $\mu_1, \dots, \mu_n$  ja  $\mu$  on  $yx^n$ . Väitämme, että kuvaus

$$(a_i, b_j) \longrightarrow (p_{\mu_j}(a_i), p_\mu(b_j))$$

on vakaa pariutus yhdistetyssä avioliittopelissä.

Tämä kuvaus on pariutus, koska molemmat,  $\mu_j$  ja  $\mu$  ovat pariutuksia. Oletetaan, että tässä pariutuksessa on seuraava estepari  $((a, b), (c, d))$ . Nyt seuraavista ehdoista täytyy olla voimassa joko 1. ja 2. tai 3. ja 4.

1.  $b$  suosii enemmän henkilö  $d$  kuin  $p_\mu(b)$ ,
2.  $d = p_\mu(b)$  ja  $a$  suosii enemmän henkilöä  $c$  kuin  $p_{\mu_j}(a)$ ,
3.  $d$  suosii enemmän henkilöä  $b$  kuin  $p_\mu(d)$ ,
4.  $b = p_\mu(d)$  ja  $c$  suosii enemmän henkilöä  $a$  kuin  $p_{\mu_j}(c)$ .

Neljästä mahdollisesta kombinaatiosta, kombinaatio ehdoilla 1 ja 3 on esteenä pariutuksen  $\mu$  vakaudelle, kombinaatio ehdoilla 2 ja 4 on esteenä pariutuksen  $\mu_j$  vakaudelle ja muut kombinaatiot ovat yhteensopimattomia.

Näin ollen väittämämme on oikeutettu, ja olemme näyttäneet avioliittopelin missä on vähintään  $yx^n$  vakaata pariutusta. Samalla tavoin, vaihtamalla rooleja alkuperäisissä avioliittopoleissa, vahvistetaan vastaava tulos määrälle  $xy^m$ .  $\square$

**Lemma 11.** [3, p. 24] *Jokaiselle  $n \geq 0$ , missä  $n$  on kahden potenssi, on olemassa vakaa avioliittopeli jonka koko on  $n$  ja sisältää vähintään  $2^{n-1}$  vakaata pariutusta*

*Todistus.* Todistus induktiolla. Kun pelin koko on 1, eli alkioden lukumäärä on 1, niin  $n = 2^0$  triviaali tapaus, eli vakaita pariutuksia on yksi. Oletetaan tulos todeksi tapauksessa  $n = 2^k$ , käytämme Lemmaa 10, missä  $i = 2$ , avioliittopeli jonka koko on siis 2. Molemmat mahdolliset pariutukset ovat vakaita, joten  $x = 2$  ja induktio-oletuksen mukaan  $y = 2^{2^{k-1}}$ . Joten Lemman 10 perusteella on olemassa peli jonka koko on  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ , jolla on vähintään  $\max(2 \cdot (2^{2^{k-1}})^2, 2^{2^{k-1}} \cdot 2^{2^k}) = 2^{2^{k+1}-1}$  vakaata paritusta.  $\square$

## 5 Laajennettu Gale–Shapley-algoritmi

Tämän algoritmin tarkoituksena on yksinkertaistaa vakaa avioliitto-ongelman eri ongelmakohtien kertomista, algoritmi on suunniteltu tekemään enemmän, kuin vain löytää yksi vaka pariutus. Laajennettua algoritmia tullaan tarvitsemaan vakaa avioliitto-ongelman sovelluksissa, erityisesti tapauksissa, joissa parille on kahdesta alkioista yhdenkään kumman kanssa pariutuu, tämä tulee esille myöhemmässä kappaleessa. Algoritmi sieventää alkioden mieltymyslistoja poistamalla pareja, jotka eivät kuulu mihinkään vakaaseen pariutukseen. Poistamalla pari  $(m, n)$  tarkoitetaan sillä sitä että  $n$  poistetaan miehen  $m$  mieltymyslistalta ja  $m$  naisen  $n$  listalta.

**Algoritmi 12.** [3, s. 16]

1. Alustetaan jokainen henkilö vapaaksi.

2. Niin kauan kuin joku mies  $m$  on vapaa,
3. valitaan ensimmäinen nainen miehen listalta.
4. Jos naisella  $n$  on jo langan päässä mies  $p$ , vapautetaan  $p$  ja asetetaan  $m$  naisen  $n$  langan päähän.
5. Poistetaan jokainen pari  $(m', n)$ , missä  $m'$  on  $m$ :n seuraaja  $n$  mieltymyslistalla.

Tässä algoritmissa, kun mies kosii naista kosinta hyväksytään aina. Koska jos naisella  $n$  on jo langan päässä joku miellyttävämpi mies, kuin  $m$  olisi pari  $(m, n)$  poistettu. Algoritmi pysähtyy, kun jokaisella naisella on jokin mies langan päässä. Huomaamme myös, että algoritmin lopettaessa jokainen mies on listalla ensimmäisenä olevan naisen langan päässä ja jokaisella naisella taas langan päässä viimeisenä listalla oleva mies.

Kutsumme algoritmin tuottamaa mieltymyslistaa, jossa miehet kosivat, *mies-orientoituneeksi Gale-Shapley listaksi* tai *MGS-listaksi*. Vastaavasti, jos miesten ja naisten roolit algoritmista vaihdetaan kutsutaan tuotettua listaa *NGS-listaksi*. Lopuksi jos otamme henkilön MGS- ja NGS-listasta leikkauksen saamme GS-listan.

