

Vakaa avioliitto -ongelma

Anis Moubarik

Tutkielma
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 5. toukokuuta 2013

Tiedekunta — Fakultet — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Tietojenkäsittelytieteen laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Anis Moubarik			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Vakaa avioliitto -ongelma			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Tietojenkäsittelytiede			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Tutkielma		5. toukokuuta 2013	22
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Vakaa avioliitto -ongelma on tilanne jossa meillä on kaksi erillistä samansuuruista joukkoa joilla on jonkilainen mieltymys vastakkaisen joukon alkioista, tilannetta kutsutaan avioliittopeliksi. Tutkielmassa esitellään vakauden määritelmä ja sen vaikutuksia pareihin ja pariutuksiin ja kuinka näitä vakaita pariutuksia löydetään avioliittopeleistä. Näiden ohella esitellään Gale-Shapley-algoritmi, joka tuottaa vakaan pariutuksen jokaiselle avioliittopelille.</p> <p>Tutkielma käy läpi myös yleisimpiä muunnoksia alkuperäiseen ongelmaan, kuten erisuuriset joukot ja parien kieltäminen, jotka johdattelevat oikean maailman sovelluksiin. Sovelluksista esitellään elinluovutus tapaukset, koulujen opiskelijavalinnat sekä opetussairaaloiden ja lääkettieteen opiskelijoiden pariutus.</p> <p>Lopuksi käydään läpi strategioita sekä koalitioita avioliittopeleissä. Kuinka ne vaikuttavat pariutukseen ja parantavatko strategiat niitä käyttävien alkioden pareja, kuinka koalitiot voivat manipuloida Gale-Shapley-algoritmiä ja onko petos kannattavaa koalitioissa.</p>			
<p>ACM Computing Classification System (CCS): Theory of computation → Algorithmic game theory; <i>Mathematics of computing</i> → <i>Combinatoric problems</i>;</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
vakaa pariutus, avioliittopeli, Gale-Shapley-algoritmi			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

Sisältö

1 Johdanto	3
2 Vakaat pariutukset	4
2.1 Ylivallat	5
3 Gale–Shapley-algoritmi	6
4 Vakaitten pariutusten joukko	7
4.1 Vakaitten pariutusten määrä	8
5 Laajennettu Gale–Shapley-algoritmi	10
6 Erisuuruiset joukot	11
7 Parien kieltäminen	12
8 Parien yhdenmukaisuus	13
9 Vakaa huonetoveri -ongelma	14
10 Sovellukset	14
10.1 Elinluovutus	14
10.2 Koulujen valinnat	15
10.3 Lääketieteen opiskelijat ja opetussairaalat	16
11 Strategiat avioliittopeleissä	19
Lähteet	21

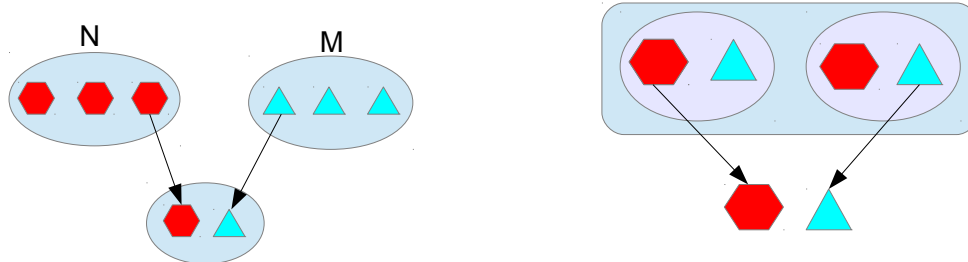
1 Johdanto

Vakaa avioliitto -ongelma (*stable marriage problem*) sivuaa kombinatoriikkaa ja peliteoriaa. Ongelma on seuraava: olkoon olemassa n miestä ja n naista ja miehet ovat pistäneet naiset järjestykseen mieluisimmasta parista huonoimpaan ja jokainen nainen on pistänyt miehet vastaavaan järjestykseen, tilannetta kutsutaan *avioliittopeliksi*. *Pari* on tässä kontekstissa siis mies-nais pari, tätä kutsutaan myös *avioliitoksi*. Tehtävänä on pariuttaa miehet ja naiset niin, että ei ole olemassa kahta vastakkaisen sukupuolen henkilöä, jotka olisivat mielummin pari keskenään kuin pysyisivät avioliitossaan nykyisessä pariutuksessa. Avioliitot ovat vakaita, kun näitä *estepareja* ei esiinny. Pariutus on joukko pareja ja parit voidaan pariuttaa Gale-Shapley-algoritmillä, joka esitellään myöhemmin. Vakaassa pariutuksessa on siis tarkoitus pariuttaa kahden joukon alkiot niin että jokin kriteeri täyttyy, alkuperäisessä vakaa avioliitto -ongelmassa tuo kriteeri on parien vakaus suhteessa alkioiden mieltymyksiin.

Ongelmalla on monia käytännön sovelluksia. Se voidaan yleistää kaikkiin *kaksipuolisiin markkinoihin* (*two-sided markets*), joissa eettisistä tai laillisista syistä ei käytetä vaihtovälineenä rahaa. Kaksipuolisilla markkinoilla tarkoitetaan tilannetta, jossa on olemassa alusta, joka palvelee kahta erillistä ryhmää, jotka toimittavat toisilleen hyödykkeitä. Hyviä esimerkkejä ovat: elinluovuttajat ja vastaanottajat, työntekijät ja työnantajat sekä opiskelijat ja korkeakoulut.

Elinluovutusten tapauksessa haastena on, luovuttaja-potilas kaksikoiden yhteensopimattomuus. Vakaa avioliitto -ongelman ratkaisuja voidaan käyttää elinluovutuksissa, esimerkiksi jos on olemassa kaksikot A , B ja C , eli jokainen kaksikoista sisältää luovuttajan ja potilaan, mutta syystä tai toisesta elin ei sovi potilaalle. Tässä esimerkissä voidaan soveltaa ratkaisuja ja saada vakaita pariutuksia potilaitten ja luovuttajien välille. Oletetaan, että A :n luovuttaja sopii B :lle, B :n C :lle ja C :n A :lle, nyt saadaan ketju ja vakaa pariutus, jossa jokainen potilas saa uuden elimen. Näitä *kaksipuolisia pariutusmarkkinoita* tutkitaan tutkielmassa.

Gale ja Shapley esittivät vuonna 1962 ilmestyneessä artikkelissa [2] algoritmin alkuperäiselle ongelmalle, joka löytää yhden vakaan pariutuksen jokaiselle olemassa olevalle avioliittopelille. Jokaisella avioliittopelillä on siis vähintään yksi vakaa pariutus. Algoritmi toimii oletuksena miehet kosii, naiset hylkää periaatteella. Tämä antaa kosijalle, tässä tapauksessa siis miehille, aina parhaan mahdollisen parin mitä he voivat pelin kontekstissa saada. Naisten kosiessa roolit tietysti vaihtuvat ja pariutukset ovat silloin naisille optimoituja. Avioliittopelien strategiat ovat peliteorian osa-alue ja se tulee esille, kun joukkojen alkiot käyttävät koalitioita ja strategioita vääristelemällä mieltymyksiään saadakseen edun pariutuksessa. Tähän vääristelyyn Gale-Shapley-algoritmi ei osaa puuttua ja se nostaakin kysymyksiä kuinka siihen pitäisi reagoida ja miten ylipäättään alkiot vääristelystä eri tapauksissa



(a) Yksi mahdollinen pari joukoista M ja N (b) Kuva epävakautta aiheuttavasta kaksikosta

Kuva 1

m_1	n_1	n_3	n_2	n_1	m_1	m_2	m_3	
m_2	n_1	n_2	n_3	n_2	m_2	m_1	m_3	
m_3	n_3	n_1	n_2	n_3	m_3	m_2	m_1	

Taulukko 1: Miesten ja naisten mieltymykset

hyötyvät, jos hyötyvät ollenkaan.

