

---

# **Szenenkonstruktion aus stereoskopischen Bildquellen gleicher und verschiedener Auflösungen**

---

Erarbeitet von Studenten und Studentinnen  
im Rahmen der Abschlussarbeit  
**Masterarbeit der Fakultät**

Medieninformatik 4.Semester Anja Kretschmer 222222

Betreut von: Prof. Dr. Thomas Schneider

Disclaim here



Fakultät Digitale Medien der Hochschule Furtwangen  
Wintersemester 17/18 - Sommersemester 18

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2 Model der Bildaufnahme mit einer Kamera</b>	<b>5</b>
2.1 Lochkameramodell zur Abbildung eines Punktes auf die Bildebene . . . . .	5
2.2 Koordinatentransformation . . . . .	6
2.3 Aufname mit einer willkürlichen Kameraorientierung . . . . .	9
<b>3 Geometrische Beziehungen zwischen Punktekorrespondenzen</b>	<b>12</b>
3.1 Korrespondenzen planarer Punktmengen mit Homographien . . . . .	12
3.2 Korrespondenzanalyse für beliebige Punkte im Raum (Epipolare Geometrie) . . . . .	14
3.3 Bestimmung von Homographie und Fundamentalmatrix aus Punktekorrespondenzen . . . . .	17
<b>4 Synthetische Rekonstruktion</b>	<b>21</b>
4.1 Simulierte Bildaufnahme einer virtuellen Szene . . . . .	21
4.2 Bildanalyse . . . . .	24
4.2.1 Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter . . . . .	24
4.2.2 Szenenrekonstruktion durch Triangulation . . . . .	26
<b>5 Auswirkungen von unterschiedlichen Kameraauflösungen</b>	<b>30</b>
5.1 Geometrie eines Sensors . . . . .	30
5.2 Auswirkungen auf die Szenenrekonstruktion . . . . .	31
<b>6 Reelle Rekonstruktion</b>	<b>36</b>
6.1 Stereoaufbau . . . . .	36
6.2 Korrespondenzanalyse . . . . .	37
6.3 Normierter acht-Punkt-Algorithmus . . . . .	38
6.3.1 Singularität der Fundamentalmatrix . . . . .	39
6.3.2 Singulärwerte der essentiellen Matrix . . . . .	41
6.4 Szenenrekonstruktion mit Sampson-Approximation . . . . .	42
6.5 Ergebnisse einer Stereoanalyse mit Kameras unterschiedlicher Auflösung . . . . .	47
<b>7 Vergleich entwickelter Rekonstruktions Algorithmus mit bereits vorhandenen (Matlab)</b>	<b>52</b>
7.1 Szenenrekonstruktion mit Rektifizierung . . . . .	52
7.2 Rektifizierung mit Homographien . . . . .	54
7.2.1 Projektive Transformation . . . . .	56
7.2.2 Ähnlichkeitstransformation . . . . .	60
7.2.3 Scherungstransformation . . . . .	62
7.2.4 Rektifizierung mit unterschiedlichen Kameraauflösungen . . . . .	65
<b>8 Punktesortierung in Schachbrettmustern</b>	<b>68</b>
8.1 Vorläufiges Klassendiagramm . . . . .	69
8.2 Beispiele . . . . .	73
<b>9 Fazit - Conclusion</b>	<b>76</b>
<b>10 Alternativen</b>	<b>77</b>
<b>11 Abkürzungsverzeichnis - List of Abbreviations</b>	<b>78</b>

Over the last decades computer vision scientist have taken a new approach to vision. They build different computational models of what shoud be computed, what can really be computed, and how these computations can be realized by computer programs, and they use computers to test their models are correct. The result is a better understandung of vision from a different point of view, and at the same time some working artificial vision systems are built that can be used in idustry, medicine, etc. The knowledge obtained on neirophysiology and psychophysics have given hints to and influenced computer vision scientists, helping find solutions to the design of specific algorithms and implementation of vision systems. On the other Hand coputational vision has also given nerophysologists and psychophysicsist a mathematical framework for modeling vision processes.[1]

# 1 Einleitung

Die Computer Vision ist ein Fachbereich der Computer Science mit dem Fokus auf der Entwicklung von künstlicher Intelligenz, die ein visuelles Verständnis ihrer Umgebung besitzen. Folglich wird in der Computer Vision der Weg von visuellen Eindrücken oder Bildern aus der Realität in den Rechner beschrieben [2]. Der Mensch ist mit der Fähigkeit ausgestattet, gesehene Bilder zu verarbeiten und kann die ihn umgebene Welt verstehen. Maschinen, die eine ähnliche Fähigkeit besitzen, wären somit ebenfalls in der Lage Entscheidungen auf Grund von visuellen Eindrücken zu fällen. Das entwickeln solcher Maschinen und den damit verbundenen Grundprinzipien und Programme sind die Forschungsmittelpunkte von aktuellen Anwendungsbereichen wie dem Autonomen Fahren, Motion-Caturing, Bewegungserkennungen oder Service Robotern.

In dieser Masterarbeit wurde ein Algorithmus zur Rekonstruktion einer Szene aus stereoskopischen Bildquellen entwickelt. Das typische Verfahren einer Stereorekonstruktion basiert auf den Grundbausteinen, Bildaufnahme und Bildanalyse[2]. In der Bildaufnahme wird eine Szene oder ein Objekt mit Hilfe von Kameras, Sensoren oder Lasern aufgenommen und als digitale zweidimensionale Bilder an den Computer weitergegeben. In der Bildanalyse, werden die aufgenommenen Bilder ausgewertet um so die dreidimensionale Szene rekonstruieren zu können. Für die Analyse ist es essentiell die Kameraparameter, wie Position und Auflösung, zu kennen. Sind diese jedoch nicht bekannt, können die Bildquellen genutzt werden um die Kameraparameter abzuschätzen. Eine solche Abschätzung wird als wird als Kamerakalibrierung[3, 4, 5, 1] bezeichnet. Die Position und Rotation einer Kamera im Raum werden als die extrinsischen Kameraparameter bezeichnet, Parameter wie die Auflösung oder Brennweiten, werden als die intrinsischen Kameraparameter bezeichnet[3, 4]. Im Zuge dieser Arbeit ist ein Algorithmus entstanden, welcher unter anderem im Stande ist die Kameras gleicher und unterschiedlicher Auflösung zu kalibrieren eine 3D-Szenenrekonstruktion durchzuführen. Der vollständige Algorithmus wurde mithilfe eines virtuellen Beispiels verifiziert und auf eine reelle Szenenaufnahme angewandt. Mit dem Entwickeln von Algorithmen für Computer Vision Applikationen, sieht man sich mit immer wieder mit komplizierten Aufgaben und Herausforderungen konfrontiert. Bei der Aufnahme von Bildern, kann es immer wieder zu unvorhersehbaren Bildfehlern wie beispielsweise Rauschen oder Verzerrungen durch die Kameralinse kommen, was auch nicht oft zum Verlust von Referenzdaten führt. Im Kapitel Reelle Rekonstruktion wird aufgeführt, wie mit solchen Fehlern umgegangen werden kann.

In der virtuellen Rekonstruktion wird zuerst eine 3D Szene in zwei voneinander unterschiedlich positionierten, simulierten Kameras projiziert um virtuelle Bilddaten zu generieren. Anhand dieser 2D-Bilddaten wird die Kamerakalibrierung getestet. In der virtuellen Rekonstruktion, werden die Werte für Auflösung und Brennweite, welche als intrinsische Parameter bezeichnet werden, selbst gesetzt. Im Test des Algorithmus mit reellen Bilddaten, wird für dessen Schätzung auf ein bereits existierendes Programm zurückgegriffen. Die intrinsischen Parameter werden mit dem hier entwickelten Algorithmus für die Schätzung der Positionen und Orientierungen der Kameras, die als extrinsische Parameter bezeichnet werden, kombiniert um die Kameras anhand der virtuellen Daten zu kalibrieren. Die durch die Schätzung erhaltenen Kameraparameter können im virtuellen Beispiel so einfach mit den zuvor definierten Parametern verglichen werden, um den Algorithmus zu verifizieren. Diese Kameraparameter werden dann entwickelten Rekonstruktionsalgorithmus dazu verwendet, in die ursprüngliche 3D-Szene wieder herzustellen und die Funktionsweise der Rekonstruktion zu analysieren.

## 2 Model der Bildaufnahme mit einer Kamera

Um einen Szenenrekonstruktionalgorithmus zu verstehen, werden in diesem Abschnitt grundlegende Bedingungen eingeführt um die Bildaufnahme mathematisch zu beschreiben. Ein Abbildendes System besteht aus einem Objekt  $M$ , einer Kamera  $C$  und einer Bildebene  $I$  wie in Abbildung 2.1 dargestellt.

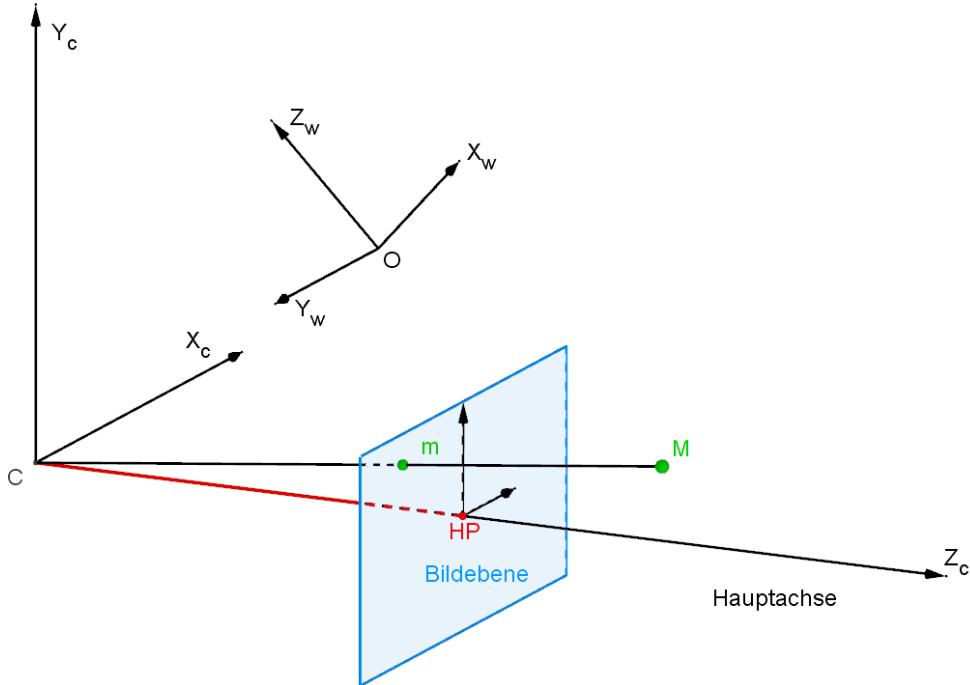


Abbildung 2.1: Schematik eines abbildenden Systems. Ein Punkt  $M$  im Weltkoordinatensystem  $O$  wird durch eine Kamera  $C$  aufgenommen. Diese Aufnahme wird durch eine Projektion, die als Verbindungslinie von  $M$  zu  $C$  zu sehen ist und  $M$  auf  $m$  abbildet, beschrieben.

Ein Punkt  $M$  in einem dreidimensionalen Weltkoordinatensystem wird mit Hilfe einer Kamera, die in einem eigenen dreidimensionalen Kamerakoordinatensystem beschrieben wird, auf die Bildebene  $I$  projiziert. Die Bildebene  $I$  ist durch ein zweidimensionales Bildkoordinatensystem beschrieben. Der projizierte Punkt  $m$  kann mit einem Sensor aufgenommen und abgespeichert werden.

Im folgenden wird zuerst ein Kameramodell eingeführt um die Projektion auf die Bildebene zu beschreiben. Daraufhin werden Koordinatentransformationen eingeführt um abschließend die Aufnahme eines Punktes mit einer willkürlichen Kameraorientierung zu berechnen.

### 2.1 Lochkameramodell zur Abbildung eines Punktes auf die Bildebene

Mit Hilfe des Lochkameramodells wird die Abbildung eines Objektes auf eine Bildebene beschrieben. Das Modell beruht ausschließlich auf der geometrischen Optik und vernachlässigt physikalische Effekte, wie Beugung oder die Auswirkung der Linse[6]. Das Lochkameramodell besteht aus einem Projektionszentrum  $C$ .  $C$  beschreibt gleichzeitig die Lage des Kamerazentrums und bildet den Ursprung des Kamerakoordinatensystems.[7, 3]. Die Blickrichtung der Kamera wird als Hauptachse bezeichnet. Die

Bildebene steht senkrecht zu Hauptachse und der Schnittpunkt der Hauptachse mit der Bildebene bildet den Hauptpunkt  $HP$ . Der Hauptpunkt ist der Ursprung des Bildebene koordinatensystems. Der Abstand vom Projektionszentrum zum Hauptpunkt wird als Brennweite  $\zeta$  beschrieben[3, 7]. Der Bildpunkt  $m$  entsteht am Schnittpunkt der Verbindungsgerade von  $C$  und  $M$  mit der der Bildebene  $I$ .

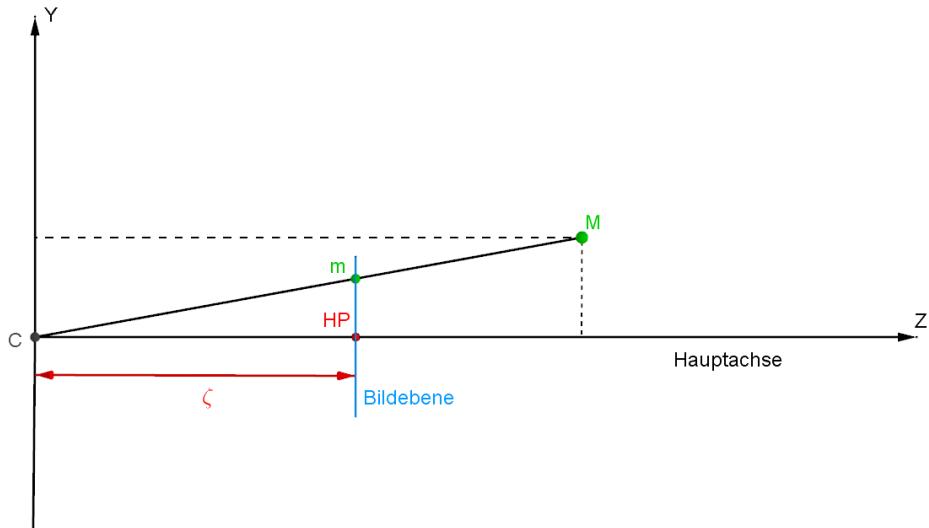


Abbildung 2.2: Die Abbildung zeigt einen Querschnitt des beschriebenen Lochkameramodells. Zu sehen ist das Projektionszentrum  $C$  der Kamera.  $C$  ist gleichzeitig das Kamerazentrum und bildet den Ursprung für das Kamerakoordinatensystem.  $\zeta$  beschreibt den Abstand des Projektionszentrums zur Bildebene. Die Hauptachse beschreibt die Blickrichtung der Kamera. Der Punkt an dem die Hauptachse die Bildebene schneidet wird Hauptpunkt genannt und ist gleichzeitig der Ursprung für das Bildebene koordinatensystem. Der Bildpunkt  $m$  entsteht am Schnittpunkt der Verbindungsgerade von  $C$  und  $M$  mit der der Bildebene  $I$

Die Projektion eines dreidimensionalen Punktes auf eine zweidimensionale Bildebene, wird durch eine  $3 \times 3$  Kameramatrix  $K_0$  beschrieben.

$$K_0 \cdot M = \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta X \\ \zeta Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \zeta \frac{X}{Z} \\ \zeta \frac{Y}{Z} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Die Koordinaten auf der zweidimensionalen Bildebene werden häufig als homogene Koordinaten angegeben. Dazu werden die Koordinaten mit  $Z$  normiert und somit die Koordinaten auf die Ebene  $(x, y, 1)^T$  projiziert wird. Zur Vereinfachung wird zuletzt nur die x,y Koordinaten des entstandenen Bildes angegeben. Gleichung 2.1 beschreibt somit die Abbildung eines Punktes auf die Bildebene.

## 2.2 Koordinatentransformation

Um einen Punkt von einem übergeordneten Weltkoordinatensystem in ein bestimmtes zum Weltkoordinatensystem rotiertes Kamerakoordinatensystem zu überführen ist eine Transformation notwendig. Im folgenden wird der mathematische Weg einer Transformation eines Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$  in ein Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$  beschrieben.



Abbildung 2.3: Ein Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$  wird zu einem dazu verschobenen und rotiertem Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$  transformiert

Zunächst wird eine Koordinatisierung von Punkten im Weltkoordinatensystem vorgenommen. Ein Punkt  $P_\delta$  bezüglich des Weltkoordinatensystems wird wie folgt beschrieben:

$$P_\delta = O + p_{1\delta}\hat{d}_1 + p_{2\delta}\hat{d}_2 + p_{3\delta}\hat{d}_3 \quad (2.2)$$

$$\rightsquigarrow P_\delta = (p_{1\delta}, p_{2\delta}, p_{3\delta})^T = \begin{pmatrix} p_{1\delta} \\ p_{2\delta} \\ p_{3\delta} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Zwischen den beiden Koordinatensystemen  $(O, \delta)$  und  $(C, \beta)$  gelten die folgenden Beziehungen:

$$C_\beta = O_\delta + C_{\beta,1}\hat{d}_1 + C_{\beta,2}\hat{d}_2 + C_{\beta,3}\hat{d}_3 \quad (2.4)$$

$$\hat{b}_1 = b_{11}\hat{d}_1 + b_{12}\hat{d}_2 + b_{13}\hat{d}_3 \quad (2.5)$$

$$\hat{b}_2 = b_{21}\hat{d}_1 + b_{22}\hat{d}_2 + b_{23}\hat{d}_3 \quad (2.6)$$

$$\hat{b}_3 = b_{31}\hat{d}_1 + b_{32}\hat{d}_2 + b_{33}\hat{d}_3. \quad (2.7)$$

Diese Beziehungsgleichungen werden in Gleichung 2.2 eingesetzt.

$$\begin{aligned} P_\delta &= O + (C_{\beta,1} + p_{1\beta}b_{11} + p_{2\beta}b_{21} + p_{3\beta}b_{31}) \cdot \hat{d}_1 \\ &\quad + (C_{\beta,2} + p_{1\beta}b_{12} + p_{2\beta}b_{22} + p_{3\beta}b_{32}) \cdot \hat{d}_2 \\ &\quad + (C_{\beta,3} + p_{1\beta}b_{13} + p_{2\beta}b_{23} + p_{3\beta}b_{33}) \cdot \hat{d}_3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aus Gleichung 2.8 wird ein Gleichungssystem in der Form von Gleichung 2.9 aufgestellt und gelöst.

$$\begin{aligned} p_{1\delta} &= C_{\beta,1} + (C_{\beta,1} + p_{1\beta}b_{11} + p_{2\beta}b_{21} + p_{3\beta}b_{31}) \\ \rightsquigarrow p_{1\delta} - C_{\beta,1} &= (C_{\beta,1} + p_{1\beta}b_{11} + p_{2\beta}b_{21} + p_{3\beta}b_{31}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Das Gleichungssystem lässt sich in Matrixform darstellen als

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{1\beta} \\ p_{2\beta} \\ p_{3\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1\delta} - C_{\beta,1} \\ p_{2\delta} - C_{\beta,2} \\ p_{3\delta} - C_{\beta,3} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Wenn  $P_\beta$  gegeben ist, erhält man auf diese Weise direkt  $P_\delta$ . Die inverse Matrix  $D_\beta^{-1}$  kann verwendet werden um  $P_\beta$  aus  $P_\delta$  zu berechnen.

$$D_\beta^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} p_{1\beta} \\ p_{2\beta} \\ p_{3\beta} \end{pmatrix} = D_\beta^{-1} \begin{pmatrix} p_{1\delta} - C_{\beta,1} \\ p_{2\delta} - C_{\beta,2} \\ p_{3\delta} - C_{\beta,3} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Handelt es sich um ein kartesisches Koordinatensystem, so gilt  $D_\beta^{-1} = D_\beta^T$  und die transponierte Matrix kann für die Koordinatentransformation benutzt werden. Für zwei normierte, kartesische Koordinatensysteme ist  $D$  und  $D^T$  eine Rotationsmatrix  $R$ , weshalb im folgenden, analog zur Literatur [3, 5, 4],  $D^T = R$  angenommen wird. Um Gleichung 2.12 in einer kompakten Schreibweise zu formulieren, wird  $\vec{p}_\beta = (p_{1\beta}, p_{2\beta}, p_{3\beta})^T$  zu einem vierdimensionalen Vektor mit 1 zu  $\vec{p}_4\beta = (p_{1\beta}, p_{2\beta}, p_{3\beta}, 1)^T = (\vec{p}_\beta, 1)^T$  erweitert. Damit lässt sich Gleichung 2.12 als eine Matrixmultiplikation ausdrücken

$$\begin{pmatrix} p_{1\beta} \\ p_{2\beta} \\ p_{3\beta} \end{pmatrix} = D_\beta^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -C_{\beta,1} \\ 0 & 1 & 0 & -C_{\beta,2} \\ 0 & 0 & 1 & -C_{\beta,3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{1\delta} \\ p_{2\delta} \\ p_{3\delta} \\ 1 \end{pmatrix} = R[I - C] \begin{pmatrix} p_{1\delta} \\ p_{2\delta} \\ p_{3\delta} \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \vec{p}_\delta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Die Transformationsmatrix  $T$  setzt sich aus der Rotationsmatrix  $R$  und der Translationsmatrix  $[I| - C]$  zusammen und wirkt auf den neu definierten vierdimensionalen Vektor. Wichtig dabei ist, dass  $[I| - C]$  eine symbolische Schreibweise für eine  $3 \times 4$  Matrix ist.

## 2.3 Aufname mit einer willkürlichen Kameraorientierung

Ein beliebiger Punkt im Weltkoordinatensystem kann mit der eingeführten Operation auf die Bildecke und schließlich auch auf den Sensor projiziert werden. Es werden insgesamt vier verschiedene Koordinatensysteme definiert. Das Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3)$ , das Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ , das Bildeckenkoordinatensystem  $(I, \tau)$  mit  $\tau = (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$  und als letztes das Sensorkoordinatensystem mit  $(S, \sigma)$  mit  $\sigma = (\hat{u}, \hat{v})$ . Abbildung 2.4 zeigt die Koordinatensysteme schematisch im Überblick.

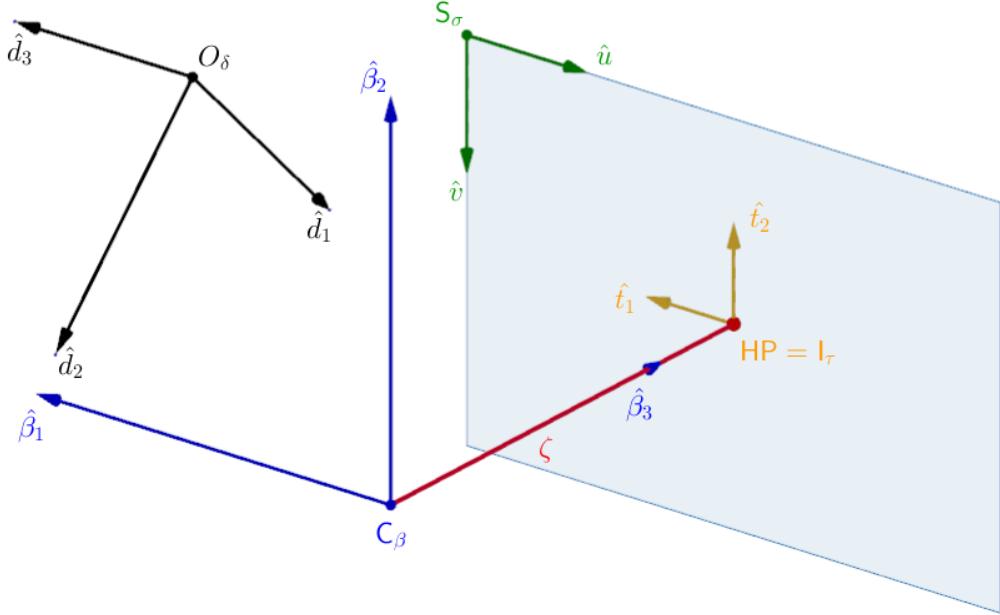


Abbildung 2.4: Das Schaubild zeigt die einzelnen Koordinatensysteme in einem Lochkameramodell. Das Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3)$ , das Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ , das Bildeckenkoordinatensystem  $(I, \tau)$  mit  $\tau = (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$  und das Sensorkoordinatensystem  $(S, \sigma)$  mit  $\sigma = (\hat{u}, \hat{v})$ .

Für die Projektion eines Punktes  $M_\delta = (M_{x\delta} M_{y\delta} M_{z\delta})^T$  bezüglich des Weltkoordinatensystems in einen Punkt  $m_\tau = (m_{x\tau} m_{y\tau} m_{z\tau})^T$  bezüglich des Bildeckenkoordinatensystems kann eine Projektionsmatrix  $P$  definiert werden.

Zuerst muss der Punkt im Weltkoordinatensystem in das Kamerakoordinatensystem transformiert werden. Für die Transformation der Weltkoordinaten in Kamerakoordinaten gilt Gleichung 2.13:

$$\vec{M}_\beta = T \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -C_{\beta,1} \\ 0 & 1 & 0 & -C_{\beta,2} \\ 0 & 0 & 1 & -C_{\beta,3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_{x\delta} \\ M_{y\delta} \\ M_{z\delta} \\ 1 \end{pmatrix} = R[I - C] \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Nach der Transformation eines Punkts  $\vec{M}_\delta$  zu  $\vec{M}_\beta$  in das Kamerakoordinatensystem, erfolgt die Kameraprojektion von  $\vec{M}_\beta$  auf  $m_\beta$  wie in Gleichung 2.1 beschrieben.

$$\begin{bmatrix} m_{x\beta} \\ m_{y\beta} \\ m_{z\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x\beta} \\ M_{y\beta} \\ M_{z\beta} \end{bmatrix} = K_0 \vec{M}_\beta \quad (2.15)$$

Die Projektion eines Punktes  $\vec{M}_\delta$  auf den Bildpunkt  $\vec{m}_\beta$  kann durch Gleichung 2.14 und 2.15 zusammengefasst werden

$$\vec{m}_\beta = K_0 R [I - C] \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Um den Bildpunkt  $\vec{m}_\beta$  bezüglich eines zweidimensionalen Bildebene koordinatensystems anzugeben, wird die Bildebene mit der Tiefkomponente  $m_{z\beta}$  normiert, sodass  $m_{z\beta}$  auf den zweidimensionalen Raum der Bildebene gemappt wird. Diese Projektion wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\vec{m}_\tau = \begin{bmatrix} m_{x\beta}/m_{z\beta} \\ m_{y\beta}/m_{z\beta} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Zuletzt folgt die Transformation der Bildebene koordinaten auf den Sensorchip. Der Sensorchip besteht aus einer Ansammlung von Sensorelementen. Diese Sensorelemente können verschiedene Formen annehmen. Die meisten Sensorchips bestehen aus rechtwinkligen, rechteckigen Sensorelementen. Aus diesem Grund wird ein rechtwinkliges Sensorelement mit einer Größe  $lx ly$  angenommen. Diese Sensorelementgröße  $lx ly$  definiert auch die Pixelgröße und bildet die Längenskalierung des Sensorkoordinatensystems. Neben der unterschiedlichen Skalierung, wird der Ursprung des Sensorkoordinatensystems in der Regel an einer Ecke des Sensorchips definiert, sodass die Transformation von Bildebene koordinaten in Sensorkoordinaten auch eine Translation  $(V_{x\sigma}, V_{y\sigma})$  aufweist[3, 8]. Für einen Punkt  $m_\sigma = (u, v, 1)$  auf dem Sensorkoordinatensystem lassen sich die folgenden Bedingungen herleiten.

$$u = m_{\tau x} k_x - V_{x\sigma} \quad (2.18)$$

$$v = m_{\tau y} k_y - V_{y\sigma} \quad (2.19)$$

$$1 = 1 \quad (2.20)$$

$k_x = 1/lx$  und  $k_y = 1/ly$  ist die Pixeldichte in  $\frac{\text{pixel}}{m}$ . Es wird angemerkt, dass in der Bildebene und der Sensorebene die Punkte ausschließlich im zweidimensionalen Raum definiert sind. Aus den normierten Bildkoordinaten lässt sich somit folgende Sensormatrix bilden:

$$\vec{m}_\sigma = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & V_{\sigma,x} \\ 0 & k_y & V_{\sigma,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{x\tau} \\ m_{y\tau} \\ 1 \end{bmatrix} = R_\sigma \vec{m}_\tau \quad (2.21)$$

Mit Hilfe der Transformationsmatrix  $R_\sigma$  kann ein Punkt von der Bildebene auf das Sensorelement projiziert werden.

Der hier skizzierte Lösungsweg beschreibt die Bildaufnahme eines Punktes im Lochkameramodell. Die hier eingeführte Projektionsmatrix  $P = K_0 R [I - C]$  gilt für die Abbildung eines Punktes auf den Bildpunkt. Der Bildpunkt wird normiert und in das Sensorkoordinatensystem umgerechnet wird. In der Literatur wird häufig die Transformation in das Sensorkoordinatensystem bereits in der Kameramatrix zusammengefasst. Damit bildet sich die erweiterte Kameramatrix  $K$

$$K = R_\sigma K_0 = \begin{bmatrix} k_x \zeta & 0 & V_{\sigma,x} \\ 0 & k_y \zeta & V_{\sigma,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Mit dieser Kameramatrix wird eine neue Projektionsmatrix mit  $P = KR[I - C]$  gebildet, die einen Objektpunkt auf einen Bildpunkt im Sensorkoordinatensystem abbildet. Durch die Normierung dieses Punktes kann auf den direkten Sensorpunkt geschlossen werden. Ein weiterer Vorteil der erweiterten Kameramatrix  $K$  ist, dass sie die Pixeldichte  $k_x, k_y$  und die Brennweite  $\zeta$  beinhaltet. Diese Parameter

werden im folgenden als intrinsische Kameraparameter bezeichnet. Die Koordinatentransformationsmatrix  $R$  wird im Gegensatz aus den sogenannten extrinsischen Kameraparameter, der Kameraposition und Orientierung, definiert. Sind sowohl die intrinsischen wie auch extrinsischen Kameraparameter vorbestimmt kann somit  $P$  bestimmt werden und mit dem hier beschriebenen Lösungsweg das Bild konstruiert werden.

### 3 Geometrische Beziehungen zwischen Punktekorrespondenzen

Das Ziel dieser Masterarbeit ist es Punkte im dreidimensionalen Raum aus einer stereoskopischen Aufnahme zweier Kameras zu rekonstruieren. Bissher wurde die Bildaufnahme einer einzigen Kamera betrachtet. Jedoch kann eine Kamera allein nicht räumlich sehen. Um dreidimensionale Szenen aus Bildern zu rekonstruieren, müssen mindestens zwei Aufnahmen der gleichen Szene aus unterschiedlichen Blickwinkeln aufgenommen werden. Innerhalb dieser Aufnahmen müssen Punktekorrespondenzen gesucht werden. Korrespondierende Punkte zeichnen sich dadurch aus, dass sie die Abbildungen desselben Ursprungspunktes im Raum sind. Für diese Punkte muss eine gemeinsame Abbildungsvorschrift aufgestellt werden. Die Abbildungsvorschrift wird in einer  $3 \times 3$ -Matrix  $H$  ausgedrückt, welche die Transformationsmatrizen, sowie die Kameramatrizen zusammenfasst. Die  $3 \times 3$ -Matrix, kann aus gegebenen Punktekorrespondenzen abgeleitet werden. Aus  $H$  können Rückschlüsse auf die Kamera-parameter der beiden Kameras gezogen werden.

Es seien  $m_\tau = (m_{x\tau}, m_{y\tau}, m_{z\tau})^T$  die homogenen Koordinaten eines Punktes auf der Bildebene  $(I, \tau)$  und  $m'_{\tau'} = (m'_{x\tau'}, m'_{y\tau'}, m'_{z\tau'})^T$  der dazu korrespondierende Punkt der Bildebene  $(I', \tau')$ . Gesucht wird eine Abbildungsvorschrift welche als Matrix  $H$  ausgedrückt wird:

$$m'_{\tau'} = Hm_\tau \quad (3.1)$$

$$Hm_\tau = \begin{bmatrix} h_1^T \cdot m_{x\tau} \\ h_2^T \cdot m_{y\tau} \\ h_3^T \cdot m_{z\tau} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\rightsquigarrow m'_{\tau'} = Hm_\tau = \begin{bmatrix} h_{11}m_{x\tau} + h_{12}m_{y\tau} + h_{13}m_{z\tau} \\ h_{21}m_{x\tau} + h_{22}m_{y\tau} + h_{23}m_{z\tau} \\ h_{31}m_{x\tau} + h_{32}m_{y\tau} + h_{33}m_{z\tau} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\rightsquigarrow H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

In den ersten beiden Abschnitten werden zwei Herleitungen der Abbildungsvorschriften zwei unterschiedlicher Fälle gesucht. Im ersten Fall wird vorausgesetzt, dass die 3D-Punkte im Raum auf einer Ebene liegen und auf die Bildebenen von zwei zueinander verschobenen und rotierten Kameras abgebildet werden. Im zweiten Fall werden die Punkte eines komplexeren 3D-Objektes auf die beiden Bildebenen abgebildet. Im letzten Abschnitt wird die Herleitungen der entstehenden Matrizen beider Fälle anhand von Punktekorrespondenzen aufgezeigt.

#### 3.1 Korrespondenzen planarer Punktmengen mit Homographien

Eine Abbildungsvorschrift kann in bestimmten Fällen eindeutig bestimmt werden. In diesen Fällen nennt man die Abbildung zwischen beiden zweidimensionalen Bildern Homographie[3, 5, 9]. In diesem Kapitel wird der beispielhafte Fall behandelt, dass Punkte auf der  $x, y$ -Ebene im Weltkoordinatensystem auf zwei unterschiedlichen Kameras  $C$  und  $C'$  abgebildet werden. Dies ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

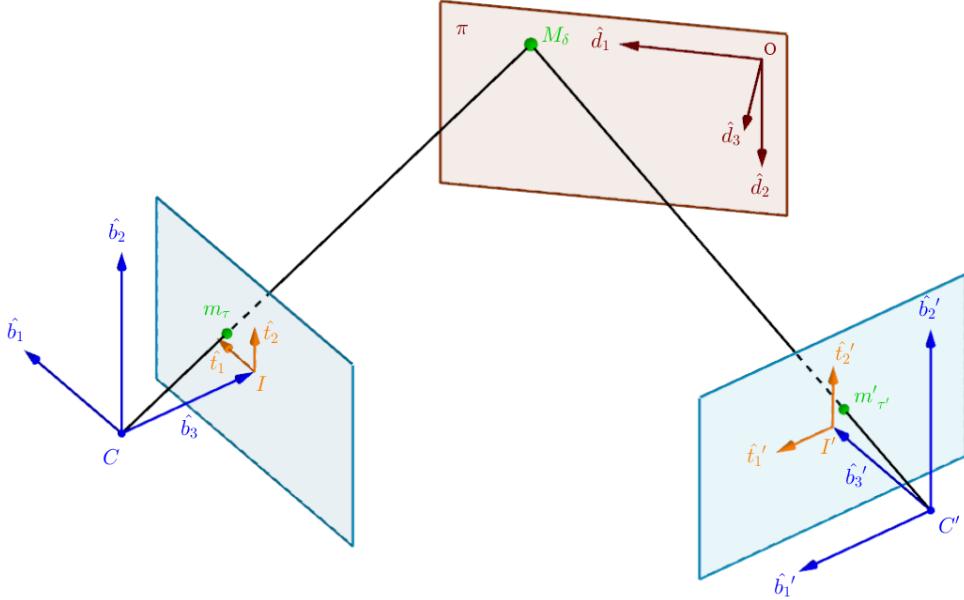


Abbildung 3.1: In der Abbildung sind die beiden Kameras  $C$  und  $C'$  mit ihren Bildebenen  $I$  und  $I'$  zu sehen. Ein Objektpunkt  $M_\delta$  bezüglich eines Weltkoordinatensystems  $(O, \delta)$  befindet sich auf der Ebene  $\pi$ , welche durch die Achsen  $\hat{d}_1$  und  $\hat{d}_2$  aufgespannt wird.  $M_\delta$  wird auf  $I$  und  $I'$  projiziert. Es entstehen die Bildpunkte  $m_\tau$  und  $m'_\tau$ .