**Lause 13.** [3, s. 17] Annettulle avioliittopelille pätee, että

- kaikki vakaat pariutukset ovat GS-listassa,
- yksikään pari, joka ei ole GS-listalla ei voi estää pariutusta GS-listalta,
- mies-optimaalisissa (vastaavasti nais-optimaalisissa) pariutuksissa jokainen mies on pariutettu ensimmäisen (vastaavasti viimeisen) naisen kanssa hänen GS-listalta ja jokainen nainen viimeisen (vastaavasti ensimmäisen) miehen kanssa naisen listalta.

**Esimerkki 14.** Taulukossa ?? jokaisen henkilön GS-lista sisältää vain hänen vakaan parinsa, sillä molemmat mies- ja nais-optimaaliset pariutukset ovat samat tässä tapauksessa.

## 6 Erisuuriset joukot

Aikaisemmat tulokset pätevät myös, kun meillä on kaksi joukkoa joiden alkuioiden määrä on erisuuri. Oletamme, että henkilö haluaa olla ennemmin naimisissa kuin naimaton. Olkoon  $M$  miesten joukko ja  $N$  naisten joukko, ja  $|M| = n_x < n_y = |N|$ . Pariutus  $\mu$  on epävakaa, jos on olemassa mies  $m \in X$  ja nainen  $n \in Y$  siten että

1.  $m$  ja  $w$  eivät ole pari pariutuksessa  $\mu$ ,

2.  $m$  on joko ilman paria  $\mu$ :ssä tai suosii naista  $w$  enemmän kuin pariaan pariutuksessa  $\mu$ , ja
3.  $w$  on joko ilman paria  $\mu$ :ssä tai suosii miestä  $m$  enemmän kuin pariaan pariutuksessa  $\mu$ .

Jokainen vakaa pariutus koostuu  $n_x$ :stä järjestettyjä pareja, missä  $n_x - n_y$  on naimattomien naisten määrä.

Käyttämällä mies-orientoitunutta laajennettua Gale–Shapley-algoritmiä, päättyy se niin että jokainen mies on langan päässä ja tuloksena oleva pariutus on vakaa. Pariutus on mies-optimaalinen ja  $n_x - n_y$  naista jää parittomaksi.

Jos käytämme nais-orientoitunutta versiota algoritmista se päättyy taas siihen, että jokaisella miehellä on langan päässä jokin nainen, ja pariutus on vakaa. Huomataan kuitenkin, että jokaisen pariuttamattoman naisen WGS-lista on tyhjä ja seurauksena lauseesta 13(1) nämä naiset eivät voi olla pariutettuna missään vakaassa pariutuksessa [3, s. 26].

**Lause 15.** [3, p. 26]. *Avioliittopelissä jossa meillä on erisuuruiset joukot, on olemassa vähintään yksi vakaa pariutus, jossa pienemmän joukon kaikki alkiot saavat parin.*

Jos avioliittopeli, jossa on erisuuruiset joukot tuottaa saman GS-listan kuin avioliittopeli, jossa on samansuuruiset joukot, niin molempien vakaat pariutukset ovat samoja.

Alkuperäistä algoritmiä 3 voidaan myös muokata yksinkertaisilla muutoksilla. Jos meillä on  $x$  määrä miehiä ja  $y$  määrä naisia, ja  $x > y$ , muokataan algoritmin 6. kohtaa, kun  $x$  määrä naisia on kosittu päätetään algoritmin suoritus siihen. Jos taas  $x < y$ , niin algoritmi toimii normaalisti.

## 7 Parien kieltäminen

Jos henkilön on mahdollista ilmoittaa, että yksi tai useampi ei kelpaa hänelle vastakkaisen sukupuolen joukosta, on hänen mieltymyslistansa aito osajoukko vastakkaisen sukupuolen joukosta. Näinollen mies ja nainen voidaan pariuttaa ainoastaan jos he ovat hyväksyttäviä toisilleen.

Tässä tapauksessa vakaa pariutus voi olla osittainen tarkoittaen että kaikkien henkilöiden ei tarvitse olla pariutettu, jotta pariutus olisi vakaa. Osittainen pariutus  $\mu$  on epävakaa, jos on olemassa mies  $m$  ja nainen  $n$  siten että

1.  $m$  ja  $n$  eivät ole pari pariutuksessa  $\mu$ , mutta molemmat hyväksyisivät toisensa,
2.  $m$  on joko pariuttamaton tai suosii naista  $n$  enemmän kuin hänen pariaan pariutuksessa  $\mu$ ,

3.  $n$  on joko pariuttamaton tai suosii miestä  $m$  enemmän kuin hänen pariaan pariutuksessa  $\mu$ .

Mieltymykset voidaan myös laajentaa koskemaan pariutuksia, eli henkilö suosii pariutusta jossa hänellä on pari verratuna pariutukseen jossa hän jää ilman paria. Käytämme samaa notaatiota, kuin parien mieltymyksissä, eli jos mies  $m$  pitää pariutusta  $\mu$  parempana kuin  $\mu'$ , niin merkitsemme sitä  $\mu >_m \mu'$ .

