Samozagađujuća populacija

Seminarski rad iz
Osnova matematičkog modeliranja

Andrijana Aleksić, Teodora Isailović i Anita Jovanović

maj 2022. godine

Profesor: Milan Dražić

Matematički fakultet u Beogradu

1 Uvod

Poznato je da neke vrste (alge, bakterije, ljudi) proizvode zagađujuće materije, tzv. toksine. Pokušajmo da izvedemo matematički model koji opisuje promenu brojnosti obe ove populacije kroz vreme.

Označićemo populaciju koju posmatramo promenljivom X, a populaciju toksina promenljivom Y. Kontinualni matematički model koji opisuje promenu brojnosti populacija X i Y kroz vreme se predstavlja sistemom diferencijalnih jednačina. Polazimo od eksponencijalnog modela rasta populacije, u kom je prirodni priraštaj obeležen konstantom $p \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dX}{dt} = p \cdot X(t)$$

Obzirom da toksini negativno utiču na prirodni priraštaj populacije, proporcionalno svojoj koncentraciji, od prirodnog priraštaja p treba oduzeti štetnost toksina $q \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{dX}{dt} = (p - q \cdot Y(t))X(t) \tag{1}$$

Posmatrajmo sada promenu količine toksina kroz vreme. Obzirom da se toksini ne razmnožavaju kao živa bića, porast broja toksina može zavisiti samo od broja njihovih proizvođača, proporcionalno brojnosti populacije. Obeležimo sa $r \in \mathbb{R}^+$ koeficijent proizvodnje toksina kod posmatrane populacije:

$$\frac{dY}{dt} = r \cdot X(t)$$

Osim toga, znamo da toksini ne postoje večno, nego se razlažu nakon određenog vremena, po principu mortaliteta drugih organizama. Razlaganje negativno utiče na brojnost toksina, te od prethodne jednačine oduzimamo odredjeni broj toksina $s \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{dY}{dt} = r \cdot X(t) - s \cdot Y(t) \tag{2}$$

Jednačine (1) i (2) čine sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina koje opisuju traženi model promene rasta populacije X i toksina Y.

2 Analiza modela

2.1 Stacionarna rešenja

Kako bismo izučili ponašanje našeg modela, nađimo prvo njegova stacionarna rešenja. Radi kraćeg zapisa, označićemo jednačine (1) i (2) sa F_1 i F_2, respektivno. Stacionarna rešenja se pronalaze izjednačavanjem funkcija F_1 i F_2 sa nulom i rešavanjem rezultujućeg sistema:

$$F_1 = (p - q \cdot Y) \cdot X = 0$$
$$F_2 = r \cdot X - s \cdot Y = 0$$

$$X = 0 \qquad\qquad p - q \cdot Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{p}{q}$$
$$r \cdot 0 - s \cdot Y = 0 \qquad\qquad r \cdot X - s \cdot \frac{p}{q} = 0 \Rightarrow X = \frac{sp}{qr}$$
$$\Rightarrow Y = 0$$

$$T_1\big(0, 0\big) \qquad\qquad T_2\left(\frac{sp}{qr}, \frac{p}{q}\right)$$

Dobili smo dva rešenja, T_1 i T_2, u kojima populacija i toksini ostaju nepromenjeni protokom vremena. Uočimo da je $T_2 = T_1$ kada je $p = 0$.

Kada sagledamo dobijena rešenja, uočavamo da je matematički moguće da T_2 bude i negativno, kada je $p < 0$. U realnom svetu, ni populacija ni toksini ne mogu dostići negativne vrednosti (najmanja moguća vrednost može biti samo 0), te se u tom slučaju treba ograničiti na rešenja koja su striktno nenegativna. Drugim rečima, kada je $p < 0$ postoji samo jedno stacionarno rešenje koje je moguće u realnosti, a to je $T_1(0, 0)$.