Um die Abbildungsvorschrift herzuleiten beginnen wir bei dem Bildpunkt  $m_\tau = (m_{\tau,1}, m_{\tau,2}, m_{\tau,3})^T$  mit  $m_{\tau,3} = 1$ . Während in der Bildaufnahme ein Punkt  $m_\beta$  durch Division mit der  $m_{\beta,3}$ -Komponenten eindeutig zu  $m_\tau$  wird ist die Rückrichtung nicht eindeutig. Alle Punkte auf den Geraden von  $C$  und  $m_\tau$ , siehe Abbildung 3.2, werden auf denselben Bildpunkt projiziert. Die Projektion von  $m_\tau$  auf  $m_\beta$  ist demnach nicht eindeutig. Die Gerade mit allen möglichen Punkten  $m_\beta$  kann als  $\gamma m_\tau$ , mit der freien Variablen  $\gamma > 0$  ausgedrückt werden.

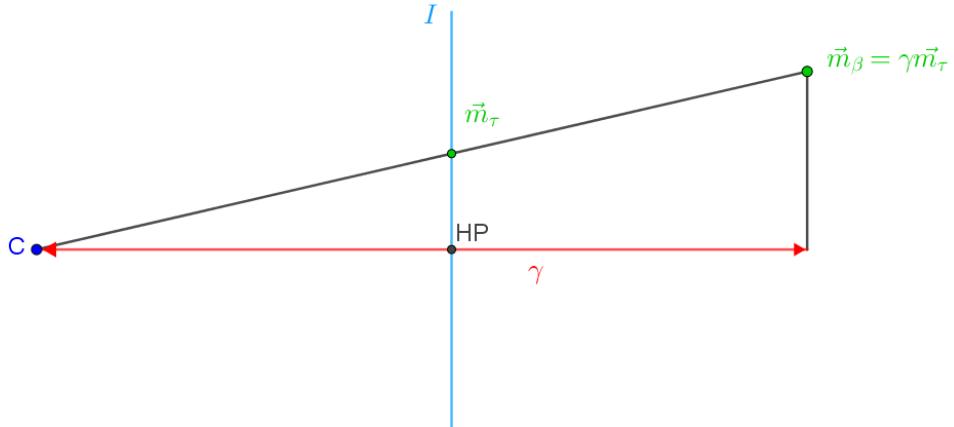


Abbildung 3.2: Auf der Geraden durch  $C$  und  $\vec{m}_\tau$ , befinden sich alle möglichen Punkte für  $m_\beta$ .  $m_\beta$  wird auf Grund seiner Unbestimmtheit als  $\gamma m_\tau$  bezeichnet

Für zwei korrespondierende Bildpunkte  $m_\tau$  und  $m'_\tau$ , kann für alle möglichen Punkte  $m_\beta$  und  $m'_\beta$  die folgende Projektionsvorschrift hergeleitet werden [5].

$$\gamma \vec{m}_\tau = P \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [KR| - KR\vec{C}_\delta] \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = KR(\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta) \quad (3.5)$$

$$\gamma' \vec{m}'_\tau = P' \begin{bmatrix} \vec{M}'_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [K'R'| - K'R'\vec{C}'_\delta] \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}'_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = K'R'(\vec{M}'_\delta - \vec{C}'_\delta) \quad (3.6)$$

Mit einem Ursprungspunkt  $M_\delta = (x_\delta, y_\delta, 0)^T$  auf der x,y Ebene im Weltkoordinatensystem und einer unbekannten Projektionsmatrix P mit

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & p_{41} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{43} \end{bmatrix} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] \quad (3.7)$$

kann die folgende Gleichung aufgestellt werden [5]

$$\gamma m_\tau = P \cdot \begin{bmatrix} M_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] \cdot \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [p_1 \ p_2 \ p_4] \cdot \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = G \vec{m}_\delta \quad (3.8)$$

$$\gamma' m'_{\tau'} = P \cdot \begin{bmatrix} M_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [p'_1 \ p'_2 \ p'_3 \ p'_4] \cdot \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [p'_1 \ p'_2 \ p'_4] \cdot \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = G' \vec{m}_\delta. \quad (3.9)$$

Aus  $\gamma m_\tau = G \cdot m_\delta$  und  $\gamma' m'_{\tau'} = G' \cdot m_\delta$  kann dann folgendes abgeleitet werden[5].

$$\gamma' m'_{\tau'} = G' G^{-1} \gamma m_\tau \quad (3.10)$$

Mit  $\lambda = \frac{\gamma'}{\gamma}$ , kann Gleichung 3.10 dann wieder umformuliert werden und in die Bedienungsgleichung der Homographie mit  $H = G' G^{-1}$  umgeformt werden:

$$\lambda m'_{\tau'} = H m_\tau \quad (3.11)$$

Die entstandene Homographie  $H$  ist somit eine Abbildungsvorschrift welche zwei korrespondierende Punkte in Verbindung setzt. Diese Homographiebedingung stellt ein Gleichungssystem mit 9 unbekannten, welche in Kapitel 3.2 gelöst wird[3].

### 3.2 Korrespondenzanalyse für beliebige Punkte im Raum (Epipolare Geometrie)

Für Bilder von komplexeren dreidimensionalen Objekten, bei denen die Punkte auf verschiedenen Ebenen liegen können, kann keine Homographiebedingung hergestellt werden um die Kameraparameter zu bestimmen. Jedoch kann auf geometrische Bedingungen zurückgegriffen werden, um die Abbildungsvorschrift zwischen den Bildern auszunutzen, um die Kameraparameter beider Kameras zu bestimmen. Ein Ursprungspunkt  $M_\delta$  wird wieder mit zwei Kameras  $C$  und  $C'$  aufgenommen. In Abbildung 3.3 ist das stereoskopische System dargestellt .



Abbildung 3.3:  $C$  und  $C'$  sind die Projektionszentren zweier Kameras. Beide Kameras besitzen jeweils eine Bildebene. Die Basislinie verbindet die Projektionszentren der Kameras. Die Punkte an welchen die Basislinie die Bildebene schneidet, werden als Epipole  $e$  und  $e'$  bezeichnet. Durch einen Epipol verlaufen alle Epipolarlinien des Bildes.  $M_\delta$  ist der Objektpunkt im 3D-Raum und  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  sind die jeweiligen Abbildungen dieses Punktes auf den Bildebene. Die Verbindungsvektoren zwischen  $C, C'$  und  $M_\delta$  bilden die sogenannte Epipolarebene[10, 11, 3, 1].

Es werden hier einige geometrische Definitionen eingeführt um die danach folgende mathematische Herleitung genauer zu verstehen. Die Vektoren  $\overrightarrow{CM} = (\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta)$ ,  $\overrightarrow{C'M} = (\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta)$  und  $\overrightarrow{CC'} = (\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta)$  definieren die Epipolarebene, die durch das schwarze Dreieck in Abbildung 3.3 gekennzeichnet ist. Die Schnittpunkte der Geraden zwischen  $C$  und  $C'$  mit der jeweiligen Bildebene  $I$  und  $I'$  werden als Epipole  $e$  und  $e'$  bezeichnet. Die Schnittgerade der Epipolarebene mit  $I$  und  $I'$  bilden die sogenannten Epipolarlinien  $l$  und  $l'$ [3, 12, 13, 11].

Ein Bildpunkt  $m_i$  auf der Bildebene  $I$  wird zuerst auf die Gerade, die durch  $m_i$  und  $C$  geht abgebildet. Die Gerade stellt alle möglichen Ursprungspunkte zu  $m_i$  dar. Dies ist durch die drei möglichen Punkte  $M_1, M_2, M_3$  in Figur 3.4 dargestellt. Jeder dieser Punkte wird nun wiederum auf  $I'$  projiziert. Die so entstandenen Punkte liegen alle auf der Epipolarlinie  $l'$ [3].

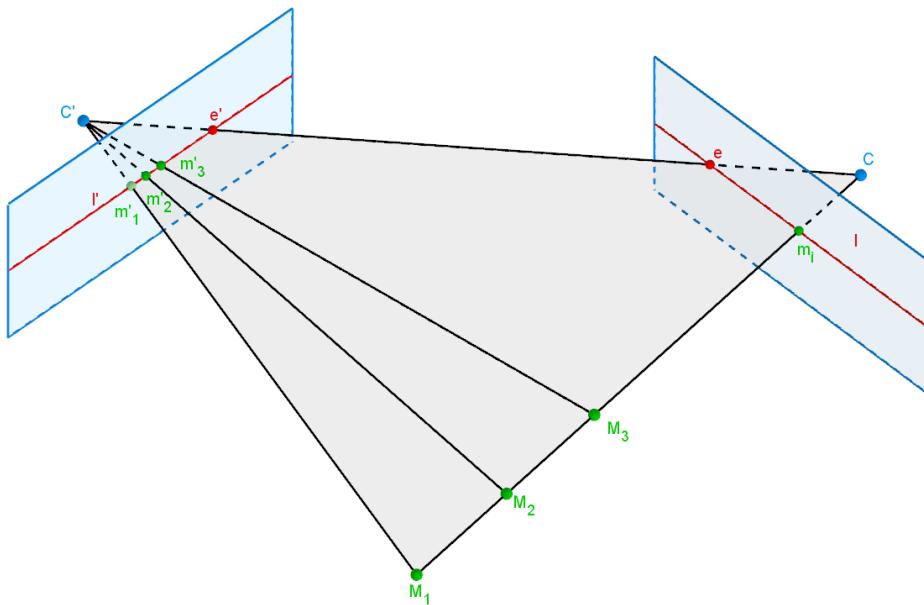


Abbildung 3.4: Die Objektpunkte  $M_1, M_2$  und  $M_3$  werden in  $I'$  als  $m'_1, m'_2$  und  $m'_3$  abgebildet, während sie in  $I$  immer den selben Bildpunkt  $m_1$  ergeben.

Die hier gezeigte Abbildung von  $m_i$  auf  $l'$  wird nun genauer betrachtet. Es werden wieder die Gleichungen für  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$ , wie in Gleichung 3.6, aufgestellt

$$\gamma \vec{m}_\tau = P \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [KR| - KR\vec{C}_\delta] \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}\delta \\ 1 \end{bmatrix} = KR(\vec{M}\delta - \vec{C}_\delta) \quad (3.12)$$

$$\gamma' \vec{m}'_{\tau'} = P' \begin{bmatrix} \vec{M}'_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [K'R'| - K'R'\vec{C}'_\delta] \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}\delta \\ 1 \end{bmatrix} = K'R'(\vec{M}\delta - \vec{C}'_\delta) \quad (3.13)$$

Gleichungen 3.12 und 3.13 werden nach  $(\vec{M} - \vec{C}_\delta)$  und  $(\vec{M} - \vec{C}'_\delta)$  aufgelöst.

$$\gamma R^T K^{-1} \vec{m}_\tau = (\vec{M} - \vec{C}_\delta) \quad (3.14)$$

$$\gamma' R'^T K'^{-1} \vec{m}'_{\tau'} = (\vec{M} - \vec{C}'_\delta) \quad (3.15)$$

Wie in Abbildung 3.3 gezeigt bilden Vektoren  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta)$ ,  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta)$  und  $(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta)$  ein Dreieck. Für dieses Dreieck kann die folgende Gleichung aufgestellt werden.

$$(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta) = (\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta) - (\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta) \quad (3.16)$$

$(\vec{M} - \vec{C}_\delta)$  und  $(\vec{M} - \vec{C}'_\delta)$  können durch die Ausdrücke in den Gleichungen 3.14 und 3.15 ersetzt werden um folgende Gleichung zu erhalten

$$(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta) = \gamma' R^T K^{-1} \vec{m}_\tau - \gamma R'^T K'^{-1} \vec{m}'_{\tau'}. \quad (3.17)$$

Durch Vektoridentitäten können  $\gamma$  und  $\gamma'$  eliminiert werden und folgende Bedingung aus Gleichung 3.17 hergeleitet werden [14]

$$\vec{m}'_{\tau'}^T K'^{-T} T R' [\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_x R^T K^{-1} \vec{m}_\tau = \vec{m}'_{\tau'} F \vec{m}_\tau = 0 \quad (3.18)$$

mit

$$[\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_x = \begin{bmatrix} 0 & -(C'_{z\delta} - C_{z\delta}) & C'_{y\delta} - C_{y\delta} \\ C'_{z\delta} - C_{z\delta} & 0 & -(C'_{x\delta} - C_{x\delta}) \\ -(C'_{y\delta} - C_{y\delta}) & C'_{x\delta} - C_{x\delta} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

In Gleichung 3.18 wurde die Bedingungsgleichung für die sogenannte Fundamentalmatrix  $F$  definiert [10]. Sind die Kameraparameter und dadurch die Kameramatrix  $K$  bekannt, so wird die essentielle Matrix  $E$  mit  $E = R' [\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_x R^T$  definiert. Gleichung 3.18 kann zu einer Bedingung für  $E$  umgeformt werden.

$$\vec{m}'_{\tau'}^T K'^{-T} E K^{-1} \vec{m}_\tau = 0 \quad (3.20)$$

Gleichung 3.18 und 3.20 definieren den sogenannten *Epipolar-Constraint*[3, 10] und können verwendet werden um die Fundamentalmatrix oder essentielle Matrix aus bekannten Korrespondierenden Punkten zu bestimmen. Für die essentielle Matrix müssen zuvor noch die Koordinaten in der Form

$$\vec{m}'_{\tau'} = \vec{m}'_{\tau}^T K'^{-T} \quad (3.21)$$

$$\hat{\vec{m}}_\tau = K^{-1} \vec{m}_\tau \quad (3.22)$$

zu normierten Bildebenenkoordinaten umgerechnet werden[3, 15]. Der verwendete Algorithmus zur Bestimmung von  $F$  wird in Kapitel 3.3 näher beschrieben.

Wenn die Fundamentalmatrix bekannt ist, können auch die Epipole  $e$  und  $e'$  und Epipolarlinien  $l$  und  $l'$  aus Eigenschaften der Fundamentalmatrix bestimmt werden [3, 11, 16, 1, 15]. Um die Epipole  $e$  zu bekommen, wird der rechte Kern von  $F$  bestimmt und für  $e'$  muss der linke Kern von  $F$  bestimmt werden[3, 11, 16, 1, 15]. Es gilt also

$$Fe = 0 \quad (3.23)$$

$$F^T e' = 0. \quad (3.24)$$

Um die zu  $m$  oder  $m'$  korrespondierende Epipolarlinie  $l'$  oder  $l$  zu bestimmten kann die folgende Transformation verwendet werden[3, 11, 16, 1, 15]

$$l' = Fm \quad (3.25)$$

$$l = F^T m'. \quad (3.26)$$

Die Matrizen  $F$  und  $E$  sind mit diesen Eigenschaften wichtige Instrumente für die Bestimmung der extrinsischen und intrinsischen Kameraparameter und ihre Eigenschaften werden in den folgenden Kapiteln ausgenutzt um effiziente Rekonstruktionalgorithmen für die Szene zu implementieren.

### 3.3 Bestimmung von Homographie und Fundamentalmatrix aus Punktekorrespondenzen

Im folgenden wird gezeigt, wie beispielsweise eine Homographie, Fundamentalmatrix und dementsprechend auch eine essentielle Matrix aus Punktekorrespondenzen gewonnen werden können. Für essentielle Matrizen gilt das selbe Verfahren wie für die Fundamentalmatrizen nur sind hier die Punkte in der Form wie in Gleichung 3.22 gezeigt. Die Herleitung selbst wird am Beispiel der Fundamentalmatrix aufgezeigt.

Es wird davon ausgegangen, dass die Transformationsmatrizen  $R$  und  $R'$  sowie die Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  nicht bekannt sind. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass zuvor mindestens acht korrespondierende Punkte aus den jeweiligen Bildpaaren detektiert wurden. Im Realfall, werden hierfür bestimmte Detektionsalgorithmen verwendet, wie Beispielsweise der SURF-Algorithmus[17], welche markante Bildpunkte in beiden Bildern suchen.

Um eine Homographiematrix mit  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$  zu erhalten werden die Punkte beider Kameras in eine Koeffizientenmatrix  $A$  eingetragen, welche sich nach dem folgenden Schema aufstellen lässt[3, 5]. Ausgehend von der Abbildungsvorschrift aus Gleichung 3.11 gilt:

$$Hm_\tau = \lambda m'_{\tau'} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_\tau \\ m_{\tau'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda m'_{\tau'} \\ \lambda m'_{y\tau'} \\ \lambda m'_{z\tau'} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{x\tau} \\ m_{y\tau} \\ m_{z\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda m'_{x\tau'} \\ \lambda m'_{y\tau'} \\ \lambda m'_{z\tau'} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Aus Gleichung 3.29 lässt sich das folgende Gleichungssystem aufstellen.

$$h_{11}m_{x\tau} + h_{12}m_{y\tau} + h_{13}m_{z\tau} = \lambda m'_{x\tau'} \quad (3.30)$$

$$h_{21}m_{x\tau} + h_{22}m_{y\tau} + h_{23}m_{z\tau} = \lambda m'_{y\tau'} \quad (3.31)$$

$$h_{31}m_{x\tau} + h_{32}m_{y\tau} + h_{33}m_{z\tau} = \lambda m'_{z\tau'} \quad (3.32)$$

Da mit zweidimensionalen homogenen Bildkoordinaten gearbeitet wird und somit  $m_{z\tau}$  und  $m'_{z\tau'} = 1$  ist, ergibt sich für die letzte Zeile  $h_{31}m_{x\tau} + h_{32}m_{y\tau} + h_{33}m_{z\tau} = \lambda$ . Setzt man diesen Ausdruck anstelle von  $\lambda$  in die anderen beiden Gleichungen ein, so ergeben sich:

$$h_{11}m_{x\tau} + h_{12}m_{y\tau} + h_{13}m_{z\tau} = (h_{31}m_{x\tau} + h_{32}m_{y\tau} + h_{33}m_{z\tau}) \cdot m'_{x\tau'} \quad (3.33)$$

$$h_{21}m_{x\tau} + h_{22}m_{y\tau} + h_{23}m_{z\tau} = (h_{31}m_{x\tau} + h_{32}m_{y\tau} + h_{33}m_{z\tau}) \cdot m'_{y\tau'} \quad (3.34)$$

Für den Aufbau von  $A$  werden beide Ausdrücke nach Null aufgelöst, so dass sich pro korrespondierendem Punktpaar zwei Gleichungen nach 3.35 und 3.36 ergeben.

$$h_{11}m_{x\tau} + h_{12}m_{y\tau} + h_{13}m_{z\tau} - (h_{31}m_{x\tau} + h_{32}m_{y\tau} + h_{33}m_{z\tau}) \cdot m'_{x\tau'} = 0$$

$$h_{21}m_{x\tau} + h_{22}m_{y\tau} + h_{23}m_{z\tau} - (h_{31}m_{x\tau} + h_{32}m_{y\tau} + h_{33}m_{z\tau}) \cdot m'_{y\tau'} = 0$$

$$\rightsquigarrow h_{11}m_{x\tau} + h_{12}m_{y\tau} + h_{13}m_{z\tau} - h_{31}m_{x\tau} \cdot m'_{x\tau'} - h_{32}m_{y\tau} \cdot m'_{x\tau'} - h_{33}m_{z\tau} \cdot m'_{x\tau'} = 0 \quad (3.35)$$

$$\rightsquigarrow h_{21}m_{x\tau} + h_{22}m_{y\tau} + h_{23}m_{z\tau} - h_{31}m_{x\tau} \cdot m'_{y\tau'} - h_{32}m_{y\tau} \cdot m'_{y\tau'} - h_{33}m_{z\tau} \cdot m'_{y\tau'} = 0 \quad (3.36)$$

Die entstandenen Gleichungen werden dann nach folgendem Schema in die Koeffizientenmatrix  $A$  eingetragen.[5, 3, 18, 6]

$$A \cdot x = 0 \quad (3.37)$$

$$\begin{pmatrix} m_{x\tau} & m_{y\tau} & 1 & 0 & 0 & 0 & m_{x\tau}m'_{x\tau'} & m_{y\tau}m'_{x\tau'} & 1 \cdot m'_{x\tau'} \\ 0 & 0 & 0 & m_{x\tau} & m_{y\tau} & 1 & m_{x\tau}m'_{y\tau'} & m_{y\tau}m'_{y\tau'} & 1 \cdot m'_{y\tau'} \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ m_{i,x\tau} & m_{i,y\tau} & 1 & 0 & 0 & 0 & m_{i,x\tau}m'_{i,x\tau'} & m_{i,y\tau}m'_{i,x\tau'} & 1 \cdot m'_{i,x\tau'} \\ 0 & 0 & 0 & m_{i,x\tau} & m_{i,y\tau} & 1 & m_{i,x\tau}m'_{i,y\tau'} & m_{i,y\tau}m'_{i,y\tau'} & 1 \cdot m'_{i,y\tau'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_i \end{pmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

Gesucht wird ein Vektor  $\vec{x}$ , für den gilt das  $A \cdot x = 0$ . Besitzt Matrix  $A$  einen Rang von 8, so entspricht der gesuchte Vektor  $\vec{x}$  dem Kern der Koeffizientenmatrix und ist ein Spaltenvektor mit insgesamt neun Einträgen, welche in die 3x3-Homographiematrix eingetragen werden können[3, 18].

Das Verfahren mit welchem sowohl  $F$  als auch  $E$  geschätzt werden können, ähnelt in seinem Aufbau dem der Bestimmung der Homographiematrix. Das Verfahren wird hier allgemein als der 8-Punkte-Algorithmus bezeichnet[3, 4, 12]. Der 8-Punkte-Algorithmus ist eine lineare Technik, welche angewandt wird, um die Fundamentalmatrix aus  $n \geq 8$  Punkten schätzen zu können. Der Algorithmus benötigt  $n \geq 8$  Punkte, um ein valides Ergebnis zu liefern [3, 12, 4]. Das Ergebnis und jedes seiner Vielfachen ist eine mögliche Lösung für  $F$ . Der Algorithmus wird am Beispiel für die Bestimmung von  $F$  veranschaulicht. Zunächst wird eine Koeffizientenmatrix  $A$  aus Punktekorrespondenzen gebildet. Hierzu wird sich auf die für  $F$  hergeleitete Gleichung 3.18 bezogen.

$$\begin{aligned}
m'^T_{\tau'} \cdot F \cdot m_{\tau} &= 0 \\
F &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{122} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} m'_{x\tau'} & m'_{y\tau'} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & f_{122} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{x\tau} \\ m_{y\tau} \\ 1 \end{bmatrix} &= 0 \\
f_{11}m_{x\tau}m'_{x\tau'} + f_{12}m_{y\tau}m'_{x\tau'} + f_{13}m'_{x\tau'} + f_{21}m_{x\tau}m'_{y\tau'} \\
+ f_{22}m_{y\tau}m'_{y\tau'} + f_{23}m'_{y\tau'} + f_{31}m_{x\tau} + f_{32}m_{y\tau} + f_{33} &= 0 \quad (3.39) \\
(m_{x\tau}m'_{x\tau'}, m_{y\tau}m'_{x\tau'}, m'_{x\tau'}, m_{x\tau}m'_{y\tau'}, m_{y\tau}m'_{x\tau'}, m'_{x\tau'}, m_{x\tau}, m_{y\tau}, 1) \cdot f &= 0 \\
\begin{bmatrix} m_{x\tau}m'_{x\tau'} & m_{y\tau}m'_{x\tau'} & m'_{x\tau'} & m_{x\tau}m'_{y\tau'} & m_{y\tau}m'_{y\tau'} & m'_{y\tau'} & m_{x\tau} & m_{y\tau} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ m_{i,x\tau}m'_{i,x\tau'} & m_{i,y\tau}m'_{i,x\tau'} & m'_{i,x\tau'} & m_{i,x\tau}m'_{i,y\tau'} & m_{i,y\tau}m'_{i,y\tau'} & m'_{i,y\tau'} & m_{i,x\tau} & m_{i,y\tau} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix} &= 0 \\
A \cdot f &= 0
\end{aligned}$$

Gesucht wird nun ein Vektor  $\vec{f}$ , für den gilt das  $A \cdot f = 0$ . Besitzt Matrix  $A$  einen Rang von 8, so entspricht der gesuchte Vektor  $\vec{x}$  auch hier dem Kern von  $A$  und ist ein Spaltenvektor mit insgesamt neun Einträgen, welche in die 3x3-Fundamentalmatrix eingetragen werden können[3, 1].

Bei der Homographie wie auch bei der Fundamentalmatrix, kann es zu überbestimmten Systemen kommen. Ein System gilt als überbestimmt, wenn es durch mehr Gleichungen als Unbekannte beschrieben wird[18, 19]. Für die Koeffizientenmatrix für  $F$  und  $H$  hätte das zur Folge, dass sie in ihrem Rang steigt. Die Bestimmung des Kerns würde in beiden Fällen kein eindeutiges Ergebnis mehr liefern[3, 18].

Für die Lösung überbestimmter Systeme wird durch ein *Least-Square*-Verfahren, mit Hilfe der Singulärwertszerlegung einer Matrix  $A$  eine Lösung für einen Vektor  $\vec{x}$  gesucht, so dass  $\| A \cdot x \|$  minimal wird [3, 19, 18]. Die Singulärwertzerlegung von  $A$  ist eine Faktorisierung der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  der Form  $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$  mit orthogonalen Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sowie mit einer Diagonalmatrix  $\Sigma$ .

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & \dots & s_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Die Diagonalmatrix  $\Sigma$  beinhaltet die Singulärwerte der Matrix. Dabei soll für die diagonalen Singulärwerte in  $\Sigma$  mit  $s_1$  bis  $s_r$  gelten, dass  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r \geq 0$ [19]. Die Spalte der Matrix  $V^T$ , welche mit dem kleinsten Singulärwert von  $\Sigma$  korrespondiert, ergibt den Vektor  $\vec{x}$ , für den  $\| A \cdot x \|$  minimal wird.

# 4 Synthetische Rekonstruktion

Anhand der erarbeiteten mathematischen Grundlagen ist ein Algorithmus für Rekonstruktion einer Szenen aus einer Stereobildaufnahme entstanden. Der Algorithmus wurde mit dem Ziel der Kamerakalibrierung und der Szenenrekonstruktion aus Bildquellen unterschiedlicher Auflösungen entwickelt, da Stereokalibrierungsverfahren einiger Computer Vision Applikationen kein unterschiedlichen Auflösungen von Kameras berücksichtigen. Der entwickelte Algorithmus ist sowohl in der Lage aus einem Stereobildpaar extrinsische Kameraparameter zu bestimmen und anhand dessen die 3D-Szene zu rekonstruieren, jedoch unter der Voraussetzung, dass die intrinsischen Kameraparameter beider Kameras bekannt sind.

Im Folgenden soll der Algorithmus anhand eines virtuellen Beispiels erklärt werden. Dabei werden die einzelnen Schritte des Aufbaus der virtuellen Szene, der Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter und der Rekonstruktion der virtuellen 3D-Szene beschrieben. Abbildung 4.1 fasst den Arbeitsprozess des Szenenrekonstruktionsalgorithmus für das virtuelle Beispiel zusammen.

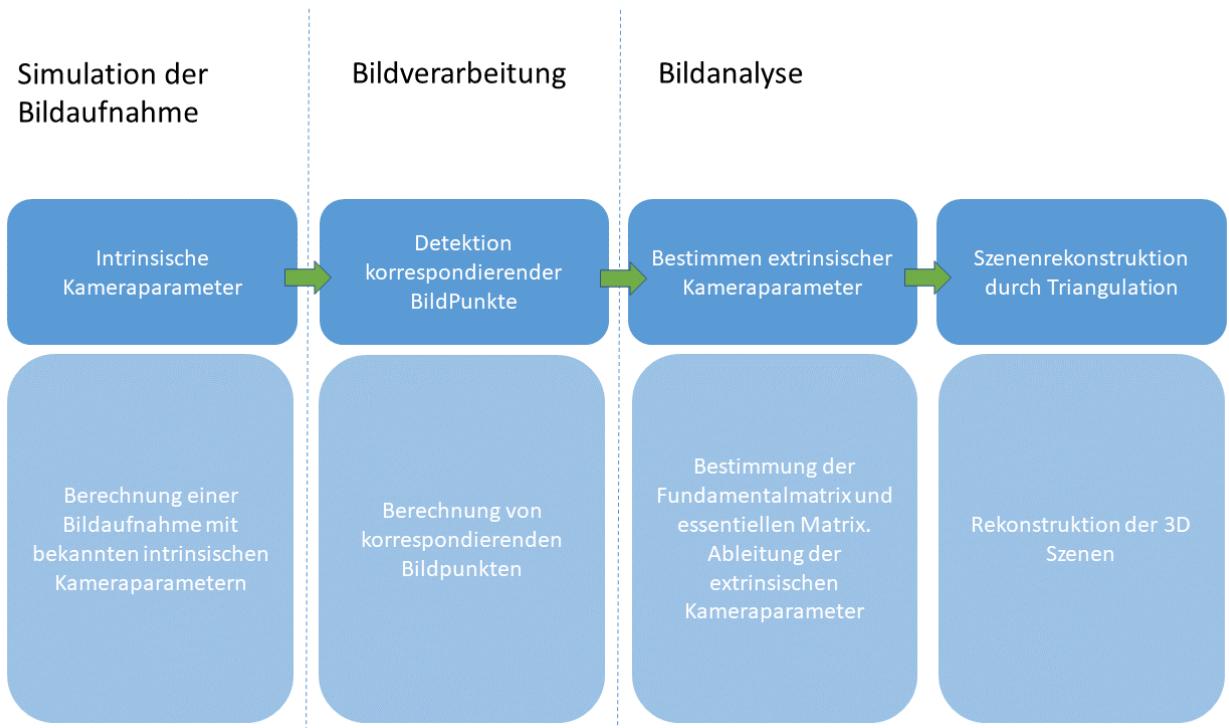


Abbildung 4.1: Ablaufdiagramm für das synthetische Beispiel

## 4.1 Simulierte Bildaufnahme einer virtuellen Szene

Als 3D-Objekt wurde ein Quader, in ein Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3)$  positioniert. Es werden zwei Kameras  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$  und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = (\hat{b}'_1, \hat{b}'_2, \hat{b}'_3)$  in  $(O, \delta)$  platziert. Das Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  und Das Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  sind deckungsgleich.  $C'$  ist relativ zu  $C$  verschoben und rotiert. Die zwei Bildebenen  $(I, \tau)$  mit  $\tau = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3)$  und  $(I', \tau')$  mit  $\tau' = (\hat{t}'_1, \hat{t}'_2, \hat{t}'_3)$  sind vor  $C$  und  $C'$  positioniert. Die Sensorkoordinatensysteme  $(S, \sigma)$  und  $(S', \sigma')$  wurden gleich den Bildebenenkoordinatensystemen  $(I, \tau)$  und  $(I', \tau')$  gesetzt. Es wird von zwei

identischen Kameras ausgegangen und somit werden für den hier diskutierten Fall ausschließlich mit dem vereinfachten Kameramatrizen  $K_0$  gerechnet. Der schematische Aufbau der Szenen ist in den Abbildungen 4.2, 4.3 und 4.4 dargestellt.

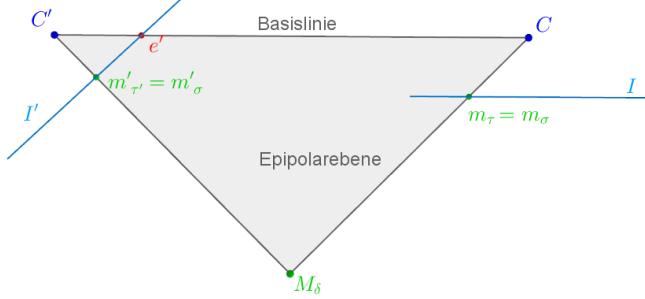


Abbildung 4.2: In der Abbildung ist der vereinfachte Stereoaufbau in einer Top-Down-Ansicht zu sehen

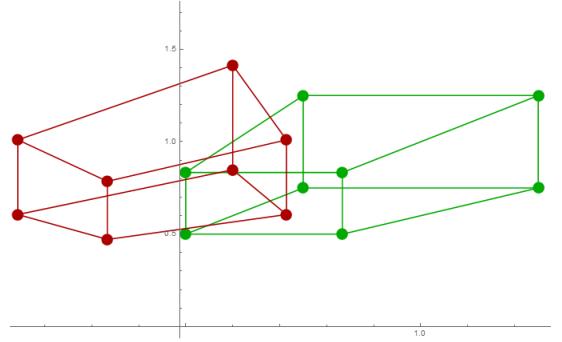


Abbildung 4.3: Simulierte Abbildung des Quaders auf die Kamera  $C$  in Grün und auf  $C'$  in rot

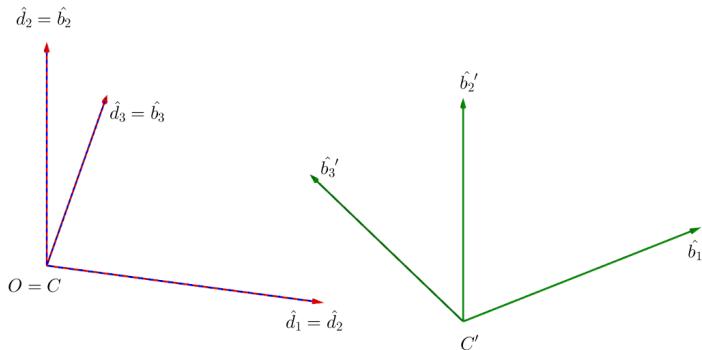


Abbildung 4.4: Abbildung der verschiedenen Kamerakoordinatensysteme, das Weltkoordinatensystem  $O$  ist zum Kamerakoordinatensystem  $C$  deckungsgleich und  $C'$  verschoben und rotiert.

Um die Eckpunkte des Quaders auf die Bildebenen von  $C$  und  $C'$  abbilden zu können, werden zunächst die Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$  aufgestellt.  $C$  ist Deckungsgleich mit dem Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$ . es gilt also:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$T = R[I] - C \quad (4.3)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 1 & C_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$C'$  dagegen ist gegenüber  $C$  verschoben und rotiert. Als Beispiel wird eine Rotation um die  $\hat{b}_2'$  Achse für  $C'$  bestimmt. Somit gilt für  $P'$ :

$$R' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\vec{C}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -C'_1 \\ 0 & 1 & 0 & -C'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -C'_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$T' = R'[I] - C \quad (4.7)$$

$$T' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -C'_1 \\ 0 & 1 & 0 & -C'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -C'_3 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$T' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) & -C'_1 \cos(\alpha) + C'_3 \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & -C'_2 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & -C'_1 \sin(\alpha) - C'_3 \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Der Quader hat insgesamt acht Punkte, welche auf die Bildebenen der Kameras projiziert werden. Neben den Punkten des Quaders, wird noch ein weiterer Punkt außerhalb des Quaders platziert und ebenfalls auf die Bildebenen projiziert. Mit insgesamt neun Punkten bei der Bestimmung der Fundamentalmatrix, wird die Wahrscheinlichkeit ein unterbestimmtes System aus der Koeffizientenmatrix  $A$  zu bekommen minimiert. Ist  $A$  unterbestimmt so besitzt sie ein Rang 7 und  $F$  kann nicht eindeutig durch einen Sieben-Punkte-Algorithmus bestimmt werden[3, 20]. In dem hier berechneten Beispiel werden deswegen neun Punkte benutzt um sicherzugehen, dass die  $A$  einen Rang 8 besitzt und somit eindeutig bestimmt werden kann. Zur Bestimmung von  $F$ , wird der in Kapitel 3 aufgeführte acht-Punkte Algorithmus angewandt.

Um die neun Punkte auf die Bildebenen  $(I, \tau)$  und  $(I', \tau')$  zu projizieren, müssen neben den Transformationsmatrizen  $R$  und  $R'$  noch die Kameramatrizen  $K_0$  und  $K'_0$  festgelegt werden.

$$K_0 = \begin{bmatrix} \zeta_C & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$K'_0 = \begin{bmatrix} \zeta_{C'} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{C'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Da zunächst von gleichen Kameraauflösungen ausgegangen wird, gilt  $\zeta = \zeta'$ . Sind  $R, R', K_0$  und  $K'_0$  bekannt, können die Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$  gebildet werden und anschließend werden die Punkte mit  $P$  und  $P'$  auf die Bildebenen projiziert.

$$P = K_0 \cdot R \quad (4.12)$$

$$P = \begin{bmatrix} \zeta_C & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$P' = K'_0 \cdot R' \quad (4.14)$$

$$P' = \begin{bmatrix} \zeta_{C'} \cos(\alpha) & 0 & \zeta_{C'} \sin(\alpha) & -\zeta_{C'}(v'_1 \cos(\alpha) + v'_3 \sin(\alpha)) \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_{C'} - v'_2 \\ \zeta_{C'} \sin(\alpha) & 0 & \zeta_{C'} \cos(\alpha) & -\zeta_{C'}(v'_1 \sin(\alpha) + v'_3 \cos(\alpha)) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Durch die Projektionsmatrix können die Punkte des Quaders auf die Bildebenen projiziert werden. Die entstandenen Bilder sind in Abbildung 4.3 zu sehen.

## 4.2 Bildanalyse

Der Szenenrekonstruktionsalgorithmus für das synthetische Beispiel ist in drei Abschnitte unterteilt. Zuerst wird aus den Punktekorrespondenzen die Fundamentalmatrix und die essentielle Matrix geschätzt. Mit Hilfe der essentiellen Matrix werden die extrinsischen Kameraparameter bestimmt um so im letzten Schritt die Szenenpunkte durch Rückprojektion der Bildpunkte mit Hilfe der Kameraparameter rekonstruiert.

