MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ E DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE PHYSIQUE

Corrigé de quelques exercices du module : Vibration et Ondes

Ladjeroud Aniss et Ouatizerga Abdelaziz

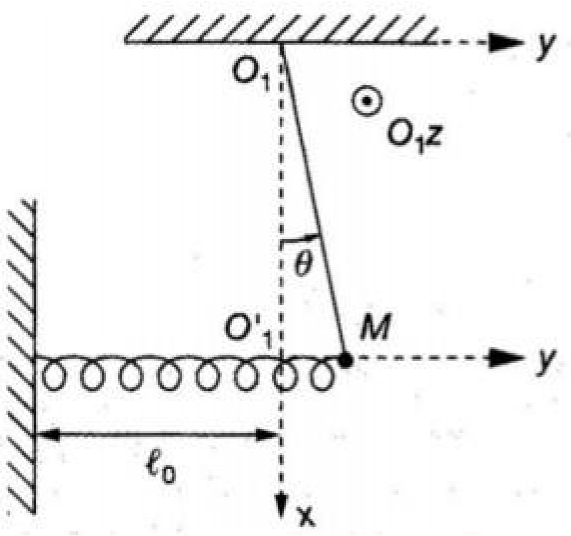


Table of Contents

Chapitre 1

Oscillations libres de systèmes à un degré de liberté

Exercice 1

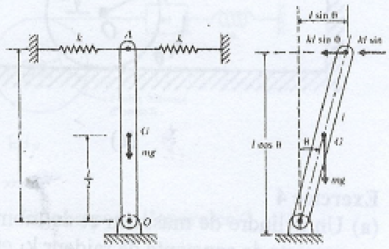
Énoncé

Exercice 1 :

On considère une barre rigide uniforme qui pivote à une extrémité et qui est connectée symétriquement par deux ressorts à l'autre extrémité, comme le montre la figure. On suppose la masse de la barre égale à m et les ressorts au repos lorsque la barre est verticale.

(a) Établir l'équation du mouvement du système.

(b) Donner et discuter la solution dans les trois cas qui se présentent.



(b)
Figure pour l'exercice 1

Corrigé

(a)-Équation du mouvement :
Calculons l'énergie cinétique de ce système

$$T = T_{rotation} + T_{translation} \tag{1.1}$$

La barre fait un mouvement de rotation uniquement, ce qui permet d'écrire que $T_{translation} = 0$.
Utilisons à présent la définition de l'énergie cinétique de rotation

$$T_{rotation} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \tag{1.2}$$

Où J est le moment d'inertie de la barre.
Étant donné que l'axe de rotation dans ce cas n'est pas le centre de la barre nous utilisons le théorème de Huygens

$$J_\Delta = J_0 + md^2 \tag{1.3}$$

Où J_0 est le moment d'inertie de la barre au centre, il vaut $J_0 = \frac{ml^2}{12}$.
m étant la masse de la barre et d la distance entre les deux axes de rotation
Nous obtenons après ce calcul ($d = \frac{l}{2}$ pour l'extrémité de la barre)

$$J_\Delta = \frac{ml^2}{3} \tag{1.4}$$

On obtient pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}(\frac{ml^2}{3})\dot{\theta}^2 \tag{1.5}$$

Calculons à présent l'énergie potentielle, celle-ci admet deux contributions

$$V = V_{ressorts} + V_{gravitation} \tag{1.6}$$

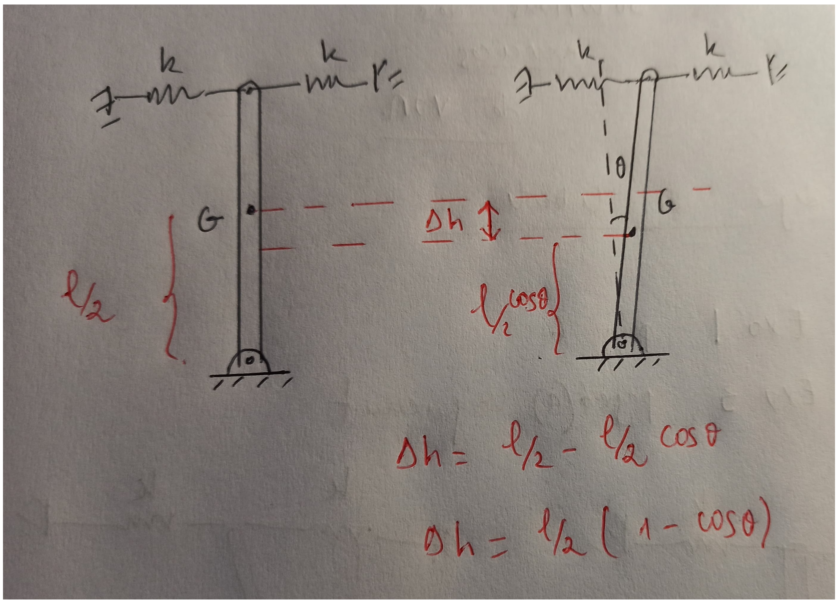
Un des ressorts est dilaté d'une distance $l\theta$ tans-dis que l'autre est compressé de la même distance

$$V_{ressorts} = \frac{1}{2}(2k)(l\theta)^2 \tag{1.7}$$

L'énergie potentielle de gravitation est donnée par la relation

$$V_{gravitation} = -mg\Delta h \tag{1.8}$$

Le signe (-) est du au fait que la barre perd de l'énergie potentielle de gravité



Nous obtenons donc

$$V_{gravitation} = mg\frac{l}{2}(1 - cos(\theta)) \tag{1.9}$$

Celle-ci s'écrit dans le cas des faibles angles (approximation utilisée dans tous les chapitres)

$$cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + ... \tag{1.10}$$

Nous obtenons alors l'expression finale de l'énergie potentielle qui s'écrit

$$V = \frac{1}{2}(2k)(l\theta)^2 - mg\frac{l}{2}\frac{\theta^2}{2} \tag{1.11}$$

On en déduit facilement le Lagrangien qui vaut

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\frac{ml^2}{3})\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(2kl^2 - \frac{mgl}{2})\theta^2 \tag{1.12}$$

Utilisons l'équation de lagrange pour obtenir l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{1.13}$$

La première dérivée entre parenthèses n'affecte que les termes en $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta} \tag{1.14}$$

La dérivée temporelle est simple à calculer

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} \tag{1.15}$$

La dernière dérivée donne

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(2kl^2 - \frac{mgl}{2})\theta \tag{1.16}$$

On obtient finalement l'équation du mouvement

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + (2kl^2 - \frac{mgl}{2})\theta = 0 \tag{1.17}$$

Qui s'écrit aussi

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{1.18}$$

Avec $\omega_0^2 = (\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l})$
(b)- Solutions de l'équation
3 cas se présentent ici
Premier cas :($\omega_0 > 0$)
Ce cas correspond physiquement à un phénomène d'oscillation et la solution est donnée par

$$\theta(t) = Acos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.19}$$

Avec A et ϕ des constantes d'intégration
Second cas :(ω_0=0)
L'équation devient

$$\ddot{\theta} = 0 \tag{1.20}$$

Ce qui donne comme solution

$$\theta(t) = At + B \tag{1.21}$$

Où A et B sont des constantes d'intégration, il est évident que ce cas n'est pas un phénomène d'oscillation
Dernier cas :($\omega_0 < 0$)
On pose $\omega_0^2 = -\lambda^2$ l'équation devient

$$\ddot{\theta} - \lambda^2\theta = 0 \tag{1.22}$$

L'équation admet une solution de la forme

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t} + Be^{\lambda t} \tag{1.23}$$

Il est aussi évident que ça ne correspond pas à un phénomène d'oscillation
L'oscillation n'est possible que dans le premier cas
Une pulsation est une grandeur physique POSITIVE

Exercice 2

Énoncé

Exercice 2 :
Un marteau percute une enclume avec une vitesse de 20 m/s (figure). Le marteau et l'enclume pèsent 50N et 500N respectivement. L'enclume est supporté par quatre ressorts chacun de raideur k=20 kN/m. Trouver le mouvement résultant de l'enclume :
(a) Si le marteau reste en contact avec l'enclume
(b) Si le marteau ne reste pas en contact avec l'enclume après le contact initial.