**Lause 16.** *Avoliittopelissä, joka sallii parien kieltämisen on miehet ja naiset jaettu kahteen joukkoon – niihin joilla on pari kaikissa pariutuksissa ja niihin joilla ei ole yhtään paria missään pariutuksessa.*

*Todistus.* [3, p. 27] Olkoon kaksi eri vakaata pariutusta  $\mu$  ja  $\delta$ , määrittelemme suunnatun verkon  $G = G(\mu, \delta)$ , jossa solmu esittää yhtä henkilöä. Jokaiselle miehelle  $m$  jolla on pari pariutuksessa  $\mu$  on olemassa suunnattu kaari  $m$ :stä pariin  $p_\mu(m)$ . Ja jokaiselle naiselle  $n$  jolla on pari pariutuksessa  $\delta$  on olemassa suunnattu kaari  $n$ :stä pariin  $p_\delta(n)$ . Jokaisella solmulla on verkossa  $G$  enintään yksi tuleva ja lähtevä kaari.

Oletetaan nyt ristiriitaisesti, että  $m$  on pariutettu naisen  $n$  kanssa pariutuksessa  $\mu$  muttei pariutuksessa  $\delta$ . On olemassa uniikki suunnattu polku verkossa  $G$  joka alkaa solmusta  $m$  ja koska jokaisella solmulla on enintään yksi sisääntuleva kaari, ja  $m$ :llä on 0 sisääntulevaa kaarta, polku ei voi olla syklinen. Joten polun on päätyttävä mieheen joka on pariutettu  $\delta$ :ssa muttei  $\mu$ :ssa, eli  $m$  suosii pariutusta  $\delta$  ennemmin kuin pariutusta  $\mu$ , tai naiseen  $n$  joka on pariutettu  $\mu$ :ssa muttei  $\delta$ :ssa  $n$  suosii siis pariutusta  $\mu$  ennemmin kuin pariutusta  $\delta$ .

Mutta koska  $m$  suosii pariutusta  $\mu$  pariutuksen  $\delta$  sijaan, seuraa lauseen 7 mukaan, että  $n$  suosii pariutusta  $\delta$  pariutuksen  $\mu$  sijaan, ja lausetta 7 soveltamalla polkuun huomaamme, että jokainen mies suosii pariutusta  $\mu$  ja jokainen nainen pariutusta  $\delta$ . Joten kahdesta mahdollisesta reitistä, jossa polku voisi päättyä johtaa molemmat ristiriitaan.  $\square$

## 8 Parien yhdenentekeväisyys

Parien yhdenentekeväisyydellä tarkoitetaan tilanteita, joissa alkioiden mieltymyslistat eivät ole ehdottomasti sijoitettuja, eli alkio voi pitää yhdestä alkioista yhtä paljon kuin toisesta. Toisin sanoen alkioille on yhdenentekevää kumman parin kanssa hänet pariutetaan. Täsmennetään vakauden määritelmää. Ensimmäinen käsitys vakaudesta on, jos meillä on nainen ja mies, jotka eivät ole pari, mutta pitävät toisistaan enemmän tai yhtäpaljon kuin omista pareistaan kyseisessä pariutuksessa, on pariutus epävakaa. Jos pariutus on edellisen kriteerin perusteella vakaa, kutsutaan sitä *super-vakaaksi* (*super-stable*) [3]. Tilanteessa jossa on olemassa täysi välinpitämättömyys emme voi löytää yhtään super-vakaata pariutusta [3, s. 29].

Toinen, vapaamuotoisempi, käsitys vakauudesta on seuraava: Jos on olemassa mies ja nainen, jotka eivät ole pari, joista toinen pitää toisesta enemmän kuin omasta paristaan pariutuksessa ja toinen on vähintään välinpitämätön paristaan, on pariutus epävakaa. Jos pariutus on edellisen kriteerin perusteella vakaa, kutsutaan sitä *vahvastivakaaksi* (*strongly-stable*) [3, s. 29].

Laajennettua Gale–Shapley-algoritmia voidaan käyttää löytämään super- ja vahvasti-vakaita pariutuksia jokaiselle avioliittopelille, joka sallii välinpitämättömyyttä.

Algoritmi toimii niin, että miehet kosivat naisia listaltaan ja kun törmäivät tilanteeseen jossa hänellä on kaksi tai enemmän naista listallaan, joista hän on neutraali ja he ovat tasoissa, kosii hän kaikkia naisia samanaikaisesti. Jos nainen saa kosinnan poistetaan kaikki huonommat parit naisen listalta ja nainen miesten listoilta. Nainen voi kuitenkin pitää montaa miestä langan päässä, jos he ovat naisen listalla tasoissa. Kosinta vaihe voi jättää miesten listat tyhjiksi, joka tarkoittaa sitä että super- tai vahvaa-pariutusta ei löytynyt. Muussa tapauksessa jokainen mies on yhden tai useamman naisen langan päässä.

## 9 Vakaa huonetoveri -ongelma

Vakaa huonetoveri -ongelma (*Stable Roommate Problem*) on yleistetty vakaa avioliitto -ongelma, missä on vain yksi joukko, josta jokainen henkilö pistää toisensa mieltymys järjestykseen. Mieltymysten perusteella tehdään pariutukset, kuten vakaa avioliitto -ongelmassa. Vakaa huonetoveri -ongelmaa käytetään elinluovutuksissa, joista puhutaan myöhemmin omassa kappaleessa.