### 4.2.1 Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter

Zur Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter werden in dem hier berechneten Beispiel neun korrespondierende Punkte bestimmt. Mittels des *Epipolar-Constraint* aus Gleichung 3.18 wird der 8-Punkt-Algorithmus wie in Kapitel 3.3 beschrieben angewandt, um die Fundamentalmatrix zu bestimmen.

$$0 = \vec{m}'_\tau^T K'^{-T} R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_\times R^T K^{-1} \vec{m}_\tau \quad (4.16)$$

$$= \vec{m}'_\tau F \vec{m}_\tau \quad (4.17)$$

Wie in Kapitel 3.2 hergeleitet, bildet sich die essentielle Matrix aus:

$$\vec{m}'_\tau^T K'^{-T} R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_\times R^T K^{-1} \vec{m}_\tau = 0 \quad (4.18)$$

$$\rightsquigarrow E = R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_\times R^T \quad (4.19)$$

Um also  $E$  aus  $F$  zu bestimmen, gilt:

$$E = K'^T F K \quad (4.20)$$

$$E = K'^T (K'^{-T} R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_\times R^T K^{-1}) K \quad (4.21)$$

$$E = R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_\times R^T \quad (4.22)$$

Es wird davon ausgegangen, dass für  $T = [R] - RC$  von  $C$  gilt, dass  $T = [I] - 0$  ist. Die aus  $E$  zu ermittelnde Matrix  $T'$  beschreibt dann die Transformation von  $C'$  relativ zu  $C[3, 4]$ . Somit kann  $E$  umformuliert werden zu:

$$E = R' [\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_\times R^T \quad (4.23)$$

$$E = R' [\vec{C}'_\delta - 0]_\times I^T \quad (4.24)$$

$$E = R' [\vec{C}'_\delta]_\times \quad (4.25)$$

Um  $R'$  und  $[\vec{C}'_\delta]_\times$  zu bestimmen, wird zunächst die essentielle Matrix  $E$ , mit Hilfe der Singulärwertszerlegung, in drei Matrizen zerlegt.

$$E = U \Sigma V^T \quad (4.26)$$

Die Singulärwerte  $\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  der Matrix  $\Sigma$  müssen die Bedingung erfüllen, dass  $\Sigma = \text{diag}(1, 1, 0)[3, 4]$ . Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so wird sie erzwungen. Dazu wird Matrix  $\Sigma$  aus der Singulärwertszerlegung aus  $E$  modifiziert[3, 4].

$$E' = U \text{diag}(1, 1, 0) V^T \quad (4.27)$$

$[C'_\delta]_\times$  ist schiefsymmetrisch und kann in  $UZU^T$  zerlegt werden, wobei  $U$  eine orthogonale Matrix ist und  $Z$  eine block-diagonale Matrix[3].  $R'$  wird in  $UWV^T$  und  $UW^TV^T$  zerlegt, wobei  $W$  eine schiefsymmetrische Matrix ist[4, 3, 15].

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Somit lassen sich die folgenden Lösungsmöglichkeiten für  $[C'_\delta]_\times$  und  $R_1$  und  $R_2$  aufstellen[3, 4].

$$[C'_\delta]_\times = \pm UZU^T \quad R'_1 = UW^TV^T \quad (4.29)$$

$$S_2 = UZU^T \quad R'_2 = UWV^T \quad (4.30)$$

$[C'_\delta]_\times$  ist eine schiefsymmetrische Matrix, welche die Information für den noch gesuchten Translationsanteil  $v = -R'C'$  beinhaltet. Ohne zusätzliche Informationen kann  $v$ , nur bis zu einer Skaleninvarianz genau bestimmt werden[3, 4, 15]. Durch die Modifizierung der Singulärwerte von  $E$  gilt für  $\|v\| = 1$ [3, 4]. Das bedeutet, dass es sich bei dem Translationsvektor  $v$  lediglich um den normierten Richtungsvektor zwischen  $C$  und  $C'$  handelt[21]. Um  $v$  aus  $[C'_\delta]_\times$  zu extrahieren, wird der Kern von  $[C'_\delta]_\times$  bestimmt

$$[C'_\delta]_\times \cdot v = v \times v = 0 \quad (4.31)$$

Die Skaleninvarianz bewirkt, dass es bei der Rekonstruktion die Größe der Objekte von ihrer Originalgröße abweichen, da es sich bei  $v$  wie gesagt nur um den normierten Richtungsvektor der ursprünglichen Strecke handelt. Die Abbildungen 4.11, 4.12 und 4.13, zeigen die Auswirkungen von Skaleninvarianz auf die später rekonstruierte Szene.

Letztendlich können, für die Rekonstruktion der extrinsischen Kameraparameter vier mögliche Lösungen für  $T$  in Form von  $T = R[I] - C$ , wie in Gleichung 2.13 in Kapitel 2 definiert, gefunden werden[3, 4, 15].  $\lambda v$  heißt dabei, dass sowohl  $v$  also auch alle Vielfache von  $v$ , Lösungen sein können, was durch die Skaleninvarianz der Resultate bedingt ist[3, 4, 15].

$$T' = [UWV^T] + \lambda v \quad \text{oder} \quad [UW^TV^T] + \lambda v \quad (4.32)$$

$$\text{oder} \quad [UWV^T] - \lambda v \quad \text{oder} \quad [UW^TV^T] - \lambda v \quad (4.33)$$

Die Abbildungen 4.5, 4.6, 4.7 und 4.8 stellen schematisch die vier verschiedenen Transformationsmöglichkeiten von  $T'$  dar. Die Entscheidung welche Lösung  $T$  die richtige für das implementierte Beispiel ist, fällt auf diejenige Lösung, bei welcher das Abbild des der Objekte vor den Kameras liegt.

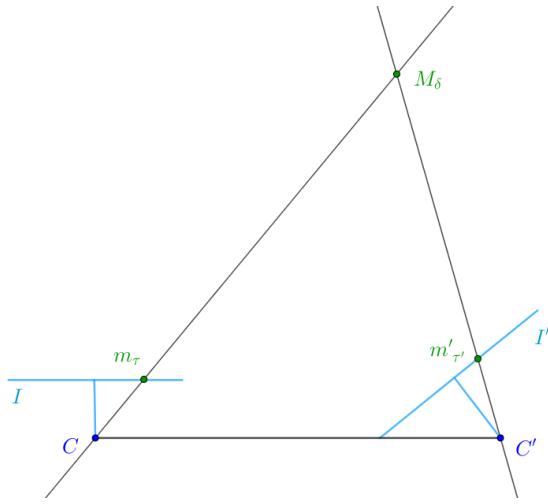


Abbildung 4.5: a)

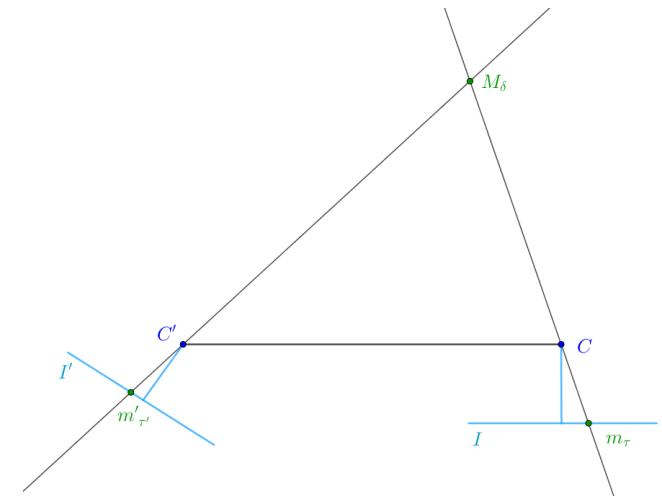


Abbildung 4.6: b)

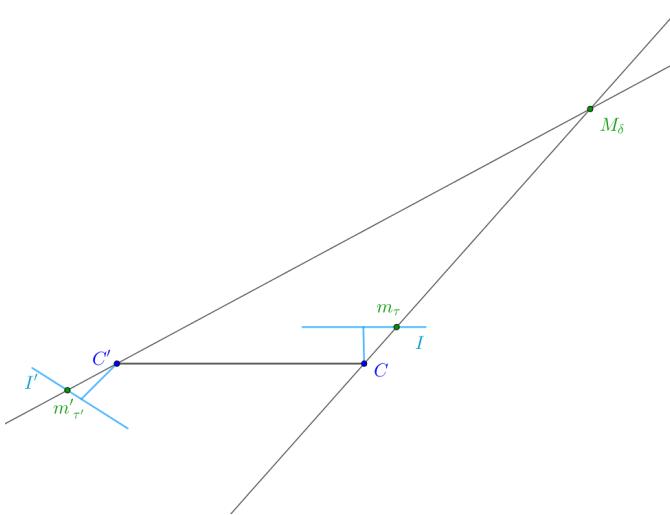


Abbildung 4.7: c)

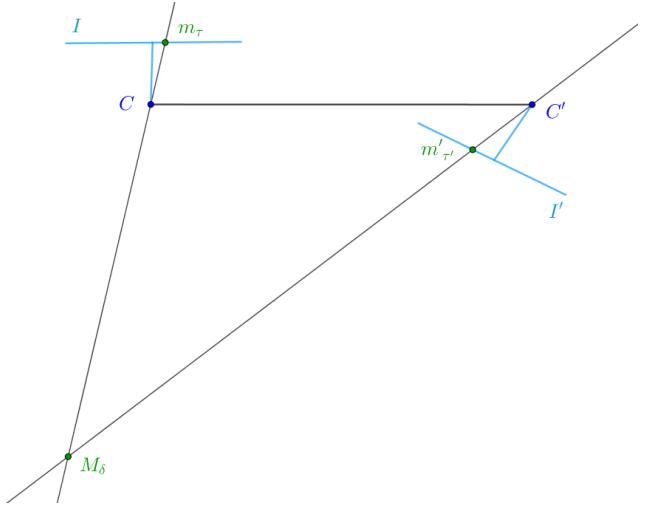


Abbildung 4.8: d)

Abbildung 4.9: Die Abbildungen a, b, c und d veranschaulichen, welche Bilder aus den vier Lösungen entstehen. In den Abbildungen a und b kommt es zu einer Umkehrung der Basisline. In den Abbildungen c und d wird  $C'$  um  $180^\circ$  gedreht

#### 4.2.2 Szenenrekonstruktion durch Triangulation

Als Triangulierung wird in der Computer Vision die Bestimmung eines 3D-Objektpunktes aus korrespondierenden Bildpunkten genannt. Als Voraussetzung für die Rekonstruktion müssen die jeweiligen korrespondierenden Bildpunkte und die Kameraparameter der einzelnen Kameras bekannt sein. Die Triangulierung funktioniert wie eine umgekehrte Projektion der Bildpunkte auf der Bildebene in einen Objektpunktes im Raum. Zwei Geraden, welche jeweils durch die Projektionszentren und den zu rekonstruierenden Bildpunkten gehen, treffen sich im Raum. Der Schnittpunkt beider Geraden, bildet den zu den Bildpunkten gehörenden Ursprungspunkt, wie in Abbildung 4.10 schematisch dargestellt ist.

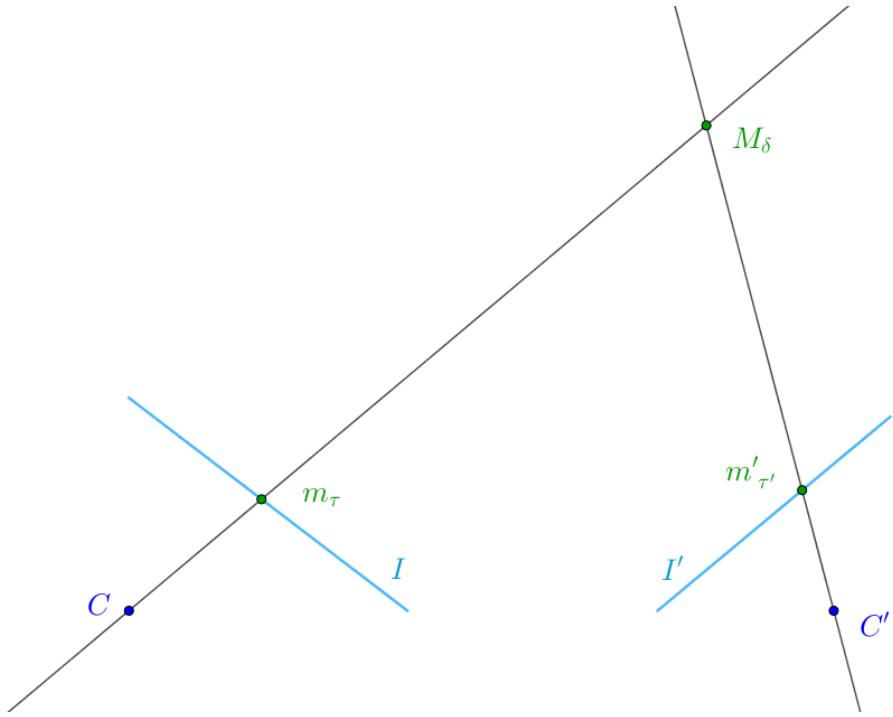


Abbildung 4.10: Optimale Triangulierung: Beide Geraden Treffen sich in einem Punkt im 3D-Raum

Im synthetischen Beispiel wird mit reinen Daten gearbeitet. Das heißt, die Bildpunkte wurden mathematisch von ihrem Ursprungspunkt im Raum berechnet und sind somit frei von Verfälschungen durch äußere Einflüsse. Ein zum Bildpunkt  $m_\tau$  korrespondierender Bildpunkt  $m'_{\tau'}$  liegt genau auf der zu  $m_\tau$  korrespondierenden Epipolarlinie  $l'$ . Somit ist garantiert, dass sich die Bildpunkte  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  bei einer Rückprojektion in einem Punkt  $M_{0,\delta}$  im Raum treffen. Durch die zuvor erwähnte Skaleninvarianz der extrinsischen Kameraparameter, handelt es sich bei  $M_{0,\delta}$  jedoch noch nicht um den eigentlichen Ursprungspunkt  $M_\delta$ .

Vor der Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter wurde festgesetzt, dass  $T = [I| - 0]$  die Translationsmatrix von  $C$  ist. Somit gilt für die Projektionsmatrix von  $C$ , dass  $P = K_0 T = K_0[I| - 0]$  ist. Die Projektionsmatrix  $P'$  für  $C'$  setzt sich aus einer der Lösungen von  $T'$  und der Kameramatrix  $K'_0$  zusammen, so dass gilt  $P' = K'_0 T' = K[R'| - R'C']$ .

Um eine Gerade von den Projektionszentren  $C$  und  $C'$  durch die jeweiligen Bildpunkte bilden zu können, müssen die Positionen von  $C$  und  $C'$  bekannt sein. Da die Koordinatensysteme  $(C, \beta)$  und  $(O, \delta)$  deckungsgleich sind, und  $P = K_0[I| - 0]$  ist, gilt  $C = (0, 0, 0)^T$ . Um  $C'$  aus  $T' = R'[R'| - R'C']$  zu bestimmen wird der Translationsvektor  $-R'C'$  aus  $T'$  mit dem Transponierten Rotationsmatrix  $R'^T$  aus  $T'$  multipliziert.

$$C' = R'^T \cdot -R'C' \quad (4.34)$$

Die zweidimensionalen Bildpunkte werden mit den bekannten Brennweiten  $\zeta$  und  $\zeta'$  aus  $K_0$  und  $K'_0$  zu einer dreidimensionalen Koordinate erweitert.

$$\begin{pmatrix} m_{\tau x} \\ m_{\tau y} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} m_{\tau x} \\ m_{\tau y} \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} m'_{\tau' x} \\ m'_{\tau' y} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} m'_{\tau' x} \\ m'_{\tau' y} \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Danach werden für die Rückprojektion zwei Geradengleichungen aufgestellt. Eine Gerade geht durch  $C$  und  $\begin{pmatrix} m_{\tau x} \\ m_{\tau y} \\ \zeta \end{pmatrix}$  die zweite Gerade geht durch die Punkte  $C'$  und  $\begin{pmatrix} m'_{\tau' x} \\ m'_{\tau' y} \\ \zeta' \end{pmatrix}$ . Danach wird aus den zwei

Geraden der Schnittpunkt  $M_{\delta,0}$  im Raum bestimmt.  $C$  und  $C'$  sind aus Sicht des Weltkoordinatensystems  $(O, \delta)$  definiert.  $m'_{\tau'}$  wird noch in Koordinaten bezüglich des Kamerakoordinatesystem  $(C, \beta)$  transformiert mit  $m'_{\beta} = [R[I] - C']^{-1} \cdot m'_{\tau'}$ .

$$g := \vec{C} + t \cdot \left( \vec{C} - \begin{pmatrix} m_{\beta x} \\ m_{\beta y} \\ \zeta \end{pmatrix} \right) \quad (4.37)$$

$$g' := \vec{C}' + t \cdot \left( \vec{C}' - \begin{pmatrix} m'_{\beta x} \\ m'_{\beta y} \\ \zeta' \end{pmatrix} \right) \quad (4.38)$$

Bei den zuvor ermittelten extrinsischen Kameraparametern, ist der Translationsvektor skaleninvariant. Dies führt dazu, dass der rekonstruierte Objektpunkt  $M_{\delta,0}$  nach der Szenenrekonstruktion noch nicht dem Ursprünglichen  $M_{\delta}$  entsprechen muss. Dementsprechend wird als letzter Schritt die rekonstruierte Szenen anhand einer bekannten Referenzgröße skaliert. Als Referenzgröße kann beispielsweise ein zuvor abgemessener Abstand zwischen zwei Punkten in der Szene dienen. Im synthetischen Aufbau sind beispielsweise die Abstände zwischen den Originalbildpunkten bekannt. Die Abbildungen 4.11, 4.12 und 4.13 zeigen die Szene des Quader mit unterschiedlichen Skalierungen. Die Abbildungen 4.14 und 4.15 zeigen die rekonstruierte Szene des synthetischen Beispiels. Die Abbildungen 4.14 und 4.15 zeigen die auf Ursprungsgröße skalierte rekonstruierte Szene des Quaders.

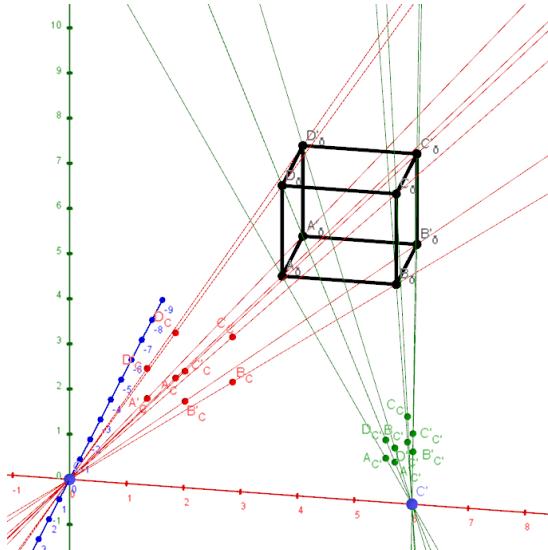


Abbildung 4.11

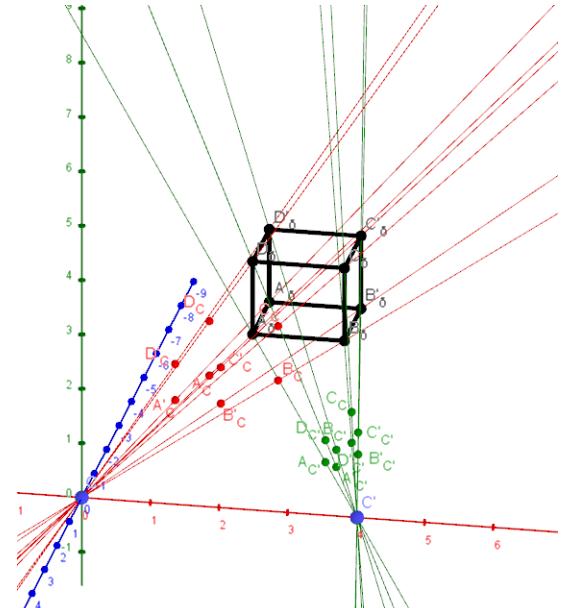


Abbildung 4.12

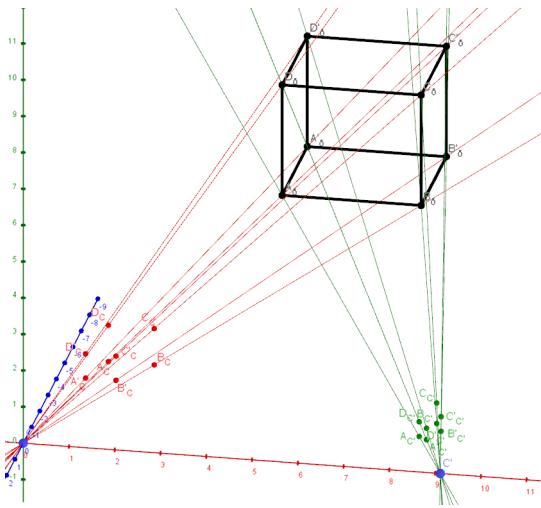


Abbildung 4.13: Veranschaulichung der Skaleninvarianz und dessen Auswirkung auf die geometrische Form und Größe der Objekte

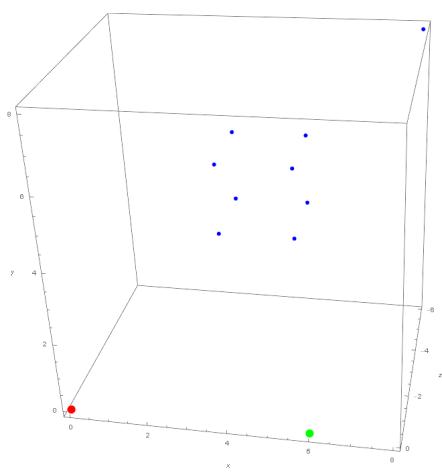


Abbildung 4.14

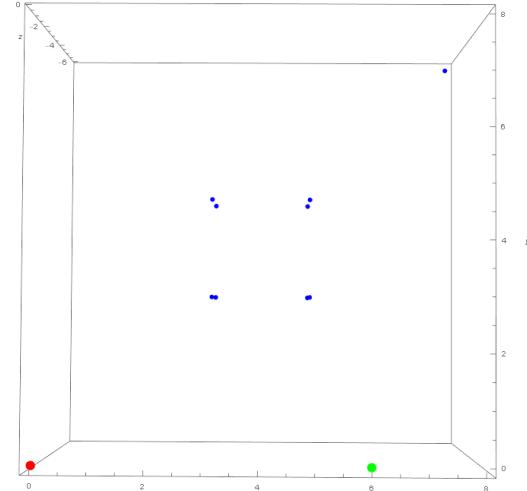


Abbildung 4.15

Abbildung 4.16: Der rote Punkt stellt Die Postion von  $C$  dar, der grüne steht für die Position von  $C'$  relativ zu  $C$ . Die blauen Punkte stellen den rekonstruierten Quader und den extern platzierten neunten Punkt da. Die Abbildungen entstand aus dem in *Mathematica*[22] implementierten Algorithmus.

# 5 Auswirkungen von unterschiedlichen Kameraauflösungen

Der entstandene Szenenrekonstruktionsalgorithmus wurde anhand von Kameras gleicher Auflösung implementiert und bereits validiert. Im folgenden soll nun getestet werden, ob der entwickelte Algorithmus auch im Stande ist für Kameras unterschiedlicher Auflösung eine Szene richtig zu Rekonstruieren. Zunächst wird beschrieben, welche Modifizierungen auf einem Sensor bei Veränderung der Auflösung stattfinden. Anschließend wird analysiert, wie sich die Auflösungsänderung auf das in Kapitel 2 beschriebene Kameramodell ändert und welche Einflüsse sie auf die in Kapitel 3 hergeleiteten Epipolaren Bedingungen und somit auf die Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter und der folgenden Szenenrekonstruktion hat. Zum Schluss werden die Ergebnisse der synthetischen Rekonstruktion mit unterschiedlichen Kameraauflösungen präsentiert und validiert.

## 5.1 Geometrie eines Sensors

Die Geometrie eines Sensors kann als eine  $M \times N$ -Matrix, bestehend aus  $M \times N$  Sensorelementen dargestellt werden[8]. Die Auflösung eines Sensors hängt von den horizontalen und vertikalen Abständen der Sensorelemente ab. Abbildung 5.1 zeigt den schematischen Aufbau eines Sensors (CMOS).

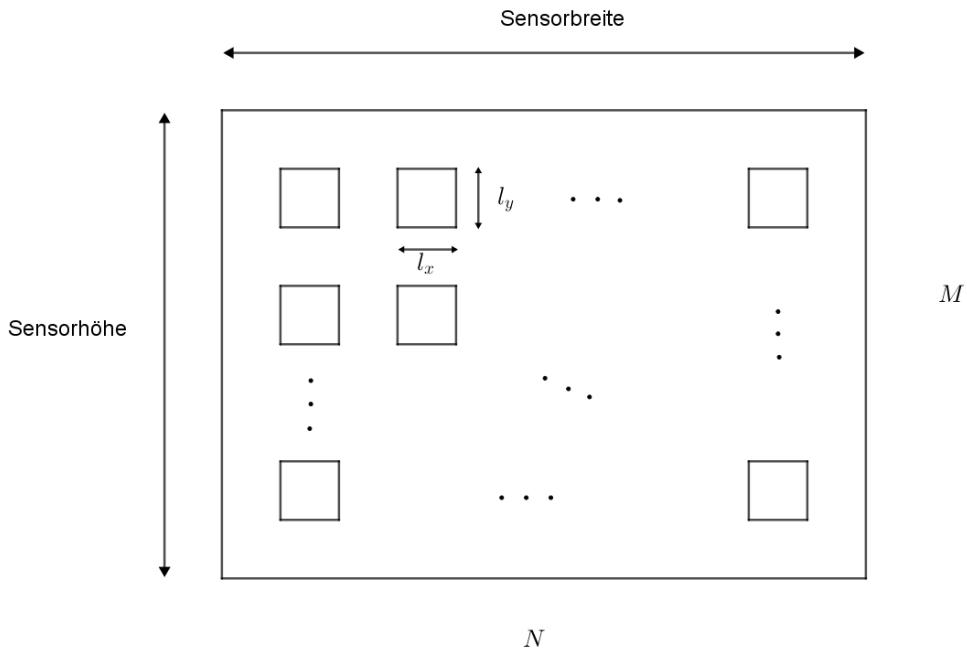


Abbildung 5.1: Rechteckiger Bildsensor mit darauf sich befindenden quadratischen Sensorelementen. Vergleiche [8]

Ein Sensor hat eine maximale Auflösung. Die maximale Anzahl der Sensorelemente auf einem Sensor beschreibt die maximale Auflösung. Verschiedene Kameras können aus diesem Grund verschiedenen Auflösungen besitzen. Die Anzahl und Größe der einzelnen Sensorelemente variiert mit den Größen der Sensorchips. Je größer ein Sensor ist und je mehr Sensorelemente er besitzt, desto besser ist die Bildqualität[8]. Bei maximaler Auflösung definiert genau ein Sensorelement einen Pixel. Ein Pixel wiederum entspricht einem Bildpunkt[8]. Auch ist es möglich die Auflösung eines Sensors digital zu

verändern. Wird eine Auflösung kleiner der maximalen Auflösung eingestellt, desto geringer wird die Anzahl der Pixel. Der Prozess, welcher hier stattfindet, gehört zu den Nachbarschaftsoperationen. Benachbarte Pixel werden hier zu einem neuen Pixel definiert[8]. Ein neuer Pixel wird aus den benachbarten Pixeln berechnet.

Eine Veränderung der Auflösung kann auch eine Änderung der Seitenverhältnisse mit einschließen. Ändert sich das Seitenverhältnis so wird der Bereich der lichtempfindlichen Fläche auf dem Sensor beschränkt[8]. Dies führt dazu, dass sich die Bildausschnitte ändern. Abbildung 5.2 stellt schematisch da wie sich die lichtempfindlichen Bereiche auf dem Sensor bei unterschiedlichen Auflösungen ändert.

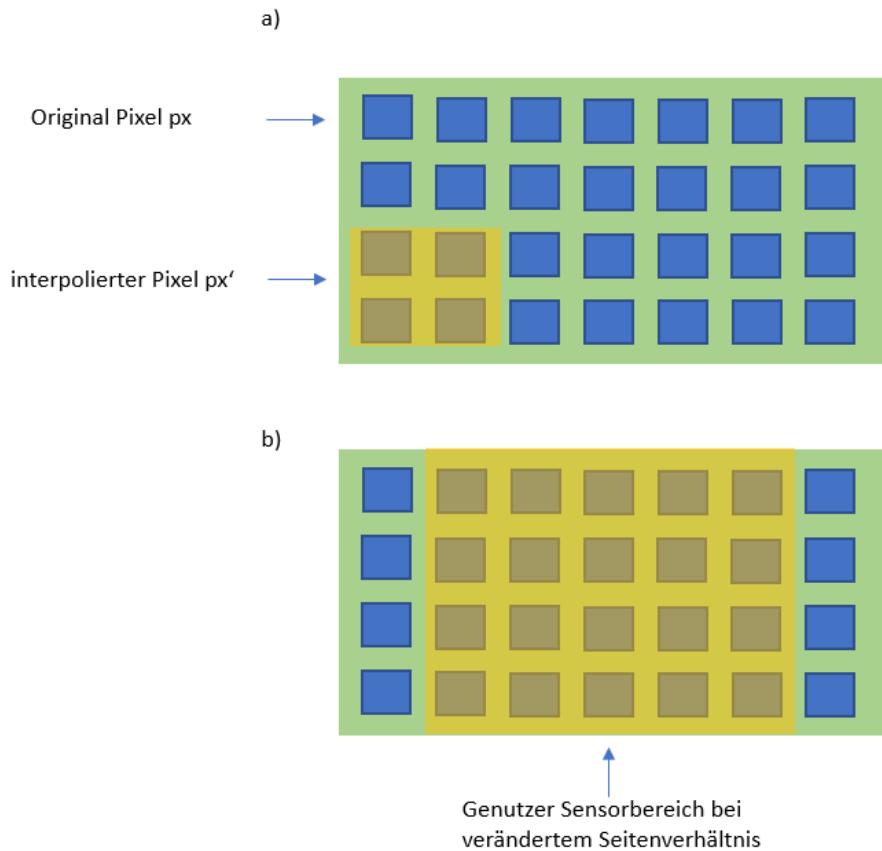


Abbildung 5.2: Bild a) zeigt die den Zusammenschluss mehrerer benachbarter Pixel zu einem neuen Pixel. Bild b) zeigt in gelb markiert, den aktiven lichtempfindlichen Bereich des Sensors, wenn sich das Seitenverhältnis geändert wird und nicht mehr der komplette Sensor genutzt wird.

## 5.2 Auswirkungen auf die Szenenrekonstruktion

Im folgenden wird zunächst analysiert, welche Änderungen sich im Lochkameramodell bei veränderter Auflösung ergeben und was für Auswirkungen diese auf die in Kapitel 3 aufgestellten Epipolaren Bedingungen hat.

Im Lochkameramodell hat eine Änderung der Kameraauflösung lediglich eine Auswirkung auf die Skalierung der Sensorkoordinatenachsen. Mit der Auflösung, ändern sich die Anzahl und die Größe der Pixel. Die Längeneinheiten des Sensorkoordinatensystems orientieren sich, wie in Kapitel 2 beschrieben, an genau diesen Längenskalierung der Pixelkanten  $l_x$  und  $l_y$ . Folglich kommt es zu einer Skalierung des Sensorkoordinatensystems. Alle anderen Koordinatensysteme bleiben unverändert. Durch

Nachbarschaftsoperationen werden aus mehreren benachbarten Pixel ein neuer, jedoch bleibt der Ort des Pixel der gleiche[23]. Die Abbildungen 5.3 und 5.4 zeigen, dass sich zwar die Projektion von Bildebenekoordinatensystem auf das Sensorkoordinatensystem für den Punkt  $m_\sigma$  ändert,

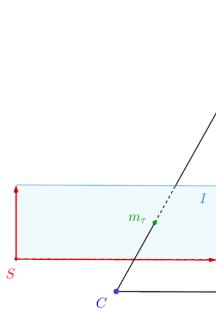


Abbildung 5.3:  $C$  und  $C'$  haben die selbe Auflösung eingestellt

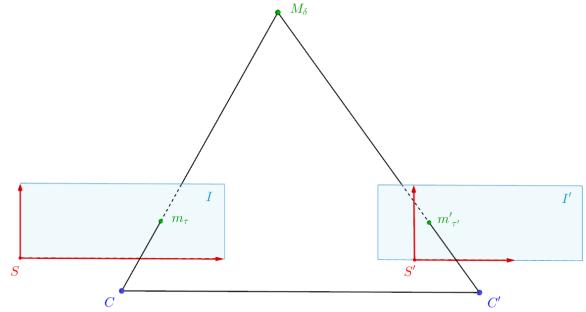


Abbildung 5.4:  $C$  und  $C'$  haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt

Eine Skalierung der Sensorkoordinaten bedeutet, dass sich die Brennweite in Pixeleinheiten gegeben ändert, jedoch ändert sich nicht die effektive Brennweite in Millimeter. Anhand des Aufbau der Kameramatrix aus Kapitel 2 kann das nochmal verdeutlicht werden.

$$K = \begin{bmatrix} k_x \zeta & 0 & V_{\sigma,x} \\ 0 & k_y \zeta & V_{\sigma,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Wie bereits bekannt wird kommt es bei der Transformation von Bildebenekoordinaten  $m_\tau$  auf Sensorkoordinaten  $m_\sigma$  zu einer Skalierung der Bildebenekoordinaten in Millimeter auf Sensorkoordinaten in Pixel.  $\zeta_x$  und  $\zeta_y$  stehen für die Brennweite. Durch die Multiplikation mit  $k_x$  und  $k_y$  wird die Brennweite auf Pixeleinheiten skaliert. Die ursprüngliche Brennweite beträgt  $\zeta_x = \zeta_y = 1$ . Kommt jetzt eine Skalierung von  $k_x = k_y = 2$  dazu.

$$K_0 = \begin{bmatrix} \zeta & 0 & V_{\tau,x} \\ 0 & \zeta & V_{\tau,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & V_{\tau,x} \\ 0 & 1 & V_{\tau,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_x \zeta & 0 & k_x V_{\tau,x} \\ 0 & k_y \zeta & k_y V_{\tau,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 0 & 2 \cdot V_{\tau,x} \\ 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot V_{\tau,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & V_{\sigma,x} \\ 0 & 2 & V_{\sigma,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Die Veränderung der Kameraauflösung hat in diesem Beispiel zur Folge, dass es so wirkt, als wäre die Brennweite verdoppelt worden. Das würde bedeuten, dass sich die Kamera von der Bildebene entfernt hätte, jedoch verändert weder Kamera noch Bildebene ihre Position. Dennoch vergrößert oder verkleinert sich durch die Skalierung der Pixel effektiv die Bildgröße.

Um zu überprüfen, ob die Änderung der Kameraauflösung auch eine Änderung der Epipolaren Bedingungen mit sich führt, werden wieder die Gleichungen der Epipolaren Bedingungen in Kapitel 3 genauer betrachtet.

Die Fundamentalmatrix beinhaltet, sowohl die intrinsischen als auch die extrinsischen Parameter, um von  $F$  auf  $E$  zu kommen, müssen die intrinsischen Kameraparameter bekannt sein. Mit bekannten  $K$  und  $K'$  gilt, dass:

$$F = K'^{-T} R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_x R^T K^{-1} \quad (5.4)$$

$$E = K'^T F K \quad (5.5)$$

$$E = K'^T (K'^{-T} R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_x R^T K^{-1}) K \quad (5.6)$$

$$\rightsquigarrow E = R' \left[ \vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta \right]_x R^T \quad (5.7)$$

Da bei der Bestimmung von  $E$  aus  $F$  die intrinsischen Kameraparameter eliminiert werden, haben unterschiedliche Auflösungen keine Auswirkung auf die essentielle Matrix. Folglich sollte das Ergebnis bei der Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter unverändert sein. Um die Aufgestellte Theorie zu überprüfen, wurde im synthetischen Beispiel die Kameramatrix  $K'$  von  $C'$  modifiziert. Für  $C$  wurde  $\zeta_x = \zeta_y = 1$  definiert, so das für Kameramatrix  $K$  gilt:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Für die Kameramatrix  $K'$  von  $C'$  galt ursprünglich, dass  $K = K'$ . Die Auflösung von  $C'$  wird geändert indem die Skalierungsfaktoren  $k_x$  und  $k_y$  mit  $\zeta'_x$  und  $\zeta'_y$  multipliziert werden.