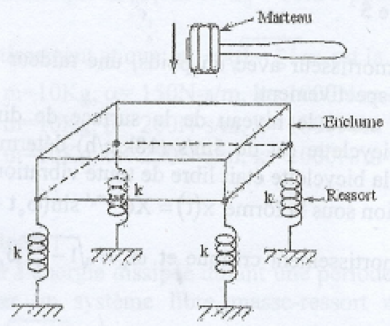


Figure pour l'exercice 2

Solution

Cas (a) (Avec le marteau):
Calculons l'énergie cinétique de ce système

$$T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 \tag{1.24}$$

Où m est la masse du marteau et M celle de l'enclume L'énergie potentielle de ce système est donnée par

$$V = \frac{1}{2}(4k)x^2 \tag{1.25}$$

On en déduit le Lagrangien du système

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(4k)x^2 \tag{1.26}$$

L'équation du mouvement est alors obtenue en appliquant l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1.27}$$

On obtient finalement

$$\ddot{x} + \frac{4k}{m+M}x = 0 \tag{1.28}$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m+M}}$
AN: $\omega_0 = 37.78s^{-1}$ La solution de cette équation est donnée par

$$x(t) = Acos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.29}$$

A et ϕ sont des constantes d'intégration elles sont calculées à l'aide des conditions initiales

$$x(t=0) = x_0 \tag{1.30}$$

$$\dot{x(t=0)} = \dot{x}_0 \tag{1.31}$$

Ces deux dernières conditions permettent d'écrire que

$$Acos(\phi) = x_0 \tag{1.32}$$

$$-\omega_0 Asin(\phi) = \dot{x}_0 \tag{1.33}$$

Divisons l'équation 1.33 par l'équation 1.32 nous obtenons

$$-\omega_0 tg(\phi) = \frac{\dot{x}_0}{x_0} \tag{1.34}$$

On en déduit que

$$\phi = -Arctg(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0}) \tag{1.35}$$

Pour calculer la constante A, il suffit d'utiliser la relation trigonométrique

$$cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1 \tag{1.36}$$

Pour cela il faut diviser l'équation 1.33 par ω_0 et calculer ensuite la quantité (equation 1.32)^2+(equation 1.33)^2 Nous obtenons

$$A^2(cos^2(\phi) + sin^2(\phi)) = x_0^2 + \frac{\dot{x_0}^2}{\omega_0} \tag{1.37}$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{\dot{x_0}^2}{\omega_0} \tag{1.38}$$

On en déduit l'expression de la constante A

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x_0}^2}{\omega_0}} \tag{1.39}$$

Cas (b) (Sans le marteau):
Un même travail est appliqué au système sans marteau mais en ne considérant que M (la masse de l'enclume) dans les équation.
L'équation du mouvement est donnée par

$$M\ddot{x} + 4kx = 0 \tag{1.40}$$

Exercice 3

Énoncé

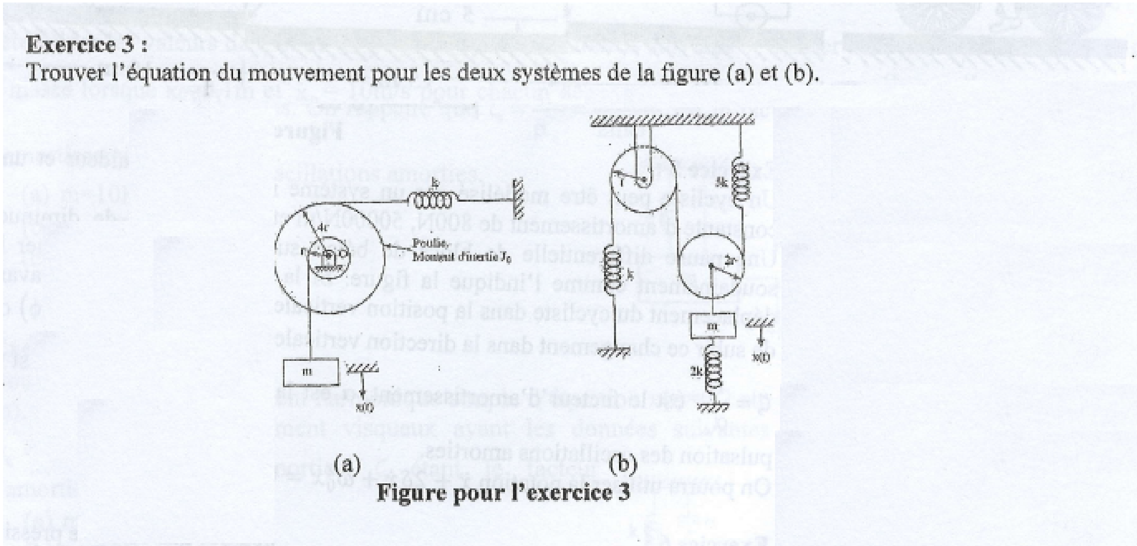

Exercice 3 :
Trouver l'équation du mouvement pour les deux systèmes de la figure (a) et (b).

Figure pour l'exercice 3

Solution

Cas (a):
Calculons d'abord l'énergie cinétique du système

$$T = T_{masse} + T_{Poulie} \tag{1.41}$$

La masse m fait un mouvement de translation le long de l'axe x tans-dis que la grande poulie tourne (mouvement de rotation) en son centre. La petite poulie est de masse négligeable (un objet de masse négligeable n'a ni énergie cinétique ni énergie potentielle) Il faut trouver une relation entre l'angle avec lequel tourne la poulie et la coordonné x on pose $x = r\theta$ Quand la petite poulie tourne d'un angle θ la masse avance d'une distance x

$$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 \tag{1.42}$$

Pour l'énergie potentielle, seul l'énergie potentielle élastique est prise en considération.
Le ressort est comprimé d'une distance $4r\theta$ car il est attaché à la grande poulie

$$V = \frac{1}{2}k(4r\theta)^2 \tag{1.43}$$

Le calcul de la fonction de la grande étant simple nous obtenons

$$L = T - V = \frac{1}{2}(mr^2\dot{\theta}^2 + J_0)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(4r\theta)^2 \tag{1.44}$$

L'équation de Lagrange permet d'obtenir facilement l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{1.45}$$

$$mr^2 + J_0\ddot{\theta} + (16kr^2)\theta = 0 \tag{1.46}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{16kr^2}{mr^2 + J_0}\theta = 0 \tag{1.47}$$

Cas (b): Les poulies sont de masses négligeables.
La masse m fait un déplacement x et le ressort de raideur 2k subit une compression qui vaut 2x.
Le ressort de gauche subit une compression (où allongement) d'une distance qu'on notera x_G tans-dis que le ressort de droite subit une compression (où allongement) qui sera noté x_D
L'idée est d'exprimer x_D et x_G en fonction de x
Étant donné que la poulie fait un mouvement de rotation et de translation qui vaut au total 2x

$$x_D + x_G = 2x \tag{1.48}$$

La tension du fil reliant la poulie de gauche au ressort est donnée par

$$T_G = kx_G \tag{1.49}$$

Un raisonnement similaire est appliqué à la partie droite du système

$$T_D = 5kx_D \tag{1.50}$$

Le fil étant inextensible et les poulies de masses négligeables les deux tensions sont égales, nous obtenons

$$x_G = 5x_D \tag{1.51}$$

On remplace dans l'équation 1.48 on obtient

$$x_D = \frac{x}{3} \tag{1.52}$$

On en déduit x_G

$$x_G = \frac{5x}{3} \tag{1.53}$$

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{1.54}$$

L'énergie potentielle est donnée par

$$V = \frac{1}{2}(2k)x^2 + \frac{1}{2}k(\frac{5x}{3})^2 + \frac{1}{2}(5k)(\frac{x}{3})^2 \tag{1.55}$$

$$V = \frac{1}{2}(2k + \frac{25k}{9} + \frac{5k}{9})x^2 \tag{1.56}$$

On en déduit le Lagrangien du système

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(2k + \frac{25k}{9} + \frac{5k}{9})x^2 \tag{1.57}$$

L'équation du mouvement est donnée par

$$\ddot{x} + \frac{8k}{3m}x = 0 \tag{1.58}$$

Exercice 4

Énonce

Exercice 4 :

(a) Un cylindre de masse m et de moment d'inertie J_0 est libre de rouler sans glisser mais est retenu par deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_2 comme le montre la figure (a).
Trouver sa fréquence naturelle de vibration. Trouver la valeur de a qui maximise cette fréquence

(b) Ce cylindre est maintenant libre et pivote au point O comme le montre la figure (b).
Trouver la fréquence naturelle du système et la fréquence maximale en faisant varier la distance b.