Pariutus on tässäkin tapauksessa epävakaa, jos on olemassa kaksi henkilöä jotka olisivat mielummin keskenään yhdessä kuin omien pariensa kanssa. Käytämme parien notaatiossa aaltosulkuja tavallisten sulkujen sijaan, seuraavasti jos  $x$  ja  $y$  ovat parit niin sitä merkitään näin  $\{x, y\}$ . Koska parit eivät ole järjestyksessä merkitään pareja tässä tapauksessa aaltosuluilla, eikä tavallisilla suluilla niinkuin alkuperäisessä vakaa avioliitto -ongelmassa [3, s. 163]. Suurin ero tavalliseen vakaa avioliitto -ongelmaan on se, että vakaa huonetoveri -ongelmassa voi olla tilanteita joissa ei ole ainuttakaan vakaata pariutusta.

1	3	2	4
2	1	3	4
3	2	1	4
4	mielivaltainen		

Taulukko 2: Huonetoveri ongelman mieltymykset [3, s. 164]

Taulukko ?? edustaa peliä jossa ei ole yhtään vakaata pariutusta. Kolmessa mahdollisessa pariutuksessa meillä on vastaavasti parit  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{3, 4\}$  ja nämä ovat vastaavasti estetty seuraavilla pareilla:  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{3, 1\}$ .

Käydään algoritmin toiminta yleisellä tasolla läpi. Merkintöjä poistetaan etenevästi mieltymyslistoilta kunnes jompikumpi päättävistä ehdoista toteutuu. [3, p, 165]

**Algoritmi 17.** 1. Jokin mieltymyslistoista tyhjenee tarkoittaen, että yhtäkään vakaata pariutusta ei ole kyseiselle pelille, tai

2. jokainen lista on sievennetty yhteen merkintään, missä tapauksessa nämä merkinnät koostavat vakaan pariutuksen.

## 10 Sovellukset

### 10.1 Elinluovutus

Alkuperäisessä sovelluksessa molemmat osapuolet ovat aktiivisia parin haun osalta. Elinluovutusten yhteydessä päätösten tekeminen on yksipuolista sillä ainoa asia joka vaikuttaa parien vakauteen on elimen yhteensopivuus vastaanottajalle. Voi olla tilanne jossa  $A$  haluaa luovuttaa elimen  $A'$ :lle ja  $B$  luovuttaa  $B'$ :lle, mutta esim. eri verityyppien takia eivät voi luovuttaa toisilleen, voivat  $A$  luovuttaa  $B'$ :lle ja  $B$  luovuttaa  $A'$ :lle, jos ne ovat sopivia keskenään. Tästä syntyy eräänlaisia ketjuja tai *syklejä* joilla saamme jokaiselle osallistuvalla elimen ja näinollen lyhennettyä elinjonotusta muille potilaille. Esimerkiksi munuaistenluovutuksissa on olemassa kaksi lähdettä munuaisille siirtoa varten:

1. Ruumis elinluovutukset, ja
2. Elävät munuaisluovutukset sukulaisilta, puolisolta tai muilta luovuttajilta. [5, s. 6]

Algoritmiä 17 ja vakaa huonetoveri -ongelmaa joudutaan kuitenkin hie-  
man muokkaamaan tätä sovellusta varten. Alkio tai "henkilö"tässä tapauk-  
sa on vastaanottaja-luovuttaja kaksikko, jotka eivät voi luovuttaa toisilleen,  
eli  $x, y$  on neljän henkilön pari. Toinen muutos on tapaus jossa mikään elin ei  
sovi vastaanottajalle, jos näin käy pidetään häntä odotuslistalla kunnes sopiva  
löytyy. Jos on olemassa luovuttaja-vastaanottaja kaksikot  $A, A', B, B', C, C'$ ,  
jotka haluavat luovuttaa toisillensa elimen, mutta eivät syystä tai toises-  
ta voi, voimme tehdä vaihtosyklin parien välille. Suora vaihtosykli ei aina  
kelpaa, koska esimerkiksi  $A$ :n elin voi sopia  $B'$ :lle, mutta  $B$ :n elin ei sovi  
kummallekkaan  $A'$  tai  $C'$ :lle, jos näin tapahtuu asetetaan  $A'$  ja  $C'$  korkealla  
prioriteetillä jonotuslistaan.

Kriteereihin joiden mukaan munuaisia luovutetaan ovat mm. seuraavat, verityyppi, HLA-molekyylien sopivuus (*HLA antigen-match*), odotusaika ja munuaisen luovutuspaikka. Munuainen tarjotaan potilaalle jolla on korkein prioriteetti. Mediaani odotusaika ruumiselinluovutukselle on kolme vuotta ja se on kasvamassa [5, s. 7]. Tästä syystä läheisten luovutukset ovat olleet nousussa ja jonojen helpottamiseksi käytetään yllä esiteltyä algoritmiä syklien muodostamiseksi. Kun syklien potilaat ovat saaneet munuaisensa poistuvat he luonnollisesti jonosta ja helpottavat potilaiden tilannetta joilla ei ole läheistä luovuttajaa ja ovat ruumis luovuttajien varassa.

## 10.2 Koulujen valinnat

Alkuperäisessä Gale–Shapleyn paperissa [2] viitattiin koulujen ja opiskelijoiden keskinäiseen pariutukseen ja niiden vakauteen.  $n$  hakijaa on jaettava  $m$  kouluun, missä  $q_i$  on  $i$ :nnen koulun kiintiö. Opiskelija pistää koulut järjestykseen aloittaen suosikistaan. Koulut tekevät samoin ja järjestävät hakevat opiskelijat. Gale–Shapley-algoritmi ratkaisee tämän, mutta se tuottaa aina jommallekummalle optimoituja tuloksia, eli tilanteessa, jossa meillä on kaksi opiskelijaa ja kaksi koulua ja preferenssit menevät juuri päinvastoin, päädyimme tilanteeseen jossa voi olla kaksi vakaata pariutusta, mutta toinen on optimoitu opiskelijalle ja toinen kouluille.