Für das Beispiel wurden drei verschiedenen Auflösungen getestet.  $K'_1$  mit  $\zeta'_x \cdot 2$  und  $\zeta'_y \cdot 2$ ,  $K'_2$  mit  $\zeta'_x \cdot 3.2$  und  $\zeta'_y \cdot 1.2$  und  $K'_e$  mit  $\zeta'_x \cdot 0.5$  und  $\zeta'_y \cdot 4.3$ . Da ursprünglich galt, dass  $\zeta'_x = \zeta'_y = 1$  ergeben sich die folgenden Kameramatrizen für  $K'$ .

$$K'_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$K'_2 = \begin{bmatrix} 3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$K'_e = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Die Unterschiede der entstehenden Abbildungen in  $C'$  sind in den Abbildungen 5.5, 5.6, 5.7 und 5.8 zu sehen.

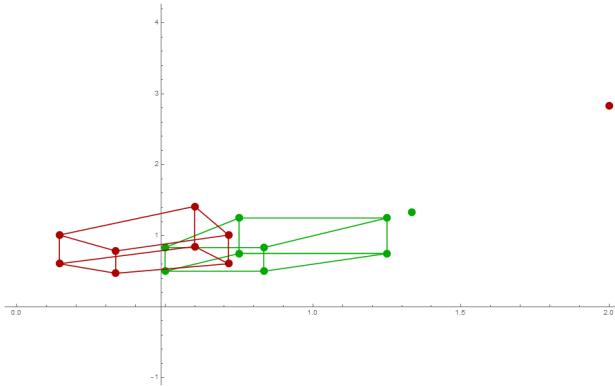


Abbildung 5.5:  $C$  und  $C'$  haben die selbe Auflösung eingestellt

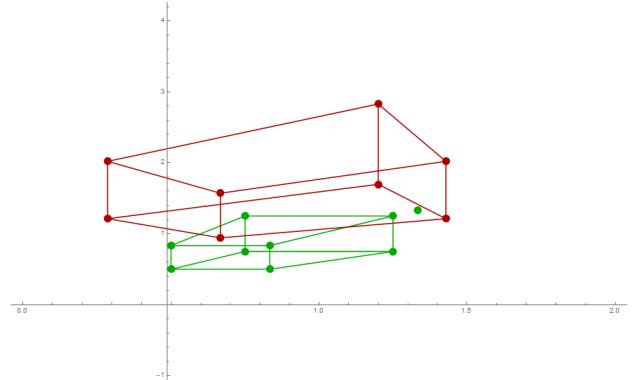


Abbildung 5.6:  $C$  und  $C'$  haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt.  $C$  mit  $K$  und  $C'$  mit  $K'_1$

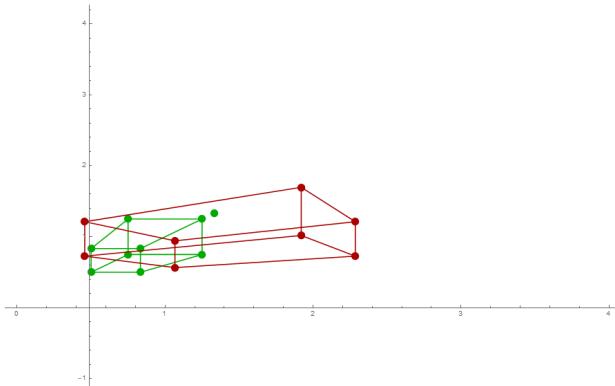


Abbildung 5.7:  $C$  mit  $K$  und  $C'$  mit  $K'_2$

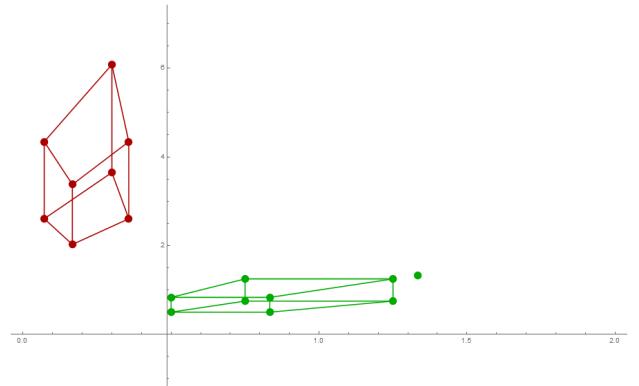


Abbildung 5.8:  $C$  mit  $K$  und  $C'$  mit  $K'_3$

Wird das synthetische Beispiel jeweils mit den drei verschiedenen modifizierten  $K'$  durchgerechnet, so ergeben sich für die essentielle Matrix folgende Ergebnisse.

$$\begin{aligned} \zeta'_x = 1, \zeta'_y = 1 : \quad E &= \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} | : 0.5 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \zeta'_x = 2, \zeta'_y = 2 : \quad E &= \begin{pmatrix} 0 & 0.756 & 0 \\ 0 & 0 & 1.069 \\ 0 & -0.756 & 0 \end{pmatrix} | : -0.756 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \zeta'_x = 3.2, \zeta'_y = 1.2 : \quad E &= \begin{pmatrix} 0 & 0.634 & 0 \\ 0 & 0 & 1.069 \\ 0 & -0.634 & 0 \end{pmatrix} | : -0.634 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \zeta'_x = 0.5, \zeta'_y = 4.3 : \quad E &= \begin{pmatrix} 0 & 0.442 & 0 \\ 0 & 0 & 1.069 \\ 0 & -0.442 & 0 \end{pmatrix} | : -0.442 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie beobachtet werden kann, werden, trotz unterschiedlicher Kameraauflösungen für  $K'$ , immer die selbe essentielle Matrix im Algorithmus bestimmt. Zu Erinnerung, in Kapitel 3 wurde gezeigt, dass jedes Vielfache von  $E$  eine gültige Lösung ist. Somit gilt die Behauptung, dass die Kameraauflösung keine Auswirkung auf die Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter hat, im synthetischen Beispiel, als bestätigt. Als Vergleich kann die Abbildung 5.9, welche das Ergebnis der Rekonstruktion der

Szene mit  $K'_3$  als Kameramatrix für  $C'$  veranschaulicht, mit der Rekonstruierten Szene in Abbildung 4.14 und 4.15 aus dem ersten Beispiel, betrachtet werden. Für die anderen Varianten von  $K'$  wurden ebenfalls die selbe 3D-Szene rekonstruiert.

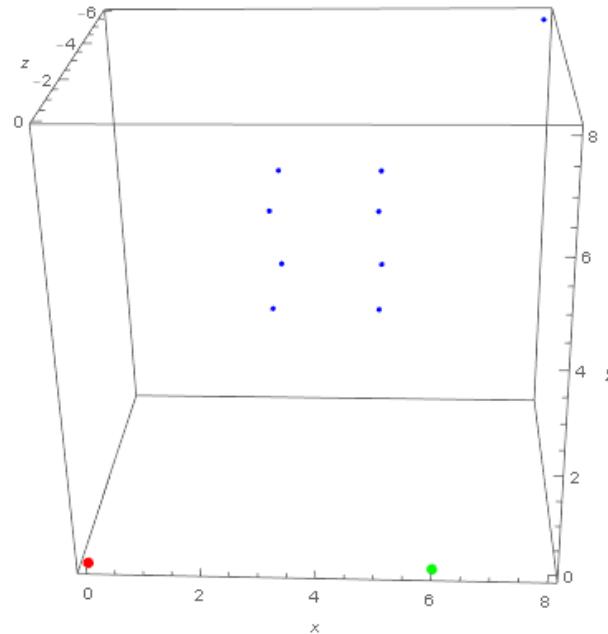


Abbildung 5.9: Die Abbildung zeigt die rekonstruierte Szenen des synthetischen Beispiels mit  $K'_3$  als intrinsische Parameter für  $C'$ .

# 6 Reelle Rekonstruktion

Der entwickelte Szenenrekonstruktionsalgoritmus wird im folgenden anhand eines realen Stereoaufbau getestet. Da das Arbeiten mit realen Bilddaten bestimmte Fehleranfälligkeit aufweist, wird in diesem Kapitel Hauptsächlich drauf eingegangen, um welche Fehler es sich handelt, was ihre Auswirkungen sind und wie man ihnen entgegenwirken kann. Hierzu wurde der Ursprüngliche Algorithmus um bestimmte Funktionen erweitert, welche im Verlauf des Kapitels genau erläutert werden. Abbildung 6.1 zeigt den Ablauf für die Reelle Rekonstruktion.

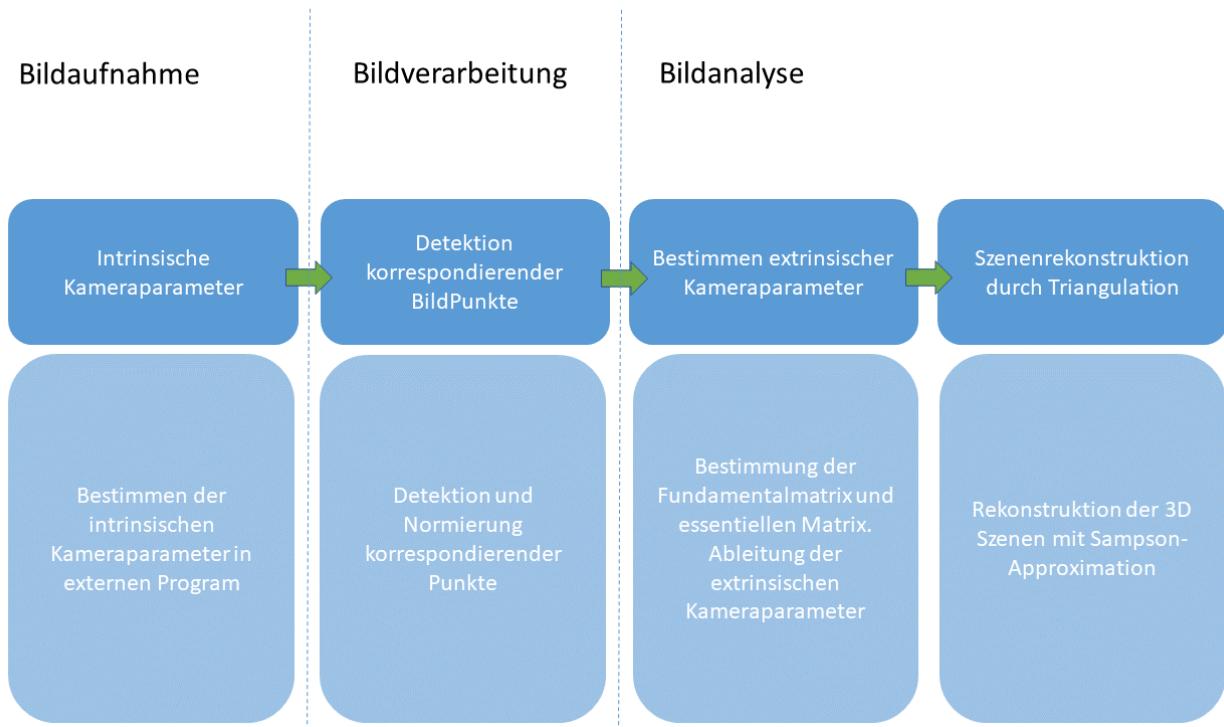


Abbildung 6.1: Ablaufdiagramm für die reelle Rekonstruktion

Zu aller erst wird der Stereoaufbau vorgestellt. Danach folgt die Korrespondenzanalyse, in welcher zwei Möglichkeiten aufgeführt werden, wie die Korrespondierenden Punkte aus den Bildern gewonnen werden. Der normierte-acht-Punkt-Algorithmus, stellt eine für reale Bilddaten leicht veränderte Fassung des bereits bekannten acht-Punkte-Algorithmus vor. Danach werden die Singulärwerte der aus realen Daten bestimmten Fundamentalmatrix und essentiellen Matrix analysiert und deren Auswirkung auf die Epipolargeometrie aufgezeigt. Als letztes wird das Triangulationsverfahren anhand abweichender Punktekorrespondenzen vorgeführt.

## 6.1 Stereoaufbau

Für die Stereobildaufnahme, wurde eine Szene vor zwei nebeneinander platzierten Kameras platziert. Beide Kameras wurden zur Szene hin rotiert. Abbildung 6.2 zeigt den Stereoaufbau.



Abbildung 6.2: Szenenaufbau: Die Canon 60D befindet sich in dieser Abbildung auf der linken Seite, die Canon 60 D auf der rechten. Auf dem Tisch zwischen den Kameras ist die in den Abbildungen 6.1 und 6.1 abgebildete Szene zu sehen. Beide Kameras sind zu Szene hin gedreht.

Die auf Abbildung 6.2 zu sehende linke Kamera wurde als Kamera eins definiert. Für Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  wurde gleich dem Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  gesetzt. Kamera zwei mit  $(C', \beta')$  befindet sich auf der Abbildung rechts. Für beide Kameras wurde in einem externen Programm die intrinsischen Kameraparameter  $K$  und  $K'$  bestimmt. An den Stereoaufnahmen der Szene wurde dann eine Korrespondenzanalyse gemacht.

## 6.2 Korrespondenzanalyse

Für die Analyse der Korrespondierenden Punkte bei Stereoaufnahmen einer dreidimensionalen Szene wurde eine existierende Funktion von Mathematica genutzt[22]. Die Funktion basiert auf dem Prinzip eines SURF-Algoruthmus. SURF ist die Kurzform für *Speeded Up Robust Features* und ist ein Rotations- und Skaleninvariante Punkte Detektor und Deskriptor[17, 24]. Es werden Punkte an markanten Stellen in beiden Bildern detektiert, wie beispielsweise Eckpunkte oder Kanten. Die Umgebung eines jeden gefundenen Punktes wird durch einen Merkmalsvektor, dem Deskriptor, beschrieben. Die Deskriptoren beider Bilder werden abgeglichen und gleiche Punkte werden als korrespondierende Punkte gekennzeichnet[17, 24]. Die Abbildungen 6.4 und 6.3 zeigen die Ergebnisse nach der Anwendung des SURF-Algorithmus auf das Stereobildpaar. Eine eigens implementierte alternative für die Korrespondenzanalyse zwischen Stereoaufnahmen eines zweidimensionalen Schachbretts wird in Kapitel 8 vorgestellt.



Abbildung 6.3: a

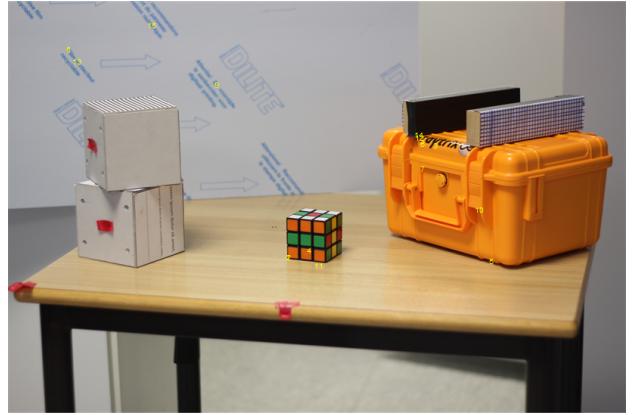


Abbildung 6.4: b

Die mit dem *SURF*-Algorithmus gefundenen Punkte sind mit den gelben Ziffern im Bild gekennzeichnet. Abbildung a zeigt das Bild von  $C$ , die Abbildung b zeigt das Bild von  $C'$ .

Die Detektion von korrespondierenden Punkten mit Detektionsalgorithmen, wie Beispielsweise dem angewendeten *SURF*-Algorithmus, können immer Fehler und Abweichungen mit sich bringen. Die Ursprünge der Fehler können sowohl durch den Algorithmus als auch durch Fehler, wie Bildrauschen, in den Aufnahmen selbst. Diese Fehler wirken sich sowohl auf die bestimmung der Abbildungsvorschriften  $F$  und  $E$  aus und somit auch auf die Genauigkeit der Szenenrekonstruktion[3]. Im folgenden werden sowohl die Fehler als auch Methoden für deren Minimierung vorgestellt.

### 6.3 Normierter acht-Punkt-Algorithmus

Trotz das der acht-Punkt-Algorithmus eine einfache Methode zur Bestimmung der Fundamentalmatrix bietet, ist er sehr unstabil sobald Fehler wie Ungenauigkeiten in Punktekorrespondenzen oder Rauschen in Bilder auftreten[3, 25].

Der Fehler lässt sich anhand der Kondition der Koeffizientenmatrix  $A$  genauer beschreiben. Als Kondition wird die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten beschrieben[16, 26, 27]. Die Kondition lässt sich durch Bestimmung des kleinsten Eigenvektors der Matrixmultiplikation der Koeffizientenmatrix  $A$  mit ihrer Transponierten  $A^T$  herausfinden. Die Matrix  $AA^T$  wird in die Matrizen  $UDU^T$ , wobei  $U$  eine orthogonale und  $D$  eine diagonale Matrix ist, zerlegt. Die Diagonaleinträge von  $D$  sind in eine nicht ansteigenden Reihenfolge, woraus resultiert, dass der kleinste Singulärwert von  $D$  mit der letzten Spalte von  $U$  korrespondiert und somit ist die letzte Spalte von  $U$  gleich dem kleinsten Eigenvektor von  $AA^T$ [16, 26]. Wird angenommen, dass  $AA^T$  eine  $9 \times 9$ -Matrix ist, so ergeben die Diagonaleinträge  $d_1/d_9$  den Wert der Kondition. Je größer die Kondition ist, desto größer wirken sich schon kleinste Abweichungen der einkommenden Bilddaten, auf die aus  $A$  bestimmten Matrix  $F$  aus.

Um die Kondition möglichst klein zu halten, werden die Bildkoordinaten beider Bilder normiert. Die in Literaturquellen, vorgeschlagene Normierung beinhaltet pro Bild eine Translation und Skalierung, so dass der Schwerpunkt aller Punktekorrespondenzen auf einem Bild im Ursprung des Sensorkoordinatensystems liegt und der durchschnittliche Abstand der Punkte zum Ursprung  $\sqrt{2}$  beträgt[3, 4, 25].

Für die Normierung wird pro Bild eine Transformationsmatrix  $T$  und  $T'$  definiert. Die Matrizen beinhalten sowohl eine Skalierung als auch eine Translation. Die Bestimmung der Matrix  $T$  wird hier aufgezeigt. Zuerst wird der Schwerpunkt  $s$  mit  $s = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$  der Punktemenge  $p_n$  mit  $p_n = \begin{pmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \end{pmatrix}$  berechnet, indem der Mittelwert aller Punkte  $p_n$  berechnet wird.

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} p_i x \\ p_i y \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Danach wird  $s$  in den Ursprung verschoben. Die Punkte  $x_n$  werden um den Wert von  $s$  verschoben  $x'_n = x_n - s$ . Der Mittelwert aus den um  $s$  verschobenen Punkten  $x'_n$  ergibt den neuen Schwerpunkt  $s_0$  im Koordinatenursprung. Als nächstes wird die Distanz jedes Punktes von  $x'_n$  zu  $s_0$  berechnet und der Mittelwert aller Distanzen, hier mit  $d$  bezeichnet, berechnet. Die Matrix  $T$  und  $T'$  haben dann die folgende Form:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{d} & 0 & -s_x \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{d} & -s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{d'} & 0 & -s'_x \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{d'} & -s'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Die originalen Bildpunkte des Stereobildpaars, werden mit den Matrizen  $T$  und  $T'$  verrechnet. Mit den Normierten Bildkoordinaten wird dann wieder nach dem in Kapitel 3.3 beschriebenen acht-Punkte-Algorithmus eine Fundamentalmatrix  $\hat{F}$  bestimmt[3, 16, 4, 25]. Nachdem  $\hat{F}$  aus den normierten Koordinaten bestimmt wurde, wird sie mit  $T$  und  $T'$  wieder denormalisiert.

$$F = T'^T \hat{F} T \quad (6.4)$$

### 6.3.1 Singularität der Fundamentalmatrix

Eine Fundamentalmatrix ist im optimalen Fall eine singuläre Matrix mit Rang 2. Die Singularität der Fundamentalmatrix sorgt zum einen dafür dass ihr rechter und linker Kern jeweils den Epipol des jeweiligen Bildes ergibt und die Epipolarlinien auch alle durch eben diese Epipole verlaufen[3]. Durch Ungenauigkeiten in korrespondierenden Bildpunkten kann es dazu kommen, dass die aus dem normierten-acht-Punkt-Algorithmus bestimmte Fundamentalmatrix  $\hat{F}$  in ihrem Rang steigt und somit keine singuläre Matrix mehr ist. Sollte dies der Fall sein, so ergeben der linke und der Rechte Kern von  $F$  keine eindeutigen Lösungen mehr für  $e$  und  $e'$  und die Epipolarlinien in beiden Bildern gehen dem entsprechend auch nicht mehr durch genau einen Punkt, wie man in den Abbildungen 6.5 und 6.6 erkennen kann. Die Abbildungen bilden Epipolarlinien aus dem Stereobildpaar 6.3 und 6.4 ab.

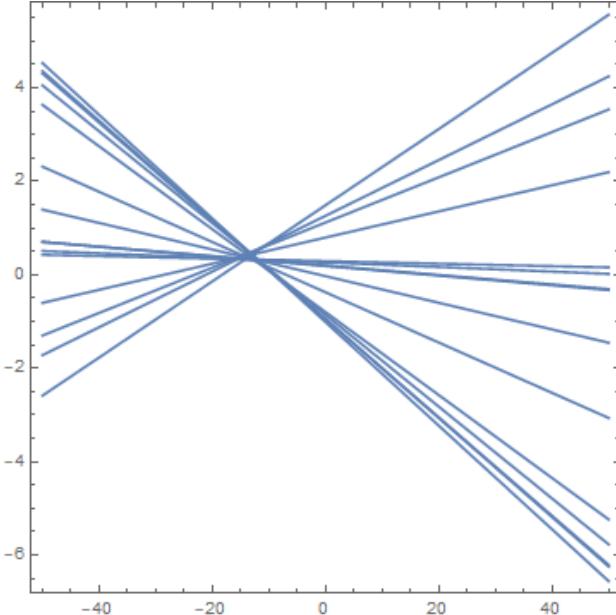


Abbildung 6.5: Epipolarlinien ohne *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 6D

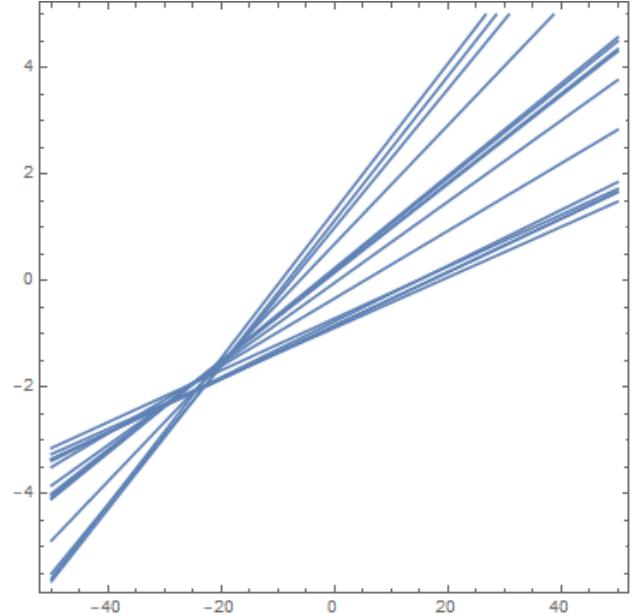


Abbildung 6.6: Epipolarlinien ohne *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 60D

Um mit dem Algorithmus weiter verfahren zu können, muss die Singularität in  $\hat{F}$  erzwungen werden[3]. Hierfür wird eine Singulärwertszerlegung an  $\hat{F}$  durchgeführt, so dass  $\hat{F}$  in  $\hat{F} = U\Sigma V^T$  zerlegt wird.  $\Sigma$  beinhaltet in einer Diagonalmatrix die Singulärwerte  $D = \text{diag}(r, s, t)$ . Die Diagonaleinträge erfüllen die Bedingung, dass  $r \leq s \leq t$  gilt. Damit  $\hat{F}$  zu einer singulären Matrix wird, muss für die Diagonaleinträge gelten, dass  $\Sigma = \text{diag}(r, s, 0)$  ist. Dem entsprechend wird der letzte Eintrag  $t$  auf  $t = 0$  gesetzt und eine modifizierte Fundamentalmatrix mit  $\bar{F} = U\text{diag}(r, s, 0)V^T$  wieder zusammengesetzt. Die resultierende Fundamentalmatrix  $\bar{F}$  besitzt jetzt einen Rang 2 und ist somit singulär[3].  $\bar{F}$  ist somit, laut Frobenius Norm, die nächste zu  $F$  liegende singuläre Matrix[3]

Werden aus  $\bar{F}$  der rechte und linke Kern bestimmt, so ergeben sich eindeutige Lösungen für  $e$  und  $e'$  und die Epipolarlinien  $l$  und  $l'$  verlaufen jeweils durch ihre entsprechenden Epipole[3]. Die Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen die Auswirkung der erzwungenen Singularität von  $F$  auf dem Stereobildpaar 6.3 und 6.4. Die Abbildungen 6.9 und 6.10 die selben Epipolarlinien nur ist  $\bar{F}$  mit  $T$  und  $T'$  denormalisiert worden.

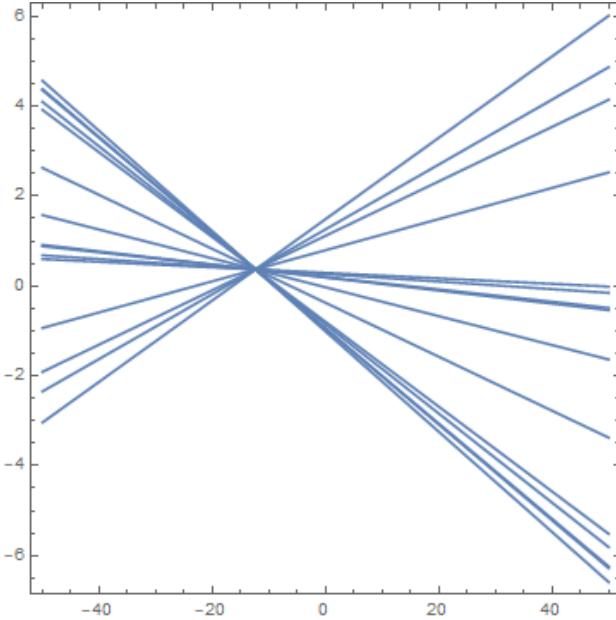


Abbildung 6.7: Die Abbildung zeigt, dass die Epipolarlinien auf der Aufnahme von  $C$ , nach dem Erzwingen der Singularität in der normierten  $\hat{F}$ , alle durch einen Epipol verlaufen

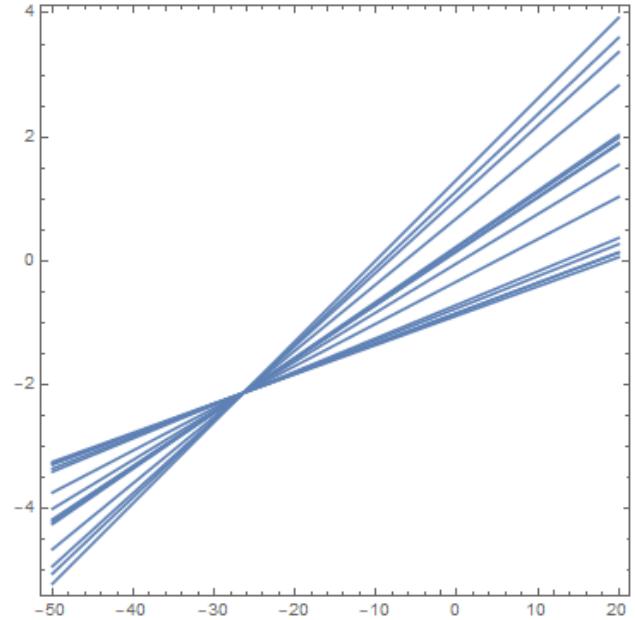


Abbildung 6.8: Die Abbildung zeigt, dass die Epipolarlinien auf der Aufnahme von  $C'$ , nach dem Erzwingen der Singularität in der normierten  $\hat{F}$ , alle durch einen Epipol verlaufen

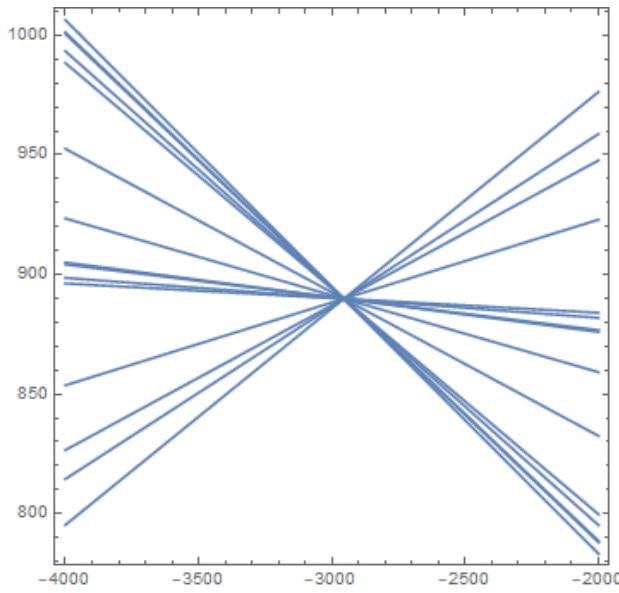


Abbildung 6.9: Die Abbildung zeigt die Epipolarlinien in  $C$  nachdem die Fundamentalmatrix  $\bar{F}$  mit  $F = T'\bar{F}T$  denormalisiert wurde

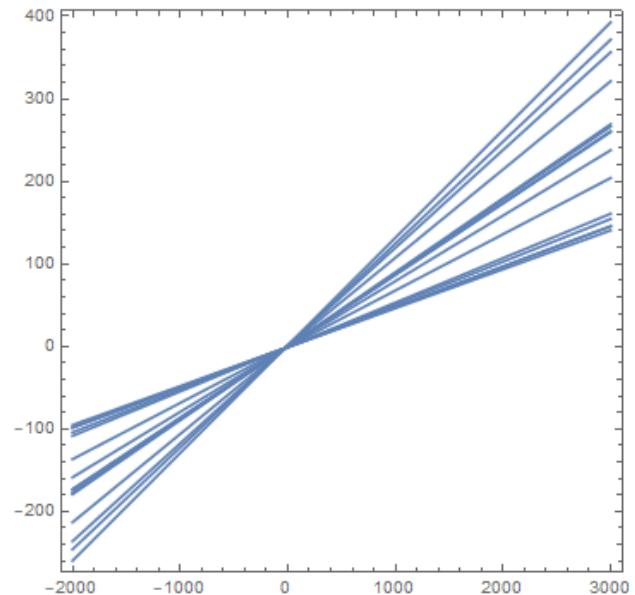


Abbildung 6.10: Die Abbildung zeigt die Epipolarlinien in  $C'$  nachdem die Fundamentalmatrix  $\bar{F}$  mit  $F = T'\bar{F}T$  denormalisiert wurde

### 6.3.2 Singulärwerte der essentiellen Matrix

Die essentielle Matrix wird im entwickelten Algorithmus aus der Fundamentalmatrix  $F$  bestimmt. Da zuvor der die Singularität von  $F$  erzwungen wurde, ist die essentielle Matrix ebenfalls eine Matrix von Rang 2[3]. Im synthetischen Beispiel wurde gezeigt, dass für die Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter für  $E$  gelten muss, dass für ihre Singulärwerte  $\Sigma = \text{diag}(1, 1, 0)$  gelten muss.

Die Ungenauigkeit der Punkte, kann auf  $E$  die Auswirkung haben, dass ihre Singulärwerte die Form  $\Sigma = \text{diag}(a, b, c)$  mit  $c \leq b \leq a$  annehmen. Eine Matrix gilt nur dann als gültige essentielle Matrix, wenn zwei ihrer Singulärwerte gleich sind ( $a = b$ ) und der dritte ( $c = 0$ ). Um diese Bedingung zu erzwingen, wird diejenige essentielle Matrix  $\hat{E}$  gesucht, welche sich laut der Frobenius Norm am nächsten an der Ursprünglichen  $E$  befindet[3, 4]. Diese Matrix lässt sich aus  $E = U\Sigma V^T$  bestimmen, indem eine neue essentielle Matrix  $\hat{E}$  aus  $\hat{E} = U\hat{\Sigma}V^T$  mit  $\hat{\Sigma} = \text{diag}(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, 0)$ [3].

Nach erzwingen der Bedingung  $\hat{E} = U\hat{\Sigma}V^T$  mit  $\hat{\Sigma} = \text{diag}(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, 0)$ , ist  $E$  wieder eine gültige essentielle Matrix und der Algorithmus kann mit der Bestimmung der extrinsischen Kameraparameter, wie in Kapitel 4 gezeigt, fortfahren.

## 6.4 Szenenrekonstruktion mit Sampson-Approximation

Aufgrund der Ungenauigkeit der korrespondierenden Punkte ist es nicht möglich die 3D-Objektpunkte durch einfache Rückprojektion der Bildpunkte zu rekonstruieren. Liegt der zu  $m_\sigma$  korrespondierende Bildpunkt  $m'_{\sigma'}$  nicht ganz genau auf der zu  $m_\sigma$  korrespondierenden Epipolarlinie, so ist der in Kapitel 3 aufgestellt *Epipolar-Constraint* aus Gleichung 3.18 nicht mehr erfüllt. Durch einsetzen der durch den SURF-Algorirthmus detektierten korrespondierenden Punkte  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  in die Gleichung

$$m'^T_\sigma F m_\sigma = 0 \quad (6.5)$$

kommt ein Wert  $\neq 0$  heraus. Je weiter der Wert von 0 abweicht, desto ungenauer ist die Korrespondenz beider Bildpunkte. Dies führt dazu, dass bei der Rückprojektion der Bildpunkte  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  sich die Linien nicht im Raum treffen. Die Abbildungen 6.11 und 6.12 veranschaulichen eine Konsequenz von ungenauen Punktekorrespondenzen.

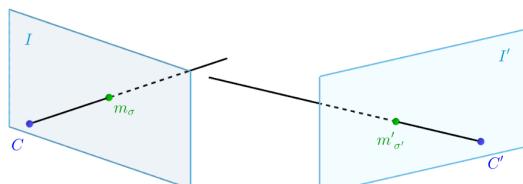


Abbildung 6.11: a)

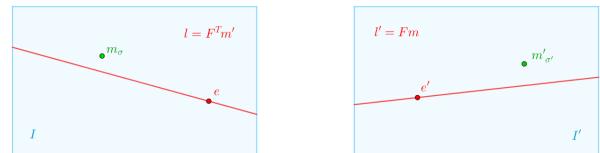


Abbildung 6.12: b)

Abbildung 6.13: a) Die rückprojizierten Strahlen der ungenauen korrespondierenden Punkte  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  sind windschief zueinander und treffen sich nicht in einem Punkt  $M_\delta$  im Raum.  
b) Die korrespondierenden Bildpunkte  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  erfüllen nicht den *Epipolar-Constraint*. Die Epipolarlinie  $l' = Fm$  ist die korrespondierende Epipolarlinie zu  $m_\sigma$  und  $l = F^T m'$  ist die korrespondierende Epipolarlinie zu  $m'_{\sigma'}$ . Da weder  $m_\sigma$  noch  $m'_{\sigma'}$  auf der Epipolarlinie zum jeweils korrespondierenden Punkt liegt, kommt es zu keinem Schnittpunkt der rückprojizierten Strahlen

Um trotz der ungenauen korrespondierenden Punkte eine Triangulation zu ermöglichen, wurde ein Verfahren voran geschaltet, welches zwei Punkte  $\hat{m}_\sigma$  und  $\hat{m}'_{\sigma'}$  sucht, die möglichst nah an den ursprünglichen Punkten  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  liegen und gleichzeitig den *Epipolar-Constraint*  $\hat{m}'^T_\sigma F \hat{m}_\sigma = 0$  erfüllen.  $\hat{m}_\sigma$  und  $\hat{m}'_{\sigma'}$  sollen durch Minimierung einer Kostenfunktion  $C$  bestimmt werden, welche die Distanz  $d$  zwischen  $m_\sigma$  und  $\hat{m}_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  und  $\hat{m}'_{\sigma'}$  minimiert. Für die Minimierung wird das Verfahren der Sampson-Approximation gewählt[3]. (Literatur zu Sampson approximation?? erklären wie??) Voraussetzung für die Triangulierung ist, dass die Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$ , sowie die Fundamentalmatrix  $F$  bekannt sein müssen[3].

$$C(m, m') = d(m, \hat{m})^2 + d(m', \hat{m}')^2 \quad (6.6)$$

Die optimalen  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  liegen auf den korrespondierenden Epipolarlinien  $\hat{l}$  und  $\hat{l}'$  am Fuße des Lots, welches von den ursprünglich projizierten Punkten  $m$  und  $m'$  auf die Epipolarlinien  $\hat{l}$  und  $\hat{l}'$  gefällt wird[3].