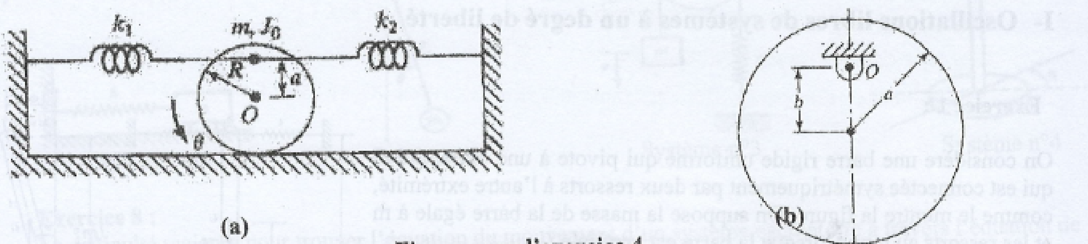


Figure pour l'exercice 4

Corrigé

Cas (a)

Calculons d'abord l'énergie cinétique du cylindre
Le cylindre étant entrain de rouler, l'énergie cinétique de ce dernier inclut la translation et la rotation

$$T = T_{Rotation} + T_{Translation} \tag{1.59}$$

Pour ce qui est de la translation, quand le cylindre tourne d'un angle θ son centre de gravité O avance d'une distance $R\theta$, On obtient donc pour l'énergie cinétique de translation

$$T_{Translation} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \tag{1.60}$$

Pour la rotation nous avons

$$T_{Rotation} = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 \tag{1.61}$$

Calculons à présent l'énergie potentielle de ce système
Le point où sont attachés les deux ressorts parcourt une distance (R+a) cela est du au fait que le cylindre fait un mouvement de rotation et translation

$$V = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(R + a)^2 \theta^2 \tag{1.62}$$

On en déduit le Lagrangien du système

$$L = T - V = \frac{1}{2}(mR^2 + J_0)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(R + a)^2 \theta^2 \tag{1.63}$$

Nous utilisons l'équation de Lagrange pour obtenir l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{1.64}$$

Et on obtient au final

$$\ddot{\theta} + \frac{(k_1 + k_2)(a + R)^2}{mR^2 + J_0}\theta = 0 \tag{1.65}$$

La fréquence propre du système est donnée par

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)(a + R)^2}{mR^2 + J_0}} \tag{1.66}$$

On demande de chercher la valeur de a qui maximise cette fréquence, il suffit de calculer la dérivée, d'annuler la dérivée et trouver la valeur de a qui annule la dérivée

$$\frac{d}{da}(\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)(a + R)^2}{mR^2 + J_0}}) = 0 \tag{1.67}$$

On obtient facilement que $a_{max} = R$

Cas (b)

Calculons d'abord l'énergie cinétique du système, celui-ci fait une rotation autour d'un axe distant de son centre d'une distance b
L'énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \tag{1.68}$$

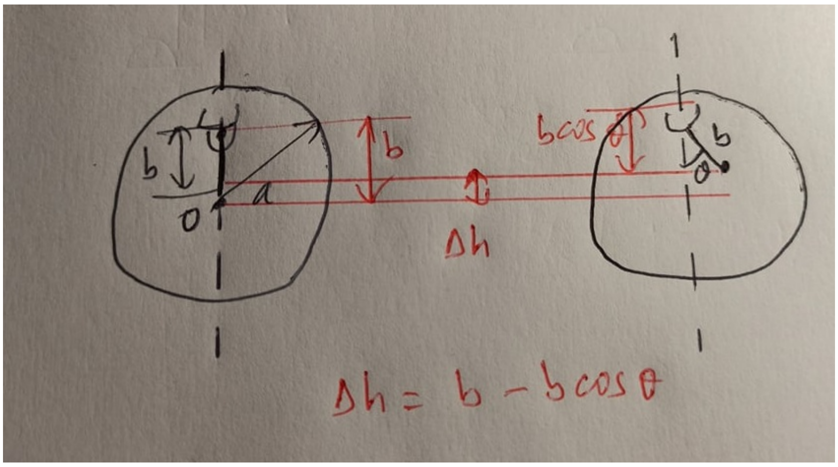
J est obtenu à l'aide du théorème de Huygens

$$J = J_0 + mb^2 \tag{1.69}$$

Où $J_0 = \frac{ma^2}{2}$ est le moment d'inertie d'un cylindre qui tourne autour d'un axe passant par son centre, on obtient

$$J = m(\frac{a^2}{2} + b^2) \tag{1.70}$$

Le calcul de l'énergie potentielle est similaire à celui de l'exercice 1



$$cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + ... \quad (1.71)$$

Nous obtenons donc après avoir développé le cosinus

$$V = mgb\frac{\theta^2}{2} \quad (1.72)$$

On en déduit le Lagrangien du système

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m(\frac{a^2}{2} + b^2))\dot{\theta}^2 - mgb\frac{\theta^2}{2} \quad (1.73)$$

L'équation de Lagrange permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (1.74)$$

On obtient au final

$$\ddot{\theta} + \frac{2gb}{a^2 + 2b^2}\theta = 0 \quad (1.75)$$

La pulsation propre du système s'écrit alors

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2gb}{a^2 + 2b^2}} \quad (1.76)$$

où encore en fonction du moment d'inertie J_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gb}{J_0 + mb^2}} \quad (1.77)$$

Il est aussi demandé quelle valeur de b maximise cette pulsation, un simple calcul de dérivée permet de répondre a cette question

$$\frac{d}{db}(\sqrt{\frac{gb}{J_0 + mb^2}}) = 0 \quad (1.78)$$

Le calcul donne

$$b_{max} = \sqrt{\frac{J_0}{m}} = +\frac{a}{\sqrt{2}} \quad (1.79)$$

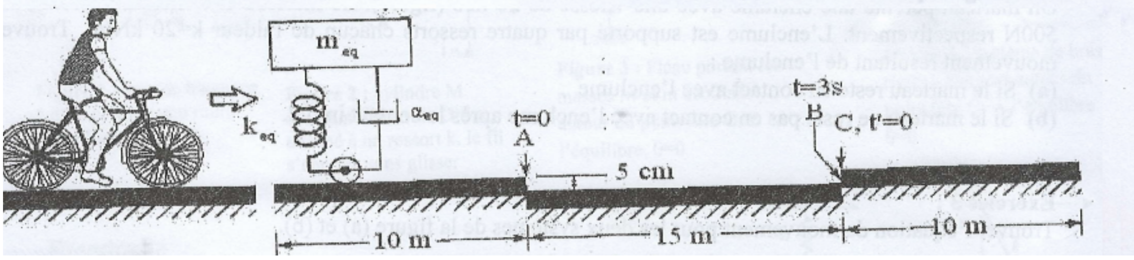
Chapitre 2

Oscillations libres de systèmes-amortis à un degré de liberté

Exercice 1

Énoncé

Un cycliste peut être modélisé par un système masse-ressort-amortisseur avec un poids, une raideur et une constante d'amortissement de 800N, 50000N/m et 1000 N.s/m, respectivement.
Une pause différentielle de blocs de béton sur l'autoroute a causé le niveau de la surface de diminuer soudainement comme l'indique la figure. Si la vitesse de la bicyclette est de 5m/s (18km/h) déterminer le déplacement du cycliste dans la position verticale, supposez que la bicyclette était libre de toute vibration avant de subir ce changement dans la direction verticale. Ecrire la solution sous la forme $x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_a t + \phi)$ où $\zeta = \frac{\alpha}{\alpha_c}$ est le facteur d'amortissement, α est la constante d'amortissement critique et $\omega_a = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$ est la pulsation des oscillations amorties.
On pourra utiliser la notation $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ qui donne



Solution

Cherchons l'équation du mouvement de ce système.
L'énergie cinétique du système s'écrit:

$$T = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 \tag{2.1}$$

L'énergie potentielle s'écrit :

$$V = \frac{1}{2}k_{eq}x^2 \tag{2.2}$$

La fonction de dissipation s'écrit :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \tag{2.3}$$

Le Lagrangien du système s'écrit :

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_{eq}x^2 \tag{2.4}$$

L'équation de Lagrange permet d'obtenir l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.5}$$

On obtient

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.6}$$

Où $\delta = \frac{\alpha}{2m_{eq}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$

L'application numérique montre que $\delta < \omega_0$.
La solution de cette équation est donc donnée par

$$x(t) = Xe^{-\delta t}sin(\omega_a t + \phi) \tag{2.7}$$

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.
Afin d'écrire la solution sous la forme demandée on pose :

$$\xi = \frac{\delta}{\omega_0} \tag{2.8}$$

On en déduit que

$$\omega_a = \sqrt{1 - \xi^2}\omega_0 \tag{2.9}$$

il suffit de remplacer dans l'équation 2.7 et nous obtenons

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t}sin(\omega_a t + \phi) \tag{2.10}$$