## 10.3 Lääketieteen opiskelijat ja opetussairaalat

Jo ennen Gale–Shapley-algoritmiä ja ongelman formalisointia amerikkalainen AAMC (Association of American Medical Colleges) ja AHA (American Hospital Association) ratkaisivat vakaa avioliitto -ongelman käyttämällä NIMP (National Intern Matching Program) -pariutusalgoritmiä. Tätä käytetään vielä nykyäänkin opiskelijoiden ja sairaaloiden pariutuksessa [4]. Tehtävänä on pariuttaa opiskelija opetussairaalaan hänen ja sairaalan preferenssien mukaan ja sellaisenaan se tuottaa sairaalalle optimoituja pariutuksia.

Tilannetta ennen NIMP-algoritmiä voidaan mallintaa usean-agentin vanhin dilemmalla [4], jossa sairaalat kilpailivat oppilaista ja yrittivät saada heitä harjoittelijoiksi yhä aikaisemmin. Pahimmassa tapauksessa oppilaat olivat jaettu opetussairaaloille jopa kaksi vuotta ennen harjoittelun alkua. Tästä seurasi sitä, että sairaalat eivät tienneet oppilaiden kiinnostuksia ja opiskelumenestystä, joten sairaala-oppilas pariutuksissa nähtiin hyvin paljon epävakautta, missä oppilas ei halunnut harjoitella kyseisessä sairaalassa tai sairaala ei katsonut oppilaan olevan tarpeeksi hyvä sairaalalle. Tämä valintamenettely aiheutti myös ruuhkaa, sillä jos opiskelija sai paikan esimerkiksi kolmanneksi sijoitetultaan sairaalalta ja sai tiedon toiseksi sijoitetulta, että hänet on jätetty jonotuslistalle, oli hän yleensä halukas odottamaan tuota paikkaa. Oppilaat jotka hyväksyivät saamansa paikan pettyivät, jos sairaala jonka odotuslistalla he olivat tarjosivat hänelle myöhemmin paikkaa, ja sai-



raalat olivat tyytymättömiä, jos oppilas kieltäytyi paikasta viime hetkellä paremman paikan tarjouksen tullessa.

Vuoteen 1950 mennessä huomattiin, että pariutuksen viimeisessä vaiheessa oli vakavia ongelmia, juurikin pariutusten epävakauden takia. Sairaalat ja oppilaat olivat tyytymättömiä omiin pareihinsa ja valinnoissa kohdistui suuri paine oppilaalle. Ratkaisuksi ehdotettiin pariutus algoritmia, joka otti huomioon sairaalan ja oppilaan mieltymykset, ja jo vuonna 1950 tehtiin kokeilu, jossa varsinaista pariutusta ei tehty [4], mutta jossa oppilaat ja sairaalat antoivat mieltymyksensä, kuin olisivat päättäneet lopullisia pareja. Vuodesta 1952 lähtien algoritmia käytetään vapaaehtoisessa muodossa, sairaalat ja oppilaat ovat vapaita osallistumaan tähän pariutukseen tai löytämään harjoittelupaikkoja/harjoittelijaa omillaan. Vaikka kyseinen markkina on kokenut muutoksia tuottaa *NIMP-algoritmi* hyviä tuloksia. Jokainen sairaala luo listan hakijoista mieltymystensä mukaan, samoin oppilaat luovat listan haetuista sairaaloista omien mieltymyksien mukaan. Nämä listat prosessoidaan lista-algoritmillä jonka jälkeen ne jatkavat alustava pari ja päivitys -vaiheeseen.

1 : 1 vaihe on vaihe jossa pariutetaan opiskelija ja sairaala, jos ne ovat toistensa listojen kärjessä. 2 : 1 vaihe tarkoittaa vaihetta jossa opiskelija pariutetaan listallaan toisena olevaan sairaalaan, jos opiskelija on ensimmäisenä sairaalan listalla.  $k : 1$  vaihe on vaihe jossa opiskelija pariutetaan listallaan  $k$ :nnen sairaalan kanssa, jos opiskelija on ensimmäisenä sairaalan listalla.

**Algoritmi 18.** (NIMP-algoritmi) [4]

1. Onko yhtään uusia 1 : 1 pareja? Jos on niin tehdään näistä alustavia pareja ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
2. Onko uusia 2 : 1 pareja? Jos on niin poistetaan opiskelijan listalta kaikki huonommin listatut sairaalat ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
3. Onko uusia  $k : 1$  pareja? Jos on niin poistetaan alustavasti pariutetut opiskelijat sairaaloiden listalta, jotka sairaalat listasivat alemmaksi kuin heidän nykyisen alustavan parin ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
4. Onko uusia  $n : 1$  pareja, missä  $n$  on maksimi määrä sairaaloita opiskelijan listalla. Jos on niin aloitetaan algoritmi alusta ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
5. Jos uusia pareja ei löydy enää mistään vaiheesta on algoritmi päättynyt ja opiskelijat ovat pariutettu vakaasti sairaaloiden kanssa.