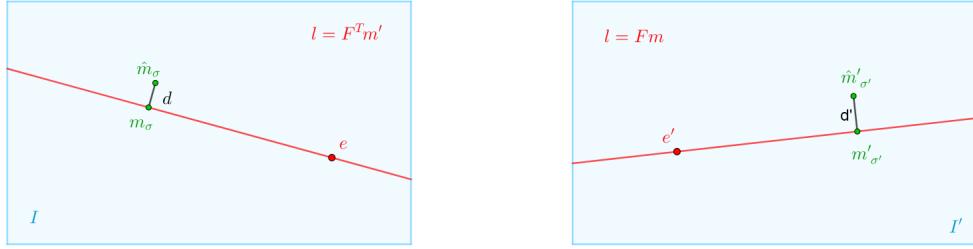


Abbildung 6.14: Die Abbildung zeigt die zwei korrespondierenden Epipolarlinien  $\hat{l}$  und  $\hat{l}'$  mit den gesuchten Punkten  $\hat{m}_\sigma$  und  $\hat{m}'_{\sigma'}$

Jedes andere Punktpaar auf  $\hat{l}$  und  $\hat{l}'$  würde den *Epipolar-Constraint* erfüllen, jedoch minimieren nur  $m_{\sigma\perp}$  und  $m'_{\sigma'\perp}$  die quadratischen Distanzen  $d(m_\sigma, \hat{m}_\sigma)^2$  und  $d(m'_{\sigma'}, \hat{m}'_{\sigma'})^2$  in der Kostenfunktion  $C$ . Gesucht wird also der geringste Abstand von  $m_\sigma$  zu  $\hat{l}$  und  $m'_{\sigma'}$  zu  $\hat{l}'$ . Die Kostenfunktion  $C$  kann dem entsprechend umformuliert werden in

$$C(m, m') = d(\hat{m}_\sigma, \hat{l})^2 + d(\hat{m}'_{\sigma'}, \hat{l}')^2 \quad (6.7)$$

Aus allen möglichen Epipolarlinien, welche  $\hat{l}$  und  $\hat{l}'$  annehmen können, wird immer der senkrechte Abstand von  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  zur jeweiligen Epipolarlinie berechnet. jedoch soll genau das Epipolarlinienpaar gewählt werden, welches die Kostenfunktion  $C$  minimal werden lässt[3].

Im ersten Schritt werden die Epipolarlinien Parametrisiert, so dass eine Linie als  $\hat{l}(t)$  geschrieben werden kann. Durch die Parametrisierung der Epipolarlinien, kann die Kostenfunktion  $C$  als Funktion von  $t$  umformuliert werden.

$$C(m_\sigma, m'_{\sigma'}) = d(m_\sigma, \hat{l}(t))^2 + d(m'_{\sigma'}, \hat{l}'(t))^2 \quad (6.8)$$

Um zu verhindern dass Bildpunkte, die mit dem Epipol des anderen Bildes korrespondieren Bei Bildpunkten, welche mit dem Epipol des anderen Bildes korrespondieren, würde sich der rückprojizierte Objektpunkt  $M_\delta$  auf der Basislinie der zwei Projektionszentren befinden. Eine Rekonstruktion des Punktes wäre nicht möglich[3]. Um diesen Fall zu vermeiden, werden die Bildpunkte  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$  mit jeweils einer Matrix  $T$  und  $T'$  in den Ursprung  $(0, 0, 1)^T$  verschoben.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m_{x\sigma} \\ 0 & 1 & -m_{y\sigma'} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \bar{m}_\tau = T \cdot m_\tau \quad (6.9)$$

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m'_{x\sigma'} \\ 0 & 1 & -m'_{y\sigma'} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \bar{m}'_{\tau'} = T' \cdot m'_{\tau'} \quad (6.10)$$

Die Fundamentalmatrix  $F$  wird ebenfalls mit  $T$  und  $T'$  transformiert, so dass sie an die verschobenen Punkte  $\bar{m}_\sigma$  und  $\bar{m}'_{\sigma'}$  angepasst ist.

$$\bar{F} = T'^{-T} F T^{-1} \quad (6.11)$$

Der rechte und linke Kern von  $\bar{F}$  ergeben die Epipole  $\bar{e}$  und  $\bar{e}'$ . Angenommen  $f$  und  $f'$  seien genau 0, so liegen die Epipole  $e = (1, 0, f)^T$  und  $e' = (1, 0, f')^T$  im unendlichen. Ist dies der Fall so hat  $\bar{F}$  für welche dann gilt, dass  $\bar{F}(1, 0, f)^T = (1, 0, f')\bar{F} = 0$  eine spezielle Form[3].

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

$$\begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ff'd + (-ff'd) \\ -fb + fb \\ -fd + fd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

$$(1 \ 0 \ f') \cdot \begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ff'd + (-ff'd) \\ -f'c + f'c \\ -f'd + f'd \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0) \quad (6.14)$$

Im Realfall sind die Werte der Epipole  $e$  und  $e'$  nicht so rein wie im Beispiel gezeigt. Aufgrund dessen, werden zwei Rotationsmatrizen aufgestellt, welche die Epipole  $e$  und  $e'$  auf  $Re = (1, 0, e_3) = (1, 0, f)$  und  $R'e' = (1, 0, e'_3) = (1, 0, f')$  rotieren.

$$R = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$R' = \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & 0 \\ -e'_2 & e'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$\bar{F}$  wird dann nochmals mit  $\bar{F}_{Rot} = R'F R^T$  ersetzt. Die Einträge in  $\bar{F}_{Rot}$  haben nun die Form wie in Gleichung 6.12, mit  $f = e_3$ ,  $f' = e'_3$ ,  $a = \bar{F}_{Rot,22}$ ,  $b = \bar{F}_{Rot,23}$ ,  $c = \bar{F}_{Rot,32}$  und  $d = \bar{F}_{Rot,33}$ . Verläuft eine Epipolarlinie durch einen Punkt  $(0, t, 1)^T$  und dem Epipol  $e = (1, 0, f)^T$ , wird diese Epipolarlinie mit  $l(t)$  bezeichnet. Das Kreuzprodukt dieser beiden Punkte beschreibt die Epipolarlinie  $l(t)$ .

$$\hat{l}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tf \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Die quadratische Distanz dieser Linie zum Ursprung wird dann bezeichnet mit:

$$d(\bar{m}_\sigma, \hat{l}(t))^2 = \frac{t^2}{1 + (tf)^2} \quad (6.18)$$

Für die Herleitung von Gleichung 6.18 wird eine Gerade zunächst in Koordinatenform Dargestellt.

$$Ax + By - C = 0 \quad (6.19)$$

Die Selbe Gerade in Normalform ausgedrückt lautet:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad (6.20)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad (6.21)$$

Der Abstand  $\| \vec{v} \|$  eines Punktes zur Geraden 6.21 kann folgendermaßen berechnet werden.

$$\vec{v} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n} \rightsquigarrow \frac{-C}{A^2 + B^2} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

$$\| \vec{v} \| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{\| \vec{n} \|^2} \cdot \| \vec{n} \| \rightsquigarrow \| \vec{v} \| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{\| \vec{n} \|} \quad (6.23)$$

$$\Rightarrow |C| = |\vec{p} \cdot \vec{n}| \quad (6.24)$$

$$\Rightarrow |\sqrt{A^2 + B^2}| = \| \vec{n} \| \quad (6.25)$$

$$\| \vec{v} \| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6.26)$$

Werden nun  $A, B$  und  $C$  mit den Werten der Geraden  $(tf, 1, -t)^T$  ersetzt, kann Gleichung 6.18 rekonstruiert werden.

$$A = tf, B = 1, C = -t, \vec{v} = d \quad (6.27)$$

$$d^2 = \frac{t^2}{\sqrt{((tf)^2 + 1^2)^2}} = \frac{t^2}{(tf)^2 + 1^2} = \frac{t^2}{1 + (tf)^2} \quad (6.28)$$

Um die zu  $\hat{l}(t)$  korrespondierende Epipolarlinie  $\hat{l}'(t)$  zu bestimmen, wird der Punkt  $(0, t, 1)^T$  und die Fundamentalmatrix  $\bar{F}_{Rot}$  multipliziert.

$$l'(t) = F(0, t, 1)^T = (-f'(ct + d), at + b, ct + d)^T. \quad (6.29)$$

Für die quadratische Distanz  $d(m', l'(t))^2$  ergibt sich dann:

$$d(\bar{m}_\sigma, \hat{l}(t))^2 = \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2} \quad (6.30)$$

Die Kostenfunktion  $C$  kann jetzt in eine Funktion  $s(t)$  umformuliert werden.

$$s(t) = \frac{t^2}{1 + (tf)^2} + \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2} \quad (6.31)$$

Ein Minimum für  $s(t)$  kann jetzt beispielsweise durch Bestimmung der Minimas und Maximas mit  $s'(t) = 0$  gefunden werden.

$$s'(t) = \frac{2t}{(1 + f^2 t^2)^2} - \frac{2(ad - bc)(at + b)(ct + t)}{((at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2)^2} \quad (6.32)$$

Werden die beiden Terme in  $s'(t)$  auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und der Zähler dann gleich Null gesetzt, ergibt sich der folgende Ausdruck  $g(t)$

$$g(t) = t((at+b)^2 + f'^2(ct+d)^2)^2 - (ad-bc)(1+f^2t^2)^2(at+b)(ct+d) \quad (6.33)$$

Funktion  $g(t)$  ist ein Polynom vom Grad 6. Das Minimum für  $s(t)$  ergibt sich aus einer der 6 möglichen Lösungen für  $t$  aus  $g(t)$ . Für die Bestimmung des Minimums werden nur die reellen Lösungen in Betracht gezogen, die nicht-reellen Lösungen können ignoriert werden. Die reellen Lösungen für  $t$  aus  $g(t)$ , werden dann wieder in  $s(t)$  eingesetzt. Das  $t$ , welches durch einsetzen in  $s(t)$  den kleinsten Wert ergibt, ist das gesuchte Minimum  $t_{min}$ .

Mit  $t_{min}$  können die Epipolarlinien  $\hat{l}(t) = (tf, 1, -t)$  und  $\hat{l}'(t) = F(0, t, 1)^T$  durch einsetzen von  $t_{min}$  berechnet werden. Danach werden die zwei neuen Punkte  $\hat{m}_\sigma$  und  $\hat{m}'_{\sigma'}$  auf den Epipolarlinien bestimmt.  $\hat{m}_{\sigma Rot}$  und  $\hat{m}'_{\sigma' Rot}$  sind die Punkte auf der Epipolarlinie welche dem Ursprung am nächsten sind. Der Punkt, welcher vom Ursprung aus am nächsten auf einer Linie  $(\lambda, \mu, v)$  liegt, kann mit  $(-\lambda \cdot v, -\mu \cdot v, \lambda^2 + \mu^2)$  berechnet werden.

$$\hat{l} = (tf, 1, -t) \quad \hat{m}_{\sigma Rot} = (-(tf) \cdot v, -1 \cdot v, (tf)^2 \cdot 1^2) \quad (6.34)$$

$$(6.35)$$

Nachdem zu beiden Linien  $\hat{l}$  und  $\hat{l}'$  der jeweils nächste Punkte  $\hat{m}_{\sigma Rot}$  und  $\hat{m}'_{\sigma' Rot}$  vom Ursprung aus gefunden wurden, werden diese nun mit  $T$ ,  $T'$ ,  $R$  und  $R'$  wieder an ihre Ausgangsposition zurück transformiert.

$$\hat{m} = T^{-1}R^T\hat{m}_{\sigma Rot} \quad (6.36)$$

$$\hat{m}' = T'^{-1}R'^T\hat{m}'_{\sigma' Rot} \quad (6.37)$$

Für auf diese weise neu berechneten korrespondierenden Punkte ist der *Epipolar-Constraint* 3.18 erfüllt und es ist gewährleistst, dass sich ihre jeweiligen Rückprojektionen in einem Punkt im Raum treffen.

Für die Rückprojektion der einzelnen Bildpunkte wurde ein lineares Triangulationsverfahren gewählt[3]. Für die Rückprojektion werden pro korrespondierendem Punktpaar zunächst die Projektionsgleichungen  $\hat{m}_\sigma = P\hat{M}_\delta$  und  $\hat{m}'_{\sigma'} = P'\hat{M}'_\delta$  aufgestellt. Diese werden so in eine Koeffizientenmatrix  $A$  eingetragen dass gilt  $A \cdot x = 0$ . Durch die Verwendung des Kreuzproduktes, wird die Homogene Komponente eliminiert[3].

$$\hat{m} \times (P\hat{M}) = 0 \quad (6.38)$$

$$\hat{m}' \times (P'\hat{M}') = 0 \quad (6.39)$$

Was ausgeschrieben für  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  zu den folgenden drei Gleichungen führt.  $x \times (PX) = 0$  ergibt ausgeschrieben

$$x(p^{3T}X) - (p^{1T}X) = 0 \quad (6.40)$$

$$y(p^{3T}X) - (p^{2T}X) = 0 \quad (6.41)$$

$$x(p^{2T}X) - y(p^{1T}X) = 0 \quad (6.42)$$

$p^{iT}$  bezeichnet hier jeweils die Reihen der Projektionsmatrix  $P$  beziehungsweise  $P'$ . Zwei der drei Gleichungen sind linear unabhängig und werden in die Koeffizientenmatrix  $A$  geschrieben

$$A = \begin{bmatrix} xp^{3T} - p^{1T} \\ yp^{3T} - p^{2T} \\ x'p'^{3T} - p'^{1T} \\ y'p'^{3T} - p'^{2T} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$A = \begin{bmatrix} xp^{3T} - p^{1T} \\ yp^{3T} - p^{2T} \\ x'p'^{3T} - p'^{1T} \\ y'p'^{3T} - p'^{2T} \end{bmatrix} \cdot (X_1) \quad (6.44)$$

Die zwei Wege eine solche Matrix zu lösen wurden in Kapitel 3 vorgestellt. Zum einen kann die Inhomogenene Methode angewandt werden und der Kern dieser Koeffizientenmatrix bestimmt werden, oder es kann das homogene Verfahren angewandt werden, welches die Methode der Singulärwertzerlegung beinhaltet.

Die rekonstruierten Punkte  $M_{\delta 0}$  sind bis auf einen Skalierungsfaktor genau bestimmt. Die Abbildungen 6.15 und 6.16 zeigen die aus den Bildern 6.4 und 6.3 rekonstruierten Punkte im Raum. Der rote Punkt steht für die Position von  $C$ , der grüne für die Position von  $C'$ . Die blauen Punkte sind die rekonstruierten Punkte, die beiden Bilder 6.4 und 6.3.

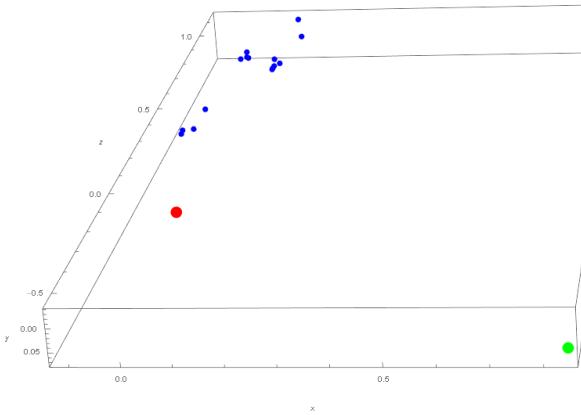


Abbildung 6.15: Rekonstruierte Szene, unskaliert in Pixeleinheiten

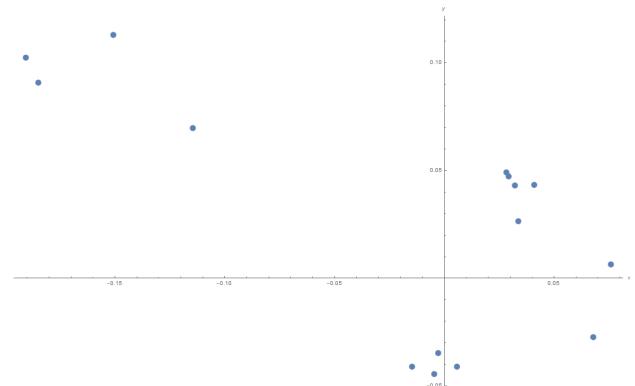


Abbildung 6.16: Rekonstruierte Szene, unskaliert, in Pixeleinheiten und in einem 2D-Plot angezeigt

## 6.5 Ergebnisse einer Stereoanalyse mit Kameras unterschiedlicher Auflösung

Für den Test, ob Szeneriekonstruktion im Realbeispiel auch mit unterschiedlichen Kameraauflösungen funktioniert, wurde die Kameramatrix  $K'$  von  $C'$  künstlich skaliert. Wie aus Kapitel 2, hat diese die Form

$$K' = \begin{bmatrix} k_x\zeta & s & V_{\sigma,x} \\ 0 & k_y\zeta & V_{\sigma,y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Um die Auflösung von  $K'$  zu verändern, werden die Matrixeinträge  $k_x\zeta$  und  $k_y\zeta$  jeweils noch um eine beliebige Skalierung erweitert. Als Beispiel wurde  $K'$  fünf mal unterschiedlich skaliert und zwar mit den Verhältnissen  $[2 : 2]$ ,  $[5 : 2]$ ,  $[1 : 2]$  und  $[1.2 : 2.3]$ .

$$\begin{aligned} K'_{[2:2]} &= \begin{bmatrix} k_x\zeta \cdot 2 & s & V_{\sigma,x} \cdot 2 \\ 0 & k_y\zeta \cdot 2 & V_{\sigma,y} \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K'_{[5:2]} &= \begin{bmatrix} k_x\zeta \cdot 5 & s & V_{\sigma,x} \cdot 5 \\ 0 & k_y\zeta \cdot 2 & V_{\sigma,y} \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K'_{[1:2]} &= \begin{bmatrix} k_x\zeta \cdot 1 & s & V_{\sigma,x} \cdot 1 \\ 0 & k_y\zeta \cdot 2 & V_{\sigma,y} \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K'_{[1.2:2.3]} &= \begin{bmatrix} k_x\zeta \cdot 1.2 & s & V_{\sigma,x} \cdot 1.2 \\ 0 & k_y\zeta \cdot 2.3 & V_{\sigma,y} \cdot 2.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Von den detektierten korrespondierenden Bildpunkten des SURF-Algorithmus wurden die Bildpunkte des zweiten Bildes von  $C'$  auch um die selben Verhältnisse skaliert.

$$m_{\sigma[2:2]} = m_{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

$$m_{\sigma[5:2]} = m_{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

$$m_{\sigma[1:2]} = m_{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

$$m_{\sigma[1.2:2.3]} = m_{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

Der Szenenrekonstruktionsalgorithmus wurde für jede Kameraauflösung getestet. Die vier Lösungen der Bestimmung der extrinsischen Parameter sind in den Abbildungen 6.17, 6.18, 6.19 und 6.20 zu sehen. Abbildung ?? zeigt die vier Lösungen bei gleicher Kameraauflösung. Zu beobachten ist, dass sich die Lösungen bei unterschiedlichen Auflösungen nicht unterscheiden. Die geringen Abweichungen in den Nachkommastellen sind auf die Ungenauigkeiten der Bilddaten zurückzuführen.

$$\begin{aligned}
P1 &= \begin{pmatrix} 0.991092 & 0.120891 & 0.0558752 & -0.812277 \\ -0.120366 & 0.992649 & -0.0126719 & 0.0389145 \\ -0.0569964 & 0.00583352 & 0.998357 & 0.581973 \end{pmatrix} \\
P2 &= \begin{pmatrix} 0.991092 & 0.120891 & 0.0558752 & 0.812277 \\ -0.120366 & 0.992649 & -0.0126719 & -0.0389145 \\ -0.0569964 & 0.00583352 & 0.998357 & -0.581973 \end{pmatrix} \\
P3 &= \begin{pmatrix} 0.378236 & -0.0296342 & -0.925235 & -0.812277 \\ 0.0547644 & -0.997021 & 0.0543212 & 0.0389145 \\ -0.924088 & -0.0712161 & -0.375487 & 0.581973 \end{pmatrix} \\
P4 &= \begin{pmatrix} 0.378236 & -0.0296342 & -0.925235 & 0.812277 \\ 0.0547644 & -0.997021 & 0.0543212 & -0.0389145 \\ -0.924088 & -0.0712161 & -0.375487 & -0.581973 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Abbildung 6.17: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $T'$  bei unveränderter Auflösung. Die Auflösungen von  $C_\delta$  und  $C'_\delta$  sind die selben.

$$\begin{aligned}
P1 &= \begin{pmatrix} 0.990947 & 0.120272 & 0.0596553 & 0.810768 \\ -0.119751 & 0.992728 & -0.0122401 & -0.0387536 \\ -0.0606937 & 0.0049855 & 0.998144 & -0.584083 \end{pmatrix} \\
P2 &= \begin{pmatrix} 0.990947 & 0.120272 & 0.0596553 & -0.810768 \\ -0.119751 & 0.992728 & -0.0122401 & 0.0387536 \\ -0.0606937 & 0.0049855 & 0.998144 & 0.584083 \end{pmatrix} \\
P3 &= \begin{pmatrix} 0.37685 & -0.0292569 & -0.925812 & 0.810768 \\ 0.0543725 & -0.997079 & 0.0536412 & -0.0387536 \\ -0.924677 & -0.0705534 & -0.374158 & -0.584083 \end{pmatrix} \\
P4 &= \begin{pmatrix} 0.37685 & -0.0292569 & -0.925812 & -0.810768 \\ 0.0543725 & -0.997079 & 0.0536412 & 0.0387536 \\ -0.924677 & -0.0705534 & -0.374158 & 0.584083 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Abbildung 6.19: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $T'$  wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1 : 2]$  skaliert wurde

Die Abbildungen 6.21, 6.22 und 6.23 zeigen einmal die Rekonstruierten Punkte in einem 3D-Plot und daneben den 2D-Plot. Auch hier kann beobachtet werden, dass es immer zu den gleichen Szenen. (Soll ich die Abweichungen noch irgendwie erwähnen????) In Abbildung 6.22 ist die Rekonstruktion in einem links drehendem Koordinatensystem geplottet, weshalb die Rekonstitution spiegelverkehrt wirkt.

$$\begin{aligned}
P1 &= \begin{pmatrix} 0.376619 & -0.0296193 & -0.925895 & 0.812113 \\ 0.0551443 & -0.996999 & 0.0543246 & -0.0388039 \\ -0.924725 & -0.0715175 & -0.373856 & -0.582208 \end{pmatrix} \\
P2 &= \begin{pmatrix} 0.376619 & -0.0296193 & -0.925895 & -0.812113 \\ 0.0551443 & -0.996999 & 0.0543246 & 0.0388039 \\ -0.924725 & -0.0715175 & -0.373856 & 0.582208 \end{pmatrix} \\
P3 &= \begin{pmatrix} 0.991142 & 0.121017 & 0.0546967 & 0.812113 \\ -0.120498 & 0.992632 & -0.0126975 & -0.0388039 \\ -0.0558303 & 0.00599422 & 0.998422 & -0.582208 \end{pmatrix} \\
P4 &= \begin{pmatrix} 0.991142 & 0.121017 & 0.0546967 & -0.812113 \\ -0.120498 & 0.992632 & -0.0126975 & 0.0388039 \\ -0.0558303 & 0.00599422 & 0.998422 & 0.582208 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Abbildung 6.18: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $T'$  wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[5 : 2]$  skaliert wurde

$$\begin{aligned}
P1 &= \begin{pmatrix} 0.990963 & 0.12034 & 0.0592445 & -0.81095 \\ -0.119818 & 0.99272 & -0.0122887 & 0.0387766 \\ -0.060292 & 0.0050791 & 0.998168 & 0.583829 \end{pmatrix} \\
P2 &= \begin{pmatrix} 0.990963 & 0.12034 & 0.0592445 & 0.81095 \\ -0.119818 & 0.99272 & -0.0122887 & -0.0387766 \\ -0.060292 & 0.0050791 & 0.998168 & -0.583829 \end{pmatrix} \\
P3 &= \begin{pmatrix} 0.377058 & -0.0293027 & -0.925726 & -0.81095 \\ 0.0544044 & -0.997073 & 0.0537206 & 0.0387766 \\ -0.92459 & -0.0706194 & -0.37436 & 0.583829 \end{pmatrix} \\
P4 &= \begin{pmatrix} 0.377058 & -0.0293027 & -0.925726 & 0.81095 \\ 0.0544044 & -0.997073 & 0.0537206 & -0.0387766 \\ -0.92459 & -0.0706194 & -0.37436 & -0.583829 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Abbildung 6.20: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $T'$  wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1.2 : 2.3]$  skaliert wurde

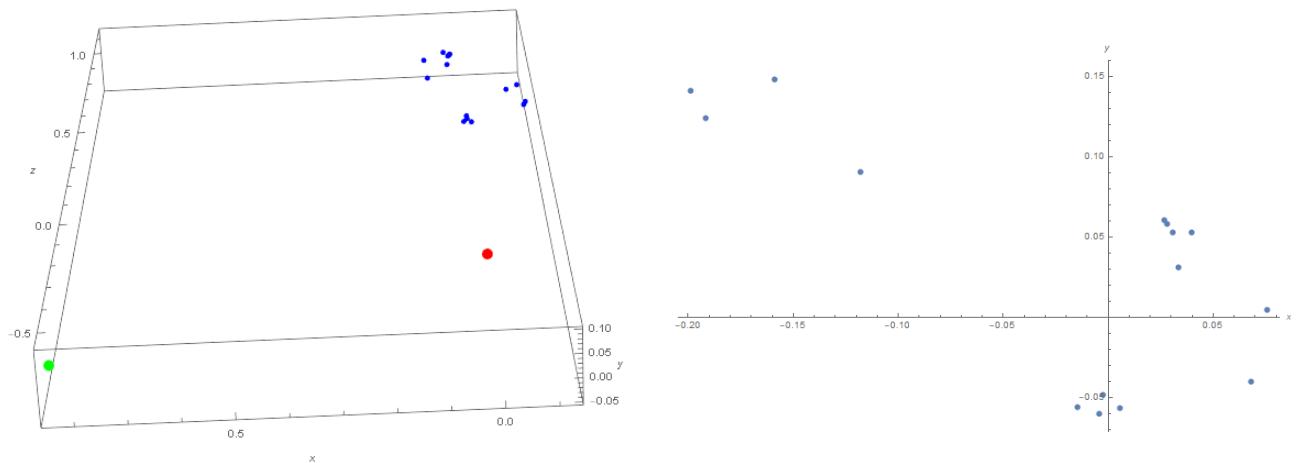


Abbildung 6.21: Rekonstruierte Szene, wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[5 : 2]$  skaliert wurde

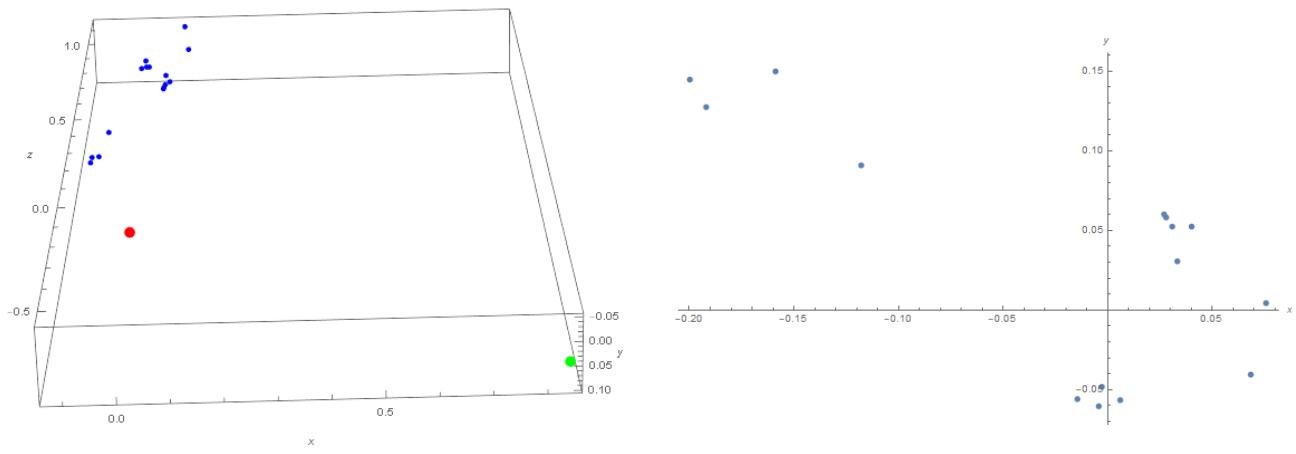


Abbildung 6.22: Rekonstruierte Szene, wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1 : 2]$  skaliert wurde

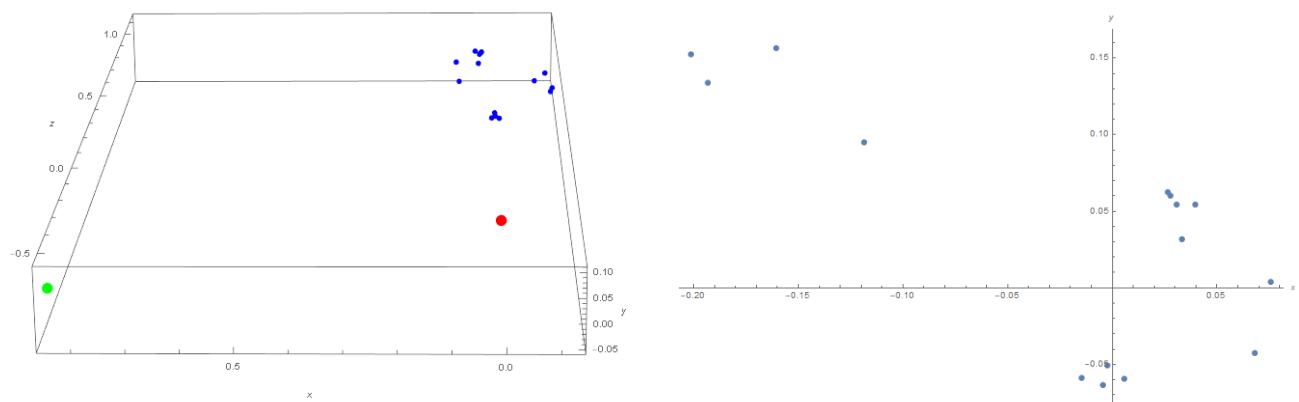


Abbildung 6.23: Rekonstruierte Szene, wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1.2 : 2.3]$  skaliert wurde

# **7 Vergleich entwickelter Rekonstruktions Algorithmus mit bereits vorhandenen (Matlab)**

Die Rektifizierung, allem voraus vor allem die Optimierung des Rektifizierungsvorgangs, von Stereo- oder auch multplen- Kamerasystemen, wird heutzutage von vielen Entwicklergruppen der Computer Vision untersucht(Der satz ist mist!). Es gibt mittlerweile viele Ansätze, jedoch funktionieren nicht alle bei den selben Fällen. So setzten zum Beispiel manche Rektifizierungsalgorithmen voraus, dass die Bilder von Kameran mit selber Auflösung aufgenommen wurden.

Der entwickelte Szenenrekonstruktionsalgorithmus wurde so entwickelt, dass eine Rektifizierung der Bilder, wie sie in vielen Programmen verwendet wird, nicht notwendig wird. Der Grund dafür ist, dass ein Algorithmus entsteht, welche auch mit Bildern unterschiedlicher Kameraauflösungen eine erfolgreiche Rekonstruktion vollbringt.

problem: kommt nicht mit anderen Kameraauflösungen zurecht. Zwei lösungen: einmal rekonstruktion über essentielle matrix oder neuer rektifizierungsalgorithmus.

Schreiben und erklären warum wurde ein Ansatz ohne Rektifizierung in erwägung gezogen

sagen dass man erst einmal in den Workflow eines auf Rektifizierung basierten Programms aufzeigt

Eigener Ansatz implementierung eines Rektifizierungsalgorithmus zum test auf Funktionalität unter schiedlicher Aflösungen

Ergebnisse Präsentieren

Ansatz Lösungen: Mein Ansatz rekonstruiert ohne dei ausgabebilder zu "kennenünd zu verändern, bbei rektifizierung wird mit den feriten Bildern gearbeitet, was bei unterschiedlichen Auflösungen zu starken verzerrungen kommen kann bei der Rektifizierung.

## **7.1 Szenenrekonstruktion mit Rektifizierung**

Die Korrespondenzanalyse konnte um eine Dimension reduziert werden. Durch die Rektifikation, die Generierung virtueller achspareller Stereosysteme, kann die Korrespondenzanalyse zudem wesentlich einfacher implementiert werden. Korrepondierende Bildpunkte liegen infolge der Rektifikation auf der gleichen Zeile beider Bilder.[15]

Ein weiteres weit verbreitetes Verfahren, ist cor der Szenenrekonstruierung durch Triangulierung einer Rektifizierung beider Bilder vorzunehmen[28, 29, 30, 31].

Da bestimmte Formen der Rektifizierung keine vorherige Kalibrierung der Kameran benötigen, wird diese Methode in den meisten gängigen Echtzeit-Szenenrekonstruktionen eingesetzt. [31, 30, 32].

Definition einer Rektifizierung: Rektifizierte Bilder müssen zwei Eigenschaften erfüllen. Zum einen müssen alle Epipolareraden parallel zur x-Koordinatenachse verlaufen und zweitens müssen alle korrespondierenden Punkte die selben y-Koordinaten besitzen[29].

Die Grundidee hier hinter ist, dass die Kameramatrizen von zwei Kameran so aufgebaut sind dass die intrinsischen Parameter die selben sind, sie sich aber in ihren Rotationen und Translationen voneinander unterscheiden. Die extrinsischen Kameraparameter werden dann dementsprechend so manipuliert,

dass die Bildebenen Achsenparallel zueinander stehen[?, 31]. Um horizontale Epipolarlinien zu erhalten muss gleichzeitig die Basislinie zwischen den zwei Kamerazentren parallel zur neuen x-Achse beider Kameras sein. Zudem soll, um eine angemessene Rektifizierung zu gewährleisten, müssen konjugierende Punkte die selbe vertikale Koordinate haben. Dies wird hier durch die Bedingung gewährleistet, dass beide Kameras die selben intrinsischen Parameter haben[?].

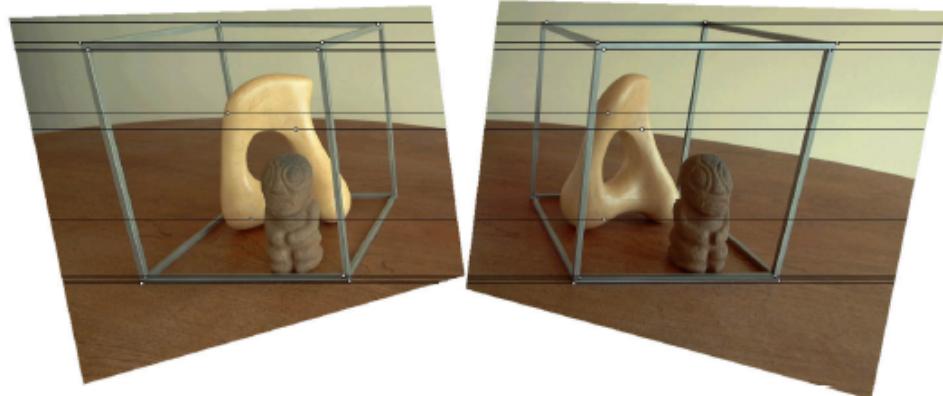


Abbildung 7.1: Beispiel eines rektifizierten Bildes. Quelle: [29]

Hier erstmal schreiben warum genau, der Ansatz nicht mit unterschiedlichen Auflösungen läuft und auf den Workflow etwas genauer eingehen aber nicht übertreiben sonst fragen die da zu viel nach.... Mit Hilfe dieser Eigenschaften ist es somit möglich die entstandenen korrespondierenden Epipolarlinien als horizontale Scanlinien zu benutzen[30, 29]. Mit Hilfe dieser Scanlinien und den darauf sich befindenden korrespondierenden Punkten ist es zum Beispiel möglich eine Tiefenkarte des Bildes zu berechnen allein durch die Differenz der horizontalen Lage der korrespondierenden Punkte[30, 29].



Abbildung 7.2: Beispiel einer einfachen Tiefenkarte eines Stereobildpaars nach der Rektifizierung. Quelle: [30]

Rektifizierung mit unterschiedlichen Aufnahme... warum funktioniert es in vielen Ansätzen nicht... was würde mit dem Bildpassieren?

Für Disparity maps müssen die horizontalen werte auf die selbe reihe passen. [30, 31]

standardvorgehen erklären

Beispielhafte implementierung einer Image rectification anhand korrespondierender Punkte und der Fundamentalmatrix

Versuch unterschiedliche Kameraauflösungen.. Bilder sind refkifiert aber Bild zwei ist komplett verzerrt... da Horizontale reiehn nicht übereinstimmen...