Utilisons les conditions initiales pour trouver A et ϕ

$$x(0) = 0.05m \tag{2.11}$$

$$\dot{x}(0) = 0m/s \tag{2.12}$$

Ces deux conditions donnent

$$Xsin(\phi) = 0.05 \tag{2.13}$$

$$X(-\delta sin(\phi) + \omega_a cos(\phi)) = 0 \tag{2.14}$$

L'équation 2.14 permet de déterminer l'angle ϕ

$$tg(\phi) = \frac{\omega_a}{\delta} \tag{2.15}$$

Pour calculer la constante X, utilisons la propriété trigonométrique

$$cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1 \tag{2.16}$$

$$sin^2(\phi)(1 + \frac{1}{tg^2(\phi)}) = 1 \tag{2.17}$$

$$sin(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{tg^2\phi}}} \tag{2.18}$$

Nous obtenons donc

$$sin(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}}} \tag{2.19}$$

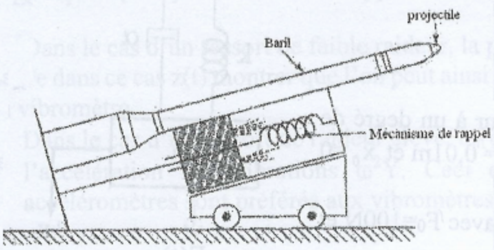
Nous obtenons finalement

$$X = 0.05\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}} \tag{2.20}$$

Exercice 2

Énoncé

Le schéma simplifié d'un canon est montré sur la figure. Quand le canon tire un boulet, des gaz de haute pression accélèrent le projectile à l'intérieur d'un baril à une vitesse très élevée. La force de réaction qui en résulte pousse le baril dans la direction opposée du projectile. Puisqu'il est désirable de ramener le baril dans la position fixe dans le temps le plus court sans oscillations, on utilise l'amortissement critique d'un système masse-ressort-amortisseur qu'on appelle le mécanisme de rappel. La distance maximum de rappel du canon est spécifiée comme étant 0,5m. Si la vitesse initiale de rappel est 10m/s et la masse du canon est 500kg. Trouver la constante de raideur du mécanisme de rappel.



Solution

Le mécanisme de rappel du canon peut être modélisé par un système masse-ressort, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.21}$$

Comme indiqué dans l'énonce, nous sommes dans un cas d'amortissement critique la solution est de la forme

$$x(t) = (At + B)e^{\delta t} \tag{2.22}$$

Cherchons les constantes A et B

$$x(0) = 0 \tag{2.23}$$

$$\dot{x}(0) = 10m/s \tag{2.24}$$

Les équation précédentes donnent

$$B = 0 \tag{2.25}$$

$$A = 10m/s \tag{2.26}$$

La solution s'écrit

$$x(t) = 10te^{-\delta t} \tag{2.27}$$

La distance maximale de rappel est caractérisé par

$$\dot{x}(t_{max}) = 0 \tag{2.28}$$

L'équation précédente permet de trouver $t_{max} = \frac{1}{\delta}$ Étant donné que la distance maximale de rappel est donnée

$$x(t_{max}) = 0.5 \tag{2.29}$$

On obtient $\delta = \frac{20}{e}s^{-1}$
Dans le cas d'un amortissement critique cette quantité est égale à la pulsation propre

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{20}{e} \tag{2.30}$$

$$k = \frac{400m}{e^2} \tag{2.31}$$

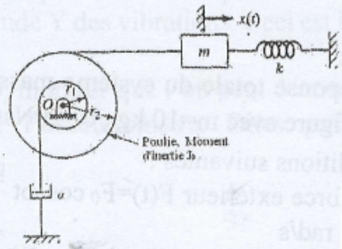
AN:
$k = 27067\frac{kg}{s^2}$

Exercice 3

Énoncé

Le système montré dans la figure a une fréquence naturelle de 5Hz pour les données suivantes. M=10Kg, J_0=5 Kg.m², r_1=10cm, r_2=25cm. Quand le système subit une perturbation qui lui donne un déplacement initial, l'amplitude de vibration libre est réduite de 80% en 10 périodes. Déterminer les valeurs de K et de α.

On rappelle que le décrément logarithmique $\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ est $\approx 2\pi\zeta$ $\sin\zeta << 1$ où ζ est le facteur d'amortissement = α/α_c.



Solution

Cherchons d'abord l'équation du mouvement de ce système
Quand la masse fait un déplacement x(t) la grande poulie tourne avec un angle θ
On peut donc écrire $x = r_2\theta$ L'énergie cinétique du système est donnée par

$$T = \frac{1}{2}(m + (\frac{J_0}{r_2^2}))\dot{x}^2 \tag{2.32}$$

L'énergie potentielle est donnée par

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.33}$$

Lorsque la masse m fait un déplacement x l'amortisseur amorti une distance x', l'idée ici est de trouver une relation entre les deux quantités

$$x = r_2\theta \tag{2.34}$$

$$x' = r_1\theta \tag{2.35}$$

De ces deux équation on peut déduire que

$$x' = \frac{r_1}{r_2}x \tag{2.36}$$

La fonction de dissipation est alors donnée par

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\frac{r_1}{r_2}\dot{x})^2 \tag{2.37}$$

L'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.38}$$

Avec

$$\delta = \frac{\alpha(\frac{r_1}{r_2})^2}{m + \frac{J_0}{r_2^2}} \tag{2.39}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{J_0}{r_2^2}}} \tag{2.40}$$

Calculons maintenant la constante de raideur du ressort

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m + \frac{J_0}{r_2^2}} \tag{2.41}$$

On donne la fréquence naturelle du système et non la pulsation, nous utilisons alors la relation suivante

$$\omega_0^2 = (2\pi f)^2 \tag{2.42}$$

On en déduit la constante de raideur

$$k = (2\pi f)^2 (m + \frac{J_0}{r_2^2}) \tag{2.43}$$

Avant de calculer le coefficient d'amortissement, calculons d'abord le décrément logarithmique

$$D_c = \frac{1}{n} ln(\frac{x(t)}{x(t+nT)}) = \delta T_a \tag{2.44}$$

où T_a est la pseudo période et n le nombre de pseudo périodes
L'amplitude à diminué de 80% après 10 périodes ce qui veut dire que

$$\frac{x(t)}{x(t+10T)} = \frac{1}{0.2} \tag{2.45}$$

Le calcul du décrément logarithmique donne alors

$$D_c = \frac{ln5}{10} \tag{2.46}$$

Trouvons une relation entre le décrément logarithmique et δ,
Étant donné que $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$

$$D_c = \delta T_a = \frac{2\pi\delta}{\omega_a} \tag{2.47}$$

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$D_c = \delta T_a = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \tag{2.48}$$

$$D_c^2(\omega_0^2 - \delta^2) = 4\pi^2\delta^2 \tag{2.49}$$

On obtient finalement

$$\delta = \frac{\omega_0 D_c}{\sqrt{4\pi^2 + D_c^2}} \tag{2.50}$$

Et on obtient finalement

$$\alpha = (m + \frac{J_0}{r_2^2})(\frac{r_2}{r_1})^2 \frac{\omega_0 D_c}{\sqrt{4\pi^2 + D_c^2}} \tag{2.51}$$

Chapitre 3

Systèmes forcés à un seul degré de liberté

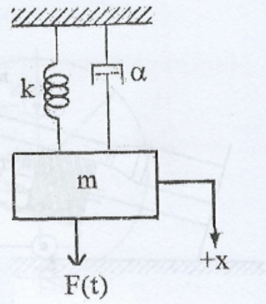
Exercice 1

Énoncé

Exercice 10 :
Trouver la réponse totale du système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté de la figure avec m=10 kg , α=20Ns/m, k=4000N/m, x_0= 0,01m et $\dot{x}_0$=0
avec les conditions suivantes :

(a) Une force extérieur $F(t)=F_0 \cos \omega t$ agit sur le système avec F_0=100N et ω=10 rad/s

(b) Les oscillations sont libres avec F(t)=0



Solution

L'équation du mouvement pour un système masse ressort est identique au cas libre mais avec un second membre dans l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F(t) \tag{3.1}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \tag{3.2}$$