Alkuperäiseen avioliitto-ongelmaan on pieniä variaatioita, kuten erisuuruiset joukot ja alkioden hyvin erilaiset mieltymykset, eli tapaukset joissa he eivät halua pariutua tietyn henkilön kanssa ollenkaan. Näissä tapauksissa vakauden määritelmää muokataan niin että pariutukset joissa alkio on ilman paria voi olla myös vakaa. Erisuuruisien joukkojen tapauksessa suuremman joukon alkioista jää pariuttamatta suuremman ja pienemmän joukon alkioden lukumäärän erotuksen verran alkioita. Näitä variaatioita varten esitellään myös ratkaisut, jotka tuottavat vakaita pariutuksia.

2 Vakaat pariutukset

Olkoon M miesten joukko ja N naisten joukko, missä $|M| = |N| = n$. Avioliitosta tai parista puhuttaessa tarkoitetaan sillä paria $(m, n) \in M \times N$. Avioliittopelissä jokaisella joukkojen alkioilla on mieltymykset toisen joukon alkioista parhaimmasta kumppanista huonoinpaan. Kuvassa 1a on esimerkki parista, joukoista N ja M .

Olkoon $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ ja $N = \{n_1, n_2, n_3\}$. Mieltymykset voidaan kuvata esimerkiksi taulukossa. Järjestys taulukossa 1 on vasemmalta oikealle laskevassa järjestyksessä, eli esimerkiksi miehelle m_1 miellyttävin pari olisi n_2 . Henkilön mieltymyksiä kuvaavaa järjestystä kutsutaan mieltymyslistaksi (*preference list*), jossa toisen joukon alkioita ovat mieltymysjärjestyksessä.

Mieltymyksiä voidaan myös kuvata transitiivisella relaatiolla $>$. Esimer-

kiksi miehen m_1 mieltymykset voidaan esittää seuraavasti: $n_2 >_{m_1} n_1 >_{m_1} n_3$, relaatio on myös transitiivinen eli $n_2 >_{m_1} n_3$ pätee.

Pariutus μ on joukko $\mu \subseteq M \times N$, joka tulkittuna funktioksi $\mu : M \mapsto N$ on bijektio. Alkion m paria pariutuksessa μ merkitään seuraavasti $p_\mu(m)$.

Määritelmä 1. Pariutus μ on *vakaa*, jos ei ole olemassa kaksikkoa m_1 ja n_2 , jolle

1. $n_2 >_{m_1} p_\mu(m_1)$, ja
2. $m_1 >_{n_2} p_\mu(n_2)$

Kuvassa 1b meillä on pariutus, jossa on kaksi paria. Ensimmäisen parin nainen ja toisen parin mies pitävät toisistaan enemmän kuin omista pareistaan ja tämä aiheuttaa epävakautta.

Ongelma 1 (Vakaa pariutus). Vakaa pariutus joukoille N ja M .

Myöhemmin esitellään teoreema, jonka mukaan jokaisesta avioliittopelistä löytyy ainakin yksi vakaa pariutus. Ensin kuitenkin esitellään algoritmi joka tarkastaa onko jokin mielivaltainen pariutus vakaa.

Algoritmi 2. [3, s. 8] Olkoon $m \in M$ ja $n \in N$ ja μ pariutus.

1. Kaikilla n siten että m suosii naista n enemmän kuin omaa paria $p_\mu(m)$, jos n suosii miestä m enemmän kuin omaa paria $p_\mu(n)$, ilmoitetaan että pariutus μ ei ole vakaa.
2. Jos yhtään tällaista paria ei löydetä ilmoitetaan, että pariutus μ on vakaa.

Etsitään tapauksia jossa mies suosii naista enemmän kuin omaa pariaan pariutuksessa μ , jos löytyy tällainen mies, tarkistetaan suosiiko nainen häntä enemmän kuin omaa pariaan pariutuksessa, jos tämä pitää paikkansa ei pariutus voi olla vakaa. Huonoimmassa tapauksessa käydään läpi kaikki miehet ja kaikki paitsi yksi naista, eli $x \cdot (x - 1)$, tästä saadaan aikavaativuudeksi $O(x^2)$.

2.1 Ylivallat

Pariutuksilla ja pareilla on erilaisia ominaisuuksia. Paras-miehelle pari on pari, jossa mies saa haluamansa naisen ja vastaavasti paras-naiselle pari on pari, jossa nainen saa haluamansa miehen. Pariutuksissa voi esiintyä jommankumman joukon ylivaltaa, jos kaikilla $j \in N$, j saavat haluamansa parin, tätä kutsutaan N -joukon ylivaltaksi ja samoin kaikilla $i \in M$, i saavat haluamansa parin, tällöin se on M -joukon ylivalta. Joskus ylivaltoja kutsutaan myös *nais-* tai *miesylivallaksi*. Jos ylivaltaa ei synny pariutuksessa, voidaan pariutusta kutsua ylivaltavapaaksi. Päinvastoin jos mies tai nainen

saa huonoimman tai vähiten haluamansa parin, kutsutaan sitä *huonoin-naiselle* tai *-miehelle* pariksi. Samoin paria kutsutaan huonoin-naiselle tai -miehelle pariksi jos kaikki jommankumman joukon alkioista saavat vähiten haluamansa parit.

3 Gale–Shapley-algoritmi

Avioliittopelistä löytyy aina ainakin yksi vakaa pariutus. Gale–Shapley-algoritmi on yksinkertainen algoritmi, joka tuottaa vakaan parituksen avioliittopelille. Seuraavaksi esitellään algoritmi ja näytetään, että se päättyy aina.

Algoritmi 3. [2, s. 13] .

1. Miehet aloittavat kosimalla mieltymyksiltään parasta naista.
2. Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaiten sijoitetun miehen.
3. Nainen ei hyväksy miestä vaan jättää miehen *langan* päähän siltä varalta että parempi mies kosisi häntä
4. Hylätyt miehet kosivat mieltymyksiltään toiseksi parasta naista.
5. Naiset hylkäävät kaikki paitsi parhaan vaihtoehdon
6. Niin kauan kuin joku naisista ei ole saanut kosintaa, tulee hylkäyksiä ja uusia kosintoja. Lopuksi jokaista naista on kosittu, koska mies ei voi kuin kerran kosia samaa naista.
7. Viimeinen nainen on saanut kosinnan ja kosimisvaihe on päättynyt. Jokainen nainen hyväksyy langan päässä olevan kosijan

Lause 4. *Algoritmi 3 pysähtyy kaikilla söytteillä*

Todistus. Mies ei voi jäädä ilman paria. Nainen voi hylätä vain jos hänellä on langan päässä mies, nainen ei voi ensimmäisellä kierroksella hylätä miestä (kierroksella tarkoitetaan siis yhden miehen kosintaa ja naisen vastausta siihen), ja kun hänellä on langan päässä mies hänestä ei tule missään vaiheessa vapaata algoritmin suorittamisessa. Jos viimeinen nainen jota kositaan hylkää miehen, tarkoittaisi tämä sitä, että jokaisella naisella olisi mies jo langan päässä. Mutta naisia ja miehiä on sama määrä ja yksikään mies ei voi olla kahden naisen langan päässä, niin jokainen miehistäkin pitäisi olla lankojen päässä, mikä on ristiriita. Jokaisella kierroksella mies kosii tasan yhtä naista, ja koska mies voi kosia koko algoritmin suorituksen aikana jokaista naista maksimissaan kerran on kierroksien määrä huonnoimassa tapauksessa n^2 . \square

Otetaan esimerkiksi taulukko 1, kierroksia tulee yhteensä 4, jos mieltymykset olisivat erillaiset voisi kierrosten määrä olla parhaassa tapauksessa 3, eli jokaisella kierroksella nainen hyväksyy kosivan miehen ilman hylkääksiä. Huonoimmassa tapauksessa miesten listalta vasta viimeiset naiset hyväksyvät ja kierrosten lukumäärä on silloin 9. Algoritmi 3 on siis päättävä. Nyt siis päättymisen on selvää, mutta onko pariutukset aina vakaita? Todistetaan tämä.

