

---

# **Szenenkonstruktion aus stereoskopischen Bildquellen gleicher und verschiedener Auflösungen**

---

Erarbeitet von Studenten und Studentinnen  
im Rahmen der Abschlussarbeit  
**Masterarbeit der Fakultät**

Studiengang Semester Max Mustermann 222222

Betreut von: Prof. Dr. Mustermann

Disclaim here



Fakultät XYZ der Hochschule Furtwangen  
Sommersemester - Wintersemester 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Kameramodel</b>	<b>7</b>
2.1 Lochkameramodell . . . . .	7
2.2 Koordinatentransformation . . . . .	9
2.3 Aufname mit einer willkürlichen Kameraorientierung . . . . .	13
<b>3 Homographien</b>	<b>15</b>
3.1 Abbildungsunterschiede bei verschobenen Rotationsachsen . . . . .	17
3.2 Berechnung der Homographiematrix aus Bildebenenkoordinaten . . . . .	21
<b>4 Epipolar Geometrie</b>	<b>24</b>
4.1 Geometrische Erläuterung der Fundamentalmatrix und der Essentiellen Matrix . . . . .	26
<b>5 Virtuelle Rekonstruktion</b>	<b>30</b>
5.1 Vorgehen: Projektion eines Quaders in zwei verschieden transformierte Kameras . . . . .	31
5.2 Berechnung der Projektionsmatrizen . . . . .	32
5.3 Transformation der Objektpunkte von Weltkoordinaten in Kamerakoordinaten . . . . .	33
5.4 Umrechnung von Bildebenenkoordinaten in Sensorkoordinaten . . . . .	34
5.5 Fundamentalmatrix und der eight-Point-Algorithmus . . . . .	35
5.6 Epipole und Epipolargeraden . . . . .	36
5.6.1 Geometrische Konstruktion der Epipole und der Epipolarlinien . . . . .	37
5.7 Essentiellen Matrix . . . . .	38
5.8 Exterenen Kameraparameter mit essentieller Matrix . . . . .	39
5.9 Szenenrekonstruktion durch Triangulation . . . . .	41
5.10 Rektifizierung . . . . .	44
5.10.1 Projektive Transformation . . . . .	48
5.10.2 Ähnlichkeitstransformation . . . . .	53
5.10.3 Scherungstransformation . . . . .	55
<b>6 Auswirkungen von unterschiedlichen Kameraauflösungen</b>	<b>59</b>
6.1 Abbildungsunterschiede . . . . .	59
6.2 Auswirkungen auf die Epipolargeometrie . . . . .	61
6.3 Minimalbeispiel mit unterschiedlichen Kameraauflösungen . . . . .	62
<b>7 Relle Rekonstruktion</b>	<b>66</b>
7.1 Arbeitsprozess . . . . .	66
7.2 Normalized-eight-Point-Algorithm . . . . .	68
7.2.1 Singularity-Constraint der Fundamentalmatrix . . . . .	70
7.2.2 Singularity- Constraint der essentiellen Matrix . . . . .	72
7.3 Szenenrekonstruktion . . . . .	72
7.3.1 Minimieren der Kostenfunktion durch Sampson-approximation . . . . .	73
<b>8 3D-Stereokalibrierung und Szenenrekonstruktion mit reellen Daten und Kameras unterschiedlicher Auflösung</b>	<b>79</b>
8.1 Ergebnisse einer Stereoanalyse mit Kameras unterschiedlicher Auflösung . . . . .	79

<b>9 Punktesortierung in Schachbrettmustern</b>	<b>83</b>
9.1 Algorithmus zur Punktesortierung in verzeichneten Schachbrettbildern . . . . .	83
9.1.1 Vorläufiges Klassendiagramm . . . . .	84
9.1.2 Beispiele . . . . .	88
<b>10 Appendix</b>	<b>91</b>
10.1 Homographien bei Drehungen um ein Projektionszentrum . . . . .	91
10.2 Realbeispiel der Homographieberechnung bei Drehung um einen Drehpunkt . . . . .	98
<b>11 Fazit - Conclusion</b>	<b>102</b>
<b>12 Nächste Schritte - next steps</b>	<b>103</b>
<b>13 Protocol - 10.11.2015</b>	<b>104</b>
<b>14 Abkürzungsverzeichnis - List of Abbreviations</b>	<b>105</b>