Pour une force sinusoïdale $F = F_0 cos(\Omega t)$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} cos(\Omega t) \tag{3.3}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre, pour la résoudre

$$x(t) = x_{homogène} + x_{particulière} \tag{3.4}$$

la solution homogène est celle utilisé lors du chapitre précédent (pour F=0), la solution particulière est toujours de même forme que le second membre

$$x_{homogène} = Ae^{-\delta t}cos(\omega_a t + \phi) \tag{3.5}$$

$$x_{particulière} = Xcos(\Omega t + \psi) \tag{3.6}$$

Une explication détaillée sur le calcul de l'amplitude et du déphasage se trouve ici à la page 4 du document L'amplitude X est donnée par

$$X = \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \tag{3.7}$$

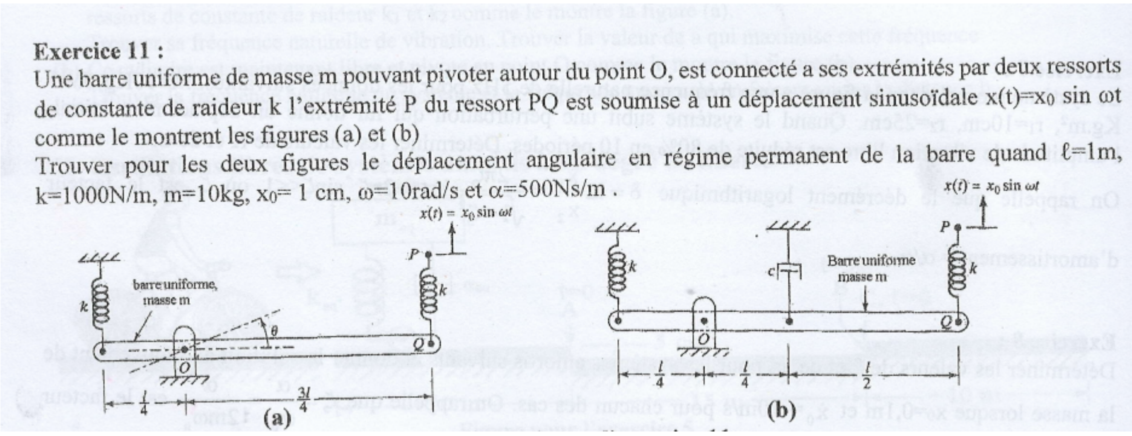
Le déphasage est donnée par

$$\psi = -Arctg(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}) \tag{3.8}$$

Dans le cas où F=0 uniquement la solution homogène est prise en considération

Exercice 2

Énoncé


Exercice 11 :
Une barre uniforme de masse m pouvant pivoter autour du point O, est connecté a ses extrémités par deux ressorts de constante de raideur k l'extrémité P du ressort PQ est soumise à un déplacement sinusoïdale $x(t)=x_0 \sin \omega t$ comme le montrent les figures (a) et (b)
Trouver pour les deux figures le déplacement angulaire en régime permanent de la barre quand ℓ=1m, k=1000N/m, m=10kg, x_0= 1 cm, ω=10rad/s et α=500Ns/m .

Solution

Cas (a):
Calcul de l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \tag{3.9}$$

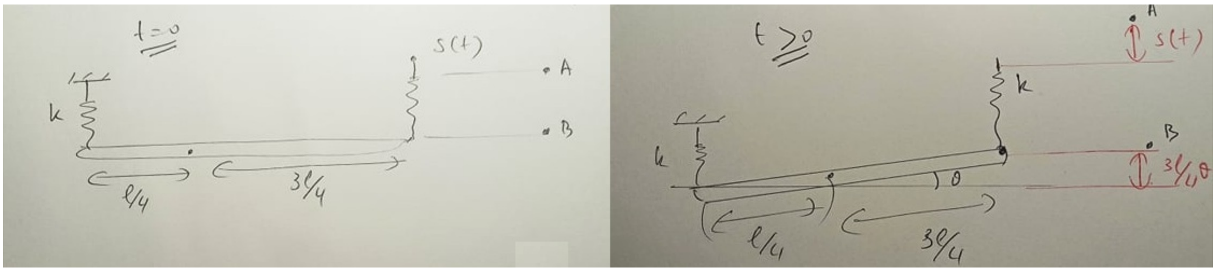
Comme la barre ne tourne pas par un axe qui passe par son centre, utilisons le théorème de Huygens.
La distance entre les deux axe vaut l/4 et la masse de la barre m

$$J = \frac{ml^2}{12} + m(\frac{l}{4})^2 = \frac{7}{48}ml^2 \tag{3.10}$$

L'énergie potentielle élastique du ressort à gauche est donnée par

$$V_G = \frac{1}{2}(\frac{l}{4}\theta)^2 \tag{3.11}$$

Pour l'énergie potentielle élastique à droite, un petit raisonnement est nécessaire.
L'extrémité en haut du ressort est tirée d'une distance s tans-dis que son autre extrémité est compressée d'une distance $\frac{3l}{4}\theta$.
Le ressort est donc tiré d'un coté et compressé d'un autre son énergie potentielle est donc exprimée en fonction de la différence des deux distances. Dans le schéma le point A monte d'une distance s(t) tans-dis que le point B monte d'une distance $\frac{3l}{4}\theta$, le ressort subit donc la différence des deux



$$V_D = \frac{1}{2}(\frac{3l}{4}\theta - s(t))^2 \tag{3.12}$$

Comme aucune force ne s'applique directement sur la barre l'équation de Lagrange est égale à zéro, mais au final après nous obtiendrons une équation avec un second membre.
Le Lagrangien du système s'écrit

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\frac{7ml^2}{48}) - \frac{1}{2}(\frac{l}{4}\theta)^2 - \frac{1}{2}(\frac{3l}{4}\theta - s(t))^2 \tag{3.13}$$

l'équation du mouvement après dérivation

$$\frac{7ml^2}{48}\ddot{\theta} + \frac{10kl^2}{16}\theta = \frac{3kl}{4}s(t) \tag{3.14}$$

En remplaçant l'expression de s(t)

$$\frac{7ml^2}{48}\ddot{\theta} + \frac{10kl^2}{16}\theta = \frac{3kl}{4}x_0 sin(\Omega t) \tag{3.15}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{30k}{m}\theta = \frac{72kx_0}{7ml}sin(\Omega t) \tag{3.16}$$

On entend par régime permanent la solution particulière de l'équation (lire ici pour les détails) La solution particulière est donnée ici par

$$\theta(t) = Asin(\Omega t + \psi) \tag{3.17}$$

Le déphasage est nul car l'amortissement est nul pour ce qui est de l'amplitude est s'écrit :

$$A = \frac{\frac{72kx_0}{7ml}}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{3.18}$$

Avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{30k}{m}} \tag{3.19}$$

Cas (b):
L'équation du mouvement est modifiée, on ajoute seulement le terme du à la dissipation d'énergie

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\frac{l}{4}\dot{\theta})^2 \tag{3.20}$$

l'équation du mouvement devient

$$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{7m} + \frac{30k}{m}\theta = \frac{72kx_0}{7ml}sin(\Omega t) \tag{3.21}$$

La solution est de la même forme, avec des termes en plus dans l'amplitude et un déphasage qui n'est pas nul

$$A = \frac{\frac{72kx_0}{7ml}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\delta\Omega)^2}} \tag{3.22}$$

$$\psi = -Arctg(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}) \tag{3.23}$$

Avec

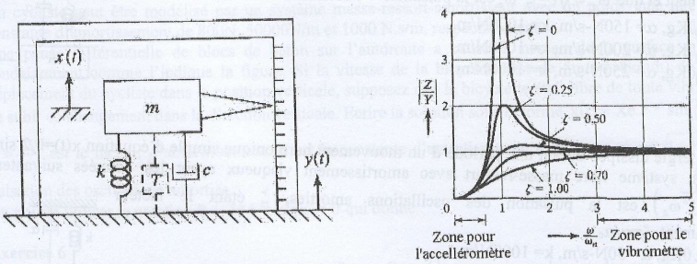
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{30k}{m}} \tag{3.24}$$

Exercice 3

Énoncé

Exercice 12 :
Le dispositif mécanique de la figure (a) est un instrument sismique qui consiste en une masse (m), un ressort (k), un amortisseur (α) et un traceur qui donne le mouvement de la masse m en fonction du temps. Soit x(t) le mouvement de la masse m et y(t) le mouvement de la base que l'on suppose de la forme y(t)=Y sin ωt.

(a) Établir l'équation du mouvement de la masse m en fonction du déplacement relatif z(t)=x(t)-y(t).