Lause 5. *Algoritmin 3 tuottamat pariutukset ovat aina vakaita.*

Todistus. [2, s. 588] Olkoon meillä mies m ja nainen n ja oletetaan, että he eivät ole pari pariutuksessa μ . Oletetaan myös, että $n \succ_m p_\mu(m)$. Miehen m on siis jossain vaiheessa algoritmiä kosia naista n ja naisen n on pitänyt jossain vaiheessa hylkää m paremman miehen tieltä. Siis n suosii omaa pariaan pariutuksessa μ miehen m sijaan, eikä epävakautta voi syntyä. \square

Algoritmi tuottaa tällaisenaan miehelle optimaalisia tuloksia, eli tällä algoritmilla tuotettu pariutus on kyseiselle miehille paras mahdollinen mitä he siinä kyseisessä avioliittopelissä tulevat saamaan. Naisille optimaalisia tuloksia voidaan saada, kun osat vaihdetaan päittäin algoritmissä.

Esimerkki 6. Katsotaan 3 kokoista avioliittopeliä ja mieltymyslistaa taulukosta 1.

Yksi mahdollinen suoritus olisi seuraava: mies m_1 aloittaa kosimalla naista n_1 (nainen hyväksyy); mies m_2 kosii naista n_1 (nainen hylkää, hänellä on parempi mies langan päässä); mies m_3 kosii naista n_3 (nainen hyväksyy); mies m_2 kosii uudestaan, nyt listalla toista olevaa naista n_2 (nainen hyväksyy). Jokaista naista on kosittu ja jokaisella on joku mies langan päässä, kosinta on päättynyt ja naiset hyväksyvät langan päässä olevan miehen lopullisesti. Lopullinen vakaa pariutus on seuraava $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)\}$.

4 Vakaitten pariutusten joukko

Gale-Shapley algoritmi tuottaa meille yhden vakaan pariutuksen, mutta niitä voi olla enemmän. Olkoon meillä pariutus μ ja δ . Henkilö x suosii pariutusta μ pariutukseen δ nähden, jos x suosii enemmän pariaan μ pariutuksessa kuin δ pariutuksessa. Henkilölle voi olla myös välinpitämätön pariutuksista, jos molemmat antavat hänelle yhtä hyvän parin.

Lause 7. [3, p. 18] *Olkoon μ ja δ vakaita pariutuksia, ja oletetaan että m ja n ovat pari pariutuksessa μ muttei δ :ssa. Nyt jompikumpi henkilöistä m ja n suosii pariutusta μ enemmän kuin pariutusta δ ja toinen pariutusta δ enemmän kuin pariutusta μ .*

Todistus. [3, s. 18] Olkoon \mathcal{X} ja \mathcal{Y} naisten ja miesten joukot jotka pitävät pariutusta μ parempana, kuin pariutusta δ . Vastaavasti joukot \mathcal{X}' ja \mathcal{Y}' pitävät pariutusta δ parempana, kuin pariutusta μ .

Pariutuksessa μ ei voi olla paria (m, n) missä $m \in \mathcal{X}$ ja $n \in \mathcal{Y}$, koska tämä pari estäisi pariutuksen δ . Joten jokaisella miehellä joukossa \mathcal{X} on μ -pari (μ -partner) joukosta \mathcal{Y}' , näin ollen $|\mathcal{X}| \leq |\mathcal{Y}'|$.

Samoin pariutuksessa δ ei voi olla paria (m, n) missä $m \in \mathcal{X}'$ ja $n \in \mathcal{Y}'$, koska tämä pari estäisi pariutuksen μ . Joten jokaisella miehellä joukossa \mathcal{X}' on δ -pari joukosta \mathcal{Y} , näin ollen $|\mathcal{X}'| \leq |\mathcal{Y}|$.

Huomataan, että $|\mathcal{X}| + |\mathcal{X}'| = |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'|$, koska vasen puoli on miesten lukumäärä ja oikea puoli naisten lukumäärä, joilla en eri parit kyseisissä pariutuksissa. Tästä seuraa $|\mathcal{X}'| = |\mathcal{Y}|$ ja $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}'|$. Näin ollen jokaisella miehellä joukossa \mathcal{X}' on μ -pari joukosta \mathcal{Y} , ja koska jokaisella miehellä joukossa \mathcal{X} on μ -pari joukosta \mathcal{Y}' lemma 7 pitää paikkansa. \square

Tästä seuraa nyt korollaari 8.

Korollaari 8. [3, s. 18] *Jos μ ja δ ovat vakaita pariutuksia samalle avioliittopelille, niin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta μ on sama kuin henkilöiden määrä jotka suosivat pariutusta δ .*

Esitellään hieman myös notaatiota (mies-orientoitunut) ylivalloille, μ dominoi vakaata pariutusta δ , jos jokainen mies saa vähintään yhtä hyvän parin pariutuksessa μ kuin δ , merkitään sitä $\mu \preceq \delta$. Jos meillä on miesylivalta se tarkoittaa sitä, että naisten kosiessa on oltava naisylivalta, joka merkitään seuraavasti $\mu \succeq \delta$. Olkoon \mathcal{M} kaikkien pelin vakaiden pariutusten joukko avioliittopelissä. (\mathcal{M}, \preceq) on osittain järjestetty joukko. Nais-orientoitunut ylivalta voidaan myös määritellä ja seuraava korollaari seuraakin lauseesta 7.

Korollaari 9. [3, s. 19] *Miehen näkökulmasta pariutus μ hallitsee pariutusta δ , joss pariutus δ hallitsee pariutusta μ naisten näkökulmasta. Nais-orientoitunut ylivalta relaatio on käänteinen, merkinnällä \succeq , mies-orientoituneeseen nähden. Tämä on myös osittain järjestetty joukko ja se merkitään seuraavasti (\mathcal{M}, \succeq) .*

4.1 Vakaitten pariutusten määrä

Näytetään, että vakaita pariutuksia on eksponentiaalinen määrä. Jos käytetään brute-force-algoritmia löytääkseen kaikki vakaat pariutukset, joudutaan tyytymään eksponentiaaliseen aikavaativuuteen.

Lemma 10. [3, s. 23] *Olkoon meillä vakaat avioliittopelit kooltaan m ja n ja vastaavasti olkoon x ja y vakaiden pariutuksien määrä avioliittopeleissä. On olemassa peli jonka koko on $m \cdot n$, jolla on vähintään $\max(xy^m, yx^n)$ vakaata pariutusta.*

Todistus. [3, s. 23] Merkitään miehiä ja naisia lemmän 10 avioliittopelissä seuraavasti, $a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_m$ ja $b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_n$. Tarkistellaan mn kokoista peliä, missä

1. miehet on merkitty seuraavasti $(a_i, b_j), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$,
2. naiset on merkitty seuraavasti $(c_i, d_j), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$,
3. mies (a_i, b_j) suosii naista (c_k, d_l) enemmän kuin naista (c'_k, d'_l) , jos b_j suosii enemmän naista d_l kuin naista $d_{l'}$, tai $l = l'$ ja a_i suosii naista c_k enemmän kuin naista $c_{k'}$,
4. nainen (c_i, d_j) suosii miestä (a_k, b_l) enemmän kuin miestä $(a_{k'}, b_{l'})$, jos d_j suosii miestä b_l enemmän kuin miestä $b_{l'}$, tai jos $l = l'$ ja c_i suosii miestä a_k enemmän kuin miestä $a_{k'}$.

Olkoon μ_1, \dots, μ_n mikä tahansa sarja vakaita pariutuksia avioliittopelissä, jonka koko on m , ja olkoon μ mikä tahansa vakaa pariutus avioliittopelissä, jonka koko on n . Mahdollisten pariutusten määrä pariutuksille μ_1, \dots, μ_n ja μ on yx^n . Väitetään, että kuvaus

$$(a_i, b_j) \longrightarrow (p_{\mu_j}(a_i), p_\mu(b_j))$$

on vakaa pariutus yhdistetyssä avioliittopelissä.