Over the last decades computer vision scientist have taken a new approach to vision. They build different computational models of what shoud be computed, what can really be computed, and how these computations can be realized by computer programs, and they use computers to test their models are correct. The result is a better understandung of vision from a different point of view, and at the same time some working artificial vision systems are built that can be used in idustry, medicine, etc. The knowledge obtained on neirophysiology and psychophysics have given hints to and influenced computer vision scientists, helping find solutions to the design of specific algorithms and implementation of vision systems. On the other Hand coputational vision has also given nerophysologists and psychophysicsist a mathematical framework for modeling vision processes.[1]

# 1 Einleitung

Die Computer Vision ist ein Fachbereich der Computer Science mit dem Fokus auf der Entwicklung von künstlicher Intelligenz, die ein visuelles Verständnis ihrer Umgebung besitzen. Folglich wird in der Computer Vision der Weg von visuellen Eindrücken oder Bildern aus der Realität in den Rechner beschrieben [2]. Der Mensch ist mit der Fähigkeit ausgestattet, gesehene Bilder zu verarbeiten und kann die ihn umgebene Welt verstehen. Maschinen, die eine ähnliche Fähigkeit besitzen, wären somit ebenfalls in der Lage Entscheidungen auf Grund von visuellen Eindrücken zu fällen. Das entwickeln solcher Maschinen und den damit verbundenen Grundprinzipien und Programme sind die Forschungsmittelpunkte von aktuellen Anwendungsbereichen wie dem Autonomen Fahren, Motion-Caturing, Bewegungserkennungen oder Service Robotern.

In dieser Masterarbeit wurde ein Algorithmus zur Rekonstruktion einer Szene aus stereoskopischen Bildquellen entwickelt, welcher auch die Möglichkeit von unterschiedlichen Bildauflösungen zwischen den Bildquellen in Betracht zieht. Das typische Verfahren einer Stereorekonstruktion basiert auf den Grundbausteinen, Bildaufnahme und Bildanalyse[2]. In der Bildaufnahme wird eine Szene oder ein Objekt mit Hilfe von Kameras, Sensoren oder Lasern aufgenommen und als digitale zweidimensionale Bilder an den Computer weitergegeben. In der Bildanalyse, werden die aufgenommenen Bilder ausgewertet um so die dreidimensionale Szene rekonstruieren zu können. Für die Analyse ist es essentiell die Kameraparameter, wie Position und Auflösung, zu kennen. Sind diese jedoch nicht bekannt, können die Bildquellen genutzt werden um die Kameraparameter abzuschätzen. Eine solche Abschätzung wird als wird als Kamerakalibrierung[3, 4, 5, 1]. Die Position und Rotation einer Kamera im Raum werden als die extrinsischen Kameraparameter bezeichnet, Parameter wie die Auflösung oder Brennweiten, werden als die intrinsischen Kameraparameter bezeichnet[3, 4]. Im Zuge dieser Arbeit ist ein Algorithmus entstanden, welcher unter anderem im Stande ist die Kameras gleicher und unterschiedlicher Auflösung zu kalibrieren eine 3D-Szenenrekonstruktion durchzuführen. Der vollständige Algorithmus wurde mithilfe eines virtuellen Beispiels verifiziert und auf eine reelle Szenenaufnahme angewandt. Mit dem Entwickeln von Algorithmen für Computer Vision Applikationen, sieht man sich mit immer wieder mit komplizierten Aufgaben und Herausforderungen konfrontiert. Bei der Aufnahme von Bildern, kann es immer wieder zu unvorhersehbaren Bildfehlern wie beispielsweise Rauschen oder Verzerrungen durch die Kameralinse kommen, was auch nicht oft zum Verlust von Referenzdaten führt. Im Kapitel Relle Rekonstruktion wird aufgeführt, wie mit solchen Fehlern umgegangen werden kann.

