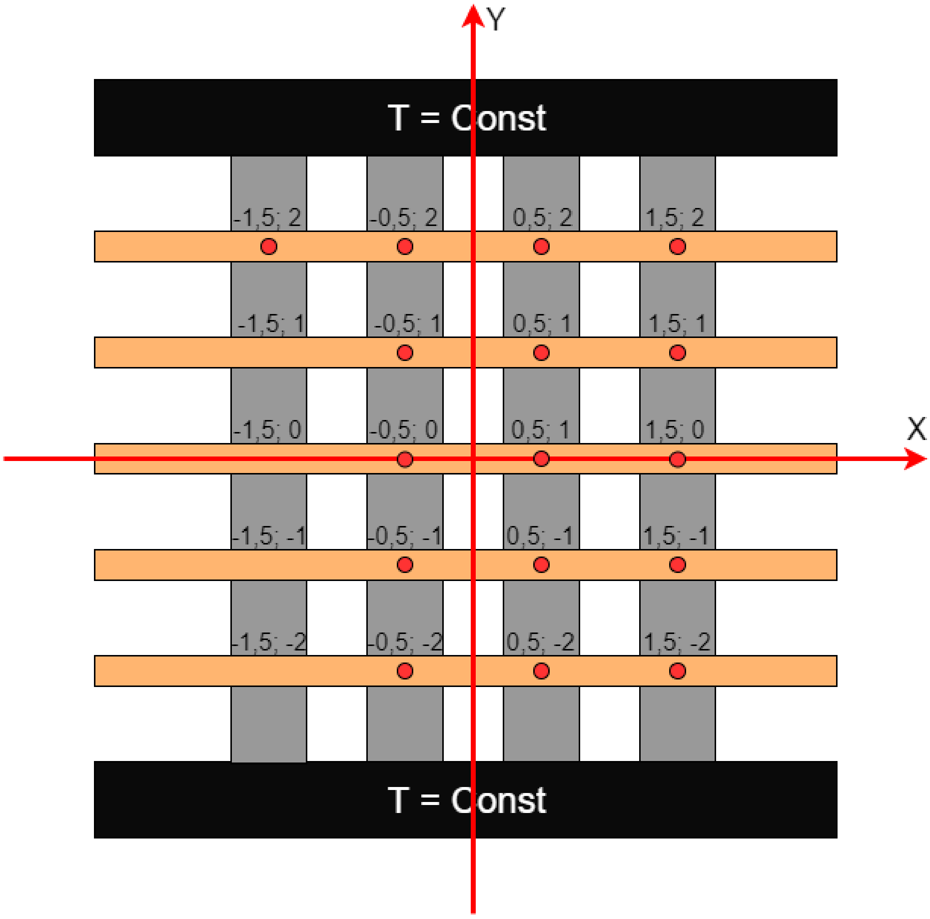
Постановка задачи

Целью данной работы является моделирование процесса нагревания сетки стержней, пересекающихся в заданных точках.

Тела сверху и снизу поддерживаются при постоянной температуре. Границы горизонтальных стержней сохраняют изначальную температуру, имитируя бесконечный стержень.

В центре находится излучатель, нагревающий стержни.

1 Модель



2 Разностная схема

Вводим функцию температуры, линейно зависящую от интенсивности нагрева стержней:

$$T = k\frac{q}{xy} \tag{1}$$

Где q – интенсивность нагрева и k – коэффициент пропорциональности.

Общий вид уравнения распространения тепла в однородном стержне:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta \mathrm{T} \tag{2}$$

Где Δ - оператор Лапласа.

В случае двумерного пространства дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \qquad (3)$$

Где a^2- коэффициент температуропроводности.

Будем решать данное уравнение на основе метода центральных разностей.

С учетом следующих формул центральных разностей:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{{T_{x,y}}^{t} - {T_{x,y}}^{t-1}}{\Delta \mathrm{t}} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{{T_{x+1,y}}^{t} - 2{T_{x,y}}^{t} + {T_{x-1,y}}^{t}}{\Delta x^2} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{{T_{x,y+1}}^{t} - 2{T_{x,y}}^{t} + {T_{x,y-1}}^{t}}{\Delta y^2} \qquad (6)$$

А также того обстоятельства, что $\Delta x = \Delta y = \lambda$

Преобразуем дифференциальное уравнение в частных производных (3) к конечно-разностному виду:

$$\frac{{T_{x,y}}^{t} - {T_{x,y}}^{t-1}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{a^2}{\lambda^2} ({T_{x+1,y}}^{t} - 2{T_{x,y}}^{t} + {T_{x-1,y}}^{t} + {T_{x,y+1}}^{t} - 2{T_{x,y}}^{t} + {T_{x,y-1}}^{t} \qquad (7)$$

Где t – текущий момент времени, t-1 – предыдущий момент времени, x и y – координаты точки на сетке.

Таким образом температура в текущий момент времени для внутренних точек сетки будет определяться на основании (7):

$${T_{x,y}}^{t} = \frac{a^2 \Delta \mathrm{t}}{\lambda^2} ({T_{x+1,y}}^{t} - 2{T_{x,y}}^{t} + {T_{x-1,y}}^{t} + {T_{x,y+1}}^{t} - 2{T_{x,y}}^{t} + {T_{x,y-1}}^{t}) + {T_{x,y}}^{t-1} \qquad (8)$$

3 Начальные условия

$$t = 0 : T = T_0$$

$$\Delta t = 1$$

$$T(x; y = 3\lambda) = 100$$

$$\mathrm{T}(x; y = -3\lambda) = 100$$

4 Граничные условия

$$T(x; y = 3\lambda) = \mathrm{a}$$

$$\mathrm{T}(x; y = -3\lambda) = b$$

$$dT(x = 2{,}5\lambda; y) = \mathrm{dT}(x = -2{,}5\lambda; y) = 0$$

5 Расчет нагрева

$$dT = \mathrm{P} * \mathrm{S} * \mathrm{dt} / \mathrm{C} / \mathrm{m} = \mathrm{P} * (\text{пи} * \mathrm{r} * \mathrm{dx}) * \mathrm{dt} / \mathrm{C} / (\rho * \text{пи} * \mathrm{r2} * \mathrm{dx}) = \mathrm{P} * \mathrm{dt} / (\mathrm{C} * \mathrm{r} * \rho)$$

Где:

- P (дж/(м^2*с)) – мощность излучения лампы.
- S (м^2) – площадь поверхности отрезка стержня
- dt (с) – изменение времени за один шаг
- C (Дж/(кг * К)) – теплоемкость материала стержня
- m (Кг) – масса отрезка стержня