2.2 Stabilnost stacionarnih rešenja

Ispitajmo sada stabilnost dobijenih stacionarnih rešenja. Na osnovu I teoreme Ljapunova, stabilnost određujemo aproksimacijom polaznog sistema njegovom linearizacijom i odredjivanjem sopstvenih vrednosti Jakobijana sistema.

$$dF(X, Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X} & \frac{\partial F_1}{\partial Y} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial X} & \frac{\partial F_2}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - qY & -qX \\ \\ r & -s \end{pmatrix}$$

1) Uvrstimo koordinate prvog stacionarnog rešenja, T_1:

$$dF(0, 0) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ r & -s \end{pmatrix}$$

Nađemo sopstvene vrednosti ove matrice:

$$det(dF(T_1) - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} p-\lambda & 0 \\ r & -s-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+s)(\lambda-p) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = p, \qquad \lambda_2 = -s$$

- Za $p < 0$: obe sopstvene vrednosti su negativne, što nam daje do znanja da je tada T_1 asimptotski stabilan ekvilibrijum. Dakle, rešenja sa početnim uslovima u okolini T_1 tokom vremena konvergiraju ka rešenju T_1.
- Za $p > 0$: jedna sopstvena vrednost je pozitivna, što je dovoljan pokazatelj da je u ovom slučaju T_1 nestabilan ekvilibrijum. Drugim rečima, rešenja tokom vremena divergiraju od rešenja T_1 u beskonačnost.
- Za $p = 0$: odredjeni deo fazne ravni konvergira ka ekvilibrijumu T_1, a drugi deo ravni divergira u beskonačnost kroz vreme.

2) Uvrstimo koordinate drugog stacionarnog rešenja, T_2:

$$dF\big(\frac{sp}{qr}, \frac{p}{q}\big) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{sp}{r} \\ r & -s \end{pmatrix}$$

Nađemo sopstvene vrednosti ove matrice:

$$det(dF(T_2) - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{sp}{r} \\ r & -s-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+s) + sp = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + s\lambda + sp = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{-s-\sqrt{s^2-4sp}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-s+\sqrt{s^2-4sp}}{2}$$

Primetimo da je prva sopstvena vrednost λ_1 uvek negativna. Druga sopstvena vrednost λ_2 nije uvek istog znaka, te razdvajamo slučajeve:

- Za $s^2 - 4sp < 0$: sopstvene vrednosti pripadaju kompleksnoj ravni. Realni delovi od obe sopstvene vrednosti su negativni, na osnovu čega zaključujemo da je u ovom slucaju T_2 asimptotski stabilan ekvilibrijum.
- Za $s^2 - 4sp \geq 0$: sopstvene vrednosti pripadaju realnoj osi, te razmotrimo brojilac od λ_2:

1. Za $-s + \sqrt{s^2-4sp} < 0$:

$$s > \sqrt{s^2-4sp} \quad \Leftrightarrow \quad s^2 > s^2 - 4sp \quad \Leftrightarrow \quad p > 0$$

Dakle, za $p > 0$, T_2 je asimptotski stabilan ekvilibrijum.

2. Za $-s + \sqrt{s^2 - 4sp} > 0$:

$$s^2 - 4sp > s^2 \quad \Leftrightarrow \quad p < 0 \quad \Rightarrow \quad Re(\lambda_1) < 0, \;\; Re(\lambda_2) > 0$$

   Dakle, za $p < 0$, T_2 je nestabilan ekvilibrijum.

3. Za $-s + \sqrt{s^2 - 4sp} = 0$:

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1(0, 0)$$

2.3 Fazna ravan

Analizirajmo sada faznu ravan. Izjednačavanjem funkcije F_1 sa nulom, posmatramo ponašanje populacije X koje se tokom vremena ne menja.

Prvo rešenje jednačine $F_1 = 0$ jeste $X = 0$. Zamenom ovog rešenja u jednacinu F_2, dobijamo da je $F_2 = -sY$, što je pozitivno kada je $Y < 0$ (što je samo matematički moguće, ne i u realnosti), a negativno kada je $Y > 0$. Na osnovu ovoga, vidimo da se rešenja u okolini prave $X = 0$ (y-ose) kreću vertikalno ka ekvilibrijumu $T_1(0, 0)$.

Drugo rešenje jednačine $F_1 = 0$ je $Y = \frac{p}{q}$. Zamenom ovog rešenja u jednačinu F_2, dobijamo $F_2 = rX - \frac{sp}{q}$. Razmotrimo slučajeve kada je p pozitivno, negativno i jednako nuli:

- Za $p > 0$: $F_2 = rX - \frac{sp}{q} > 0$ za $X > \frac{sp}{qr}$. Dakle, rešenja seku pravu $Y = \frac{p}{q}$ vertikalno naviše kada je $X > \frac{sp}{qr}$, a vertikalno naniže kada je $X < \frac{sp}{qr}$.
- Za $p < 0$: Slično kao u prethodnom slučaju, zaključujemo da rešenja seku pravu $Y = \frac{p}{q}$ vertikalno naniže kada je $X > \frac{sp}{qr}$, a vertikalno naviše kada je $X < \frac{sp}{qr}$.
- Za $p = 0$: Prava $Y = \frac{p}{q}$ jeste u stvari x-osa. $F_2 = rX - \frac{sp}{q} > 0$ kada je $X > 0$, a $F_2 = rX - \frac{sp}{q} < 0$ za $X < 0$. U ovom slučaju, rešenja seku x-osu u njenom pozitivnom delu vertikalno naviše, a u negativnom[1] vertikalno naniže.