In der virtuellen Rekonstruktion wird zuerst eine 3D Szene in zwei voneinander unterschiedlich positionierten, simulierten Kameras projiziert um virtuelle Bilddaten zu generieren. Anhand dieser 2D-Bilddaten wird die Kamerakalibrierung getestet. In der virtuellen Rekonstruktion, werden die Werte für Auflösung und Brennweite, welche als intrinsische Parameter bezeichnet werden, selbst gesetzt. Im Test des Algorithmus mir reellen Bilddaten, wird für dessen Schätzung auf ein bereits existierendes Programm zurückgegriffen. Die intrinsischen Parameter werden mit dem hier entwickelten Algorithmus für die Schätzung der Positionen und Orientierungen der Kameras, die als extrinsische Parameter bezeichnet werden, kombiniert um die Kameras anhand der virtuellen Daten zu kalibrieren. Die durch die Schätzung erhaltenen Kameraparameter können im virtuellen Beispiel so einfach mit den zuvor definierten Parametern verglichen werden, um den Algorithmus zu verifizieren. Diese Kameraparameter werden dann entwickelten Rekonstruktionsalgorithmus dazu verwendet, in die ursprüngliche 3D-Szene wieder herzustellen und die Funktionsweise der Rekonstruktion zu analysieren.

Die Kapitel 1 bis 5 umfassen die theoretischen mathematischen Hintergründe, welche für das Verständnis der implementierten Kalibrierungs- und Rekonstruktionsalgorithmen vorhanden sein müssen. Kapitel 6 befasst sich dann umfassend mit dem für die virtuelle Rekonstruktion entwickelten Algorithmus

für die Kamerakalibrierung und Szenenrekonstruktion. Kapitel 7 befasst sich dann mit der Kalibrierung und Rekonstruktion, wenn die virtuellen Kameras unterschiedliche Auflösungen aufweisen. In Kapitel 8 wird der entwickelte Algorithmus auf reale Bilddaten angewandt. In Kapitel 9 werden die Auflösungen der realen stereoskopischen Bilder künstlich verändert und die Ergebnisse verifiziert. Kapitel 10 beschreibt einen Algorithmus zur Sortierung von zuvor detektierten Eckpunkten eines Schachbretts, welcher im Zuge der Korrespondenzanalyse von Bildpunkten in Stereoskopischen Aufnahmen entstanden ist.

## 2 Kameramodel

Um eine Szenenrekonstruktionalgorithmus zu verstehen, werden in diesem Abschnitt grundlegende Bedingungen eingeführt um die Bildaufnahme mathematisch zu beschreiben. Ein Abbildendes System besteht aus einem Objekt  $M$ , einer Kamera  $C$  und einer Bildebene  $I$  wie in Abbildung 2.1 dargestellt.

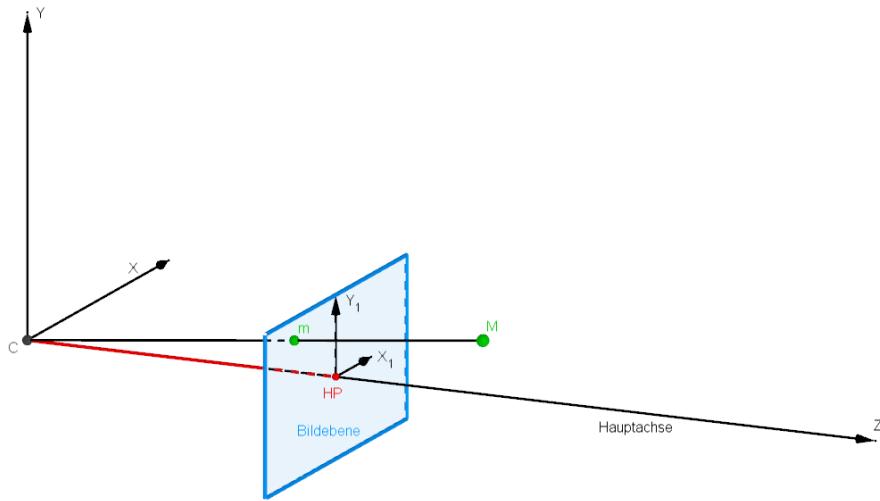


Abbildung 2.1: Schematik eines Abbildenden System. Eine Punkt  $M$  im Weltkoordinatensystem wird durch eine Kamera  $C$  aufgenommen. Diese Aufnahme wird durch eine Projektion, die als Verbindungslinie von  $M$  zu  $C$  dargestellt ist und  $M$  auf  $m$  abbildet, beschrieben.

Ein Punkt  $M$  in einem dreidimensionalen Weltkoordinatensystem wird mit Hilfe der Kamera, die in einem eigenen dreidimensionalen Kamerakoordinatensystem beschrieben wird, auf die Bildebene  $I$  projiziert, welches durch ein zweidimensionales Bildkoordinatensystem beschrieben ist. Der projizierte Punkt  $m$  kann mit einem Sensor aufgenommen und abgespeichert werden.