Tämä kuvaus on pariutus, koska molemmat, μ_j ja μ ovat pariutuksia. Oletetaan, että tässä pariutuksessa on seuraava estepari $((a, b), (c, d))$. Nyt seuraavista ehdoista täytyy olla voimassa joko 1. ja 2. tai 3. ja 4.

1. b suosii enemmän henkilö d kuin $p_\mu(b)$,
2. $d = p_\mu(b)$ ja a suosii enemmän henkilöä c kuin $p_{\mu_j}(a)$,
3. d suosii enemmän henkilöä b kuin $p_\mu(d)$,
4. $b = p_\mu(d)$ ja c suosii enemmän henkilöä a kuin $p_{\mu_j}(c)$.

Neljästä mahdollisesta kombinaatiosta, kombinaatio ehdoilla 1 ja 3 on esteenä pariutuksen μ vakaudelle, kombinaatio ehdoilla 2 ja 4 on esteenä pariutuksen μ_j vakaudelle ja muut kombinaatiot ovat yhteensopimattomia.

Näin ollen väittäminen on oikeutettu, ja on näytetty avioliittopeli missä on vähintään yx^n vakaata pariutusta. Samalla tavoin, vaihtamalla rooleja alkuperäisissä avioliittopelissä, vahvistetaan vastaava tulos määrälle xy^m . \square

Lemma 11. [3, p. 24] Jokaiselle $n \geq 0$, missä n on kahden potenssi, on olemassa vakaa avioliittopeli jonka koko on n ja sisältää vähintään 2^{n-1} vakaata pariutusta

Todistus. Todistus induktiolla. Kun pelin koko on 1, eli alkioden lukumäärä on 1, niin $n = 2^0$ triviaali tapaus, eli vakaita pariutuksia on yksi. Oletetaan tulos todeksi tapauksessa $n = 2^k$, käytetään lemmaa 10, missä $i = 2$, avioliittopeli jonka koko on siis 2. Molemmat mahdolliset pariutukset ovat vakaita, joten $x = 2$ ja induktio-oletuksen mukaan $y = 2^{2^k-1}$. Joten lemmän 10 perusteella on olemassa peli jonka koko on $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, jolla on vähintään $\max(2 \cdot (2^{2^k-1})^2, 2^{2^k-1} \cdot 2^{2^k}) = 2^{2^{k+1}-1}$ vakaata paritusta. \square

5 Laajennettu Gale–Shapley-algoritmi

Tämän algoritmin tarkoituksena on yksinkertaistaa vakaa avioliitto -ongelman eri ongelmakohtien kertomista, algoritmi on suunniteltu tekemään enemmän, kuin vain löytää yksi vaka pariutus. Laajennettua algoritmia tullaan tarvitsemaan vakaa avioliitto -ongelman sovelluksissa, erityisesti tapauksissa, joissa parille on kahdesta alkioista yhden tekevää kumman kanssa pariutuu, tämä tulee esille myöhemmässä kappaleessa. Algoritmi sieventää alkioden mieltymyslistoja poistamalla pareja, jotka eivät kuulu mihinkään vakaaseen pariutukseen. Poistamalla pari (m, n) tarkoitetaan sillä sitä että n poistetaan miehen m mieltymyslistalta ja m naisen n listalta.

Algoritmi 12. [3, s. 16]

1. Alustetaan jokainen henkilö vapaaksi.
2. Niin kauan kuin joku mies m on vapaa,
3. valitaan ensimmäinen nainen miehen listalta.
4. Jos naisella n on jo langan päässä mies p , vapautetaan p ja asetetaan m naisen n langan päähän.
5. Poistetaan jokainen pari (m', n) , missä m' on m :n seuraaja n mieltymyslistalla.

Tässä algoritmissa, kun mies kosii naista kosinta hyväksytään aina. Koska jos naisella n on jo langan päässä joku miellyttävämpi mies, kuin m olisi pari (m, n) poistettu. Algoritmi pysähtyy, kun jokaisella naisella on jokin mies langan päässä. Huomataan myös, että algoritmin lopettaessa jokainen mies on listalla ensimmäisenä olevan naisen langan päässä ja jokaisella naisella taas langan päässä viimeisenä listalla oleva mies.

Kutsutaan algoritmin tuottamaa mieltymyslistaa, jossa miehet kosivat, *mies-orientoituneeksi Gale–Shapley listaksi* tai *MGS-listaksi*. Vastaavasti, jos miesten ja naisten roolit algoritmista vaihdetaan kutsutaan tuotettua listaa *NGS-listaksi*. Lopuksi jos otetaan henkilön MGS- ja NGS-listan leikkaus saadaan GS-lista.

Lause 13. [3, s. 17] *Annettulle avioliittopelille pätee, että*

- *kaikki vakaat pariutukset ovat GS-listassa,*
- *yksikään pari, joka ei ole GS-listalla ei voi estää pariutusta GS-listalta,*
- *mies-optimaalisissa (vastaavasti nais-optimaalisissa) pariutuksissa jokainen mies on pariutettu ensimmäisen (vastaavasti viimeisen) naisen kanssa hänen GS-listalta ja jokainen nainen viimeisen (vastaavasti ensimmäisen) miehen kanssa naisen listalta.*

Esimerkki 14. Taulukossa 1 jokaisen henkilön GS-lista sisältää vain hänen vakaaan parinsa, sillä molemmat mies- ja nais-optimaaliset pariutukset ovat samat tässä tapauksessa.

6 Erisuuruiset joukot

Aikaisemmat tulokset pätevät myös, kun meillä on kaksi joukkoa joiden alkioiden määrä on erisuuri. Oletetaan, että henkilö haluaa olla ennemmin naimisissa kuin naimaton. Olkoon M miesten joukko ja N naisten joukko, ja $|M| = n_x < n_y = |N|$. Pariutus μ on epävaka, jos on olemassa mies $m \in X$ ja nainen $n \in Y$ siten että

1. m ja w eivät ole pari pariutuksessa μ ,
2. m on joko ilman paria μ :ssä tai suosii naista w enemmän kuin pariaan pariutuksessa μ , ja
3. w on joko ilman paria μ :ssä tai suosii miestä m enemmän kuin pariaan pariutuksessa μ .

Jokainen vakaa pariutus koostuu n_x :stä järjestettyjä pareja, missä $n_x - n_y$ on naimattomien naisten määrä.

Käyttämällä mies-orientoitunutta laajennettua Gale–Shapley-algoritmiä, päättyy se niin että jokainen mies on langan päässä ja tuloksena oleva pariutus on vakaa. Pariutus on mies-optimaalinen ja $n_x - n_y$ naista jää parittomaksi.

Jos käytetään nais-orientoitunutta versiota algoritmistä päättyy se siihen, että jokaisella miehellä on langan päässä jokin nainen, ja pariutus on vakaa. Huomataan kuitenkin, että jokaisen pariuttamattoman naisen WGS-lista on tyhjä ja seurauksena lauseesta 13(1) nämä naiset eivät voi olla pariutettuna missään vakaassa pariutuksessa [3, s. 26].

Lause 15. [3, p. 26]. *Avoliittopelissä jossa meillä on erisuuruiset joukot, on olemassa vähintään yksi vakaa pariutus, jossa pienemmän joukon kaikki alkiot saavat parin.*

Jos avioliittopeli, jossa on erisuuruiset joukot tuottaa saman GS-listan kuin avioliittopeli, jossa on samansuuruiset joukot, niin molempien vakaat pariutukset ovat samoja.

Alkuperäistä algoritmia 3 voidaan myös muokata yksinkertaisilla muutoksilla. Jos meillä on x määrä miehiä ja y määrä naisia, ja $x > y$, muokataan algoritmin 6. kohtaa, kun x määrä naisia on kosittu päätetään algoritmin suoritus siihen. Jos taas $x < y$, niin algoritmi toimii normaalisti.