Verrattuna Gale–Shapley-algoritmiin toimintaperiaate on hyvin erilainen ja monimutkainen ymmärtää, mutta molemmat tuottavat vakaita pariutuksia. Algoritmin 18 pariutuksien vakauden todistus löytyy lähteestä ja se sivuutetaan tässä.

## 11 Strategiat avioliittopelissä

Avioliittopeliin osallistuvan henkilön todelliset mieltymykset voivat hyvinkin erota hänen ilmoittamistaan mieltymyksistä. Mieltymykset mitkä henkilö julkisesti ilmoittaa kutsutaan strategiaksi [1, s. 592], joka muiden henkilöiden strategioiden kanssa koostavat vakaan pariutuksen kyseisessä avioliittopelissä.

Esimerkiksi olkoon meillä nainen  $n_1$ , jonka aidot mieltymykset ovat seuraavat  $m_1 > m_2 > m_3 > m_4$ , pelistä ja miesten mieltymyksistä riippuen naisen on mahdollista päätyä kaikkien miesten kanssa avioliittoon. Jos nainen ilmoittaa mieltymyksikseen  $m_1 > m_2$ , ja ei edes harkitse avioliittoa miesten  $m_3$  ja  $m_4$  kanssa paranee naisen tilanne selvästi, ja avioliittopelissä hänen on mahdollista päätyä avioliittoon vain miehen  $m_1$  tai  $m_2$  kanssa.

Seuraavaksi näytetään, että rehellisyys on pätevä strategia, mutta mieltymysten muuntamisella voidaan saada henkilölle parempia pareja. Täytyy huomauttaa, että strategia on hyväksyttävä vain avioliittopelissä joissa hyväksytään parien kieltäminen.

$\Gamma$  edustaa todellista mieltymyslistaa, joukko  $M'$  miehiä, jotka väärentelevät mieltymyksiään ja  $\Gamma'$  mieltymyslistaa, joka ottaa nämä väärennetyt mieltymykset huomioon  $M_0$  on mies-optimaalinen pariutus suhteessa todellisiin mieltymyksiin  $\Gamma$ .

**Lemma 19.** [3, s. 55] *Olkoon  $\mu$  pariutus ja oletetaan, että miesten joukko  $\mathcal{X}$ , jotka suosivat parejaan pariutuksessa  $\mu$  kuin pariutuksessa  $M_0$ , ei ole tyhjä. Siinä tapauksessa on olemassa mies  $m \notin \mathcal{X}$  ja nainen  $n$  joka on estepari pariutuksella  $\mu$*

*Todistus.* [3, s. 55] Pariutus  $\mu$  on epävakaa, koska on olemassa miehiä jotka suosivat sitä enemmän kuin pariutusta  $M_0$ , joten jonkin parin on estettävä  $\mu$ . Näytetään, että jokin mies joka kuuluu joukkoon  $\mathcal{X}$  on estävässä parissa. Olkoon  $\mathcal{Y}$  joukko naisia, jotka ovat pareja miesten  $\mathcal{X}$  kanssa pariutuksessa  $M_0$ . Todistus on jaettu kahteen tapaukseen.

Ensimmäisessä tapauksessa oletetaan, että meillä on mies  $m'$  joukosta  $\mathcal{X}$ , joka on pariutettu naiseen  $n$  joka ei ole joukosta  $\mathcal{Y}$  pariutuksessa  $\mu$ . Koska  $m'$  suosii paria  $n$  verrattuna pariinsa pariutuksessa  $M_0$ , pariutus  $M_0$  implikoi, että  $n$  suosii  $p_{M_0}(n)$  enemmän kuin  $m'$ . Mutta  $n \notin \mathcal{Y}$  implikoi, että  $m \notin \mathcal{X}$  ja  $p_\mu(m) = n$ , joten  $m$  suosii naista  $n$  enemmän kuin  $p_\mu(m)$ . Näinollen, ensimmäisessä tapauksessa,  $m$  ja  $n$  estävät pariutuksen  $\mu$  ja  $m \notin \mathcal{X}$ .

Toisessa tapauksessa oletetaan, että jokainen mies joukosta  $\mathcal{X}$  on pariutettu pariutuksessa  $\mu$  naisen kanssa joukosta  $\mathcal{Y}$ . Pariutuksen  $M_0$  vakauden

takia jokainen nainen joukosta  $\mathcal{Y}$  suosii pariaan pariutuksessa  $M_0$  verrattuna pariutukseen  $\mu$ . Missä tahansa mielivaltaisessa Gale–Shapley-algoritmin suorituksessa, jokainen tällainen yllä kuvattu nainen hylkää  $\mu$ -parinsa. Oletetaan, että jossain mielivaltaisessa Gale–Shapley-algoritmin suorituksessa  $m'$  on viimeinen mies joukosta  $\mathcal{X}$ , joka tekee kosinnan, olkoon  $n$  nainen jota tämä  $m'$  kosii. Nyt  $n = p_{M_0}(m')$ , joten  $n$  on joukossa  $\mathcal{Y}$ . Koska  $n$  hylkäsi miehen  $p_\mu(n)$  algoritmin suorituksen aikana, on naisella  $n$  oltava jokin mies langan päässä, esimerkiksi mies  $m$ , kun  $m'$  kosii häntä. Nainen  $n$  hylkää miehen  $m$  ja hyväksyy miehen  $m'$  ja koska  $m$  jatkaa kosimalla ei se ole joukossa  $\mathcal{X}$ . Määritelmän mukaisesti  $m$  ei suosi pariaan pariutuksessa  $\mu$  verrattuna pariinsa pariutuksessa  $M_0$ , joten  $m$  suosii naista  $n$  enemmän kuin  $p_\mu(m)$ .