Im folgenden wird zuerst ein Kameramodel eingeführt um die Projektion auf die Bildebene zu beschreiben. Daraufhin werden Koordinatentransformationen eingeführt um abschließend die Aufnahme eines Punktes mit einer willkürlichen Kameraorientierung zu berechnen.

### 2.1 Lochkameramodell

Mit Hilfe des Lochkameramodells wird die Abbildung eines Objektes auf die Bildebene beschrieben. Das Modell beruht ausschließlich auf der geometrischen Optik und vernachlässigt physikalische Effekte wie Beugung oder die Auswirkung der Linse[8]. Das Lochkameramodell besteht aus einem Projektionszentrum  $C$ .  $C$  beschreibt gleichzeitig die Lage des Kamerazentrums und bildet den Ursprung des Kamerakoordinatensystems.[7, 3]. Die Blickrichtung der Kamera wird als Hauptachse bezeichnet. Die Hauptachse ist auf eine Bildebene gerichtet. Der Schnittpunkt der Hauptachse mit der Bildebene wird Hauptpunkt  $HP$  genannt. Der Hauptpunkt bildet den Ursprung des Bildebenenkoordinatensystems. Der Abstand vom Projektionszentrum zum Hauptpunkt wird als Brennweite  $\zeta$  beschrieben[3, 7]. Der Bildpunkt  $m$  entsteht am Schnittpunkt der Verbindungsgerade von  $C$  und  $M$  mit der der Bildebene  $I$ .

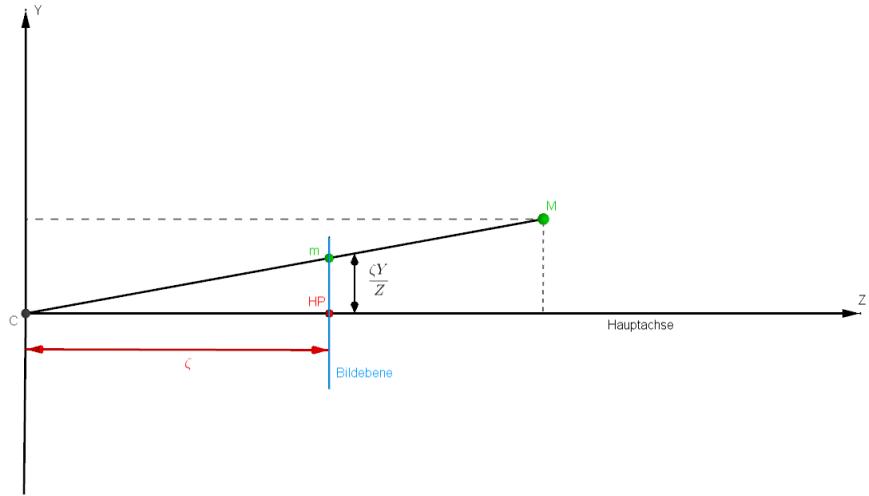


Abbildung 2.2: Lochkameramodell [9]

Die Projektion eines dreidimensionalen Punktes auf eine zweidimensionale Bildebene, wird durch eine  $3 \times 3$  Kameramatrix  $K$  beschrieben. Die Kameramatrix beinhaltet alle Informationen über die intrinsischen Kameraparameter einer Kamera.  $\zeta$  ist ein intrinsischer Kameraparameter. Mit  $\zeta$  kann ein dreidimensionaler Punkt  $M = [X \ Y \ Z]$  in Kamerakoordinaten in einen Punkt  $m$  in Bildebenenkoordinaten projiziert werden.

$$K \cdot M = \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta X \\ \zeta Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \zeta \frac{X}{Z} \\ \zeta \frac{Y}{Z} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Der Bildpunkt auf der Bildebene ist nur eine Vorstufe zum richtigen Bild. Die Bildpunkte auf der Bildebene werden im Sensor der Kamera gespeichert. Der Sensor wird durch die Bildebene dargestellt. Der Sensor wird in einem eigenen zweidimensionalen Sensorkoordinatensystem beschrieben, dessen Ursprung sich in einer Ecke der Bildebene befindet. Ein Sensor besteht aus einer Ansammlung von Pixeln. Pixel sind die kleinsten Bausteine eines Bildes. Die geometrische Form eines Pixels kann sowohl quadratisch als auch rechteckig oder die Form eines Parallelogramms haben. Das Sensorkoordinatensystem passt seine Achsen der geometrischen Form eines Pixels an.[3, 7]. Um einen Punkt  $M$  in auf den Sensor zu projizieren und den Bildpunkt dann in Sensorkoordinaten zu beschreiben, muss die Kameramatrix um weitere intrinsische Parameter erweitert werden.