(a) **Figure pour l'exercice 12** (b)

(b) Déterminer la solution stationnaire z(t). Cette solution est donnée dans la forme z(t)=Z sin (ωt-ϕ). La variation [Z/Y] en fonction du rapport des fréquences $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ est donnée dans la figure (b)

(c) Dans le cas d'un ressort de faible raideur, la pulsation propre ω_n est petite devant la pulsation ω Écrire dans ce cas z(t) montrer que l'on peut ainsi déterminer l'amplitude Y des vibrations. Ceci est le principe du vibromètre.

(d) Dans le cas d'un ressort de raideur élevé, ω_n est grande devant ω, montrer que l'on peut déterminer ainsi l'accélération des vibrations ω^2Y. Ceci est le principe de l'accéléromètre. Dites pourquoi les accéléromètres sont préférés aux vibromètres.

Solution

a)-L'énergie cinétique du système est simple à calculer elle s'écrit

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{3.25}$$

En revanche le ressort ainsi que l'amortisseur subissent le mouvement de la masse et le mouvement de la base (une idée similaire a celle de l'exercice précédent)

$$V = \frac{1}{2}k(x-y)^2 \tag{3.26}$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}-\dot{y})^2 \tag{3.27}$$

L'équation du mouvement s'écrit simplement

$$m\ddot{x} + k(x-y) + \alpha(\dot{x}-\dot{y}) = 0 \tag{3.28}$$

Écrivons cette équation en fonction de z(t)=x(t)-y(t)

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + 2\delta\dot{z} = -\ddot{y} \tag{3.29}$$

Si on remplace explicitement $y(t) = Ysin(\Omega t)$ on obtient

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + 2\delta\dot{z} = \Omega^2 Ysin(\Omega t) \tag{3.30}$$

b)-La solution particulière est de la forme

$$z(t) = Zsin(\Omega t - \phi) \tag{3.31}$$

Tel que

$$Z = \frac{\Omega^2 Y}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4(\delta\Omega)^2}} \tag{3.32}$$

$$\phi = Arctg(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}) \tag{3.33}$$

Écrivons ces quantités en fonction de $r = \frac{\Omega}{\omega_0}$ et $\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$

$$Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4(\xi r)^2}} \tag{3.34}$$

$$\phi = Arctg(\frac{2\xi r}{(1-r^2)}) \tag{3.35}$$

c)- Si $r >> 1$ On peut lire graphiquement que $Y \approx Z$

$$z(t) \approx Ysin(\Omega t - \phi) \tag{3.36}$$

d)- Si $r << 1$
L'amplitude de la solution particulière s'écrit (le r^2 est négligé devant le 1 et $4\xi^2 r^2 \approx 0$)

$$Z \approx r^2 Y \tag{3.37}$$

$$\omega_0^2 Z \approx \Omega^2 Y = \ddot{y} \tag{3.38}$$

Chapitre 4

Systèmes libres à deux degrés de liberté

Exercice 1

Énonce

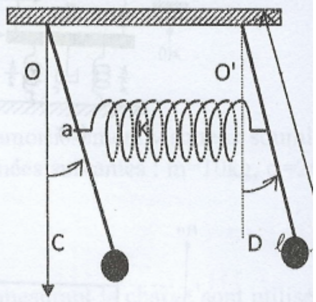
Exercice 1 :

Deux pendules simples, de même longueur ℓ, de même masse m, mobiles dans un même plan vertical, sont reliés par un ressort de raideur k; sa longueur est choisie de façon que les deux pendules soient verticaux à l'équilibre. On pose:

$OC = O'D = a$; $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}\right) = \theta_1$ et $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O'B}\right) = \theta_2$.

Les conditions initiales imposées sont les suivantes:

à $t = 0$, $\theta_1(0)=0$, $\theta_2(0)=\theta_0$, $\dot{\theta}_1(0)=\dot{\theta}_2(0)=0$.



1. On suppose que les mouvements sont des oscillations de faible amplitude. Déterminer les équations différentielles en θ_1 et θ_2 qui régissent le mouvement du système.
2. On pose $\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2$ et $\varphi_2 = \theta_1 - \theta_2$. Montrer qu'il existe un système d'équations différentielles découplées en φ_1 et φ_2. Résoudre le système dans ce cas.
3. Trouver les solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ des deux pendules et tracer les courbes donnant leur variation en fonction du temps. Que deviennent ces solutions lorsque le couplage est lâche (k faible).

Solution

1)-L'énergie cinétique du système est donnée par

$$T = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2}ml\dot{\theta}_2^{\,2} \tag{4.1}$$

L'énergie potentielle est donnée par

$$V = \frac{1}{2}mgl\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl\theta_2^2 + ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 \tag{4.2}$$

Le terme proportionnel à k est calculé de la même manière que dans l'exercice 2 du chapitre 3, une des masses compresse le ressort d'une distance $a\theta_1$ et l'autre le dilate d'une distance $a\theta_2$ la contribution du ressort est donc proportionelle à la différence des deux.
Les équations du mouvement sont obtenues à l'aide des deux équation suivantes

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (4.4)$$

On obtient :

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta_1} + (mgl + kl^2)\theta_1 - kl^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta_2} + (mgl + kl^2)\theta_2 - kl^2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

2)-Il s'agit de deux équations différentielles couplés.
On remarque que les coefficients sont égaux car le système est symétrique.
La méthode pour résoudre ce problème est la suivante:
On pose $\phi_1 = \theta_1 + \theta_2$ et $\phi_2 = \theta_1 - \theta_2$

En écrivant les deux équation en fonction de ϕ_1 et ϕ_2 on remarque que les équations se sont découplées

$$\begin{cases} \ddot{\phi_1} + \frac{g}{l}\phi_1 = 0 \\ \ddot{\phi_2} + (\frac{g}{l} + \frac{2k}{m})\phi_2 = 0 \end{cases}$$

3)-Ces équations sont simples à résoudre nous obtenons après la résolution

$$\phi_1(t) = Acos(\omega_1 t + \psi_1) \quad (4.5)$$

$$\phi_2(t) = Bcos(\omega_2 t + \psi_2) \quad (4.6)$$

Avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$
Revenons aux solution θ_1 et θ_2

$$\theta_1 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (4.7)$$

$$\theta_2 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad (4.8)$$

On remplace ϕ_1 et ϕ_2

$$\theta_1 = \frac{A}{2}cos(\omega_1 t + \psi_1) + \frac{B}{2}cos(\omega_2 t + \psi_2) \quad (4.9)$$

$$\theta_2 = \frac{A}{2}cos(\omega_1 t + \psi_1) - \frac{B}{2}cos(\omega_2 t + \psi_2) \quad (4.10)$$

Les conditions initiales permettent de calculer A,B,ψ_1 et ψ_2

$$\frac{A}{2}cos(\psi_1) + \frac{B}{2}cos(\psi_2) = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{A}{2}cos(\psi_1) - \frac{B}{2}cos(\psi_2) = \theta_0 \tag{4.12}$$

$$-\omega_1\frac{A}{2}sin(\psi_1) - -\omega_2\frac{B}{2}sin(\psi_2) = 0 \tag{4.13}$$

$$-\omega_1\frac{A}{2}sin(\psi_1) - +\omega_2\frac{B}{2}sin(\psi_2) = 0 \tag{4.14}$$

Ce système d'équations est simple à résoudre, nous obtenons après manipulation des équations $\psi_1 = \psi_2 = 0$ et $A = -B = \theta_0$ Finalement, les solutions s'écrivent :

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}(cos(\omega_1 t) - cos(\omega_2 t)) \tag{4.15}$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}(cos(\omega_1 t) + cos(\omega_2 t)) \tag{4.16}$$

Ces équations précédentes peuvent être transformées à l'aide des règles de linéarisation

$$cos(p) + cos(q) = 2cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2}) \tag{4.17}$$

$$cos(p) - cos(q) = -2sin(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2}) \tag{4.18}$$

Les deux équation précédentes peuvent s'écrire :

$$\theta_1(t) = -\theta_0(sin(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2})sin(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2})) \tag{4.19}$$

$$\theta_2(t) = \theta_0(cos(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2})cos(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2})) \tag{4.20}$$

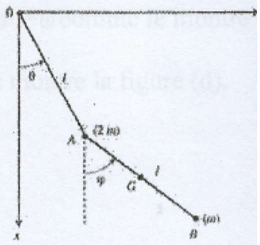
Lorsque le couplage est vraiment faible les pulsation ont des valeurs très proches, nous observons le phénomène de battements

Exercice 2

Énonce

Exercice 3 :

Un pendule double, est libre d'osciller dans le plan vertical oxy. Les tiges sont de masse négligeable et de même longueur. Elles portent les masses 2m et m. On désignera par $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ les angles respectifs que font les tiges avec la verticale descendante Ox, à l'instant t. On suppose que ce pendule double n'est soumis qu'à de petites oscillations.