Samoin koska  $m \notin \mathcal{X}$  on viimeinen mies, joka hylätään naisen  $n$  toimesta, suorituksen aikana jolloin tuotetaan pariutus  $M_0$ , ja  $n \in \mathcal{Y}$  hylkäsi  $p_\mu(n) \in \mathcal{X}$  suorituksen aikana, niin  $n$  suosii miestä  $m$  enemmän kuin miestä  $p_\mu(n)$ . Näin ollen kaksikko  $m$  ja  $n$  estävät pariutuksen  $\mu$  ja  $m \notin \mathcal{X}$ , kuten haluttiin.  $\square$

**Lemma 20.** [3, s. 56] *Ei ole olemassa vakaata pariutuksia suhteessa mieltymyksiin  $M'$ , missä jokainen mies joukosta  $M'$  saa parin jota suosii ehdottomasti enemmän kuin pariaan pariutuksessa  $M_0$ .*

*Todistus.* [3, s. 56] Olkoon  $\mu$  pariutus missä jokin joukko miehiä  $M' \supseteq M$  saavat parit joita he suosivat enemmän kuin parejaan pariutuksessa  $M_0$ . Lemman 19 mukaan on olemassa kaksikko  $m$  ja  $n$ , joka estää pariutuksen  $\mu$  suhteessa mieltymyksiin  $\Gamma$ , niin että  $m$  ei ole joukossa  $M'$ . Mutta nyt  $m$  ei ole joukossa  $M$ , joten  $\Gamma'$  sisältää molempien, miehen  $m$  ja naisen  $n$ , todelliset mieltymykset, ja näin ollen heidän on estettävä pariutus  $\mu$  myös suhteessa mieltymyksiin  $\Gamma'$ . Joten ei ole olemassa vakaata pariutusta missä jokainen mies joukosta  $M$  parantaisi hänen pariaan verrattuna pariutukseen  $M_0$ .  $\square$

**Lause 21.** [1, p. 593] *Oletetaan, että  $\Gamma$  edustaa jokaisen henkilön aitoa mieltymystä ja  $\Gamma'$  samoin, paitsi miesten  $M'$  osajoukon, joilla on vaihtoehtoinen mieltymys  $\Gamma'$ :ssa. Ei ole olemassa vakaata pariutusta  $\mu'$   $\Gamma'$ :ssa jota kaikki miehet pitäisivät parempana kuin pariutusta  $\mu$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että pariutus  $\mu$  on miellyttävämpi kuin pariutus  $\mu'$  miehille  $m \in M' \subset M$ . Lemman ?? mukaan täytyy olla olemassa pari  $m$  ja  $n$  missä  $m \notin M'$ , joka estää pariutuksen  $\mu$  mieltymyksillä  $\Gamma$ . Mutta miehen  $m$  ja naisen  $n$  strategiat ovat identtiset joukoissa  $\Gamma$  ja  $\Gamma'$ , joten  $m$  ja  $n$  on esteperi myös mieltymyksellä  $\Gamma'$ .  $\square$

Monessa avioliittopelissä tuloksia voidaan muunnella strategioilla vain silloin kun jokin osajoukko henkilöistä vääristelee yhdessä mieltymyksiä, eli he muodostavat *koalition* ja tuottavat itselleen ja koalitiolle parempia pariutuksia.

**Lause 22.** [3, p, 58] *Vaikka nais-orientoitunutta Gale–Shapley-algoritmiä (naiset kosii, miehet päättää) käytetään, voivat miehet pakottaa algoritmin tuottamaan mies-optimaalisia tuloksia antamalla väärennetyjä mieltymyksiä.*

*Todistus.* Jokainen mies  $m$  väärentää mieltymyslistansa. Nämä miehet ilmoittavat, että huonompi nainen kuin  $p_{M_0}(m)$  on hylättävä ja ei sovi miehelle pariksi, tämä tuottaa mieltymyslistan  $\Gamma'$ . Jos mies-orientoitunutta Gale–Shapley-algoritmiä käytetään mieltymyksille  $\Gamma'$  se tuottaa  $M_0$ , mies-optimaalisen pariutuksen mieltymyksille  $\Gamma$ . Edelleen, koska pariutuksessa  $M_0$  jokaisella miehellä on huonoin mahdollinen pari suhteessa mieltymyslistaan  $\Gamma'$ , on se ainoa mahdollinen vakaa pariutus tässä kontekstissa. Näinollen  $M_0$  on vakaa pariutus jonka nais-orientoitunut Gale–Shapley-algoritmi tuottaa suhteessa mieltymyksiin  $\Gamma'$ .  $\square$

