Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Направление подготовки
"01.03.02. Прикладная математика и информатика"

Дисциплина "Численные методы"

Отчет по лабораторной работе №6
"Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений многошаговыми методами"

Работу выполнил:
Иванова А.С.
Группа:
5030102/00002
Преподаватель:
Павлова Л.В.

Санкт-Петербург
2022

Содержание

1. Формулировка задачи

Необходимо решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка методом Адамса 2-го порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y'(a) = y'_0 \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Исходная функция:

$$y'' = \frac{-(2x+2) * y' * x + y * x + 1}{x^2 * (2x+1)} \tag{2}$$

На отрезке [0.2;1] с начальными условиями
$y'(0.2) = -25; y(0.2) = 5$
Известно точное решение:
$y = \frac{1}{x}$
Необходимо исследовать сходимость метода, влияние шага на точность вычислений и влияние ошибок в исходных данных на решение, т.е. устойчивость задачи, сравнить полученные результаты с методом Эйлера-Коши.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1. Алгоритм метода

Решение задачи Коши будем искать в виде значений сеточной функции, построенной на равномерной сетке на отрезке [a;b].
Сделаем замену: $z(x) = y'(x); z'(x) = y''(x)$
Тогда получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = f(x, y, z) \\ y(a) = y_0 \\ z(a) = y'_0 \end{cases} \tag{3}$$

Схема предиктор-корректор (метод прогноза и коррекции) — семейство алгоритмов численного решения различных задач, которые состоят из двух шагов. На первом шаге (предиктор) вычисляется грубое приближение требуемой величины. На втором шаге при помощи иного метода приближение уточняется (корректируется).
К данному семейству относится метод Адамса 2-го порядка.
Для дифференциального уранвения 1-го порядка:
N - Количество разбиений равномерной сетки
$h = \frac{b-a}{N}; x_i = a + h * i; i = 0, ..., N$
Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} F(x)dx \tag{4}$$

Идея: аппроксимируем F(x) интерполяционным полиномом в форме Лагранжа

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} L_m(x)dx + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx \tag{5}$$

Второе слагаемое - остаточный член полинома Лагранжа, им можно пренебречь
Замена переменной: $x = x_0 + h * t$
Пусть r - шаговость метода.
Если m=r-1, получаем явную (экстраполяционную формулу)

$$y_k = y_{k-1} + h * \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j^{(r)} f_{k-r+j} \tag{6}$$

где
$\beta_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-1-j}}{(r-1-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{t(t-1)...(t-r+1)}{t-j} dt$
Если m=r, получаем неявную формулу

$$y_k = y_{k-1} + h * \sum_{j=0}^{r} \beta_j^{(r)} f_{k-r+j} \tag{7}$$

где
$\beta_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-j}}{(r-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{t(t-1)...(t-r)}{t-j} dt$
Явную формулу будем использовать в качестве предиктора, неявную - в качестве корректора для метода Адамса.

Получим формулы:

$$\begin{cases} \tilde{y}_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} * (3 * f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x_{i-2}, y_{i-2})) \\ y_i = y_{i-1} + h * \frac{f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, \tilde{y}_i)}{2} \end{cases} \tag{8}$$

В нашем случае для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{y}_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} * (3 * z_{i-1} - z_{i-2}) \\ \tilde{z}_i = z_{i-1} + \frac{h}{2} * (3 * f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) - f(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2})) \\ y_i = y_{i-1} + h * \frac{z_{i-1} + \tilde{z}_i}{2} \\ z_i = z_{i-1} + h * \frac{f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + f(x_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Для вычисления промежуточных значений с индексом i-1 можно использовать метод Эйлера-Коши

2.2. Условия применимости

- Частная производная по x непрерывна и ограничена
- Выполянется условие Липшица по y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \tag{10}$$

- Существование непрерывных производных до 2-го порядка для применения правила Рунге.

3. Предварительный анализ задачи

Для оценки погрешности используется правило Рунге:

$$\frac{|S_{n,2N}(f) - S_{n,N}(f)|}{2^m - 1} \le \epsilon \tag{11}$$

Для метода Адамса m=2

4. Проверка условий применимости метода

Исходная функция:

$$y'' = \frac{-(2x+2) * y' * x + y * x + 1}{x^2 * (2x+1)} \tag{12}$$

На отрезке [0.2;1]

Данная функция будет иметь разрывы производных по x в точках 0 и -0.5, которые не входят в заданный отрезок, следовательно метод Адамса можно использовать. Условие Липшица по y выполнено.

5. Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Решим дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$y' = \frac{2xy + 3}{x^2} \tag{13}$$

На отрезке [1;2] с начальным условием y(1)=-1

Ответ для проверки:

$y = -\frac{1}{x}$

Возьмем N=1, тогда h=1 (при N=1 не получится использовать метод Адамса)

$\tilde{y}_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0) = -1 + \frac{2*1*(-1)+3}{1} = -1 + 1 = 0$

$y_1 = y_0 + h * \frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,\tilde{y}_1)}{2} = -1 + \frac{1+0.75}{2} = -1 + 0.875 = -0.125$

Погрешность существенна. Пусть N=2, тогда h=0.5

$\tilde{y}_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0) = -1 + 0.5\frac{2*1*(-1)+3}{1} = -1 + 0.5 = -0.5$

$y_1 = y_0 + h * \frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,\tilde{y}_1)}{2} = -0.5833$

$\tilde{y}_2 = y_1 + \frac{h}{2} * (3 * f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)) = -0.4166$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)) = -0.3611$

Дальнейшими итерациями можно приблизить значение к точному.

6. Перечень контрольных тестов для иллюстрации метода

Необходимо решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка методом Адамса 2-го порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y'(a) = y'_0 \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{14}$$

Исходная функция:

$$y'' = \frac{-(2x+2)*y'*x+y*x+1}{x^2*(2x+1)} \tag{15}$$

На отрезке [0.2;1] с начальными условиями

$y'(0.2) = -25; y(0.2) = 5$

Исследуется сходимость метода (количество итераций от заданной точности), влияние шага h на точность вычислений и влияние ошибок в исходных данных на решение, т.е. устойчивость задачи. Полученные результаты сравниваются с результатами для метода Эйлера-Коши

7. Модульная структура программы

def my_ddfunc(x, y, z):

Вычисление значения исходной функции от x,y,z

def answer(x):

Точное решение задачи Коши

def Adams(xmin, xmax, N, ddfunc, y0, z0):

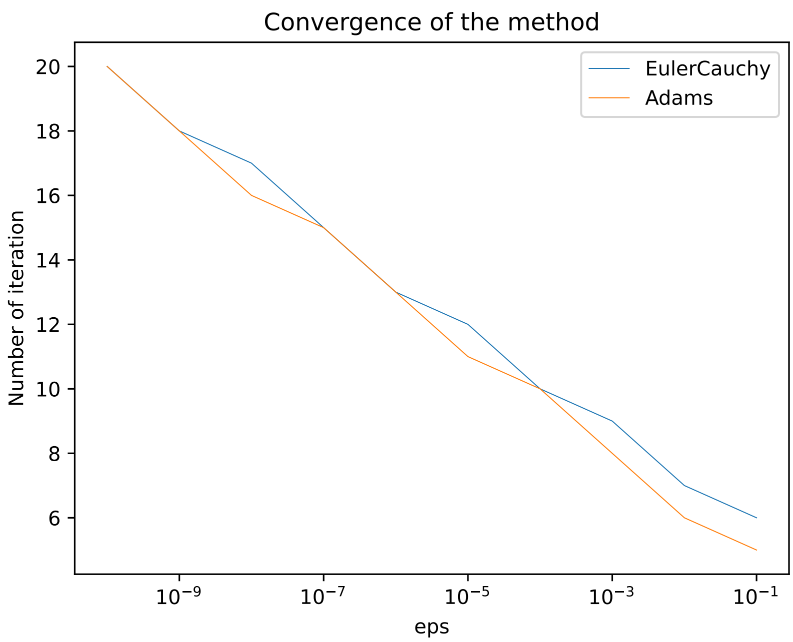
Вычисление значения одной итерации метода Адамса при заданном количестве разбиений

def iterations(eps , xmin, xmax,ddfunc, y0, z0):

Получение решения задачи Коши с помощью метода Адамса с заданной точностью.