7 Parien kieltäminen

Jos henkilön on mahdollista ilmoittaa, että yksi tai useampi ei kelpaa hänelle vastakkaisen sukupuolen joukosta, on hänen mieltymyslistansa aito osajoukko vastakkaisen sukupuolen joukosta. Näin ollen mies ja nainen voidaan pariuttaa ainoastaan jos he ovat hyväksyttäviä toisilleen.

Tässä tapauksessa vakaa pariutus voi olla osittainen tarkoittaen että kaikkien henkilöiden ei tarvitse olla pariutettu, jotta pariutus olisi vakaa. Osittainen pariutus μ on epävakaa, jos on olemassa mies m ja nainen n siten että

1. m ja n eivät ole pari pariutuksessa μ , mutta molemmat hyväksyisivät toisensa,
2. m on joko pariuttamaton tai suosii naista n enemmän kuin hänen pariaan pariutuksessa μ ,
3. n on joko pariuttamaton tai suosii miestä m enemmän kuin hänen pariaan pariutuksessa μ .

Mieltymykset voidaan myös laajentaa koskemaan pariutuksia, eli henkilö suosii pariutusta jossa hänellä on pari verratuna pariutukseen jossa hän jää ilman paria. Käytetään samaa notaatiota, kuin parien mieltymyksissä, eli jos mies m pitää pariutusta μ parempana kuin μ' , niin merkitään sitä $\mu >_m \mu'$.

Lause 16. *Avioliittopelissä, joka sallii parien kieltämisen on miehet ja naiset jaettu kahteen joukkoon – niihin joilla on pari kaikissa pariutuksissa ja niihin joilla ei ole yhtään paria missään pariutuksessa.*

Todistus. [3, p. 27] Olkoon kaksi eri vakaata pariutusta μ ja δ , määrittellään suunnattu verkko $G = G(\mu, \delta)$, jossa solmu esittää yhtä henkilöä. Jokaiselle miehelle m jolla on pari pariutuksessa μ on olemassa suunnattu kaari m :stä pariin $p_\mu(m)$. Ja jokaiselle naiselle n jolla on pari pariutuksessa δ on olemassa suunnattu kaari n :stä pariin $p_\delta(n)$. Jokaisella solmulla on verkossa G enintään yksi tuleva ja lähtevä kaari.

Oletetaan nyt ristiriitaisesti, että m on pariutettu naisen n kanssa pariutuksessa μ muttei pariutuksessa δ . On olemassa uniikki suunnattu polku verkossa G joka alkaa solmusta m ja koska jokaisella solmulla on enintään

yksi sisääntuleva kaari, ja m :llä on 0 sisääntulevaa kaarta, polku ei voi olla syklinen. Joten polun on päätyttävä mieheen joka on pariutettu δ :ssa muttei μ :ssa, eli m suosii pariutusta δ ennemmin kuin pariutusta μ , tai naiseen n joka on pariutettu μ :ssa muttei δ :ssa n suosii siis pariutusta μ ennemmin kuin pariutusta δ .

Mutta koska m suosii pariutusta μ pariutuksen δ sijaan, seuraa lauseen 7 mukaan, että n suosii pariutusta δ pariutuksen μ sijaan, ja lausetta 7 soveltamalla polkuun huomataan, että jokainen mies suosii pariutusta μ ja jokainen nainen pariutusta δ . Joten kahdesta mahdollisesta reitistä, jossa polku voisi päätyä johtaa molemmat ristiriitaan. \square

8 Parien yhdentekeväisyys

Parien yhdentekeväisyydellä tarkoitetaan tilanteita, joissa alkioiden mieltymyslistat eivät ole ehdottomasti sijoitettuja, eli alkio voi pitää yhdestä alkioista yhtä paljon kuin toisesta. Toisin sanoen alkioille on yhdentekevää kumman parin kanssa hänet pariutetaan. Täsmennetään vakauden määritelmää. Ensimmäinen käsitys vakaudesta on, jos meillä on nainen ja mies, jotka eivät ole pari, mutta pitävät toisistaan enemmän tai yhtäpaljon kuin omista pareistaan kyseisessä pariutuksessa, on pariutus epävakaa. Jos pariutus on edellisen kriteerin perusteella vakaa, kutsutaan sitä *super-vakaaksi* (*super-stable*) [3]. Tilanteessa jossa on olemassa täysi välinpitämättömyys ei voi löytyä yhtään super-vakaata pariutusta [3, s. 29].

Toinen, vapaamuotoisempi, käsitys vakaudesta on seuraava: Jos on olemassa mies ja nainen, jotka eivät ole pari, joista toinen pitää toisesta enemmän kuin omasta paristaan pariutuksessa ja toinen on vähintään välinpitämätön paristaan, on pariutus epävakaa. Jos pariutus on edellisen kriteerin perusteella vakaa, kutsutaan sitä *vahvastivakaaksi* (*strongly-stable*) [3, s. 29].

Laajennettua Gale–Shapley-algoritmia voidaan käyttää löytämään super- ja vahvasti-vakaita pariutuksia jokaiselle avioliittopelille, joka sallii välinpitämättömyyttä.

Algoritmi toimii niin, että miehet kosivat naisia listaltaan ja kun törmäivät tilanteeseen jossa hänellä on kaksi tai enemmän naista listallaan, joista hän on neutraali ja he ovat tasoissa, kosii hän kaikkia naisia samanaikaisesti. Jos nainen saa kosinnan poistetaan kaikki huonommat parit naisen listalta ja nainen miesten listoilta. Nainen voi kuitenkin pitää montaa miestä langan päässä, jos he ovat naisen listalla tasoissa. Kosinta vaihe voi jättää miesten listat tyhjiksi, joka tarkoittaa sitä että super- tai vahvaa-pariutusta ei löytynyt. Muussa tapauksessa jokainen mies on yhden tai useamman naisen langan päässä.

9 Vakaa huonetoveri -ongelma

Vakaa huonetoveri -ongelma (*Stable Roommate Problem*) on yleistetty vakaa avioliitto -ongelma, missä on vain yksi joukko, josta jokainen henkilö pistää toisensa mieltymys järjestykseen. Mieltymysten perusteella tehdään pariutukset, kuten vakaa avioliitto -ongelmassa. Vakaa huonetoveri -ongelmaa käytetään elinluovutuksissa, joista puhutaan myöhemmin omassa kappaleessa.

Pariutus on tässäkin tapauksessa epävakaa, jos on olemassa kaksi henkilöä jotka olisivat mielummin keskenään yhdessä kuin omien pariensa kanssa. Käytetään parien notaatiossa aaltosulkuja tavallisten sulkujen sijaan seuraavasti, jos x ja y ovat parit niin sitä merkitään näin $\{x, y\}$. Aaltosulkuja käytetään, koska parit eivät ole järjestyksessä kuten alkuperäisessä avioliitto-ongelmassa [3, s. 163]. Suurin ero tavalliseen vakaa avioliitto -ongelmaan on se, että vakaa huonetoveri -ongelmassa voi olla tilanteita joissa ei ole ainuttakaan vakaata pariutusta.

1	3	2	4
2	1	3	4
3	2	1	4
4	mielivaltainen		

Taulukko 2: Huonetoveri ongelman mieltymykset [3, s. 164]

Taulukko 2 edustaa peliä jossa ei ole yhtään vakaata pariutusta. Kolmessa mahdollisessa pariutuksessa meillä on vastaavasti parit $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ ja nämä ovat vastaavasti estetty seuraavilla pareilla: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 1\}$.

Käydään algoritmin toiminta yleisellä tasolla läpi.

Algoritmi 17. Merkintöjä poistetaan etenevästi mieltymyslistoilta kunnes jompikumpi päättävistä ehdoista toteutuu [3, s. 165].

1. Jokin mieltymyslistoista tyhjenee tarkoittaen, että yhtäkään vakaata pariutusta ei ole kyseiselle pelille, tai
2. jokainen lista on sievennetty yhteen merkintään, missä tapauksessa nämä merkinnät koostavat vakaan pariutuksen.