Posmatrajmo sada horizontalno kretanje rešenja izjednačavanjem funkcije F_2 sa nulom i uvrštavanjem tog rešenja u jednačinu F_1:

$$F_2 = rX - sY = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rX = sY \quad \Leftrightarrow \quad Y = \frac{r}{s}X$$

[1] Napomena: obzirom da posmatramo populaciju i toksine koje u realnosti ne mogu imati negativne vrednosti, u ovom radu konkretno nam nisu interesantne informacije vezane za ponašanja rešenja u negativnim delovima realne ose.

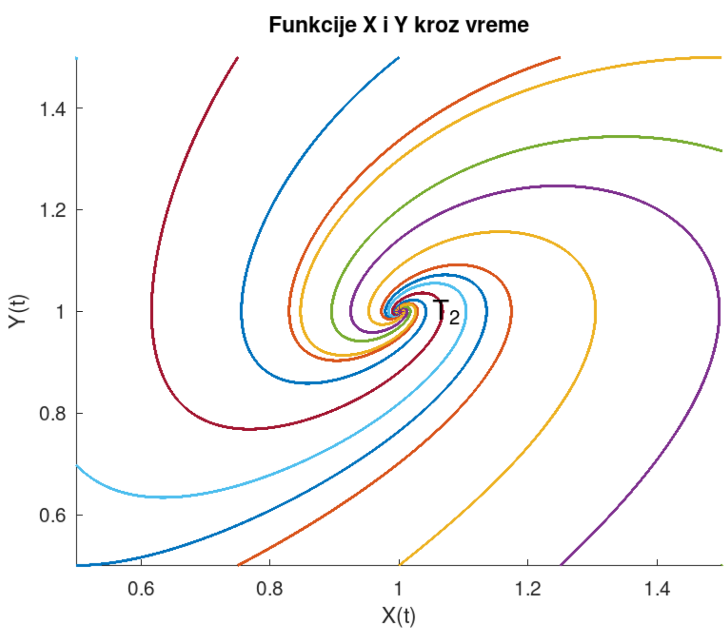
$$F_1 = pX - qX \cdot \frac{r}{s}X = X(p - \frac{qr}{s}X)$$

- Za $p > 0$: Jednačina $F_1 > 0$ u intervalu $(0, \frac{sp}{qr})$, a negativna inače. Iz toga zaključujemo da rešenja seku pravu $Y = \frac{r}{s}X$ u horizontalnom smeru s leva na desno kada X pripada intervalu $(0, \frac{sp}{qr})$, a inače, u horizontalnom smeru s desna na levo.
- Za $p < 0$: Slično, zaključujemo da rešenja seku pravu $Y = \frac{r}{s}X$ u horizontalnom smeru s leva na desno kada je $X \in (\frac{sp}{qr}, 0)$, a inače, seku pravu $Y = \frac{r}{s}X$ u suprotnom smeru.
- Za $p = 0$: Jednačina $F_1 = -\frac{qr}{s}X^2$ je uvek negativna, tako da rešenja uvek seku pravu $Y = \frac{r}{s}X$ u horizontalnom smeru s desna na levo.