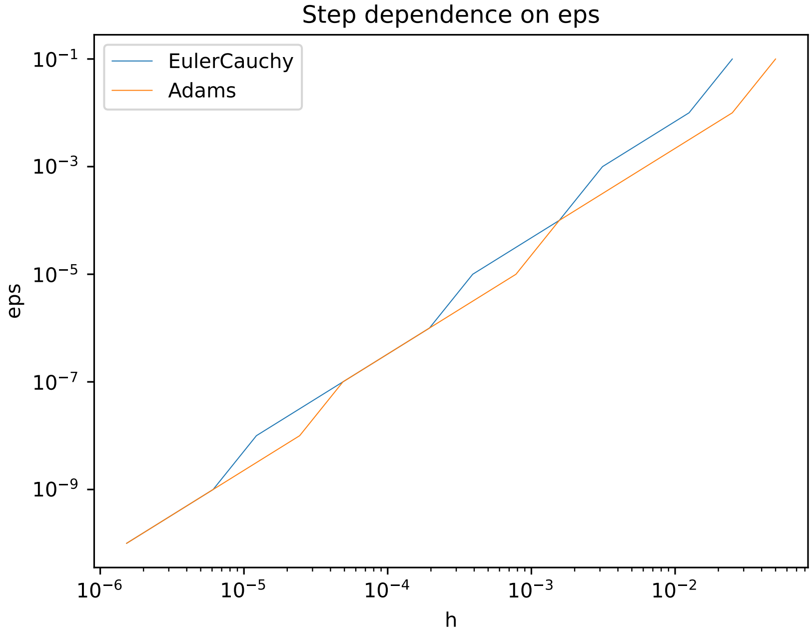
8. Численный анализ решения задачи

8.1. Сходимость метода



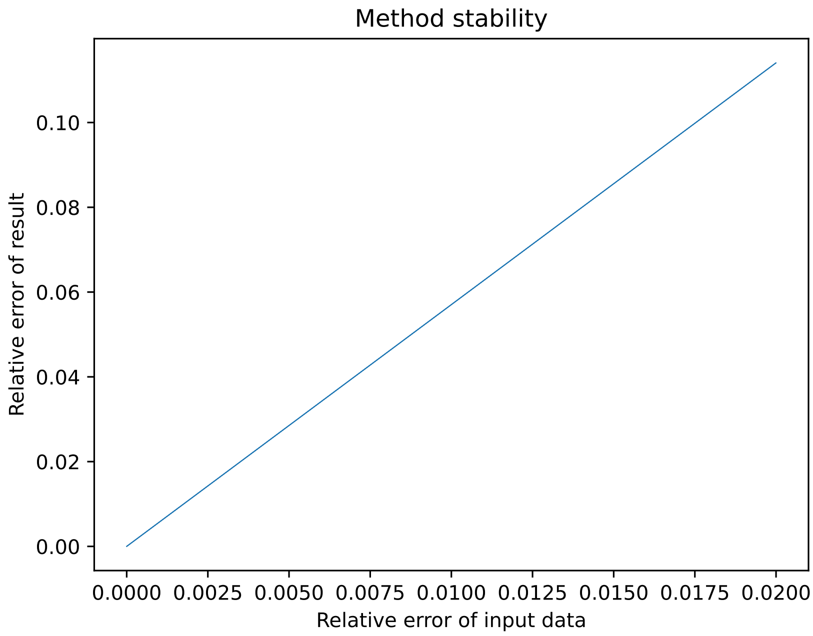
Из данного графика можно сделать вывод, что для решения задачи Коши с заданной точностью для метода Адамса требуется меньше итераций, чем для метода Эйлера-Коши, что связано с тем, что метод Адамса является двухшаговым и в нем учитываются результаты на предыдущих узлах сетки.

8.2. Влияние шага на точность вычислений



Из данного графика можно сделать вывод, что для метода Эйлера-Коши требуется меньший шаг равномерной сетки для достижения заданной точности.

8.3. Влияние ошибки исходных данных на решение



Из данного графика можно сделать вывод, что при увеличении ошибки в исходных данных ошибка вычислений увеличивается. Данная задача является устойчивой, т.к. ошибка входных данных и ошибка результата имеют одинаковый порядок.

9. Краткие выводы

На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что при увеличении количества итераций и шага разбиения равнмоерной сетки погрешность результата уменьшается. Также можно сделать вывод о том, что если в исходные данные вносить ошибки, то при ее увеличении будет увеличиваться и ошибка результата. Данная задача является устойчивой, т.к. ошибка входных данных и ошибка результата имеют одинаковый порядок.

Также можно сделать вывод, что для решения задачи Коши с заданной точностью для метода Адамса требуется меньше итераций, чем для метода Эйлера-Коши, что связано с тем, что метод Адамса является двухшаговым и в нем учитываются результаты на предыдущих узлах сетки.