Davor unbedingt erwähnen mit epipolen im undendlchen und so

## 7.2 Rektifizierung mit Homographien

In dieser Arbeit wurde ein Rektifizierungsalgorithmus nach *Zhang*[29] implementiert. Diese recht aufwendige Art der Rektifikation zeichnet sich durch minimale Voraussetzungen an die Ursprungsbilder aus. Alle notwendigen Informationen zur Rektifikation werden aus der Fundamentalmatrix gewonnen. Zusätzlich zur Fundamentalmatrix muss noch die Lage der jeweiligen Epipole bekannt sein[15]. Für die implementierte Rektifizierung wird pro Bild eine Homographiematrix  $H$  und  $H'$  aufgestellt. Die rektifizierung aller Bildpunkte  $m_\sigma$  und  $m'_{\sigma'}$ , erfolgt durch Gleichung 7.2

$$\bar{m}_\sigma = H m_\sigma \quad (7.1)$$

$$\bar{m}'_{\sigma'} = H' m'_{\sigma'} \quad (7.2)$$

Die Fundamentalmatrix, welche aus den Rektifizierten korrespondierenden Punkte resultiert, wird mit  $\bar{F}$  bezeichnet[29, 15]:

$$\bar{m}'_{\sigma'}^T \bar{F} \bar{m}_\sigma = 0 \quad (7.3)$$

$$\rightsquigarrow m'_{\sigma'}^T H'^T \bar{F} H m_\sigma = 0 \quad (7.4)$$

$$\rightsquigarrow F = H'^T [i] \times H \quad (7.5)$$

Die Homographien  $H$  und  $H'$  werden in die projektiven Komponenten  $H_p$  und  $H'_p$  und die affinen Komponente  $H_a$  und  $H'_a$  unterteilt. Die affine Komponenten wird wiederum in zwei weitere Komponenten unterteilt.  $H_r$  steht für eine Ähnlichkeitstransformation und  $H_s$  bezeichnet eine Scherungstransformation[29, 15].

$$H = H_a H_p \rightsquigarrow H = H_s H_r H_p \quad (7.6)$$

$$H' = H'_a H'_p \rightsquigarrow H' = H'_s H'_r H'_p \quad (7.7)$$

$$(7.8)$$

$H_p$  bezeichnet die projektiven Komponenten und  $H_a$  steht für die affine Komponente. Die affine Komponenten wird wiederum in zwei weitere Komponenten unterteilt.  $H_r$  steht für eine Ähnlichkeitstransformation und  $H_s$  beinhaltet einen Scherungstransformation.  $H_p$  beinhaltet sämtliche projektiven Transformationen, welche dafür sorgen, dass der Epipol  $e$  ins Unendliche projiziert wird und die Epipolarlinien

parallel zueinander, jedoch noch nicht parallel zur horizontalen Achse sind[29, 15].  $H_r$  ist eine Rotationsmatrix, welche die Epipolarlinien parallel zu horizontalen Achse ausrichtet.  $H_s$  ist eine Scherungsmatrix, welche durch Minimierung versucht die durch die Rektifizierung entstandenen projektiven Verzerrungen bestmöglich auszugleichen[29, 15].

Die Reihen der Homographiematrizen  $H$  und  $H'$  beschreiben drei Linien  $u$ ,  $v$  und  $w$ , welche jeweils durch den Epipol verlaufen. Die Linien  $v$  und  $v'$  sowie  $w$  und  $w'$  sind korrespondierende Epipolarlinien. Durch diese geometrische Bedingung wird eine Verbindung der beiden Bilder zueinander.

$$H = \begin{bmatrix} u^T \\ v^T \\ w^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$H' = \begin{bmatrix} u'^T \\ v'^T \\ w'^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_a & u'_b & u'_c \\ v'_a & v'_b & v'_c \\ w'_a & w'_b & w'_c \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Bevor die Matrizen  $H$  und  $H'$  in ihre projektiven und affinen Komponenten zerlegt werden, wird die letzte Komponenten  $w_c$  und  $w'_c$  durch Division eliminiert um somit skaleninvariante Matrizen  $H$  und  $H'$  zu bekommen[29, 15].

$$H = \begin{bmatrix} u^T \\ v^T \\ w^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & 1 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$$H' = \begin{bmatrix} u'^T \\ v'^T \\ w'^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_a & u'_b & u'_c \\ v'_a & v'_b & v'_c \\ w'_a & w'_b & 1 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Die Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  beschreiben den projektiven Teil von  $H$  und  $H'$ . Sie wirken sich auf den projektiven Teil eines Punktes aus und werden dazu verwendet die Epipole ins unendliche zu projizieren[29, 15].

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ w_a & w_b & 1 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Für die affinen Komponenten  $H_a$  und  $H'_a$  gilt:

$$H_a = H \cdot H_p^{-1} = \begin{bmatrix} u_a - v_c w_b & v_c w_a - v_a & 0 \\ v_a - v_c w_a & v_b - v_c w_b & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Des Weiteren gilt für  $H_a$  und  $H'_a$ , dass jeweils nochmal in eine Rotationsmatrix  $H_r$  und  $H'_r$  und eine Scherungsmatrix  $H_s$  und  $H'_s$  zerlegt werden[29, 15].

$$H_a = H_s \cdot H_r \quad (7.15)$$

$$H_r = \begin{bmatrix} v_b - v_c w_b & v_a - v_c w_a & 0 \\ v_a - v_c w_a & v_b - v_c w_b & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$H_s = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

### 7.2.1 Projektive Transformation

Im Folgenden wird die Herleitung der Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  beschrieben. Die projektiven Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  werden von den Linien  $w$  und  $w'$ , welche durch den Epipol verlaufen bestimmt.  $w$  und  $w'$  sind nicht willkürlich. Definiert werden sie durch eine Richtung  $z = [\lambda \ \mu \ 0]^T$ .  $z$  soll dabei so gewählt werden, dass die durch die Rektifizierung entstehenden Bildverzerrungen in beiden Bildern minimal bleibt. Die Linien  $w$  und  $w'$  werden wie folgt definiert.

$$w = [e]_x \cdot z \quad (7.18)$$

$$w' = F \cdot z \quad (7.19)$$

Unter der Minimierung versteht man in diesem Falle, dass versucht wird ein  $z$  zu finden, welches  $w = (w_a, w_b, w_c)^T$  und  $w' = (w'_a, w'_b, w'_c)^T$  so definiert, dass die Einträge  $w_a$  und  $w_b$  und auch  $w'_a$  und  $w'_b$  in  $H_p$  und  $H'_p$  nahezu null sind. Anders ausgedrückt es wird versucht die projektiven Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  so affin wie möglich zu machen[29].

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ w_a & w_b & 1 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Sollte es der Fall sein, dass beispielsweise Epipole  $e$  bereits im unendlichen wären, so wären  $w_a = 0$  und  $w_b = 0$ . In diesem Fall wäre eine projektive Transformation für diesen Epipol nicht mehr nötig.

Für die Minimierung wird die Methode der kleinsten Quadrate auf angewandt. Die Methode der kleinsten Quadrate ist ein mathematisches Standardverfahren für eine Ausgleichsrechnung, mit deren Hilfe aus der Menge der Bildpunkten beider Bilder ein Wert für  $z$  ermittelt werden soll[33]. Für  $z$  gilt mit  $z = [\lambda \ \mu \ 0]^T$  bereits die Bedingung, dass es sich um einen Punkt im unendlichen handeln soll.  $\lambda$  und  $\mu$ , sollen dabei einen Wert annehmen, welcher am nächsten an den Punkteansammlungen beider Bilder ist.

Um ein solchen  $z$  zu ermitteln, werden zunächst die Gewichtungen der Punkte beider Bilder benötigt.  $p_i$  beinhaltet alle Punkte von Bild eins und  $p_j$  beinhaltet alle Punkte von Bild zwei. Ein Punkt  $p_{i1} = [p_{i1,u} \ p_{i1,v} \ 1]^T$  aus Bild eins soll zu einem Punkt  $p_{i1} = [\frac{p_{i1,u}}{w_i} \ \frac{p_{i1,v}}{w_i} \ 1]^T$  mit  $w_i$  gleich der Gewichtung

$$w_i = w^T p_i \quad (7.21)$$

transformiert werden. Dasselbe soll auch für die Punkte  $p_j$  im zweiten Bild geschehen. Sind die Gewichtungen beider Bilder gleich, so ergibt sich keine projektive Verzerrung und sowohl  $H_p$  also auch  $H'_p$  sind in dem Fall affine Transformationen und die Epipole wären bereits im unendlichen. Angenommen beide Epipole befinden sich noch nicht im unendlichen, so können die Gewichtungen der Punkte beider Bilder nicht gleich sein[29].

Das Ziel ist, die Abweichung der Gewichtungen der Punkte beider Bilder zueinander so gering wie möglich zu machen. Die Rektifizierung wurde anhand des synthetischen Beispiels in Kapitel 4 implementiert. Dem entsprechend bilden die Abbildungen der Eckpunkte des Quaders auf den Sensoren der virtuellen Kameras, die Punkte in  $p_i$  und  $p_j$  anhand welcher die Rektifizierung durchgeführt werden soll.

Der Wert  $p_c$  ergibt sich aus der Mittelung aller verwendeten Punkte eines Bildes  $p_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$  und gibt den Bildmittelpunkt an.  $w_c$  ist die Gewichtung am Bildmittelpunkt und wird berechnet mit

$$w_c = w^T p_c \quad (7.22)$$

Die Abweichung der Gewichtungen wird bezüglich der Gewichtung des Bildzentrums  $w_c$  gemessen.

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{w_i - w_c}{w_c} \right]^2 \quad (7.23)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^n \left[ \frac{w^T(p_i - p_c)}{w^T p_c} \right]^2 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^n \left[ \frac{w^T(p_i - p_c)(p_i - p_c)^T w}{w^T p_c p_c^T w} \right] \quad (7.24)$$

Vereinfacht lässt sich das auch in einer Matrixgleichung in Form von

$$\frac{w^T P P^T w}{w^T p_c p_c^T w} \quad (7.25)$$

angeben, in welcher für  $P$  gilt:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,u} - p_{c,u} & p_{2,u} - p_{c,u} & \dots & p_{i,u} - p_{c,u} \\ p_{1,v} - p_{c,v} & p_{2,v} - p_{c,v} & \dots & p_{i,v} - p_{c,v} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Für die Punkte  $p_j$  in Bild zwei ergibt sich dann entsprechend die Matrixgleichung:

$$\frac{w'^T P' P'^T w'}{w'^T p'_c p'_c^T w'} \quad (7.27)$$

$w$  und  $w^T$  werden nun noch mit ihren Definitionen aus den Gleichungen 7.18 und 7.19 ersetzt und die Gleichungen 7.25 und 7.27 als Summiert und als eine Funktion von  $z$  ausgedrückt[29].

$$\frac{z^T [e]_x^T P P^T [e]_x z}{z^T [e]_x^T p_c p_c^T [e]_x z} + \frac{z^T F^T P' P'^T F z}{z^T F^T p'_c p'_c^T F z} \quad (7.28)$$

Gleichung 7.28 wird noch vereinfach mit:

$$A = [e]_x^T P P^T [e]_x \quad (7.29)$$

$$B = [e]_x^T p_c p_c^T [e]_x \quad (7.30)$$

$$A' = F^T P' P'^T F \quad (7.31)$$

$$B' = F^T p'_c p'_c^T F \quad (7.32)$$

$$\rightsquigarrow \frac{z^T A z}{z^T B z} + \frac{z^T A' z}{z^T B' F z} \quad (7.33)$$

Da bereits fest gesetzt ist dass die dritte Komponente von  $z$  gleich 0 sein wird, wird  $z$  im Folgenden als zweidimensionaler vektor mit  $z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  dargestellt.  $A, B, A'$  und  $B'$  sind 3x3-Matrizen, von denen dann nur noch der erste  $2 \times 2$ - Block wichtig ist.

Für eine nicht lineare Optimierung wird das gesamte Polynom aufgeteilt, so minimieren wir zunächst  $\frac{z^T A z}{z^T B z}$  und danach  $\frac{z^T A' z}{z^T B' z}$ . So entstehen für  $z$  zunächst zwei Lösungen  $\hat{z}_1$  und  $\hat{z}_2$ , welche über eine Mittelung eine ersten Schätzung für  $z$  geben[29].

$$z = \frac{\frac{\hat{z}_1}{\|\hat{z}_1\|} + \frac{\hat{z}_2}{\|\hat{z}_2\|}}{2} \quad (7.34)$$

Da es sich um eine nicht lineare Optimierung handelt ist die Minimierung von  $\frac{z^T A z}{z^T B z}$  gleichzusetzen mit der Maximierung von  $\frac{z^T B z}{z^T A z}$ . Beide werden als eine Funktion von  $f(z)$  definiert. Matrix  $A$  wird mit der Choleskyzerlegung[34] in zwei höhere Dreiecksmatrizen zerlegt  $A = D^T D$ . Dies geht nur da  $A$  nachweislich eine symmetrische und positiv-definite Matrix ist[35, 34]. Des Weiteren wird definiert, dass  $y = Dz$  ist und  $f(z)$  wird dann zu  $\hat{f}(y)$ [29].

$$A = D^T D \quad (7.35)$$

$$y = Dz \rightsquigarrow z = D^{-1} y \quad (7.36)$$

$$f(z) = \frac{z^T B z}{z^T A z} \quad (7.37)$$

$$\rightsquigarrow f(z) = \frac{z^T B z}{z^T D^T D z} \quad (7.38)$$

$$\hat{f}(y) = \frac{y^T D^{-T} B D^{-1} y}{y^T y} \quad (7.39)$$

Da  $y$  bis auf einen Skalierungsfaktor bestimmt ist, kann angenommen werden, dass  $\|y\| = 1$  gilt.  $\hat{f}(y)$  ist maximiert, wenn  $y$  gleich dem Eigenvektor von  $D^{-T} B D - 1$  ist, welcher mit dem größten Eigenwert von  $D^{-T} B D - 1$  assoziiert wird[29]. Für  $\hat{z}_1$  ergibt sich  $\hat{z}_1 = D^{-1} y$ . Exakt das selbe Verfahren wird für die Bestimmung von  $z_2$  mit  $\frac{z^T B' z}{z^T A' z}$  angewandt[29].

Sind  $z_1, z_2$  und durch Mittelung der beiden eine erste Schätzung für  $z$  gefunden, so kann ein Wert für  $z$  gesucht werden, welcher noch näher an ein optimales Ergebnis heranreicht. Beide Lösungen  $z_1$  und  $z_2$ , werden in die Funktion  $f(z)$  eingesetzt und es wird ein gemeinsames Minimum gesucht[29]. So kann iterativ eine optimale Lösung für  $z$  gefunden werden. Ist der Wert für  $z$  bestimmt, so kann dieser die Gleichungen 7.18 und 7.19 eingesetzt werden und  $w$  beziehungsweise  $w'$  bestimmt werden. Die Einträge der Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  wären mit  $w = (w_a, w_b, w_c)^T$  und  $w' = (w'_a, w'_b, w'_c)^T$  bestimmt[29].

Auf diese Weise wurden im synthetischen Beispiel die Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  bestimmt und auf die Abbildungen des Quaders angewandt. Abbildung 7.3 zeigt die unrektifizierten Abbildungen der Quader in den Kameras. In grün ist die Abbildung des Quaders in  $C$  zu sehen und in rot ist die Abbildung des Quaders in  $C'$ . Abbildung 7.4 zeigt in blau die Epipolarlinien beider Abbildungen, welche sich in den jeweiligen Epipolen treffen.

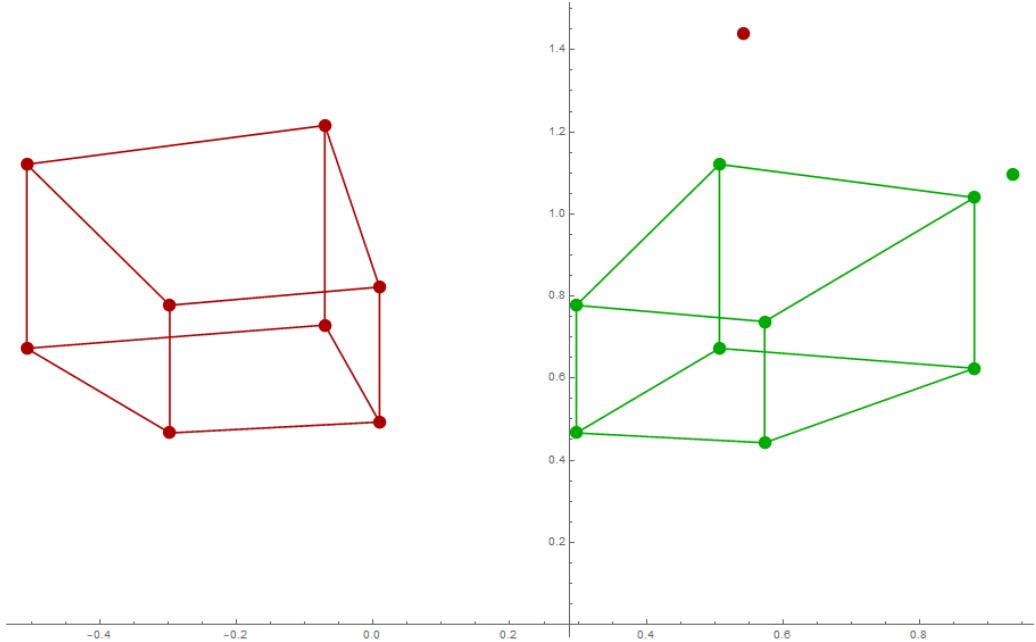


Abbildung 7.3: Aufnahmen zweier Kameras mit den selben Auflösungen, Kamera eins(Grün) und Kamera(rot) zwei gelten jeweils  $\zeta = 1$

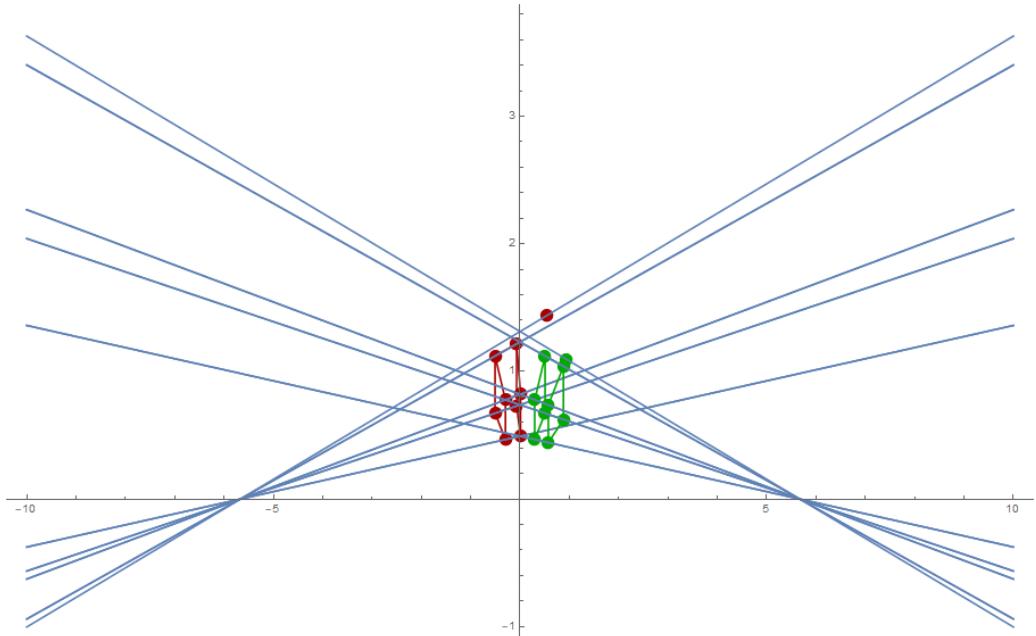


Abbildung 7.4: Epipole für Kamera eins und Kamera zwei vor der Rektifizierung

Nach Transformieren der Abbildungspunkte mit den Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  wurden die Epipole ins unendliche transformiert. Die Epipolarlinien verlaufen jetzt parallel zueinander, jedoch noch nicht zwingend parallel zur horizontalen Achse. In Abbildung 7.5 ist das Ergebnis der mit  $H_p$  und  $H'_p$  transformierten Bildpunkte zu sehen.

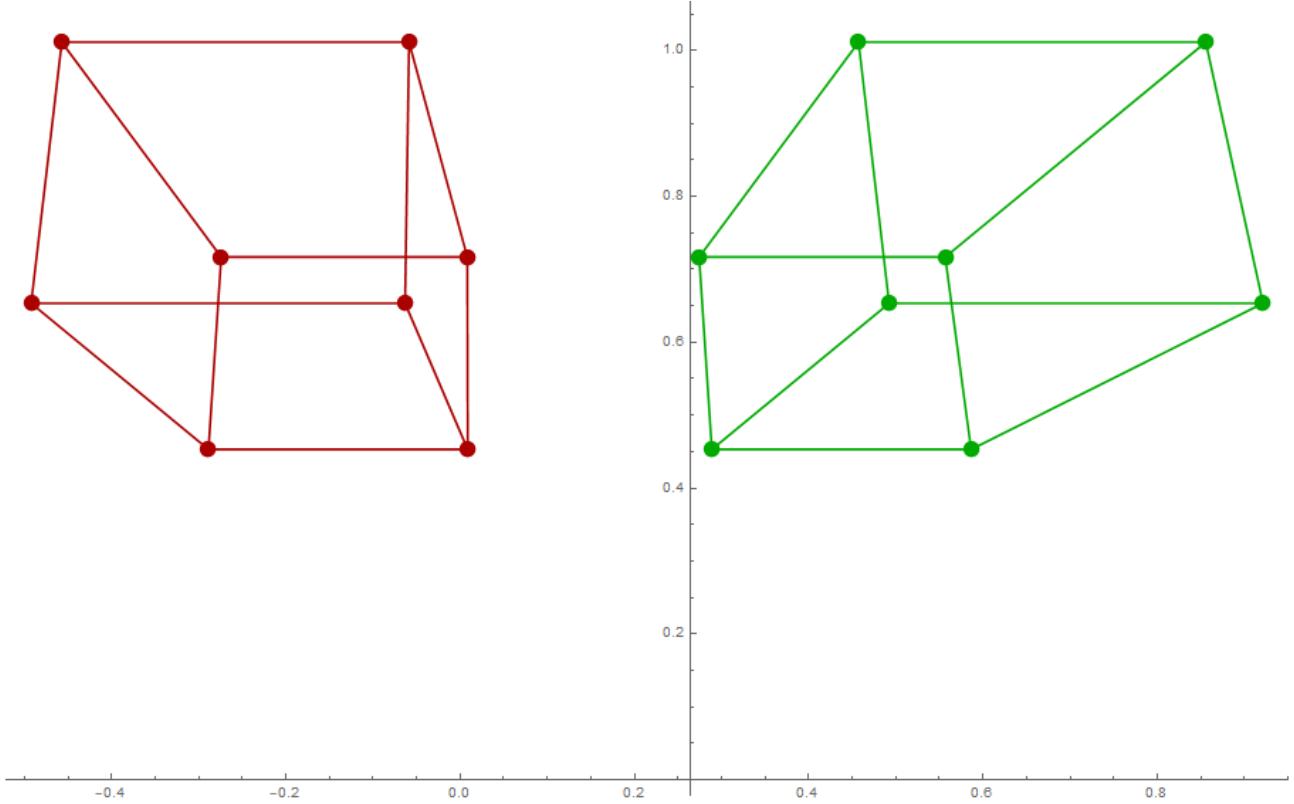


Abbildung 7.5: Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$ . Die Epipole beider Bilder sind nun im unendlichen.

## 7.2.2 Ähnlichkeitstransformation

(HIER WEITER MACHEN)

Nachdem die Epipole ins Unendliche verschoben wurden, müssen diese nun so rotiert und verschoben werden, dass die Epipolarlinien als Richtung  $i = [1 \ 0 \ 0]$  haben und die Epipolarlinien beider Bilder zu einheitlichen Scanlinien werden. Für die Ähnlichkeitstransformation wird davon ausgegangen, dass  $w$  und  $w'$  bereits bekannt sind.  $H_r$  und  $H'_r$  wurden bereits aus der Zerlegung von  $H_a$  und  $H'_a$  gewonnen.

$$H_r = \begin{bmatrix} v_b - v_c w_b & v_a - v_c w_a & 0 \\ v_a - v_c w_a & v_b - v_c w_b & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

$$H'_r = \begin{bmatrix} v'_b - v'_c w'_b & v'_a - v'_c w'_a & 0 \\ v'_a - v'_c w'_a & v'_b - v'_c w'_b & v'_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

$$(7.42)$$

$w$  und  $w'$  sind bereits bekannt. Mit Hilfe von  $F$ , können  $v_a$  und  $v_b$  ersetzt werden. Dazu kann die letzte Zeile von  $F$  nach  $v_a$ ,  $v_b$  und  $v_c$  aufgelöst werden. Für  $v'_a$ ,  $v'_b$  und  $v'_c$  wird die letzte Spalte von  $F$  verwendet. So können folgende Gleichungen für  $v_a$ ,  $v'_a$ ,  $v_b$ ,  $v'_b$ ,  $v_c$  und  $v'_c$  gewonnen werden.

$$F = H'^T[i]_x H \quad (7.43)$$

$$F = \begin{bmatrix} v_a w'_a - v'_a w_a & v_b w'_a - v'_a w_b & v_c w'_a - v'_a \\ v_a w'_b - v'_b w_a & v_b w'_b - v'_b w_b & v_c w'_b - v'_b \\ v_a - v'_c w_a & v_b - v'_c w_b & v_c - v'_c \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

$$v_a = F_{31} + v'_c w_a \quad (7.45)$$

$$v_b = F_{32} + v'_c w_b \quad (7.46)$$

$$v_c = F_{33} + v'_c \quad (7.47)$$

$$v'_a = v_c w'_a - F_{13} \quad (7.48)$$

$$v'_b = v_c w'_b - F_{23} \quad (7.49)$$

$$v'_c = v_c - F_{33} \quad (7.50)$$

Eingesetzt in die jeweiligen Matrizen  $H_r$  und  $H'_r$ , entstehen die folgenden Matrizen in Gleichungen 4.114 und 4.115, welche nur noch die unbekannte  $v'_c$  beinhalten. Die gemeinsame Variable  $v'_c$  zeigt die geometrische Verbindung beider Bilder in ihrer Verschiebung entlang ihrer v-Richtung. Es wird also ein Offset von  $F_{33}$  benötigt, um die Epipolarlinien horizontal zu Scanlinien auszurichten. Den Wert für  $v_c$  wird so ermittelt, dass das Minimum einer v-Koordinaten eines Pixel als minimum den Wert null besitzt

$$H_r = \begin{bmatrix} F_{32} - w_b F_{33} & w_a F_{33} - F_{31} & 0 \\ F_{31} - w_a F_{33} & F_{32} - w_b F_{33} & F_{33} + v'_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

$$H'_r = \begin{bmatrix} w'_b F_{33} - F_{23} & F_{13} - w'_a F_{33} & 0 \\ w'_a F_{33} - F_{13} & w'_b F_{33} - F_{23} & v'_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

Das Ergebnis der Bildpunkte  $p_i$  und  $p_j$  multipliziert mit den Matrizen  $H_r H_p$  und  $H'_r H'_p$  mit ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Als letztes folgt noch die Scherungstransformation  $H_s$  und  $H'_s$  für die horizontale Entzerrung beider Bilder.

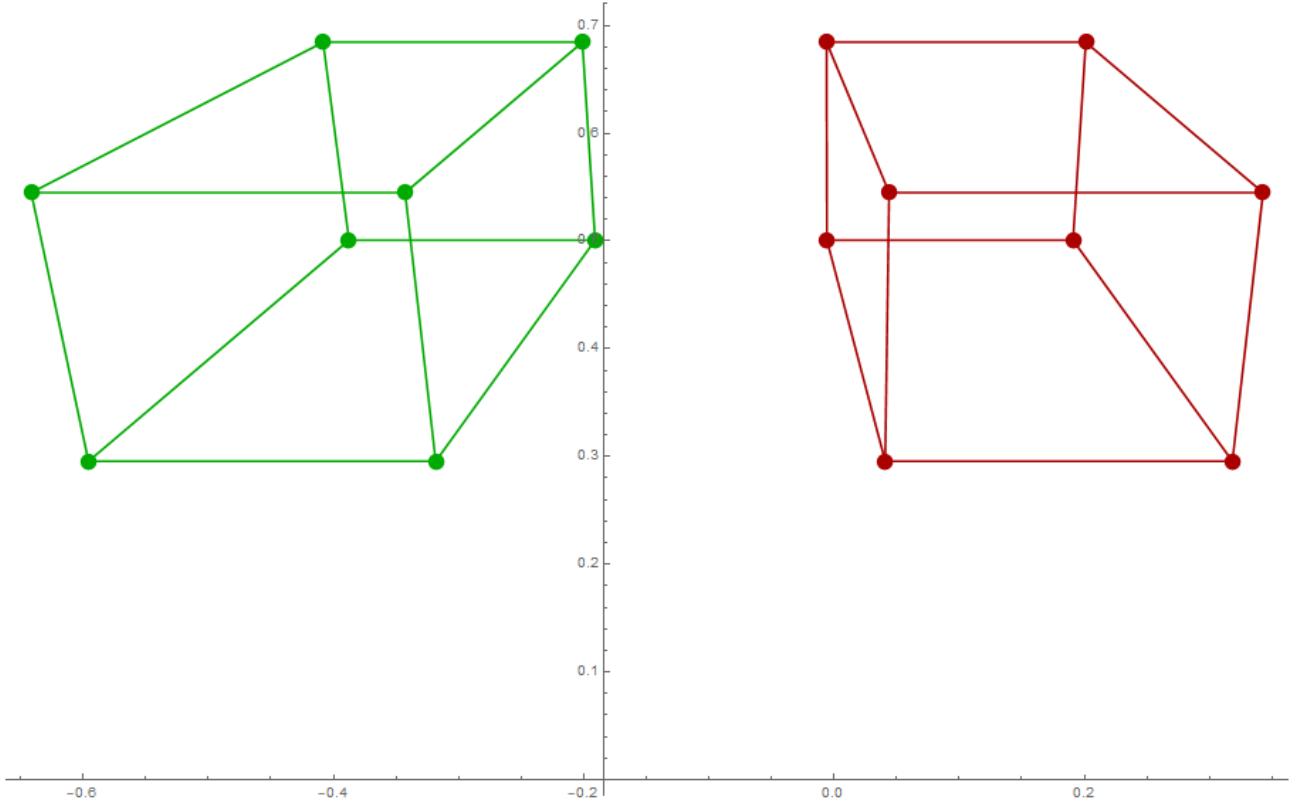


Abbildung 7.6: Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen  $H_r \cdot H_p$  und  $H'_r \cdot H'_p$ . Die Epipolarlinien sind nun horizontal zueinander ausgerichtet

### 7.2.3 Scherungstransformation

Die letzte Transformation, welche an den Bilder durchgeführt werden soll, ist die sogenannten Scherungstransformation. Sie soll vor allem dazu dienen, die horizontale Verzerrung der Bilder zueinander nochmal weiter zu minimieren. Die Matrizen  $H_s$  und  $H'_s$  wirken sich hauptsächlich auf die  $u$  und  $u'$  Komponenten aus.

$$H_s = \begin{bmatrix} u_a & u_b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

$$H'_s = \begin{bmatrix} u'_a & u'_b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

Um die richtigen Werte für  $a, a', b$  und  $b'$  zu bekommen, werden zunächst Punkte an den jeweiligen gegenüberliegenden Kanten der Bilder definiert. Da die Bilder des Quaders nicht aus tausenden von Pixeln bestehen, wie ein reales Bild, sondern nur über dessen Eckpunkte bestimmt ist, wird eine Bildbreite  $w$  und  $w'$  und eine Bildhöhe  $h$  und  $h'$  definiert. Die Höhen und Breiten der Bilder rahmen die abgebildeten Quader ein, somit wurde quasi eine Bildgröße für beide Bilder definiert. Nun können die Punkte an den Kantenhalbierenden  $a = [\frac{w-1}{2} \ 0 \ 1]^T, b = [w-1 \ \frac{h-1}{2} \ 1]^T, c = [\frac{w-1}{2} \ h-1 \ 1]^T, d = [0 \ \frac{h-1}{2} \ 1]^T$  gebildet werden. Der Gedanke, der damit verfolgt wird ist, dass die Punkte der jeweiligen gegenüberliegenden Kanten mit einander verbunden werden können und dann so ausgerichtet werden sollen, dass sie sich wieder direkt gegenüber liegen. Schematisch wird as in Abbildung ???? aufgezeigt.

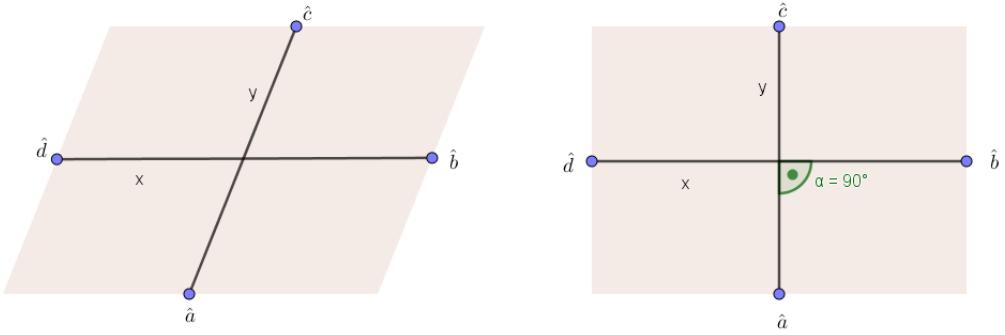


Abbildung 7.7: Die Abbildung verdeutlicht noch mal Schematisch, wie sich die Punkte ausrichten sollen. Bild a) zeigt die durch die Rektifizierung verschobenen Bildkantenmitten. Bild b= zeigt, wie sich die Bildkantenmitten durch die Scherungstransformation wieder ausrichten sollen.

Die Punkte  $a, b, c, d$  und auch  $a', b', c', d'$  geben die Bildbreiten der noch unberührten Bilder an. Nach der Rektifizierung sind die Bilder so verzerrt, dass die Kanten mitten sich meistens nicht mehr direkt gegenüber von einander befinden. Die Punkte  $a, b, c, d$  und  $a', b', c', d'$  werden mit den Matrizen  $H_p, H'_p, H_r$  und  $H'_r$  verrechnet, so dass man die genaue neue Position der Kanten Mitten nach der Rektifizierung hat.

$$\hat{a} = H_r \cdot H_p \cdot a$$

$$\hat{b} = H_r \cdot H_p \cdot b$$

$$\hat{c} = H_r \cdot H_p \cdot c$$

$$\hat{d} = H_r \cdot H_p \cdot d$$

$$\hat{a}' = H'_r \cdot H'_p \cdot a'$$

$$\hat{b}' = H'_r \cdot H'_p \cdot b'$$

$$\hat{c}' = H'_r \cdot H'_p \cdot c'$$

$$\hat{d}' = H'_r \cdot H'_p \cdot d'$$

Um aus  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  und auch  $\hat{a}', \hat{b}', \hat{c}', \hat{d}'$  wieder Punkte der affinen Ebene zu machen werden sie jeweils durch ihre dritte Komponenten geteilt, so das  $\hat{a}_w, \hat{b}_w, \hat{c}_w, \hat{d}_w$  und  $\hat{a}'_w, \hat{b}'_w, \hat{c}'_w, \hat{d}'_w$  jeweils den Wert eins besitzen. Danach können die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  aus den Differenzen der sich ursprünglich gegenüberliegenden Punkte gebildet werden.

$$x = \hat{b} - \hat{d} \quad (7.55)$$

$$y = \hat{c} - \hat{a} \quad (7.56)$$

$$x' = \hat{b}' - \hat{d}' \quad (7.57)$$

$$y' = \hat{c}' - \hat{a}' \quad (7.58)$$

$x$  und  $y$  sind Vektoren der euklidischen Bildebene. Die Rechtwinkligkeit beider wird also erhalten, wenn gilt:

$$(H_s x)^T (H_s y) = 0 \quad (7.59)$$

$$(H'_s x')^T (H'_s y') = 0 \quad (7.60)$$

Die Seitenverhältnisse der Bilder werden beibehalten, wenn gilt:

$$\frac{(H_s x)^T (H_s x)}{(H_s y)^T (H_s y)} = \frac{w^2}{h^2} \quad (7.61)$$

$$\frac{(H'_s x')^T (H'_s x')}{(H'_s y')^T (H'_s y')} = \frac{w'^2}{h'^2} \quad (7.62)$$

Für  $u_a, u'_a, u_b$  und  $u'_b$  jeweils Gleichungen auf Basis der jeweiligen Bild Höhen und Breiten  $w, w', h, h'$  und  $x, x', y$  und  $y'$  und unter einhaltung der Aussagen der Gleichungen 5.118 bis 5.121, aufgestellt werden[29, 36].

$$u_a = \frac{h^2 x_v^2 + w^2 + y_v^2}{h w (x_v y_u - x_u y_v)} \quad (7.63)$$

$$u_b = \frac{h^2 x_u x_v + w^2 y_u y_v}{h w (x_u y_v - x_v y_u)} \quad (7.64)$$

Selbe Gleichungen werden auch für  $u'_a$  und  $u'_b$  aufgestellt. Das Ergebnis der Scherungstransformation ist in Abbildung 5.17 dargestellt. Wie zu sehen ist, ist die Minimierung noch nicht zu hindert prozent perfekt, hierfür müsste man noch ein paar mehr Interationsschritte bei finden von  $z$  einfügen.(ICH WEIß GANZ EHRLICH NICHT WORAN ES LIEGT...)