10 Sovellukset

10.1 Elinluovutus

Alkuperäisessä sovelluksessa molemmat osapuolet ovat aktiivisia parin haun osalta. Elinluovutusten yhteydessä päätösten tekeminen on yksipuolista

sillä ainoa asia joka vaikuttaa parien vakauteen on elimen yhteensopivuus vastaanottajalle. Voi olla tilanne jossa A haluaa luovuttaa elimen A' :lle ja B luovuttaa B' :lle, mutta erinäisten epäsopevuuksien takia eivät he voi luovuttaa toisilleen elintä. Jos luovuttajan A elin sopii potilaalle B' ja B :n elin sopii potilaalle B' voidaan järjestää tilanne, jossa A luovuttaa B' :lle ja B luovuttaa A' :lle. Tästä syntyy eräänlaisia ketjuja tai *syklejä* joilla saadaan jokaiselle osallistuvalla potilaalla elin ja näin ollen lyhennettyä elinjonotusta muille potilaille. Esimerkiksi munuaistenluovutuksissa on olemassa kaksi lähdettä munuaisille siirtoa varten:

1. Ruumis elinluovutukset, ja
2. Elävät munuaisluovutukset sukulaisilta, puolisolta tai muilta luovuttajilta. [5, s. 6]

Algoritmiä 17 ja vakaa huonetoveri -ongelmaa joudutaan kuitenkin hie-
man muokkaamaan tätä sovellusta varten. Alkio tai "henkilö"tässä tapaukses-
sa on vastaanottaja-luovuttaja kaksikko, jotka eivät voi luovuttaa toisilleen,
eli x, y on neljän henkilön pari. Toinen muutos on tapaus jossa mikään elin ei
sovi vastaanottajalle, jos näin käy pidetään häntä odotuslistalla kunnes sopiva
löytyy. Jos on olemassa luovuttaja-vastaanottaja kaksikot A, A', B, B', C, C' ,
jotka haluavat luovuttaa toisillensa elimen, mutta eivät syystä tai toisesta
voi, voidaan muodostaa vaihtosykli parien välille. Suora vaihtosykli ei aina
kelpaa, koska esimerkiksi A :n elin voi sopia B' :lle, mutta B :n elin ei sovi
kummallekkaan A' tai C' :lle, jos näin tapahtuu asetetaan A' ja C' korkealla
prioriteetillä jonotuslistaan.

Kriteereihin joiden mukaan munuaisia luovutetaan ovat mm. seuraavat,
verityyppi, HLA-molekyylien sopivuus (*HLA antigen-match*), odotusaika ja
munuaisen luovutuspaikka. Munuainen tarjotaan potilaalle jolla on korkein
prioriteetti. Mediaani odotusaika ruumiselinluovutukselle on kolme vuotta
ja se on kasvamassa [5, s. 7]. Tästä syystä läheisten luovutukset ovat olleet
nousussa ja jonojen helpottamiseksi käytetään yllä esiteltyä algoritmiä syklien
muodostamiseksi. Kun syklien potilaat ovat saaneet munuaisensa poistuvat
he luonnollisesti jonosta ja helpottavat potilaiden tilannetta joilla ei ole
läheistä luovuttajaa ja ovat ruumis luovuttajien varassa.

10.2 Koulujen valinnat

Alkuperäinen Galen ja Shapleyn artikkeli [2] aloitettiin esittämällä koulujen
valinta kysymys. Ongelmana oli pariuttaa opiskelija ja oppilaitokset keske-
nään, niin että saatiin molempia tyydyttävä pariutus ja siitä seuraava vakaus.
Tehtävänä on jakaa n hakijaa m määrään kouluja, missä q_i on i :nnen koulun
kiintiö. Opiskelija pistää koulut järjestykseen aloittaen suosikistaan. Koulut
tekevät samoin ja järjestävät hakevat opiskelijat. Gale-Shapley-algoritmi
ratkaisee tämän, mutta se tuottaa aina jommallekummalle optimoituja tu-
loksia, eli tilanteessa, jossa meillä on kaksi opiskelijaa ja kaksi koulua ja

preferenssit menevät juuri päinvastoin, päädytään tilanteeseen jossa voi olla kaksi vakaata pariutusta, mutta toinen on optimoitu opiskelijalle ja toinen kouluille.

10.3 Lääketieteen opiskelijat ja opetussairaalat

Jo ennen Gale–Shapley-algoritmiä ja ongelman formalisointia amerikkalainen AAMC (Association of American Medical Colleges) ja AHA (American Hospital Association) ratkaisivat vakaa avioliitto -ongelman käyttämällä NIMP (National Intern Matching Program) -pariutusalgoritmiä. Tätä käytetään vielä nykyäänkin opiskelijoiden ja sairaaloiden pariutuksessa [4]. Tehtävänä on pariuttaa opiskelija opetussairaalaan hänen ja sairaalan preferenssien mukaan ja sellaisenaan se tuottaa sairaalalle optimoituja pariutuksia.

Tilannetta ennen NIMP-algoritmiä voidaan mallintaa usean-agentin van-
gin dilemmalla [4], jossa sairaalat kilpailivat oppilaista ja yrittivät saada heitä harjoittelijoiksi yhä aikaisemmin. Pahimmassa tapauksessa oppilaat olivat jaettu opetussairaaloille jopa kaksi vuotta ennen harjoittelun alkua. Tästä seurasi sitä, että sairaalat eivät tienneet oppilaiden kiinnostuksia ja opiskelumenestystä, joten sairaala-oppilas pariutuksissa nähtiin hyvin paljon epävakautta, missä oppilas ei halunnut harjoitella kyseisessä sairaalassa tai sairaala ei katsonut oppilaan olevan tarpeeksi hyvä sairaalalle. Tämä valintamenettely aiheutti myös ruuhkaa, sillä jos opiskelija sai paikan esimerkiksi kolmanneksi sijoitetultaan sairaalalta ja sai tiedon toiseksi sijoitetulta, että hänet on jätetty jonotuslistalle, oli hän yleensä halukas odottamaan tuota paikkaa. Oppilaat jotka hyväksyivät saamansa paikan pettyivät, jos sairaala jonka odotuslistalla he olivat tarjosivat hänelle myöhemmin paikkaa, ja sairaalat olivat tyytymättömiä, jos oppilas kieltäytyi paikasta viime hetkellä paremman paikan tarjouksen tullessa.