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Gleichung 2.2 beschreibt die erweiterte Kameramatrix  $K$ . Der Parameter  $\zeta$ , welcher zuvor für die Brennweite stand, wird in die Werte  $\zeta_x$  und  $\zeta_y$  unterteilt. Anstelle der Brennweite, beschreiben  $\zeta_x$  und  $\zeta_y$  den Abstand des Projektionszentrums zu den Kanten eines Pixels. Abbildung 2.3 zeigt schematisch, dass  $\zeta_x$  den horizontalen Abstand und  $\zeta_y$  den vertikalen Abstand beschreibt[3].

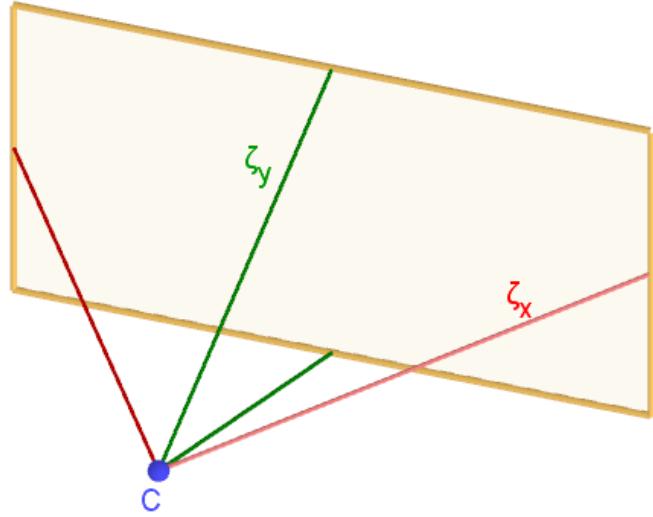


Abbildung 2.3:  $\zeta_x$  und  $\zeta_y$  beschreiben den Abstand des Kamerazentrums zu den jeweiligen Pixelkanten

Sind die Pixel quadratisch so sind  $\zeta_x$  und  $\zeta_y$  gleich. Sind die Pixel nicht quadratisch, wird  $\zeta_x$  und  $\zeta_y$  um die Werte  $k_x$  und  $k_y$  skaliert[3].

$$\alpha_x = \zeta_x \cdot m_x$$

$$\alpha_y = \zeta_y \cdot m_y$$

Die Matrixeinträge  $p_x$  und  $p_y$  beschreiben die Position des Hauptpunkts  $HP$  bezüglich des Sensorkoordinatensystems.  $p_x$  und  $p_y$  müssen bei nicht-quadratischen Pixel auch um die Faktoren  $k_x$  und  $k_y$  skaliert werden[3].

$$x_0 = p_x \cdot m_x \tag{2.3}$$

$$x_0 = p_y \cdot m_y \tag{2.4}$$

$s$  steht für den Schieflagefaktor. Trifft die Hauptachse der Kamera orthogonal auf den Bildsensor so ist  $s = 0$ .  $s$  ändert seinen Wert zu  $s \neq 0$ , wenn die Hauptachse nicht mehr orthogonal auf den Bildsensor auftrifft[3].

## 2.2 Koordinatentransformation

Um ein Punkt von einem übergeordneten Weltkoordinatensystem in ein bestimmtes zum Weltkoordinatensystem verdrehtes Kamerakoordinatensystem zu überführen ist eine Transformation notwendig. Im folgenden wird der mathematische Weg einer Transformation eines Weltkoordinatensystems  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$  in ein Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta) = \beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$  beschrieben.