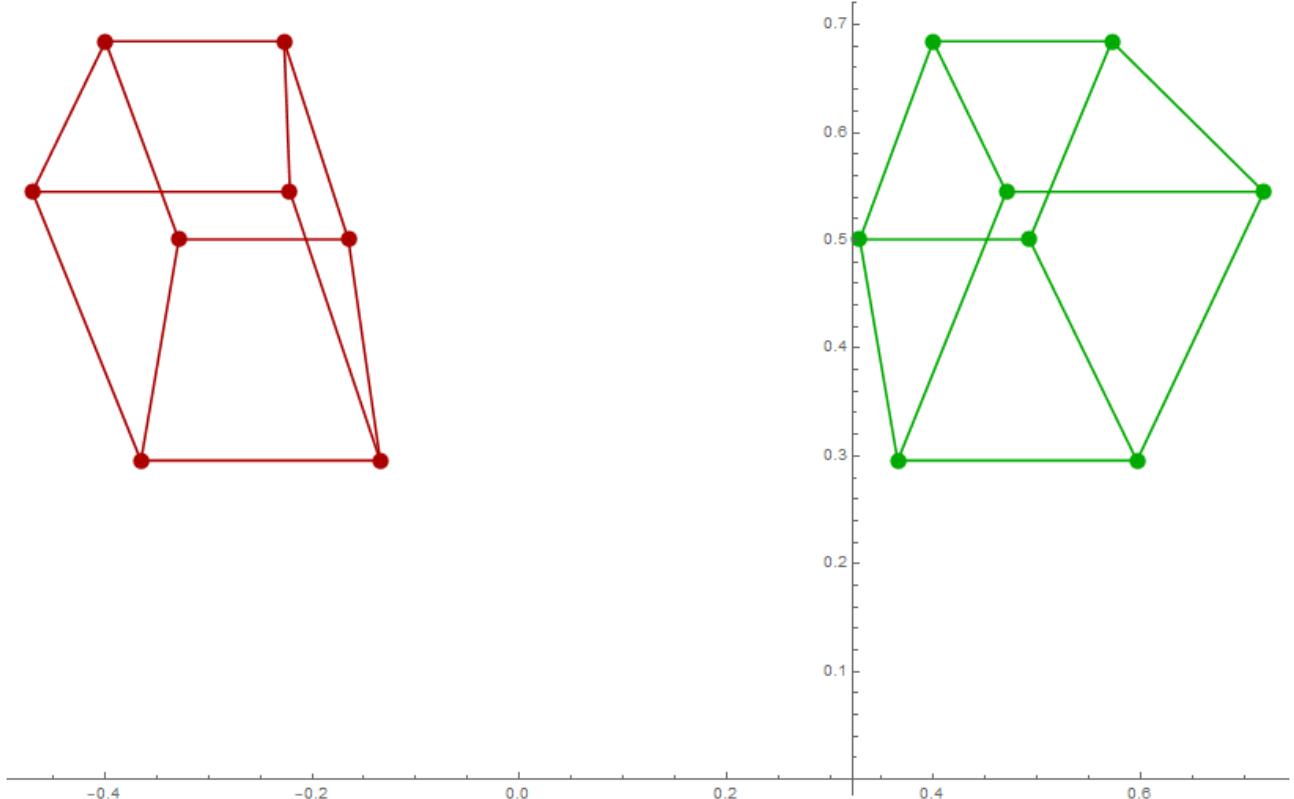


Abbildung 7.8: Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen  $H_s \cdot H_r \cdot H_p$  und  $H'_s \cdot H'_r \cdot H'_p$ . Die horizontale Verzerrung wurde reduziert.

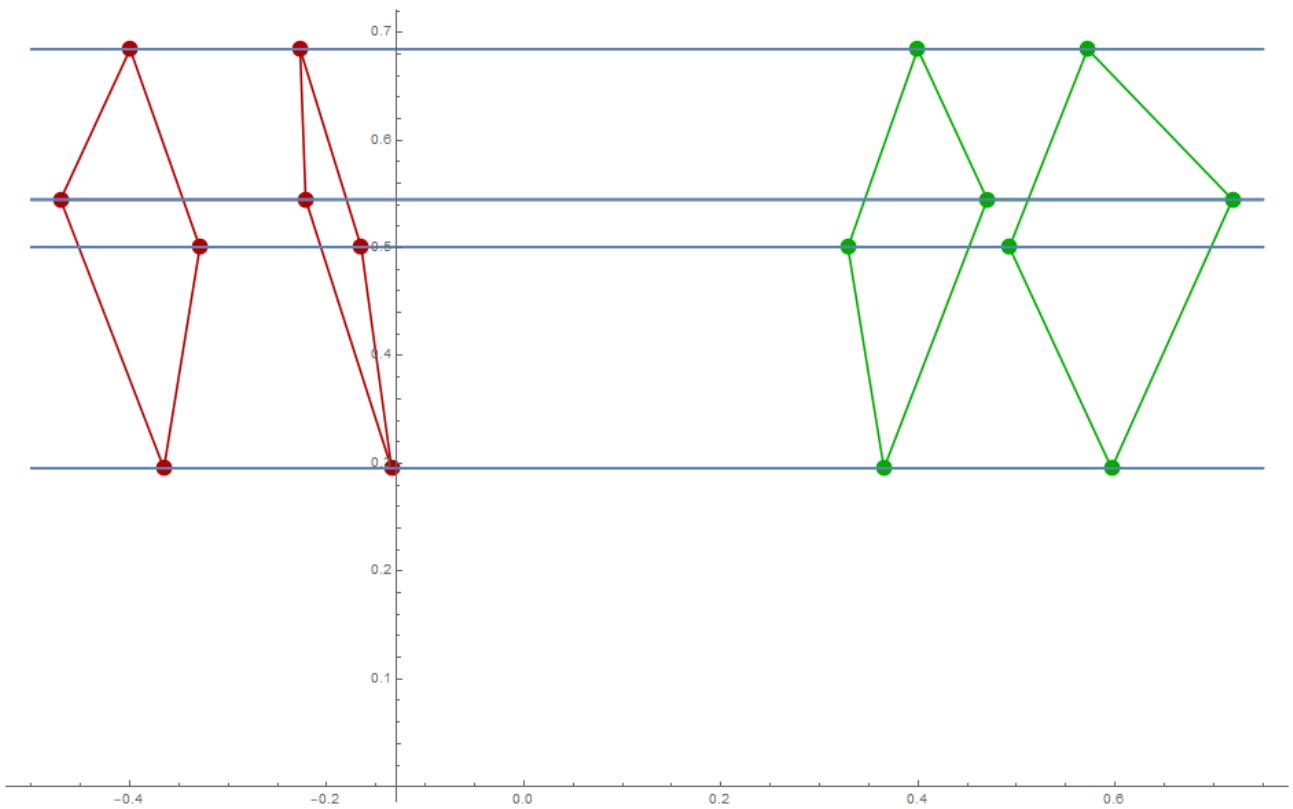


Abbildung 7.9: In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut

#### 7.2.4 Rektifizierung mit unterschiedlichen Kameraauflösungen

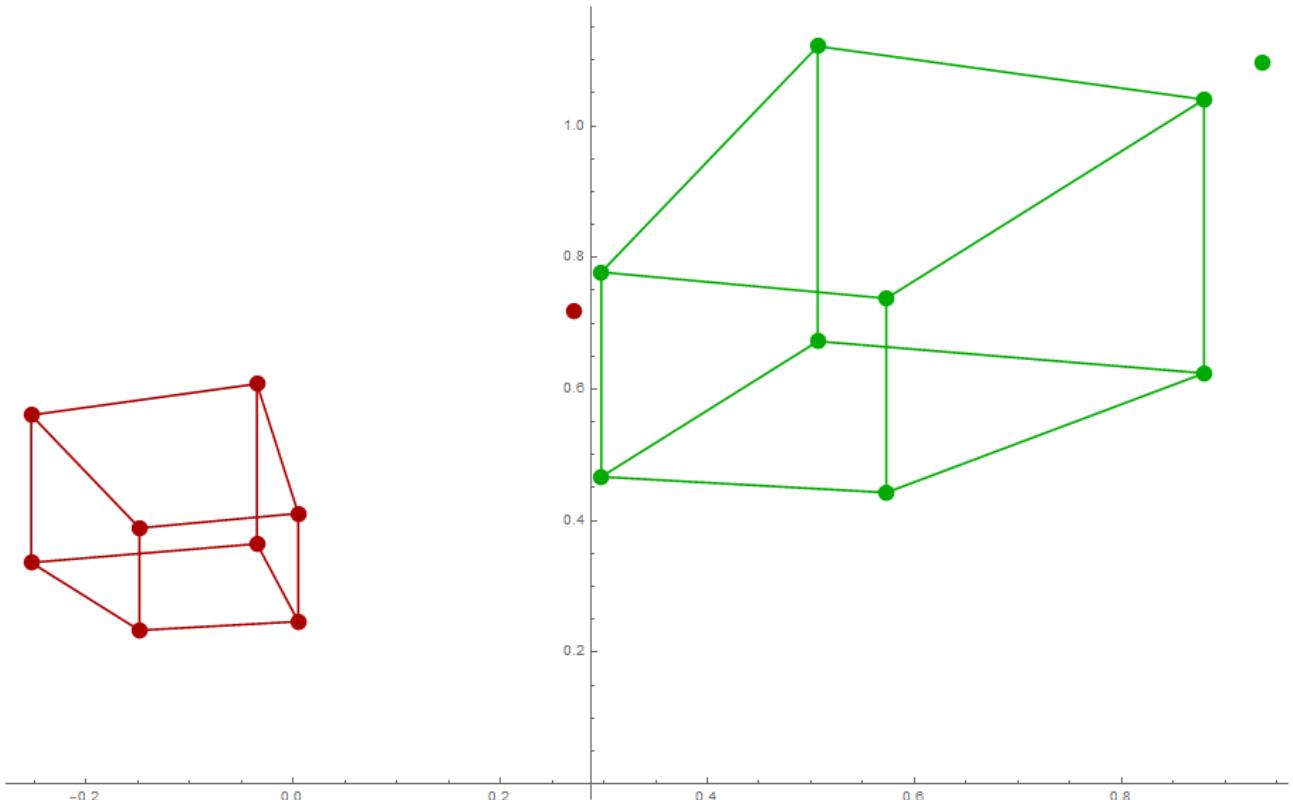


Abbildung 7.10: Aufnahmen zweier Kameras mit unterschiedlichen auflösungen, Kamera eins(Grün) besitzt für  $\zeta$  den Wert 1 und für Kamera zwei(rot) gilt jeweils  $\zeta_x = 1.2$  und  $\zeta_y = 3.1$

(Normalerweise in realbildern wird das Bild bei unterschiedlicher Auflösung nicht verzerrt sondern nur "Vergrößert oder zurecht geschnitten". Dadurch dass beide Quader in einem Koordinatensystem verbaut wurden sieht das so aus)

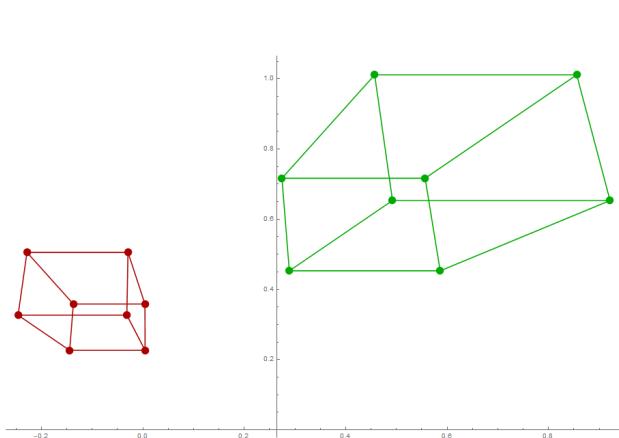


Abbildung 7.11: Epipole für Kamera eins und Kamera zwei vor der Rektifizierung

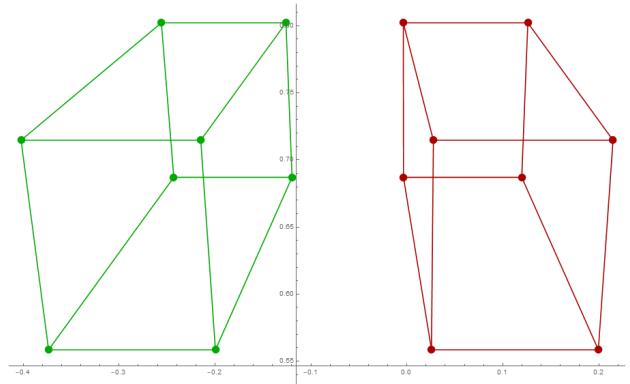


Abbildung 7.12: Nachdem die drei Homographien auf die Punkte angewandt sind die Eckpunkte des Quaders auf beiden Bildern auf den selben correspondierenden Epipolarlinien

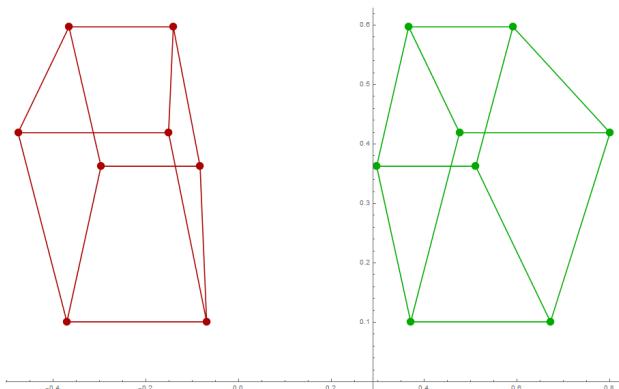


Abbildung 7.13: In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut

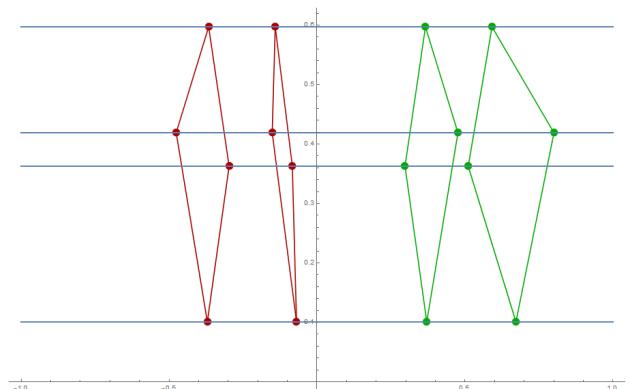


Abbildung 7.14: In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut

Unterschiedliche Auflösungsverhältnisse führen wiederum zu fehlern

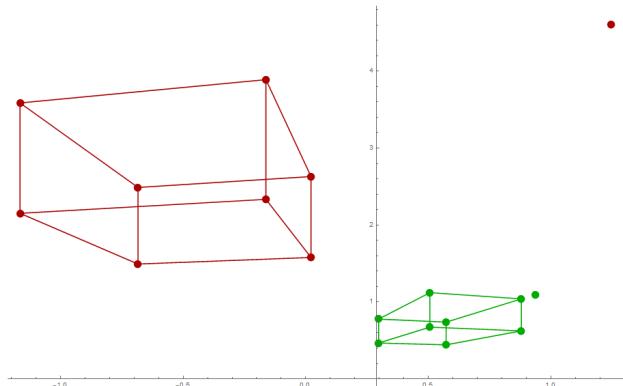


Abbildung 7.15: In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut

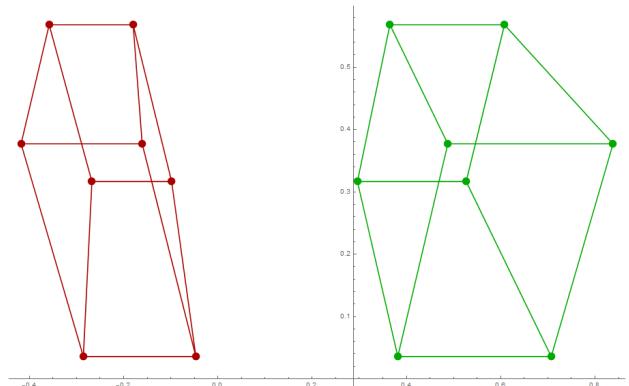


Abbildung 7.16: In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut

## 8 Punktesortierung in Schachbrettmustern

In diesem Teil der Masterthesis soll am Ende ein Algorithmus entstehen, welcher durch einen bereits bestehenden Algorithmus zur Detektion von Eckpunkten eines Schachbretts, eine Liste an Eckpunkten bekommt und diese auf deren Nachbarschaftsverhältnisse prüft. Die Schachbretter können dabei sowohl Kissen- als auch Tonnennverzeichnungen aufweisen und oder perspektivisch verzerrt sein. Mit den Algorithmus sollen Punkte wissen in welchen Reihen sie sich sowohl in x- als auch y-Richtung befinden. Jeder Punkt bekommt also eine Indexnummer in x-, sowie y-Richtung beziehungsweise in unserem Beispiel wird die y-Koordinate als  $j$  bezeichnet und die x-Koordinate als  $i$ , zugewiesen. Jeder Punkt bekommt mit Hilfe von den Mathematica eigenen *Associations* einen *Key* mit *NeighbourJ* und *NeighbourI* zugeteilt. Mit Hilfe dieser *Keys* kann dann später bei einem Stereobildpaar zum Beispiel die Korrespondierenden Eckpunkte der Schachbretter rausgesucht werden, was vielleicht genauere Ergebnisse liefert also die Suche von Hand. Des weiteren kann dieser Algorithmus in späteren Projekten vielleicht bei der Rausrechnung von Verzeichnungen hilfreich sein.

Dieser Algorithmus nimmt die Liste mit den Koordinaten der Eckpunkte entgegen und sortiert und nummeriert diese Zeilen- und Spaltenweise durch.

Jeder Punkt ist somit über zwei Indizes codiert und enthält die Information, in welcher Zeile und in welcher Spalte des Schachbrettmusters er sich befindet.

Da nicht immer garantiert ist, dass alle Punkte innerhalb des Schachbretts zuvor gefunden worden, enthält der Sortierungsalgorithmus eine Funktion, in welchem er Lücken des innerhalb ausfindig macht und synthetische Eckpunkte setzt. Diese synthetisch gesetzten Punkte, werden markiert, so dass sie nicht in die Liste der möglichen korrespondierenden Punkte fallen.

## 8.1 Vorläufiges Klassendiagramm

Module	Parameter	Lokale Variablen	Funktion
FindMinMax	Pointlist	Imin, imax, jmin, jmax, iSplits, jSplits, iDistance, jDistance	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die minimas und maximas der i und j-Werte der Koordinaten werden gesucht, um den „Rahmen“ des Gitters um das Schachbrett festzulegen</li> <li>In den ConstantArrays JSplits und ISplits werden die Zellen des Gitters gespeichert. Diese werden über die Distanz der jeweiligen Minimalwerte und Maximalwerte geteilt durch die gewünschte Anzahl an Zellen geteilt.</li> </ul>
SortPointList	iSplits, jSplits, Pointlist	pi,pj	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Eckpunkte werden zunächst der Größe nach nach ihren i-Werten Sortiert. Die sortierte Liste wird dann durchgezählt, so dass jeder Punkt seinen Indexwert in I-Richtung bekommt</li> <li>Danach werden die Eckpunkte der Größe nach nach ihren J-Werten sortiert und bekommen hier ebenfalls einen Index zugeordnet</li> <li>(Diese Sortierung ist nach jetzigem Stand des Algorithmus vlt nicht mehr zwingend notwendig)</li> </ul>
GoThroughConvex Hulls	iSplits, jSplits, pj	ConvexHull	<ul style="list-style-type: none"> <li>Nun wird herausgefiltert, welcher Punkt in welche Zelle des erstellten Gitters gehört, somit wird eine grobe Vorsortierung der Punkte für den weiteren Verlauf vorgenommen.</li> <li>In einer For-Schleife welche alle iSplits durchzählt wird die Funktion FindPointsInConvexHull bei jedem Durchgang aufgerufen welche eine Liste mit Associations in die Liste ConvexHull hinzufügt.</li> <li>Der Funktion werden die momentanen iSplits der Durchzählung übergeben und alle Jsplits. Des Weiteren wird die nach J sortierte Punkteliste übergeben</li> </ul>
FindPointsInConvexHull	iSplits[[1,ii]], iSplits[[1,ii+1]], jSplits, pj	ConvexHullCell={}, ConvexHullList, ConvexHullCellKeys = <  >	<ul style="list-style-type: none"> <li>Eine Liste namens ConvexHullCell und eine Association nach dem ConvexHullKeys wird angelegt</li> <li>Zwei For-Schleifen werden gestartet. Die erste läuft durch alle Jsplits, die zweite geht alle Punkte von pj durch.</li> <li>Innerhalb der For-Schleife wird dann überprüft, welche Punkte aus pj sich innerhalb der übergebenen Jsplits und den dazugehörigen iSplits befinden.</li> <li>Die Koordinaten, die Indizes und die Zellenbezeichnung werden dann in Keys in die Association ConvexHullCellKeys gespeichert und er Liste ConvexHullCell angehängt. Diese Liste wird dann an die Liste ConvexHull angehängt</li> <li>Wiederholung des Vorganges mit neuen iSplits.</li> </ul>

Abbildung 8.1: Klassendiagramm

FindStartVectors	ConvexHull	StartPointCloud={}, StartPointCloudKeys=<  >, VecI,VecJ,countI,countJ, Start, nextI,nextJ,	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Punkte der Zellen (<math>i = 1, j = \text{All}</math>) und (<math>i = \text{all}, j = 1</math>) werden in eine neue Liste namens StartPointCloud gespeichert.</li> <li>Die Liste wird zweimal durchlaufen <ul style="list-style-type: none"> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = 1</math> und <math>i = \text{all}</math> aufhalten. Aus ihnen wird der geringste i- Wert ermittelt (VecI)</li> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = \text{all}</math> und <math>i = 1</math> aufhalten. Aus ihnen wird der geringste j- Wert ermittelt (VecJ)</li> </ul> </li> <li>Die Punkte mit den geringsten Werten werden in VecI und VecJ gespeichert.</li> <li>Jetzt wird die Liste nochmals zweimal durchgegangen. <ul style="list-style-type: none"> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = 1</math> und <math>i = \text{all}</math> aufhalten werden durchgegangen. Aus ihnen wird derjenige Wert ermittelt, welcher einen Wert für J besitzt der kleiner ist als der momentan j- Wert von VecI und dessen i- Wert kleiner ist als der i- Wert von VecI plus einem Offset. Dieser Wert ist das neue VecI</li> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = \text{all}</math> und <math>i = 1</math> aufhalten. Aus ihnen wird derjenige Wert ermittelt, welcher einen Wert für i besitzt der kleiner ist als der momentan i- Wert von VecJ und dessen j- Wert kleiner ist als der j- Wert von VecI plus einem Offset. Dieser Wert ist das neue VecJ</li> </ul> </li> <li>VecI und VecJ ergeben den gleichen Punkt und somit ist der Startwert gesetzt.</li> <li>Nun sollen die ersten Punkte in i- und j-Richtung vom Startpunkt aus gefunden werden.</li> <li>Es wird ein nexti und ein nextj definiert, dessen Koordinaten sehr groß anfangen</li> <li>Es wird wieder die StartPointCloud zweimal durchlaufen <ul style="list-style-type: none"> <li>Es werden Punkte gesucht, welche sich in der selben Zelle i wie der Startpunkt befinden und auch die Zellen +1 und -1 drum herum. Sollte es ein Punkt geben, der kleiner ist als der momentane nexti und größer als der Startpunkt, jedoch nicht gleich dem Startpunkt. So nimmt nexti dessen Wert an.</li> <li>Danach muss geprüft werden, ob das potentielle nexti auch wirklich das richtige nexti ist. Hierzu wird eine neue For-Schleife gestartet, welche wieder die StartPointCloud durchgeht und überprüft ob es einen Punkt gibt dessen j-Koordinatenabstand zum Startpunkt kleiner ist also der j-Koordinatenabstand des momentanen nexti zum Startpunkt und ob dessen i-Koordinatenabstand zum Startpunkt kleiner ist als der momentane i-Koordinatenabstand von nexti zum Startpunkt.</li> </ul> </li> </ul>
------------------	------------	--	--

Abbildung 8.2: Klassendiagramm

			<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist dies der Fall so wird dieser Punkt zum neuen nexti.</li> <li>Mit dem potentiellen nextj wird ebenso verfahren.</li> </ul>
CreatePossiblePoint - ListsIAndJ	nextI, nextJ, Start, ConvexHull	IList= {}, JList= {}, IDir, JDir, distance, cache, PotNextI, PotNextJ	<ul style="list-style-type: none"> <li>IDir und JDir sind die Richtungsvektoren vom Startpunkt aus in beide Kantenrichtungen des Schachbretts.</li> <li>Danach werden die ersten beiden Spalten in I- und J-Richtung jeweils durchlaufen, und in IList und JList gespeichert.</li> <li>Diese Listen enthalten weitere potentielle Punkte entlang der gesuchten Kante.</li> <li>Die Kanten können natürlich durch die perspektivische Verzerrung mancher Bilder auch noch weiter in die Zellen hineinragen. Hierum kümmert sich dann im späteren Algorithmus die SaftyJList[] und SaftyIList[] Funktionen</li> </ul>
FindNeighbours	IList, JList ,Start, nextI, nextJ, ConvexHull	SortedPointsKeys = <>, Sortedpoints = {}, proportionJ, proportionI, Jtemp, itemp, PotNextJDir, distanceNextPotPointJ, PotNextIDir, distanceNextPotPointI, NeighbourNumberJ, NeighbournumberI, distanceJ, distanceI, NextJDir, NextIDir, StartPropJForFirstCompleteGridJ	<ul style="list-style-type: none"> <li>StartPoint und NextPointI und NextPointJ werden die Keys NeighbourI und NeighbourJ gegeben mit startPoint(NeighbourJ → 1, NeighbourI → 1), NextPointI(NeighbourJ → 1, NeighbourI → 2) und NextPointJ(NeighbourJ → 2, NeighbourI → 1).</li> <li>Diese drei bereits bekannten Punkte werden dann auch in eine angelegte CheckPointList gespeichert, diese wird für das spätere Prüfen von weiteren Punkten benötigt.</li> <li>Nun wird zunächst in einer For-Schleife die Punkte von startPoint und NextPointJ aus gesucht. <ul style="list-style-type: none"> <li>Anmerkung: Für die Punkte in I-Richtung des Schachbretts wird das selbe Verfahren angewandt.</li> </ul> </li> <li>Benötigt wird die Distanz zwischen dem momentanen startPointJ, welcher nach jedem Durchlauf der Schleife den Wert des momentanen NextPointJ bekommt und einem momentanen NextPointJ, welcher nach jedem Durchlauf der Schleife den Wert des gerade neu gefundenen nächsten Punktes bekommt.</li> <li>Die Schleife selbst durchläuft alle Punkte, welche in der für die Richtung entsprechenden Richtung Liste sind. In diesem Fall die JList</li> <li>Es wird außerdem bei der Suche den nächsten Punktes in j-Richtung eine Distanz namens proportion berechnet, welcher die Distanz i zwischen startPoint und Nextpoint beinhaltet.</li> <li>Innerhalb der durchlaufenden Liste wird derjenige Punkt gesucht welcher zum NextPointJ den geringsten Abstand in J-Richtung hat und dessen Abstand in I-Richtung &lt;= der i-Koordinate des NextPointJ + proportion+noch einen Puffer ist und &gt;= der i-Koordinate des NextPointJ – proportion+noch einen Puffer.</li> </ul>

Abbildung 8.3: Klassendiagramm

			<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist der nächste Punkt gefunden, so wird dieser der SortedPointsList und der der CheckPointsList übergeben mit den passenden NeighbourI und NeighbourJ associationKey.</li> <li>Des Weiteren bekommt für den nächsten Schleifendurchlauf startPointJ die Werte von NextPointJ und NextPointJ' in wird der neu gefundenen Punkt aus der JList gespeichert.</li> <li>Im Anschluss werden noch in AppendTo[SortedPoints, SaftyListJ[Start, CheckPointJ, proportionY, CheckCellForJ, ConvexHull, distanceJ]], AppendTo[SortedPoints, CompleteJGrid[ nextI, ConvexHull, StartDistanceJ, StartProportionJ, Start_Jp, al]] Weitere Punkte zur SortedList in J-Richtung hinzugefügt, bei ersterem nur in bestimmten Fällen. Mehr zu den Funktionen folgt.</li> <li>Nicht zu vergessen: selbiges wie oben wird auch mit den Punkten in I-Richtung vollzogen, bis auf die CompleteGrid Funktion</li> </ul>
SaftyList	Start, CheckLastPointJ , proportionJ, LastJPointsCell, ConvexHull, NextJDir	SaftyList = {}, SaftyKeys =<>, SaftyKeysList = {}, propJ, lastDir, lastdistanceJ	<ul style="list-style-type: none"> <li>Der Funktion werden die Parameter CheckLastPointJ und LastJPointCell mitgegeben. Diese stammen aus der Funktion FindNeighbours und es handelt sich um den letzten Punkt der innerhalb der JListe ermittelt wurde und dessen i-Zelle in welcher sich dieser befindet.</li> <li>Da die I- bzw die JListe in jede Richtung nur die Punkte der ersten beiden Zellen beinhaltet, kann es bei einem rotierten Schachbrett sein, dass sich noch weitere Punkte in Zellen weiter oben/unten befinden</li> <li>Die Funktion SaftyList, erstellt eine Liste aus möglichen weiteren Punkten, indem sie die in diesem Falle I-Zelle des letzten Punktes nimmt und diese so wie die unter und oberhalb dieser Zelle und alle deren J-Zellen aufwärts auf einen möglichen nächsten Punkt untersucht. → Dies geschieht nach dem selben Verfahren wie in FindNeighbours.</li> <li>Sollte es noch einen geben wird dieser ebenfalls der CheckPointList und der SortedPointsList zugewiesen, ansonsten passiert nichts.</li> </ul>
CompleteJGrid	StartPointI, ConvexHull, StartDistanceJ, proportionJ, Start,	PossiblePointsList = {}, SortedPointsKeys = <>, SaftyPossiblePointsListJ = {}, propJ, StartPointForJGrid, distanceJ,	<ul style="list-style-type: none"> <li>Nachdem die äußersten Punkte der linken und unteren Kante des Schachbretts gefunden wurden, muss nun das restliche Grid des Schachbretts detektiert und mit den richtigen NeighbourI und NeighbourJ Werten versehen werden.</li> <li>Jeder Punkt der in I-Richtung als „Rahmenpunkt“ detektiert wurde, wird einmal als Startpunkt gesetzt, von ihm aus wird dann in einem sehr ähnlichen Verfahren wie schon zuvor der nächste Punkt in J-Richtung gesucht und wenn nötig tritt auch hier</li> </ul>

Abbildung 8.4: Klassendiagramm

NeighbourNumberJ, aI	NextNeighbourNumberJ, distanceNextPotGridPointJ, tempJ, NextPointJDir, NextJDir, CheckPointJ, CheckCellForJ	nochmal die SaftyList Funktion in kraft um auch wirklich alle Punkte jeder Reihe ausfindig zu machen
----------------------	--	--