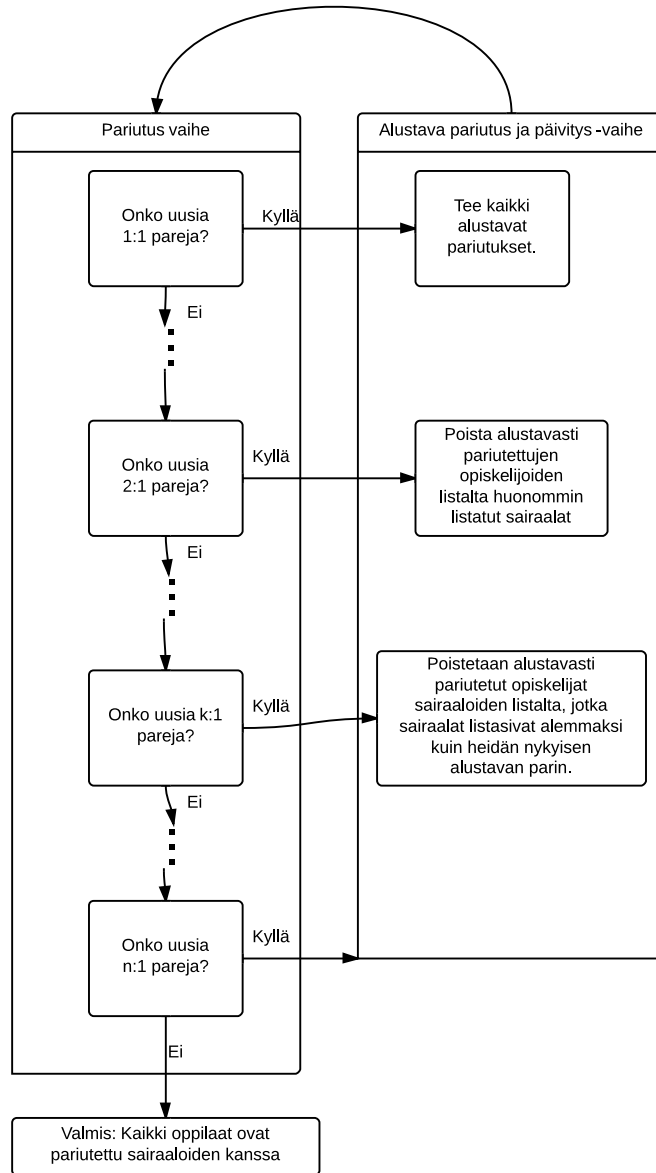
Vuoteen 1950 mennessä huomattiin, että pariutuksen viimeisessä vaiheessa oli vakavia ongelmia, juurikin pariutusten epävakauden takia. Sairaalat ja oppilaat olivat tyytymättömiä omiin pareihinsa ja valinnoissa kohdistui suuri paine oppilaalle. Ratkaisuksi ehdotettiin pariutus algoritmiä, joka otti huomioon sairaalan ja oppilaan mieltymykset, ja jo vuonna 1950 tehtiin kokeilu, jossa varsinaista pariutusta ei tehty [4], mutta jossa oppilaat ja sairaalat antoivat mieltymyksensä, kuin olisivat päättäneet lopullisia pareja. Vuodesta 1952 lähtien algoritmiä käytetään vapaaehtoisessa muodossa, sairaalat ja oppilaat ovat vapaita osallistumaan tähän pariutukseen tai löytämään harjoittelupaikkoja/harjoittelijaa omillaan. Vaikka kyseinen markkina on kokenut muutoksia tuottaa *NIMP-algoritmi* hyviä tuloksia. Jokainen sairaala luo listan hakijoista mieltymystensä mukaan, samoin oppilaat luovat listan haetuista sairaaloista omien mieltymyksien mukaan. Nämä listat prosessoidaan lista-algoritmillä jonka jälkeen ne jatkavat alustava pari ja päivitys-vaiheeseen.

Esitellään seuraavaksi NIMP-algoritmi. Algoritmin toiminta on hieman

epäselkeä, joten esitellään ennen itse algoritmiä muutama notaatio. $1 : 1$ on vaihe jossa pariutetaan opiskelija ja sairaala, jos ne ovat toistensa listojen kärjessä. $2 : 1$ vaihe tarkoittaa vaihetta jossa opiskelija pariutetaan listallaan toisena olevaan sairaalaan, jos opiskelija on ensimmäisenä sairaalan listalla. $k : 1$ vaihe on vaihe jossa jossa opiskelija pariutetaan listallaan k :nnen sairaalan kanssa, jos opiskelija on ensimmäisenä sairaalan listalla.

Algoritmi 18. (NIMP-algoritmi) [4]

1. Onko yhtään uusia $1 : 1$ pareja? Jos on niin tehdään näistä alustavia pareja ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
2. Onko uusia $2 : 1$ pareja? Jos on niin poistetaan opiskelijan listalta kaikki huonommin listatut sairaalat ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
3. Onko uusia $k : 1$ pareja? Jos on niin poistetaan alustavasti pariutetut opiskelijat sairaaloiden listalta, jotka sairaalat listasivat alemmaksi kuin heidän nykyisen alustavan parin ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
4. Onko uusia $n : 1$ pareja, missä n on maksimi määrä sairaaloita opiskelijan listalla. Jos on niin aloitetaan algoritmi alusta ja aloitetaan algoritmi alusta, muuten jatketaan.
5. Jos uusia pareja ei löydy enää mistään vaiheesta on algoritmi päättynyt ja opiskelijat ovat pariutettu vakaasti sairaaloiden kanssa.



Kuva 2: Vuokaavio Algoritmistä 18 [4, s. 1009]

Verrattuna Gale–Shapley-algoritmiin toimintaperiaate on hyvin erilainen ja monimutkainen ymmärtää, mutta molemmat tuottavat vakaita pariutuksia. Algoritmin 18 pariutuksien vakauden todistus löytyy lähteestä ja se sivuutetaan tässä.

11 Strategiat avioliittopelissä

Avioliittopeliin osallistuvan henkilön todelliset mieltymykset voivat hyvinkin erota hänen ilmoittamistaan mieltymyksistä. Mieltymykset mitkä henkilö julkisesti ilmoittaa kutsutaan strategiaksi [1, s. 592], joka muiden henkilöiden strategioiden kanssa koostavat vakaan pariutuksen kyseisessä avioliittopelissä.

Esimerkiksi olkoon meillä nainen n_1 , jonka aidot mieltymykset ovat seuraavat $m_1 > m_2 > m_3 > m_4$, pelistä ja miesten mieltymyksistä riippuen naisen on mahdollista päätyä kaikkien miesten kanssa avioliittoon. Jos nainen ilmoittaa mieltymyksikseen $m_1 > m_2$, ja ei edes harkitse avioliittoa miesten m_3 ja m_4 kanssa paranee naisen tilanne selvästi, ja avioliittopelissä hänen on mahdollista päätyä avioliittoon vain miehen m_1 tai m_2 kanssa.

Seuraavaksi näytetään, että rehellisyys on pätevä strategia, mutta mieltymysten muuntamisella voidaan saada henkilölle parempia pareja. Täytyy huomauttaa, että strategia on hyväksyttävä vain avioliittopelissä joissa hyväksytään parien kieltäminen.

Γ edustaa todellista mieltymyslistaa, joukko M' miehiä, jotka väärentelevät mieltymyksiään ja Γ' mieltymyslistaa, joka ottaa nämä väärennetyt mieltymykset huomioon M_0 on mies-optimaalinen pariutus suhteessa todellisiin mieltymyksiin Γ .

Lemma 19. [3, s. 55] *Olkoon μ pariutus ja oletetaan, että miesten joukko \mathcal{X} , jotka suosivat parejaan pariutuksessa μ kuin pariutuksessa M_0 , ei ole tyhjä. Siinä tapauksessa on olemassa mies $m \notin \mathcal{X}$ ja nainen n joka on esteperi pariutuksella μ*

Todistus. [3, s. 55] Pariutus μ on epävakaa, koska on olemassa miehiä jotka suosivat sitä enemmän kuin pariutusta M_0 , joten jonkin parin on estettävä μ . Näytetään, että jokin mies joka kuuluu joukkoon \mathcal{X} on estävässä parissa. Olkoon \mathcal{Y} joukko naisia, jotka ovat pareja miesten \mathcal{X} kanssa pariutuksessa M_0 . Todistus on jaettu kahteen tapaukseen.

Ensimmäisessä tapauksessa oletetaan, että meillä on mies m' joukosta \mathcal{X} , joka on pariutettu naiseen n joka ei ole joukosta \mathcal{Y} pariutuksessa μ . Koska m' suosii paria n verrattuna pariinsa pariutuksessa M_0 , pariutus M_0 implikoi, että n suosii $p_{M_0}(n)$ enemmän kuin m' . Mutta $n \notin \mathcal{Y}$ implikoi, että $m \notin \mathcal{X}$ ja $p_\mu(m)! = n$, joten m suosii naista n enemmän kuin $p_\mu(m)$. Näin ollen, ensimmäisessä tapauksessa, m ja n estävät pariutuksen μ ja $m \notin \mathcal{X}$.