(a) Etablir les deux équations du mouvement de second ordre en $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

(b) Exprimer en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ les pulsations propres ω' et ω'' des petits mouvements de ce pendule double.

(c) Trouver les rapports d'amplitude

Solution

a)-Équation du mouvement

Commençons par calculer les vitesses des deux masses (m1=2m) et (m2=m)

$$O\vec{M}_1 = \begin{cases} lsin(\theta_1) \approx l\theta_1 & (x) \\ lcos(\theta_1) \approx l & (y) \end{cases}$$

On remarque que pour la composante selon l'axe oy le développement limité du cosinus est pris au premier ordre, la raison est que, si il es pris au second ordre et qu'il est utilisé pour le calcul de l'énergie cinétique (donc sera élevé au carré $v = \frac{1}{2}mv^2$), on auras un terme d'ordre 4 qui se réduira à un terme d'ordre 3 après la dérivation l'équation de Lagrange, ce qui donne au final une équation différentielle non soluble (équation non linéaire).

On en déduit la vitesse de la première masse

$$v_1 = l\dot{\theta_1} \tag{4.21}$$

Intéressons nous à la seconde masse

$$O\vec{M}_1 = \begin{cases} lsin(\theta_1) + lsin(\theta_2) \approx l\theta_1 + l\theta_2 & (x) \\ lcos(\theta_1) + lcos(\theta_2) \approx 2l & (y) \end{cases}$$

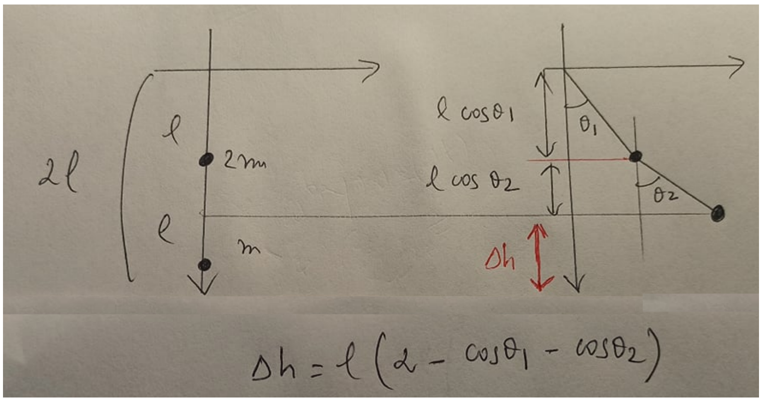
On en déduit la vitesse de la seconde masse

$$v_2 = l(\dot{\theta_1} + \dot{\theta_2}) \tag{4.22}$$

Le calcul des énergies cinétiques est à présent simple

$$T = ml^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2 + 2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}) \tag{4.23}$$

Les énergies potentielles sont de la même façon que pour un pendule simple



En développant les cosinus au second ordre (ici le second au ordre est justifié car un terme d'ordre 2 est obtenu celui-ci se réduit à un terme d'ordre 1 avec l'équation de Lagrange et l'équation est soluble)

$$V_1 = 2mgl\frac{\theta_1^2}{2} \tag{4.24}$$

$$V_2 = \frac{mgl}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) \tag{4.25}$$

On en déduit le Lagrangien du système

$$L = T - V = ml^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \frac{1}{2}mgl\theta_2^2 - \frac{3}{2}mgl\theta_1^2 \tag{4.26}$$

Appliquons les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \tag{4.27}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \tag{4.28}$$

Les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \ddot{\theta_1} + \omega_0^2\theta_1 + \frac{1}{3}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta_2} + \omega_0^2\theta_2 - \theta_1 = 0 \end{cases}$$

Remarquons que lors d'un couplage inertiel, le terme de couplage est présent dans l'énergie cinétique et une dérivée seconde apparaît dans les équations du mouvement
b)- Calculons les pulsations propres du système
On injecte des solutions de la forme:

$$\theta_1 = Acos(\omega t + \phi) \tag{4.29}$$

$$\theta_2 = Bcos(\omega t + \phi) \tag{4.30}$$

En remplaçant dans les équation nous obtenons

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A - \frac{\omega^2}{3}B = 0 \\ -\omega^2 A - (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}$$

Ces deux équation représentent un système linéaire pouvant être écrit de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -\frac{\omega_2}{3} \\ -\omega_2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système présente deux cas, Si le déterminant n'est pas nul alors A=B=0 (cas trivial) ce qui se traduit physiquement par l'absence de phénomène, cette possibilité est naturellement rejetée.
La deuxième possibilité est que le déterminant soit nul, cette considération mène à l'équation algébrique suivante

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{1}{3}\omega^4 = 0 \tag{4.31}$$

L'équation se résout simplement et on obtient (on ne s'intéresse qu'aux solutions positives car une pulsation est par définition une grandeur physique positive)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}}\omega_0 \tag{4.32}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}}\omega_0 \tag{4.33}$$

Les solutions s'obtiennent en additionnant les solutions correspondantes à chaque pulsation propre

$$\theta_1 = A_{11}cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}cos(\omega_2 t + \psi_2) \tag{4.34}$$

$$\theta_2 = A_{21}cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_{22}cos(\omega_2 t + \psi_2) \tag{4.35}$$

Étant donné que nous avons 6 inconnues A_{11},A_{12},A_{21},A_{22},ψ_1 et ψ_2 et que les conditions initiales ne représentent que 4 équations, nous devons trouver une relation entre A_{11} et A_{21} et une autre relation entre A_{12} et A_{22}

On pose $\mu_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}}$ et $\mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}}$

Pour $\omega = \omega_1$ seul la partie concernant ω_1 sera injectée dans le système et nous obtenons (une équation suffit)

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)A_{11} - \frac{\omega^2}{3}A_{21} = 0 \tag{4.36}$$

On en déduit que $\mu_1 = \sqrt{3}$
Un même travail est fait pour $\omega = \omega_2$

$$(\omega_0^2 - \omega_2^2)A_{12} - \frac{\omega^2}{3}A_{22} = 0 \tag{4.37}$$

On en déduit que $\mu_2 = -\sqrt{3}$
Les solution sont récrites en fonction des rapports μ_1 et μ_2

$$\theta_1(t) = A_{11}cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}cos(\omega_2 t + \psi_2) \tag{4.38}$$

$$\theta_2(t) = A_{11}\mu_1 cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}\mu_2 cos(\omega_2 t + \psi_2) \tag{4.39}$$

Chapitre 5

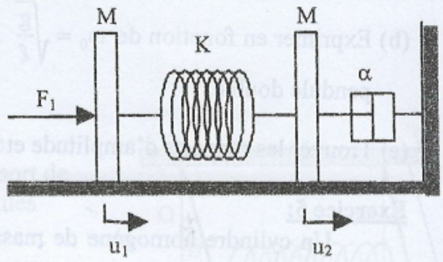
Systèmes forcés à deux degrés de liberté

Exercice 1

Énoncé

Exercice 8 :

On considère le système à deux degrés de liberté représenté par la figure ci-dessus. Il est constitué par deux masses identiques M reliées par un ressort de raideur K. La seconde masse est reliée à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, tandis que la première masse est soumise à une force sinusoïdale F_1 de pulsation ω. Les deux masses glissent sans frottement sur le plan horizontal. u_1 et u_2 représentent les positions respectives de chacune des masses par rapport à l'équilibre.



1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées u_1 et u_2.

2. Dans le cas où α est négligeable devant $\left(M\omega - \frac{K}{\omega}\right)$, calculer en régime permanent sinusoïdal l'amplitude complexe $\tilde{V}_2$ de la vitesse de la seconde masse en fonction de l'amplitude de $\tilde{F}_1$.

3. En déduire l'amplitude complexe $\tilde{F}_2$ de la force transmise à l'amortisseur.

4. Calculer le coefficient de transmission $\beta = \left|\tilde{F}_2 / \tilde{F}_1\right|$.

5. Si $\omega >> \sqrt{K/M}$ □□ montrer que le coefficient de transmission β s'écrit sous la forme :

$\beta = \dfrac{a}{M^2\omega^3}$; donner alors l'expression de a en fonction de □α □et K.