Abbildung 8.5: Klassendiagramm

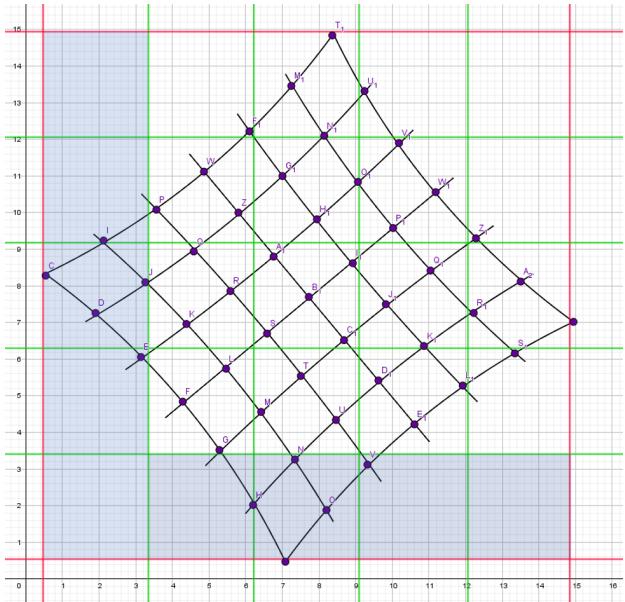


Abbildung 8.6

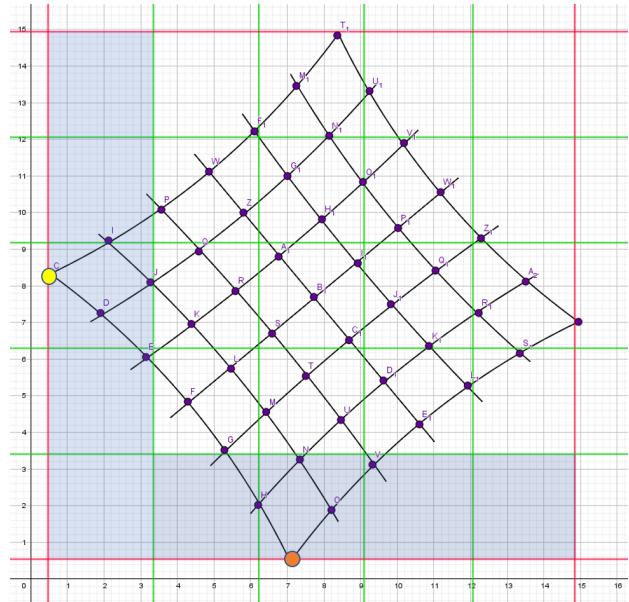


Abbildung 8.7

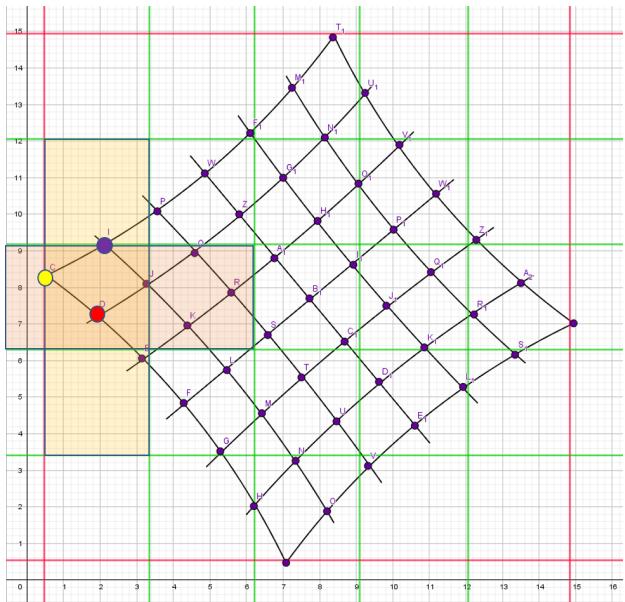


Abbildung 8.8

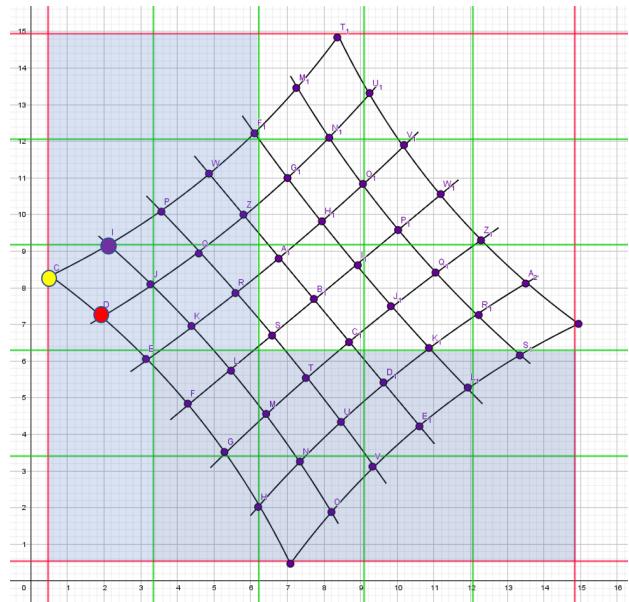


Abbildung 8.9

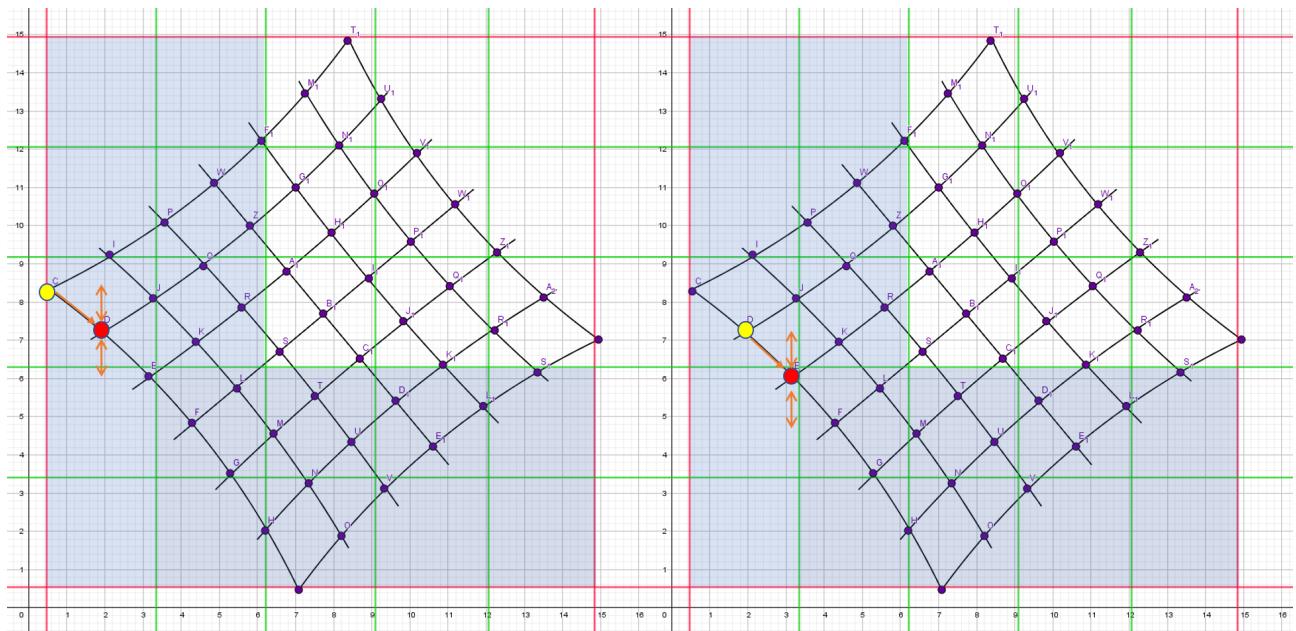


Abbildung 8.10: Klassendiagramm

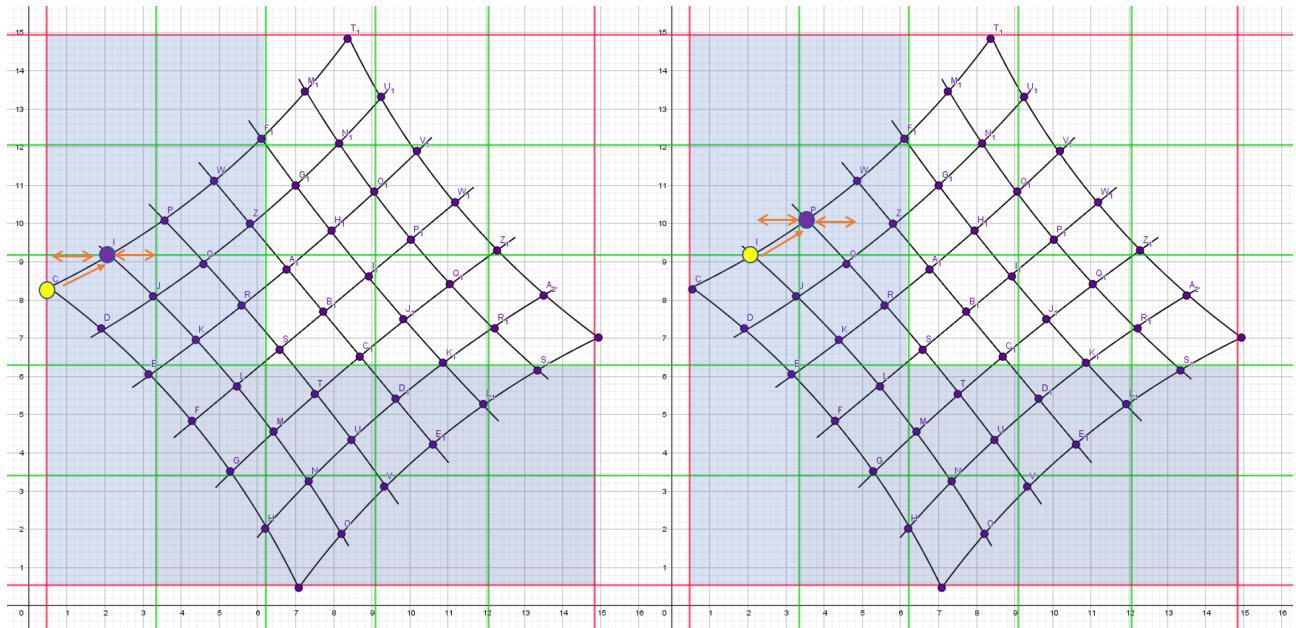


Abbildung 8.11: Klassendiagramm

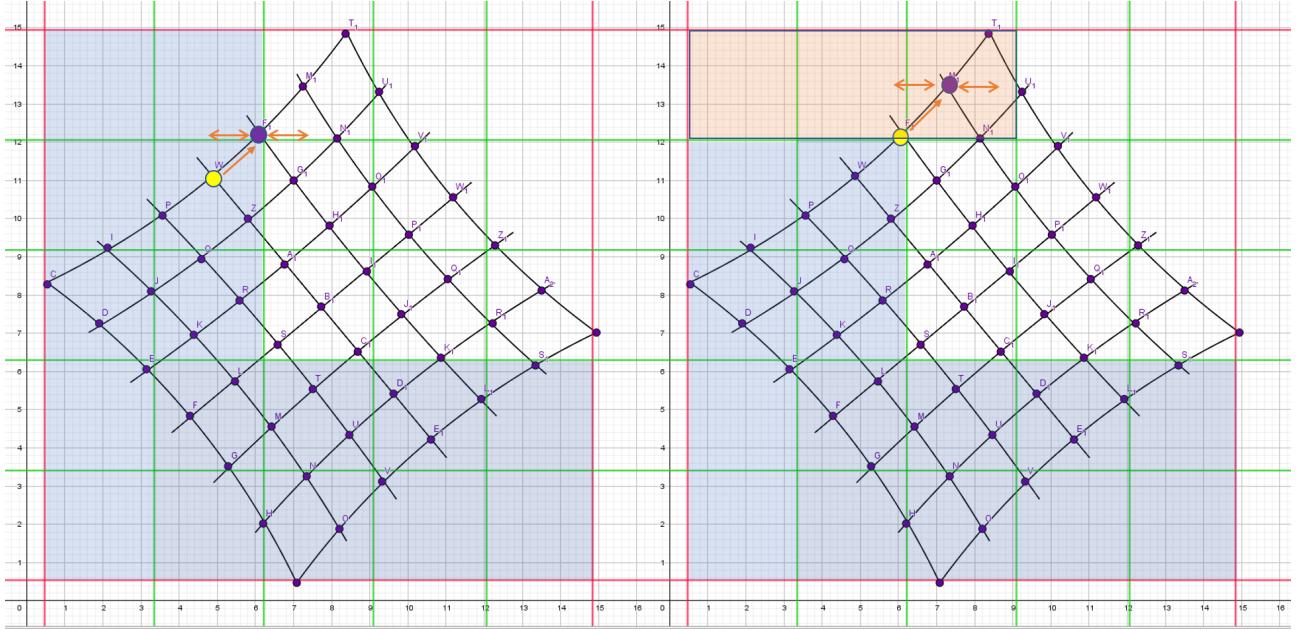


Abbildung 8.12: Klassendiagramm

## 8.2 Beispiele

In den folgenden Beispielen sieht man jeweils das Originalbild und ein Bild welches die durch den Algorithmus sortierten Punkte farbig ausgibt. Die grünen eingefärbten Punkte sind in den Bildern des Algorithmus die Nachbarn, welche sich in i-Richtung an der dritten Stelle befinden. Natürlich können auch andere Reihen oder auch einzelne Punkte abgefragt werden.

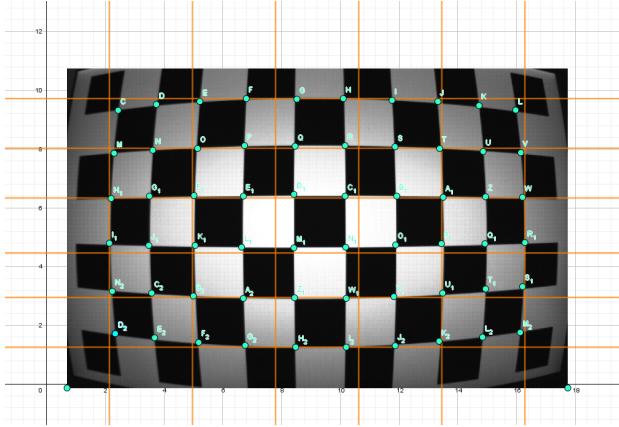


Abbildung 8.13: Bild eines Tonnenförmig verzeichneten Schachbretts

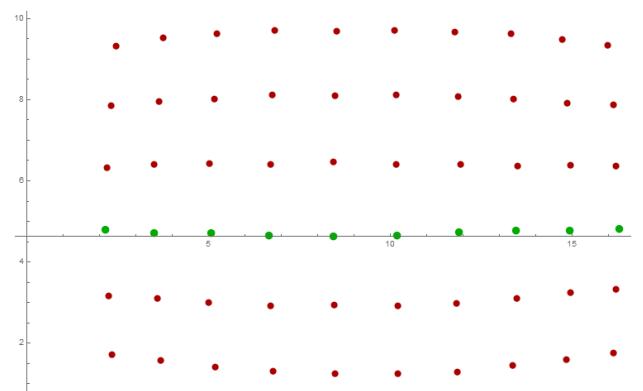


Abbildung 8.14: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

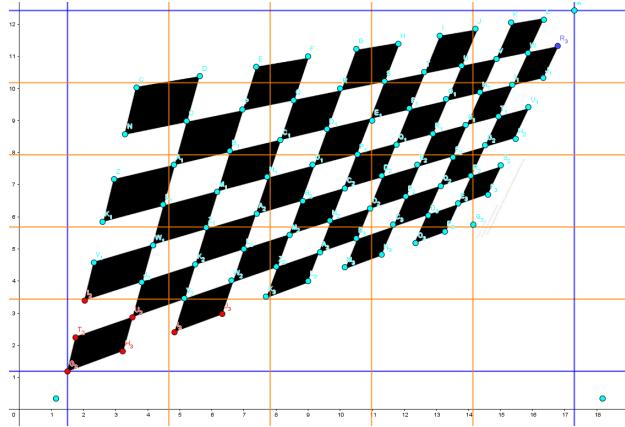


Abbildung 8.15: Bild eines perspektivisch verzerrtem Schachbretts

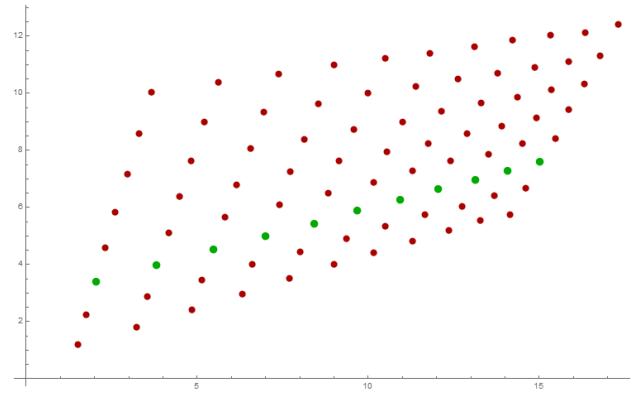


Abbildung 8.16: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

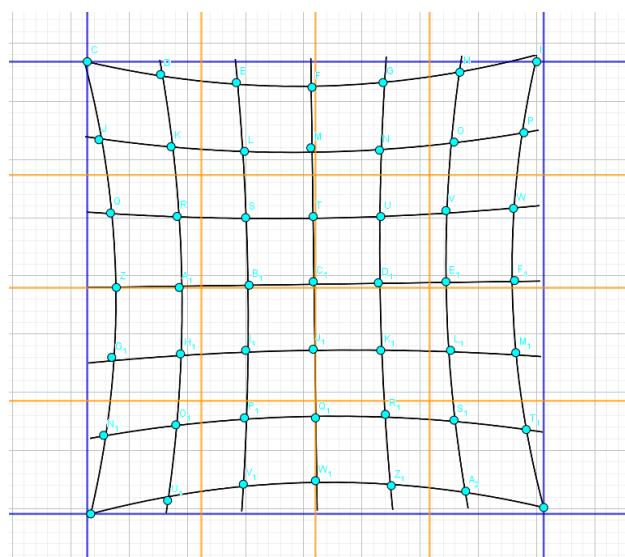


Abbildung 8.17: Bild eines Kissenförmig verzeichnetem Schachbretts

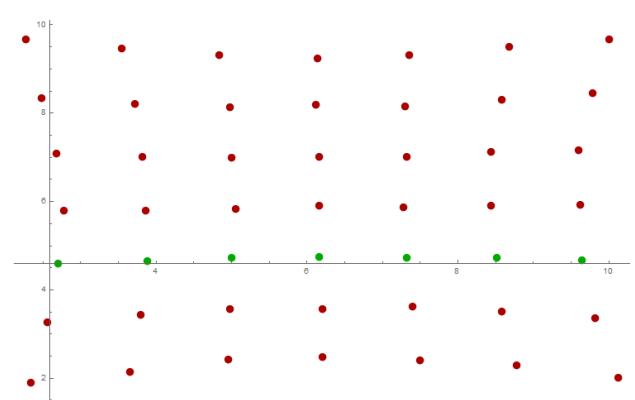


Abbildung 8.18: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

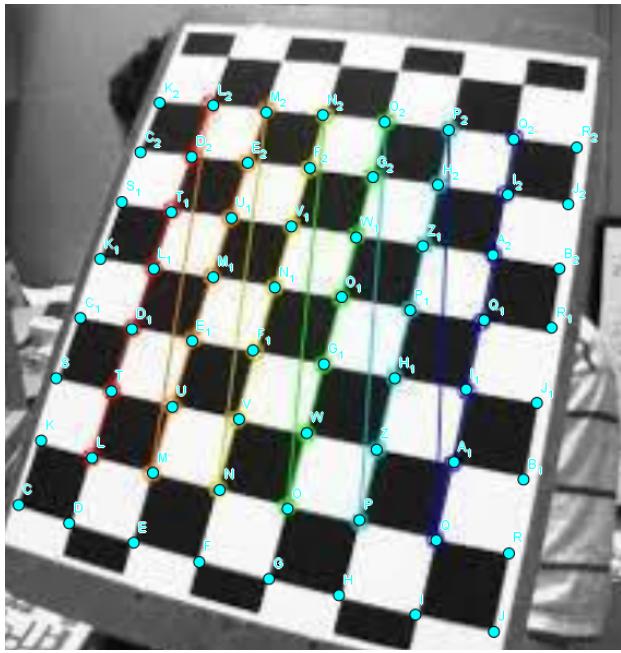


Abbildung 8.19: Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts(GRFIK AUSTAUSCHEN BILD IS KACKE)

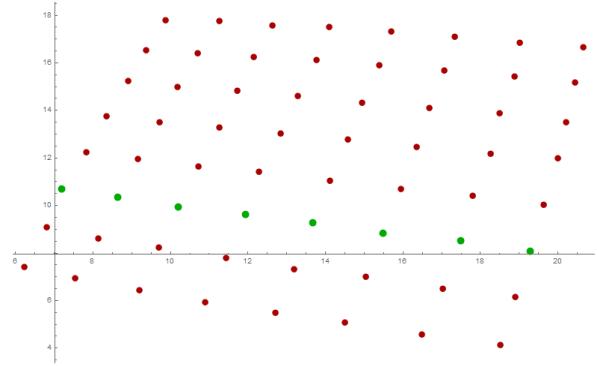


Abbildung 8.20: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

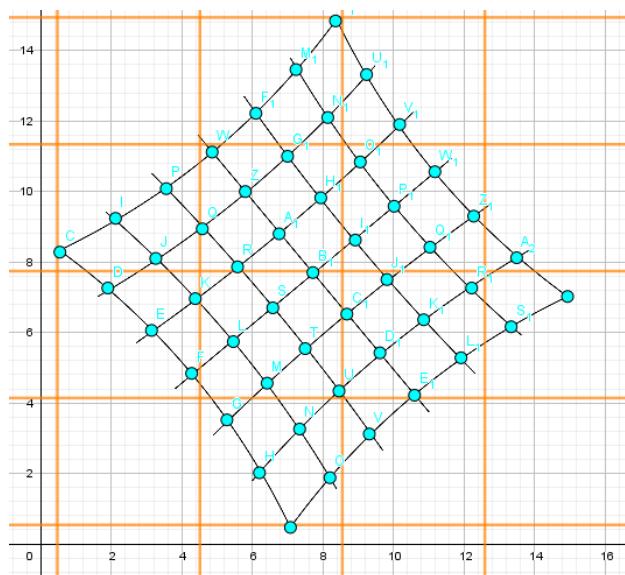


Abbildung 8.21: Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts

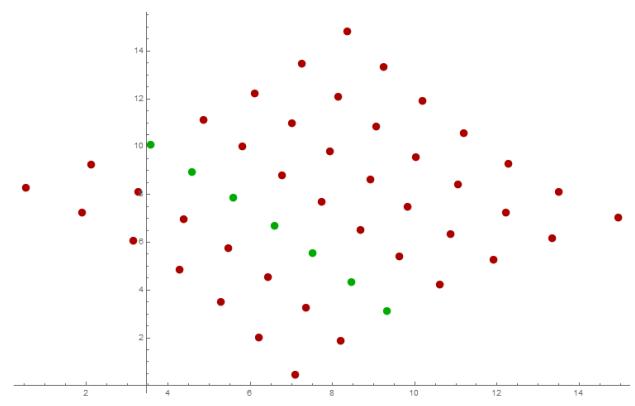


Abbildung 8.22: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

## **9 Fazit - Conclusion**

## **10 Alternativen**

## **11 Abkürzungsverzeichnis - List of Abbreviations**

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematik eines abbildenden Systems. Ein Punkt $M$ im Weltkoordinatensystem $O$ wird durch eine Kamera $C$ aufgenommen. Diese Aufnahme wird durch eine Projektion, die als Verbindungsgerade von $M$ zu $C$ zu sehen ist dargestellt ist und $M$ auf $m$ abbildet, beschrieben. . . . .	5
2.2	Die Abbildung zeigt einen Querschnitt des beschriebenen Lochkameramodells. Zu sehen ist das Projektionszentrum $C$ der Kamera. $C$ ist gleichzeitig das Kamerazentrum und bildet den Ursprung für das Kamerakoordinatensystem. $\zeta$ beschreibt den Abstand des Projektionszentrums zur Bildebene. Die Hauptachse beschreibt die Blickrichtung der Kamera. Der Punkt an dem die Hauptachse die Bildebene schneidet wird Hauptpunkt genannt und ist gleichzeitig der Ursprung für das Bildebenenkoordinatensystem. Der Bildpunkt $m$ entsteht am Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von $C$ und $M$ mit der Bildebene $I$ . . . . .	6
2.3	Ein Weltkoordinatensystem $(O, \delta)$ mit $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$ wird zu einem dazu verschobenen und rotierten Kamerakoordinatensystem $(C, \beta)$ mit $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$ transformiert	7
2.4	Das Schaubild zeigt die einzelnen Koordinatensysteme in einem Lochkameramodell. Das Weltkoordinatensystem $(O, \delta)$ mit $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3)$ , das Kamerakoordinatensystem $(C, \beta)$ mit $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ , das Bildebenenkoordinatensystem $(I, \tau)$ mit $\tau = (\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ und das Sensorkoordinatensystem $(S, \sigma)$ mit $\sigma = (\hat{u}, \hat{v})$ . . . . .	9
3.1	In der Abbildung sind die beiden Kameras $C$ und $C'$ mit ihren Bildebenen $I$ und $I'$ zu sehen. Ein Objektpunkt $M_\delta$ bezüglich eines Weltkoordinatensystems $(O, \delta)$ befindet sich auf der Ebene $\pi$ , welche durch die Achsen $\hat{d}_1$ und $\hat{d}_2$ aufgespannt wird. $M_\delta$ wird auf $I$ und $I'$ projiziert. Es entstehen die Bildpunkte $m_\tau$ und $m'_\tau$ . . . . .	13
3.2	Auf der Geraden durch $C$ und $\vec{m}_\tau$ , befinden sich alle möglichen Punkte für $m_\beta$ . $m_\beta$ wird auf Grund seiner Unbestimmtheit als $\gamma m_\tau$ bezeichnet . . . . .	13
3.3	$C$ und $C'$ sind die Projektionszentren zweier Kameras. Beide Kameras besitzen jeweils eine Bildebene. Die Basislinie verbindet die Projektionszentren der Kameras. Die Punkte an welchen die Basislinie die Bildebenen schneidet, werden als Epipole $e$ und $e'$ bezeichnet. Durch einen Epipol verlaufen alle Epipolarlinien des Bildes. $M_\delta$ ist der Objektpunkt im 3D-Raum und $m_\tau$ und $m'_{\tau'}$ sind die jeweiligen Abbildungen dieses Punktes auf den Bildebenen. Die Verbindungsvektoren zwischen $C, C'$ und $M_\delta$ bilden die sogenannte Epipolarebene[10, 11, 3, 1]. . . . .	15
3.4	Die Objektpunkte $M_1, M_2$ und $M_3$ werden in $I'$ als $m'_1, m'_2$ und $m'_3$ abgebildet, während sie in $I$ immer den selben Bildpunkt $m_1$ ergeben. . . . .	15
4.1	Ablaufdiagramm für das synthetische Beispiel . . . . .	21
4.2	In der Abbildung ist der vereinfachte Stereoaufbau in einer Top-Down-Ansicht zu sehen	22
4.3	Simulierte Abbildung des Quaders auf die Kamera $C$ in Grün und auf $C'$ in rot . . . . .	22
4.4	Abbildung der verschiedenen Kamerakoordinatensysteme, das Weltkoordinatensystem $O$ ist zum Kamerakoordinatensystem $C$ deckungsgleich und $C'$ verschoben und rotiert.	22
4.5	a) . . . . .	26
4.6	b) . . . . .	26
4.7	c) . . . . .	26
4.8	d) . . . . .	26
4.9	Die Abbildungen a, b, c und d veranschaulichen, welche Bilder aus den vier Lösungen entstehen. In den Abbildungen a und b kommt es zu einer Umkehrung der Basisline. In den Abbildungen c und d wird $C'$ um $180^\circ$ gedreht . . . . .	26

4.10	Optimale Triangulierung: Beide Geraden Treffen sich in einem Punkt im 3D-Raum . . . . .	27
4.11	. . . . .	28
4.12	. . . . .	28
4.13	Veranschaulichung der Skaleninvarianz und dessen Auswirkung auf die geometrische Form und Größe der Objekte . . . . .	29
4.14	. . . . .	29
4.15	. . . . .	29
4.16	Der rote Punkt stellt Die Postion von $C$ dar, der grüne steht für die Position von $C'$ relativ zu $C$ . Die blauen Punkte stellen den rekonstruierten Quader und den extern platzierten neunten Punkt da. Die Abbildungen entstand aus dem in <i>Mathematica</i> [22] implementierten Algorithmus. . . . .	29
5.1	Rechteckiger Bildsensor mit darauf sich befindendenden quadratischen Sensorelementen. Vergleiche [8] . . . . .	30
5.2	Bild a) zeigt die den Zusammenschluss mehrerer benachbarter Pixel zu einem neuen Pixel. Bild b) zeigt in gelb markiert, den aktiven lichtempfindlichen Bereich des Sensors, wenn sich das Seitenverhältnis geändert wird und nicht mehr der komplette Sensor genutzt wird. . . . .	31
5.3	$C$ und $C'$ haben die selbe Auflösung eingestellt . . . . .	32
5.4	$C$ und $C'$ haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt . . . . .	32
5.5	$C$ und $C'$ haben die selbe Auflösung eingestellt . . . . .	34
5.6	$C$ und $C'$ haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt. $C$ mit $K$ und $C'$ mit $K'_1$ . . .	34
5.7	$C$ mit $K$ und $C'$ mit $K'_2$ . . . . .	34
5.8	$C$ mit $K$ und $C'$ mit $K'_3$ . . . . .	34
5.9	Die Abbildung zeigt die rekonstruierte Szenen des synthetischen Beispiels mit $K'_3$ als intrinsische Parameter für $C'$ . . . . .	35
6.1	Ablaufdiagramm für die reelle Rekonstruktion . . . . .	36
6.2	Szenenaufbau: Die Canon 60D befindet sich in dieser Abbildung auf der linken Seite, die Canon 60 D auf der rechten. Auf dem Tisch zwischen den Kamerassen ist die in den Abbildungen 6.1 und 6.1 abgebildete Szene zu sehen. Beide Kamerassen sind zu Szene hin gedreht. . . . .	37
6.3	a . . . . .	38
6.4	b . . . . .	38
6.5	Epipolarlinien ohne <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 6D . . . . .	40
6.6	Epipolarlinien ohne <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 60D . . . . .	40
6.7	Die Abbildung zeigt, dass die Epipolarlinien auf der Aufnahme von $C$ , nach dem Erzwingen der Singularität in der normierten $\hat{F}$ , alle durch einen Epipol verlaufen . . . .	41
6.8	Die Abbildung zeigt, dass die Epipolarlinien auf der Aufnahme von $C'$ , nach dem Erzwingen der Singularität in der normierten $\hat{F}$ , alle durch einen Epipol verlaufen . . . .	41
6.9	Die Abbildung zeigt die Epipolarlinien in $C$ nachdem die Fundamentalmatrix $\bar{F}$ mit $F = T' \bar{F} T$ denormalisiert wurde . . . . .	41
6.10	Die Abbildung zeigt die Epipolarlinien in $C'$ nachdem die Fundamentalmatrix $\bar{F}$ mit $F = T' \bar{F} T$ denormalisiert wurde . . . . .	41
6.11	a) . . . . .	42
6.12	b) . . . . .	42
6.13	a) Die rückprojizierten Strahlen der ungenauen korrespondierenden Punkte $m_\sigma$ und $m'_{\sigma'}$ sind windschief zueinander und treffen sich nicht in einem Punkt $M_\delta$ im Raum. b) Die korrespondierenden Bildpunkte $m_\sigma$ und $m'_{\sigma'}$ erfüllen nicht den <i>Epipolar-Constraint</i> . Die Epipolarlinie $l' = Fm$ ist die korrespondierende Epipolarlinie zu $m_\sigma$ und $l = F^T m'$ ist die korrespondierende Epipolarlinie zu $m'_{\sigma'}$ . Da weder $m_\sigma$ noch $m'_{\sigma'}$ auf der Epipolarlinie zum jeweils korrespondierenden Punkt liegt, kommt es zu keinem Schnittpunkt der rückprojizierten Strahlen . . . . .	42

6.14 Die Abbildung zeigt die zwei korrespondierenden Epipolarlinien $\hat{l}$ und $\hat{l}'$ mit den gesuchten Punkten $\hat{m}_\sigma$ und $\hat{m}'_{\sigma'}$ . . . . .	43
6.15 Rekonstruierte Szene, unskaliert in Pixeleinheiten . . . . .	47
6.16 Rekonstruierte Szene, unskaliert, in Pixeleinheiten und in einem 2D-Plot angezeigt . . . . .	47
6.17 Zeigt die Die rekonstruierte Matrix $T'$ bei unveränderter Auflösung. Die Auflösungen von $C_\delta$ und $C'_\delta$ sind die selben. . . . .	49
6.18 Zeigt die rekonstruierte Matrix $T'$ wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[5 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	49
6.19 Zeigt die rekonstruierte Matrix $T'$ wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	49
6.20 Zeigt die rekonstruierte Matrix $T'$ wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1.2 : 2.3]$ skaliert wurde . . . . .	49
6.21 Rekonstruierte Szene, wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[5 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	50
6.22 Rekonstruierte Szene, wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	50
6.23 Rekonstruierte Szene, wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1.2 : 2.3]$ skaliert wurde . . . . .	51
 7.1 Beispiel eines rektifizierten Bildes. Quelle: [29] . . . . .	53
7.2 Beispiel einer einfachen Tiefenkarte eines Stereobildpaars nach der Rektifizierung. Quelle: [30] . . . . .	53
7.3 Aufnahmen zweier Kameras mit den selben Auflösungen, Kamera eins(Grün) und Kamera(rot) zwei gelten jeweils $\zeta = 1$ . . . . .	59
7.4 Epipole für Kamera eins und Kamera zwei vor der Rektifizierung . . . . .	59
7.5 Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen $H_p$ und $H'_p$ . Die Epipole beider Bilder sind nun im unendlichen. . . . .	60
7.6 Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen $H_r \cdot H_p$ und $H'_r \cdot H'_p$ . Die Epipolarlinien sind nun horizontal zueinander ausgerichtet . . . . .	62
7.7 Die Abbildung verdeutlicht noch mal Schematisch, wie sich die Punkte ausrichten sollen. Bild a) zeigt die durch die Rektifizierung verschobenen Bildkantenmittnen. Bild b= zeigt, wie sich die Bildkantenmittnen durch die Scherungstransformation wieder ausrichten sollen. . . . .	63
7.8 Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen $H_s \cdot H_r \cdot H_p$ und $H'_s \cdot H'_r \cdot H'_p$ . Die horizontale Verzerrung wurde reduziert. . . . .	64
7.9 In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut . . . . .	65
7.10 Aufnahmen zweier Kameras mit unterschiedlichen auflösungen, Kamera eins(Grün) besitzt für $\zeta$ den Wert 1 und für Kamera zwei(rot) gilt jeweils $\zeta_x = 1.2$ und $\zeta_y = 3.1$ . . . . .	65
7.11 Epipole für Kamera eins und Kamera zwei vor der Rektifizierung . . . . .	66
7.12 Nach dem die drei Homographien auf die Punkte angewandt sind die Eckpunkte des Quaders auf beiden Bilder auf den selben correspondierenden Epipolarlinien . . . . .	66
7.13 In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut . . . . .	66
7.14 In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut . . . . .	66
7.15 In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut . . . . .	67
7.16 In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut . . . . .	67
 8.1 Klassendiagramm . . . . .	69
8.2 Klassendiagramm . . . . .	69
8.3 Klassendiagramm . . . . .	70
8.4 Klassendiagramm . . . . .	70
8.5 Klassendiagramm . . . . .	70
8.6 . . . . .	71
8.7 . . . . .	71
8.8 . . . . .	71
8.9 . . . . .	71
8.10 Klassendiagramm . . . . .	72
8.11 Klassendiagramm . . . . .	72
8.12 Klassendiagramm . . . . .	73

8.13 Bild eines Tonnenförmig verzeichneten Schachbretts . . . . .	73
8.14 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	73
8.15 Bild eines perspektivisch verzerrtem Schachbretts . . . . .	74
8.16 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	74
8.17 Bild eines Kissenförmig verzeichnetem Schachbretts . . . . .	74
8.18 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	74
8.19 Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts(GRFIK AUSTAUSCHEN BILD IS KACKE) . . . . .	75
8.20 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	75
8.21 Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts . .	75
8.22 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	75

## **Tabellenverzeichnis**

# Literaturverzeichnis

- [1] Zhengyou Zhang Gang Xu. *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition: A Unified Approach*. Springer-Science and Business Media, 1996.
- [2] Lutz Pries. *Computer Vision, Einführung in die Verarbeitung und Analyse digitaler Bilder*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [3] Richard Hartley and Andrew Zisserman. *Multiple View Geometry in computer vision*. Cambridge, 2004, Second Edition.
- [4] Ferid Bajrmovic. *Self- Calibration of Multi- Camera Systems*. Logos Verlag Berlin GmbH, 2010.
- [5] Tomas Pajdla. *Elements of Geometry for Computer Vision*. "<http://people.ciirc.cvut.cz/pajdla/>", 2013, überarbeitet am 27.2.2017.
- [6] Christian Heipke. *Photogrammetrie und Fernerkundung*. 2017 Springer, 1. Auflage.
- [7] Ramalingam Tardif S.Gasparini J.Barreto R.Sturm, S. Camera models and fundamental concepts used in geometric computer vision. Mitsubishi Electric Research Laboratories, 2011.
- [8] Rolf Martin Ekbert Hering. *Photonik, Grundlagen, Technologien und Anwendung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [9] Dipl.-Ing. Martin Roser. *Modellbasierte und positionsgenaue Erkennung von Regentropfen in Bildfolgen zur Verbesserung von viedeoisierten Fahrerassistenzfunktionen*. 1986, 1994 Springer Basel AG, KIT Scientific Publishing.
- [10] Christoph Stiller Thao Dang, Christian Hoffmann. Continuous stereo self-calibration by camera parameter tracking.
- [11] Branislav Micusik. *Two-View Geometry of Omnidirectional Cameras*. Dissertation, Technische Universität Prag.
- [12] Zhengyou Zhang. *Epipolar Geometry*, pages 247–258. Springer US, Boston, MA, 2014.
- [13] Zhengyou Zhang. Determining the epipolar geometry and its uncertainty: A review. Received July 16, 1996; Accepted February 13, 1997.
- [14] K.A. Semendjajew I.N. Bronstein. *Taschenbuch der Mathematik*, volume 5. Auflage. First Published 1962.
- [15] Sascha jockel. *3-dimensionale Rekonstruktion einer Tischszene aus monokularen Handkamera-Bildsequenzen im Kontext automotiver Serviceroboter*. Dissertation, Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften, Universität Hamburg.
- [16] Richard I. Hartley. In defence of the 8-point algorithm. GE-Corporate Research and Development, Schenectady, NY, 12309.
- [17] Herbert Bay, Tinne Tuytelaars, and Luc Van Gool. Surf: Speeded up robust features. In Aleš Leonardis, Horst Bischof, and Axel Pinz, editors, *Computer Vision – ECCV 2006*, pages 404–417, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Berlin Heidelberg.
- [18] Norbert Köckler Hans Rudolf Schwarz. *Numerische Mathematik*. 2011, Springer Verlag, 8. Auflage.

- [19] Daniel Scholz. *Numerik interaktiv, Grundlagen verstehen, Modelle erforschen und Verfahren anwenden mit taramath*. 2016, Springer Verlag.
- [20] LongQuan. *Image Based Modeling*, volume 1. Auflage. Springer US, 2010.
- [21] Bernd KITT. *Effiziente Schätzung dichter Bewegungsvektorfelder*, volume Band 027. KIT Scientific Publishing, 2013.
- [22] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 11.1.1. Champaign, IL, 2018.
- [23] Olaf Dössel. *Bildgebende Verfahren in der Medizin*, volume 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
- [24] Emmanuel Habets Nicolas Paparoditis Xiaozhi Qu, Bahman Soheilian. Evaluation of sift and surf for vision based localization. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Volume XLI-B3, 2016.
- [25] Antin van den Hengel Darren Gawey Wojciech Chojnacki, Michael J. Brooks. Revisiting hartley's normalized eight-point-algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Volume: 25, 2003.
- [26] Jarosław Bylina Anna Pyzara, Beata Bylina. The influence of a matrix condition number on iterative methods convergence. *Proceedings of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems*, pp. 459–464, 2011.
- [27] James Demmel Dinesh Manocha. Algorithms for intersecting parametric and algebraic curves 1. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, Volume 13 Issue 1, Pages 73-100, 1994.
- [28] MathWorks. Mathworks documentation, rectify stereo images.
- [29] Charles Loop and Zhengyou Zhang. Computing rectifying homographies for stereo vision. *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol.1, pages 125–131, June 23-25, 1999. Fort Collins, Colorado, USA, 1999 Errors corrected on June 6, 2001.
- [30] Carlos VILLAGRÁ ARNEDOr Antonio Javier GALLEGÓ SÁNCHEZ, Rafael MOLINA CARMONA. *Scene reconstruction and geometrical rectification from stereo images*. Januar 2005, uploaded by Antonio Javier Gallego Sánchez on 21 May 2014, ResearchGate.
- [31] Luca Irsara Andrea Fusiello. Euclidean epipolar rectification of uncalibrated images. *Eurac researc*, IT.
- [32] Richard I. Hartley. Euclidean reconstruction from uncalibrated views. G.E. CRD, Schenectady, NY, 12301.
- [33] Dongqing Li, editor. *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*, pages 999–999. Springer US, Boston, MA, 2008.
- [34] Jürgen Adamy Christian Voigt. *Formelsammlung der Matrizenrechnung*. Oldenburg Verlag München Wien, 2007.
- [35] William T. Vetterling Brian P. Flannery William H. Press, Saul A. Teukolsky. *Numerical Recipes in Fortran 77 The Art Of Scientific Computing*. Copyright Numerical Recipes Software 1986, 1992, 1997 All Rights Reserved., Reprinted with corrections 1997, Volume 1 of Fortran Numerical Recipes.
- [36] James Demmel Dinesh Manocha. Algorithms for interesting parametric and algebraic curves 1: Simple intersections. *ACM Transactions of Graphics*:73–100, 1994.