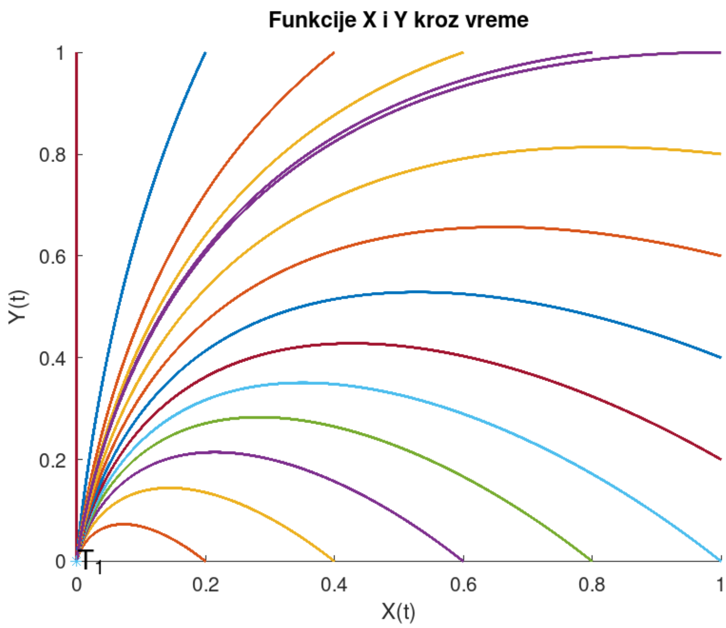
2.4 Fazni portret

Nakon ove analize, imamo dovoljno informacija da bismo mogli da nacrtamo fazne portrete za razne koeficijente p, q, r i s. Na osnovu faznih portreta ćemo moći da vidimo kretanje rešenja sistema na globalnom nivou.

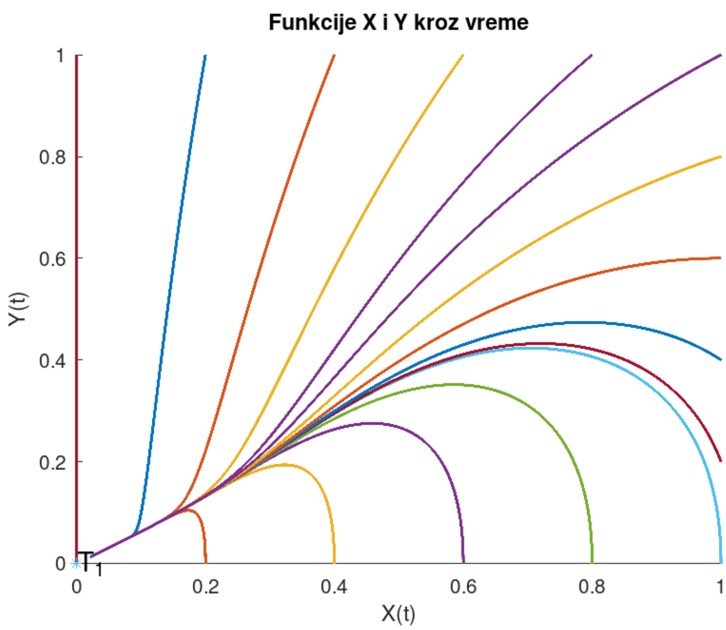
Ovako izgleda fazni portret kada je $p = q = r = s = 1$:



Ovako izgleda fazni portret kada je $p = -2, q = 1, r = s = 2$:



Ovako izgleda fazni portret kada je $p = 0, q = r = 3, s = 5$:



3 Zaključak

Obzirom na to da populacije u realnom svetu neće nikada postati negativne (ili polaziti od negativnih), posmatrajmo samo prvi kvadrant, u kom i populacija i toksini imaju nenegativne vrednosti.

Kada je $p \leq 0$, postoji samo jedan ekvilibrijum u prvom kvadrantu, $T_1(0,0)$. Zaključili smo da je on astimptotski stabilan, što znači da će sva rešenja u prvom kvadrantu konvergirati ka tački T_1 kroz vreme. Drugim rečima, izumiru i ljudi i toksini.

Zanimljiviji nam je slučaj kada je $p > 0$. Tada je ekvilibrijum T_2 asimptotski stabilan, a T_1 je nestabilan, te će rešenja u prvom kvadrantu kroz vreme konvergirati ka T_2. Ključnu ulogu u položaju stacionarnog rešenja T_2 igra konstanta s, koja opisuje brzinu razgradnje toksina. Kada je s jako malo u odnosu na ostale konstante, ekvilibrijum T_2 se "priljubi" uz y-osu. U zavisnosti od ostalih konstanti, to može dovesti do toga da imamo veliki broj toksina a mali broj ljudi. Npr. za $s = 0.01, p = 5000, q = 1, r = 0.1$, T_2 ima koordinate $T_2(5, 5000)$, tj. petoro ljudi ima 5000 toksina.

S druge strane, kada je brzina razgradnje toksina velika, konstanta s pomera X koordinatu od T_2 u desno. Tada čak i ako populacija krene da opada, u nekom trenutku će ponovo početi da raste, sve dok ne dostigne ekvilibrijum u T_2.