Solution

1)-Équations du mouvement :
Calculons l'énergie cinétique du système

$$T = \frac{1}{2}M\dot{u_1}^2 + \frac{1}{2}M\dot{u_2}^2 \tag{5.1}$$

Calculons maintenant l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}K(u_1 - u_2)^2 \tag{5.2}$$

Calculons enfin la fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{u_2}^2 \tag{5.3}$$

Appliquons les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{u_1}}) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = F_1 \tag{5.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{u_2}}) - \frac{\partial L}{\partial u_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{u_1}} = 0 \tag{5.5}$$

On obtient

$$\begin{cases} M\ddot{u}_1 + ku_1 - ku_2 = F(t) \\ M\ddot{u}_2 + ku_2 - ku_1 + \alpha\dot{u}_2 = 0 \end{cases}$$

2)- Solutions en régime permanent Pour

$$u_1(t) = \tilde{X_1}e^{i\omega t} \tag{5.6}$$

$$u_2(t) = \tilde{X_2}e^{i\omega t} \tag{5.7}$$

$$F(t) = \tilde{F_1}e^{i\omega t} \tag{5.8}$$

On remplace et on obtient finalement

$$\begin{cases} (k - M\omega^2)\tilde{X_1} - k\tilde{X_2} = \tilde{F_1} \\ -k\tilde{X_1} + (k - M\omega^2 + i\alpha\omega)\tilde{X_2} = 0 \end{cases}$$

Et si on néglige l'amortissement on obtient

$$\begin{cases} (k - M\omega^2)\tilde{X_1} - k\tilde{X_2} = \tilde{F_1} \\ -k\tilde{X_1} + (k - M\omega^2)\tilde{X_2} = 0 \end{cases}$$

La solution du système précédent est donnée par

$$\tilde{X_1} = \frac{\tilde{F_1}(k - M\omega^2)}{(k - M\omega^2)^2 - k^2} \tag{5.9}$$

$$\tilde{X_2} = \frac{\tilde{F_1}k}{(k - M\omega^2)^2 - k^2} \tag{5.10}$$

Calculons à présent la vitesse complexe $\tilde{V_2}$

$$\dot{u_2} = \frac{d}{dt}(u_2) = i\omega u_2 \tag{5.11}$$

On en déduit

$$\tilde{V_2} = i\omega \tilde{X}_2 \tag{5.12}$$

3)- la force transmise par l'amortisseur est par définition

$$\tilde{F_2} = \alpha \tilde{V_2} \tag{5.13}$$

$$\tilde{F_2} = \frac{i\omega\alpha k}{(k - M\omega^2)^2 - k^2} \tilde{F_1} \tag{5.14}$$

4)-Calcul du coefficient de transmission

$$\beta = |\frac{\tilde{F_2}}{\tilde{F_1}}| \tag{5.15}$$

$$\beta = \frac{\alpha\omega k}{(k - M\omega^2)^2 - k^2} \tag{5.16}$$

5)- Cas où $\omega >> \sqrt{\frac{K}{M}}$:

si $\omega >> \sqrt{\frac{K}{M}}$ alors $M\omega^2 >> K$, on peut donc négliger le K

$$(k - M\omega^2)^2 \approx M^2\omega^4 \tag{5.17}$$

On peut également négliger le K^2 dans de dénominateur ce qui donne

$$M^2\omega^4 - k^2 \approx M^2\omega^4 \tag{5.18}$$

Le coefficient β s'écrit alors

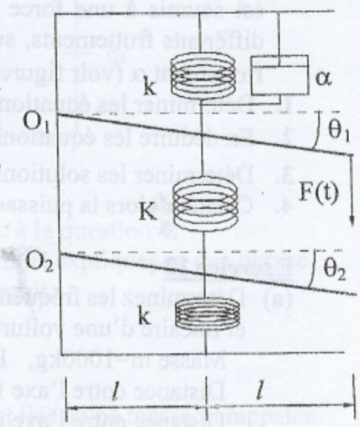
$$\beta = \frac{\alpha K}{M^2\omega^3} \tag{5.19}$$

Exercice 2

Énoncé

Exercice 10 :
Le système ci-contre est constitué de deux tiges rectilignes identiques, homogènes de masse m et de longueur $2l$. Ces deux tiges sont reliées, en leur milieu, à deux bâtis fixes par deux ressorts identiques de raideur k. De plus elles sont couplées par un ressort de raideur K. A l'équilibre les tiges sont horizontales. Elles oscillent dans un plan vertical, autour de leurs extrémités respectives O_1 et O_2 en effectuant des oscillations de faible amplitude représentées par les angles θ_1 et θ_2. On pose $y_1 = l\,\theta_1$, $y_2 = l\,\theta_2$ et $\theta_0 = \sqrt{k/m}$.

Les différents frottements supposés faibles sont représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α. Le système est soumis à une force extérieure sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω.
Cette force verticale agit sur l'extrémité de la première tige.



1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour y_1 et y_2.
2. En utilisant l'analogie force-tension, donner les équations intégro-différentielles qui régissent le système électrique analogue au système mécanique étudié. On précisera soigneusement toutes les grandeurs mécaniques et électriques respectivement analogues. En déduire le schéma électrique analogue.

Solution

1)- Calculons d'abord l'énergie cinétique du système.
Les tiges tournent autour d'un axe passant par leurs extrémités, le moment d'inertie est alors calculé à l'aide du théorème de Hyugens

$$J = \frac{m(2l)^2}{12} + ml^2 = \frac{4ml^2}{3} \tag{5.20}$$

L'énergie cinétique vaut alors

$$T = \frac{1}{2}\frac{4ml^2}{3}(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2) \tag{5.21}$$

Et en fonction de $y_1 = l\theta_1$ et $y_2 = l\theta_2$

$$T = \frac{1}{2}\frac{4m}{3}(\dot{y_1}^2 + \dot{y_2}^2) \tag{5.22}$$

L'énergie potentielle du système est donnée par

$$V = \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 + \frac{1}{2}K(y_1 - y_2)^2 \tag{5.23}$$

On en déduit le Lagrangien du système

$$L = T - V = \frac{1}{2}\frac{4m}{3}(\dot{y_1}^2 + \dot{y_2}^2) - \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 + \frac{1}{2}K(y_1 - y_2)^2 \tag{5.24}$$

La fonction de dissipation s'écrit :

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{y_1}^2 \tag{5.25}$$

On en déduit les équation du mouvement

$$\begin{cases} \frac{4m}{3}\ddot{y_1} + ky_1 + K(y_1 - y_2) + \alpha\dot{y_1} = F(t) \\ \frac{4m}{3}\ddot{y_2} + ky_2 - K(y_1 - y_2) = 0 \end{cases}$$

2)- Circuit électrique équivalent :
La méthode détaillée pour retrouver le système intégro différentiel est détaillée ici
Écrivons le système précédent dans la forme suggérée par la méthode

$$\begin{cases} \frac{4m}{3}\frac{d\dot{y_1}}{dt} + k\int \dot{y_1}dt + K\int(\dot{y_1} - \dot{y_2})dt + \alpha\dot{y_1} = F(t) \\ \frac{4m}{3}\frac{d\dot{y_2}}{dt} + k\int \dot{y_2}dt - K\int(\dot{y_1} - \dot{y_2})dt = 0 \end{cases}$$

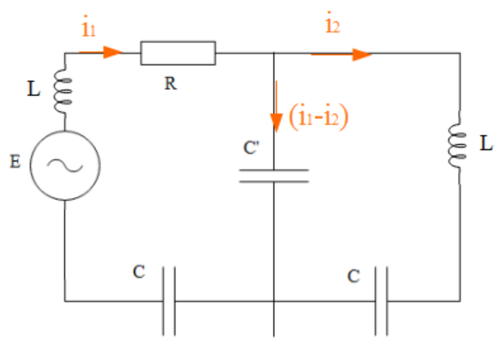
Faisons à présent l'analogie :

- $\dot{x_1}$ est équivalent à un courant d'intensité i_1
- $\dot{x_2}$ est équivalent à un courant d'intensité i_2
- La masse étant équivalente à l'inductance
- La constante de raideur est équivalente à l'inverse de la capacité d'un condensateur
- le coefficient de l'amortisseur est équivalent à une résistance
- La force dans le second membre est équivalente à la tension délivrée par un générateur

Le système intégro-différentiel est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int i_1dt + \frac{1}{C'}\int(i_1 - i_2)dt + Ri_1 = E(t) \\ L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int i_2dt - \frac{1}{C'}\int(i_1 - i_2)dt = 0 \end{cases}$$

On en déduit le schéma électrique équivalent :



Remarque :
Les équations précédentes peuvent être retrouvées facilement en appliquant les lois Kirchhoff à ce schéma électrique