Toisessa tapauksessa oletetaan, että jokainen mies joukosta \mathcal{X} on pariutettu pariutuksessa μ naisen kanssa joukosta \mathcal{Y} . Pariutuksen M_0 vakauden takia jokainen nainen joukosta \mathcal{Y} suosii pariaan pariutuksessa M_0 verrattuna pariutukseen μ . Missä tahansa mielivaltaisessa Gale–Shapley-algoritmin suorituksessa, jokainen tällainen yllä kuvattu nainen hylkää μ -parinsa. Oletetaan, että jossain mielivaltaisessa Gale–Shapley-algoritmin suorituksessa m' on viimeinen mies joukosta \mathcal{X} , joka tekee kosinnan, olkoon n nainen jota tämä m' kosii. Nyt $n = p_{M_0}(m')$, joten n on joukossa \mathcal{Y} . Koska n hylkäsi

miehen $p_\mu(n)$ algoritmin suorituksen aikana, on naisella n oltava jokin mies langan päässä, esimerkiksi mies m , kun m' kosii häntä. Nainen n hylkää miehen m ja hyväksyy miehen m' ja koska m jatkaa kosimalla ei se ole joukossa \mathcal{X} . Määritelmän mukaisesti m ei suosi pariaan pariutuksessa μ verrattuna pariinsa pariutuksessa M_0 , joten m suosii naista n enemmän kuin $p_\mu(m)$.

Samoin koska $m \notin \mathcal{X}$ on viimeinen mies, joka hylätään naisen n toimesta, suorituksen aikana jolloin tuotetaan pariutus M_0 , ja $n \in \mathcal{Y}$ hylkäsi $p_\mu(n) \in \mathcal{X}$ suorituksen aikana, niin n suosii miestä m enemmän kuin miestä $p_\mu(n)$. Näin ollen kaksikko m ja n estävät pariutuksen μ ja $m \notin \mathcal{X}$, kuten haluttiin. \square

Lause 20. [1, s. 593] *Oletetaan, että Γ edustaa jokaisen henkilön aitoa mieltymystä ja Γ' samoin, paitsi miesten M' osajoukon, joilla on vaihtoehtoinen mieltymys Γ' :ssa. Ei ole olemassa vakaata pariutusta μ' Γ' :ssa jota kaikki miehet pitäisivät parempana kuin pariutusta μ .*

Todistus. Oletetaan, että pariutus μ on miellyttävämpi kuin pariutus μ' miehille $m \in M' \subset M$. Lemman 19 mukaan täytyy olla olemassa pari m ja n missä $m \notin M'$, joka estää pariutuksen μ mieltymyksillä Γ . Mutta miehen m ja naisen n strategiat ovat identtiset joukoissa Γ ja Γ' , joten m ja n on estepari myös mieltymyksellä Γ' . \square

Monessa avioliittopelissä tuloksia voidaan muunnella strategioilla vain silloin kun jokin osajoukko henkilöistä vääristelee yhdessä mieltymyksiä, eli he muodostavat *koalition* ja tuottavat itselleen ja koalitiolle parempia pariutuksia.

Lause 21. [3, s. 58] *Vaikka käytetään nais-orientoitunutta Gale–Shapley-algoritmiä (naiset kosii, miehet päättää), voivat miehet pakottaa algoritmin tuottamaan mies-optimaalisia tuloksia antamalla väärennettyjä mieltymyksiä.*

Todistus. Jokainen mies m väärentää mieltymyslistansa. Nämä miehet ilmoittavat, että huonompi nainen kuin $p_{M_0}(m)$ on hylättävä ja ei sovi miehelle pariksi, tämä tuottaa mieltymyslistan Γ' . Jos mies-orientoitunutta Gale–Shapley-algoritmiä käytetään mieltymyksille Γ' se tuottaa M_0 , mies-optimaalisen pariutuksen mieltymyksille Γ . Edelleen, koska pariutuksessa M_0 jokaisella miehellä on huonoin mahdollinen pari suhteessa mieltymyslistaan Γ' , on se ainoa mahdollinen vakaa pariutus tässä kontekstissa. Näin ollen M_0 on vakaa pariutus jonka nais-orientoitunut Gale–Shapley-algoritmi tuottaa suhteessa mieltymyksiin Γ' . \square

Ylläolevalla strategialla on eräs vakaus ominaisuus joka rohkaisee miehiä toteuttamaan sovittu strategia. Oletetaan, että miehet sopivat keskenään ylläolevan kaltaisesta strategiasta, mutta ennen kuin väärennetty mieltymyslista julkaistaan jokin osajoukko koalitiosta päättää pettää koalition. Nämä miehet olettavat, että loput koalition miehet toteuttavat alkuperäisen strategian ja naiset antavat todelliset mieltymyksensä. Ongelmana pettäjillä on

löytää optimoitu mieltymyslista, joka tuottaa heille vielä parempia pareja. Vaikka tällaista petosta ei tapahtuisi jokainen mies voi olla huolissaan, että tällainen petos tapahtuu hänen selkensä takana ja epäröi osallistumistaan alkuperäiseen strategiaan, jossa kaikki miehet antoivat väärennetyt mieltymyslistat. Seuraava lause kertoo, että koalition on turha etsiä parempaa strategiaa ja näin ollen miesten ei tarvitse huolehtia petoksista koalitioidissa [3].

Lemma 22. [3, s. 56] *Ei ole olemassa vakaata pariutuksia suhteessa mieltymyksiin M' , missä jokainen mies joukosta M' saa parin jota suosii ehdottomasti enemmän kuin pariaan pariutuksessa M_0 .*

Todistus. [3, s. 56] Olkoon μ pariutus missä jokin joukko miehiä $M' \supseteq M$ saavat parit joita he suosivat enemmän kuin pariaan pariutuksessa M_0 . Lemman 19 mukaan on olemassa kaksikko m ja n , joka estää pariutuksen μ suhteessa mieltymyksiin Γ , niin että m ei ole joukossa M' . Mutta nyt m ei ole joukossa M , joten Γ' sisältää molempien, miehen m ja naisen n , todelliset mieltymykset, ja näin ollen heidän on estettävä pariutus μ myös suhteessa mieltymyksiin Γ' . Joten ei ole olemassa vakaata pariutusta missä jokainen mies joukosta M parantaisi hänen pariaan verrattuna pariutukseen M_0 . \square

Lause 23. [3, s. 58] *Olkoon M' miesten osajoukko ja olkoon μ mikä tahansa pariutus missä jokainen mies joukosta M' suosii μ -pariaan enemmän kuin M_0 -pariaan. Olettaen, että jokainen mies joka ei ole joukossa M' ilmoittaa hänen Γ' listansa, ja jokainen nainen ilmoittaa heidän Γ listansa, ei ole olemassa sellaista listojen joukkoja minkä M' voi ilmoittaa niin että μ olisi vakaa suhteessa ilmoitettuihin listoihin.*

Todistus. Oletetaan, että jokin osajoukko joukosta M' väärentää heidän sovitut mieltymyslistat luomalla mieltymykset $\Gamma_{M'}$ aikaisemman ja sovitun Γ' mieltymyslistan sijaan. Nyt M_0 on ainoa vakaa pariutus mieltymyksille Γ' , joten se on siis mies-optimaalinen pariutus molemmissa Γ :ssa ja Γ' :ssa. Näin ollen jos miehet joukossa M' parantelevat pariaan, suhteessa mieltymyksiin Γ , petoksen johdosta on kaikkien heidän saatava paremmat parit verrattuna mies-optimaaliseen pariutukseen mieltymyksillä Γ' . Mutta lemma 22 nojalla miesten joukossa M' on mahdotonta ehdottomasti parantaa pariaan mieltymyksillä Γ' valehtelemalla. \square

Lähteet

- [1] Balinski, Michel ja Ratier, Guillaume: *Of Stable Marriages and Graphs, and Strategy and Polytopes*. SIAM Rev., 39(4):575–604, 1997.
- [2] Gale, D. ja Shapley, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15, 1962.

- [3] Gusfield, D. ja Irving, R.W.: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. Foundations of Computing Series. MIT Press, 1989, ISBN 9780262071185.
- [4] Roth, Alvin E: *The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory*. Journal of Political Economy, 92(6):991–1016, 1984.
- [5] Roth, Alvin E., Sonmez, Tayfun ja Unver, M. Utku: *Kidney Exchange*. tekninen raportti, National Bureau of Economic Research, 2003.