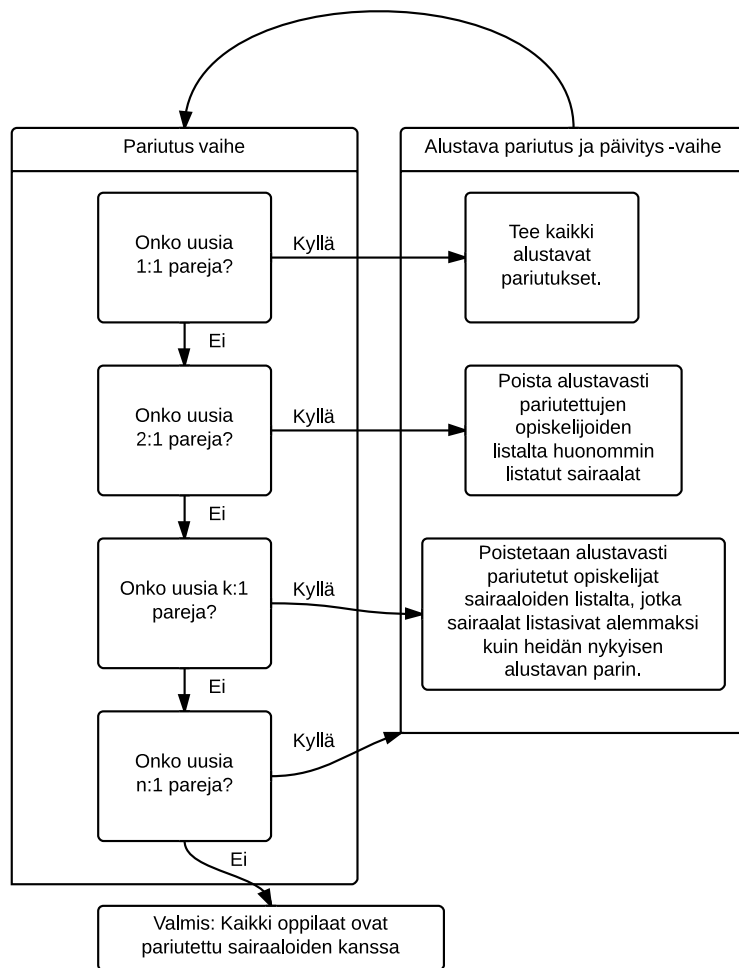
Ylläolevalla strategialla on eräs vakaus ominaisuus joka rohkaisee miehiä toteuttamaan sovittu strategia. Oletetaan, että miehet sopivat keskenään ylläolevan kaltaisesta strategiasta, mutta ennen kuin väärennety mieltymyslista julkaistaan jokin osajoukko koalitiosta päättää pettää koalition. Nämä miehet olettavat, että loput koalition miehet toteuttavat alkuperäisen strategian ja naiset antavat todelliset mieltymyksensä. Ongelmana pettäjillä on löytää optimoitu mieltymyslista, joka tuottaa heille vielä parempia pareja. Vaikka tällaista petosta ei tapahdu jokainen mies voi olla huolissaan, että tällainen petos tapahtuu hänen selkensä takana ja epäröi osallistumistaan alkuperäiseen strategiaan, jossa kaikki miehet antoivat väärennetyt mieltymyslistat. Seuraava lause kertoo, että koalition on turha etsiä parempaa strategiaa ja näinollen miesten ei tarvitse huolehtia petoksista koalitioidissa [3].

**Lause 23.** [3, p, 58] *Olkoon  $M'$  miesten osajoukko ja olkoon  $\mu$  mikä tahansa pariutus missä jokainen mies joukosta  $M'$  suosii  $\mu$ -pariaan enemmän kuin  $M_0$ -pariaan. Olettaen, että jokainen mies joka ei ole joukossa  $M'$  ilmoittaa hänen  $\Gamma'$  listansa, ja jokainen nainen ilmoittaa heidän  $\Gamma$  listansa, ei ole olemassa sellaista listojen joukkoja minkä  $M'$  voi ilmoittaa niin että  $\mu$  olisi vakaa suhteessa ilmoitettuihin listoihin.*

*Todistus.* Oletetaan, että jokin osajoukko joukosta  $M'$  väärentää heidän sovitut mieltymyslistat luomalla mieltymykset  $\Gamma_{M'}$  aikaisemman ja sovitun  $\Gamma'$  mieltymyslistan sijaan. Nyt  $M_0$  on ainoa vakaa pariutus mieltymyksille  $\Gamma'$ , joten se on siis mies-optimaalinen pariutus molemmissa  $\Gamma$ :ssa ja  $\Gamma'$ :ssa. Näinollen jos miehet joukossa  $M'$  parantelevat parejaan, suhteessa mieltymyksiin  $\Gamma$ , petoksen johdosta on kaikkien heidän saatava paremmat parit verrattuna mies-optimaaliseen pariutukseen mieltymyksillä  $\Gamma'$ . Mutta Lemmassa 20 sanotaan, että miesten joukossa  $M'$  on mahdotonta ehdottomasti parantaa pariaan mieltymyksillä  $\Gamma'$  valehtelemalla.  $\square$

## Lähteet

- [1] Balinski, Michel ja Ratier, Guillaume: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes*. SIAM Rev., 39(4):575–604, 1997.
- [2] Gale, D. ja Shapley, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962.
- [3] Gusfield, D. ja Irving, R.W.: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. Foundations of Computing Series. MIT Press, 1989, ISBN 9780262071185.
- [4] Roth, Alvin E: *The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory*. Journal of Political Economy, 92(6):991–1016, 1984.
- [5] Roth, Alvin E., Sonmez, Tayfun ja Unver, M. Utku: *Kidney Exchange*. tekninen raportti, National Bureau of Economic Research, 2003.



Kuva 2: Vuokaavio Algoritmistä 18 [4, p, 1009]