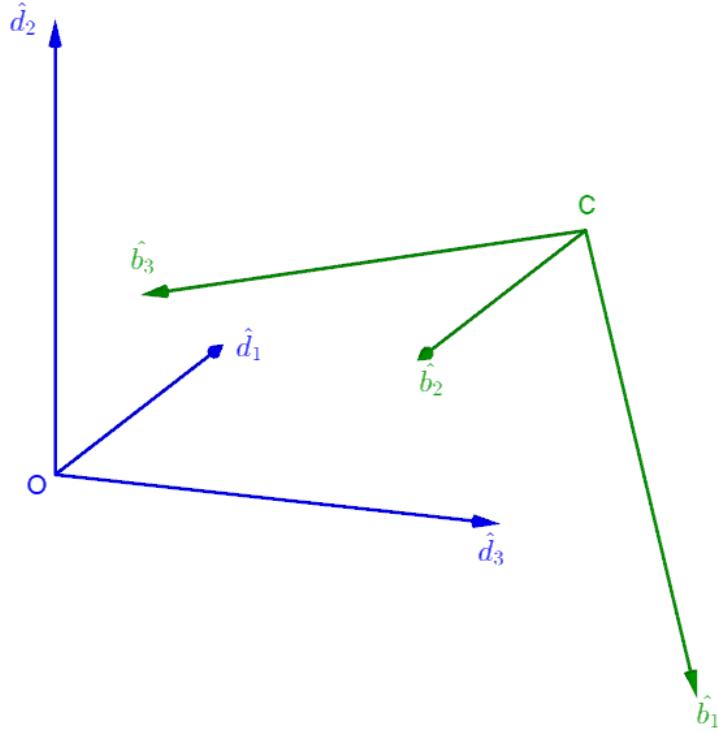


Abbildung 2.4: Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$  und Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$

Zunächst wird eine Koordinatisierung von Punkten im Weltkoordinatensystem vorgenommen. Ein Punkt  $P_\delta$  bezüglich des Weltkoordinatensystems wird dann wie folgt beschrieben.

$$P_\delta = O + p_{1\delta}\hat{d}_1 + p_{2\delta}\hat{d}_2 + p_{3\delta}\hat{d}_3 \quad (2.5)$$

$$\rightsquigarrow P_\delta = (p_{1\delta}, p_{2\delta}, p_{3\delta})^T = \begin{pmatrix} p_{1\delta} \\ p_{2\delta} \\ p_{3\delta} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Um das Koordinatentupel in einem projektiven Raum darstellen zu können, wird es projektiv erweitert. Die Entstehenden projektiv erweiterten Koordinaten werden als homogene Koordinaten bezeichnet. Ein Punkt  $P_\delta$  bezüglich des Weltkoordinatensystems wird um eine vierte homogene Komponente erweitert. Diese kann einen Wert zwischen 0 und 1 annehmen. Nimmt die Komponente den Wert 0 an, so handelt es sich um einen Fernpunkt, sprich der Punkt liegt im unendlichen.

$$P_\delta = \begin{bmatrix} p_{1\delta} \\ p_{2\delta} \\ p_{3\delta} \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ k \begin{bmatrix} p_{1\delta} \\ p_{2\delta} \\ p_{3\delta} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid k \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda p_{1\delta} \\ \lambda p_{2\delta} \\ \lambda p_{3\delta} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1\delta} \\ p_{2\delta} \\ p_{3\delta} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ für } \lambda \neq 0 \quad (2.8)$$

Ein Punkt  $P_\beta$  bezüglich des Kamerakoordinatensystem wird im Vergleich wie folgt beschrieben.

$$P_\beta = C + p_{1\beta}\hat{b}_1 + p_{2\beta}\hat{b}_2 + p_{3\beta}\hat{b}_3 \quad (2.9)$$

$$P_\beta = \begin{pmatrix} p_{1\beta} \\ p_{2\beta} \\ p_{3\beta} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Zwischen den beiden Koordinatensystemen  $(O, \delta)$  und  $(C, \beta)$  werden die folgenden Beziehungsgleichungen aufgestellt.

$$C_\beta = O_\delta + C_{\beta,1}\hat{d}_1 + C_{\beta,2}\hat{d}_2 + C_{\beta,3}\hat{d}_3 \quad (2.11)$$

$$\hat{b}_1 = b_{11}\hat{d}_1 + b_{12}\hat{d}_2 + b_{13}\hat{d}_3 \quad (2.12)$$

$$\hat{b}_2 = b_{21}\hat{d}_1 + b_{22}\hat{d}_2 + b_{23}\hat{d}_3 \quad (2.13)$$

$$\hat{b}_3 = b_{31}\hat{d}_1 + b_{32}\hat{d}_2 + b_{33}\hat{d}_3 \quad (2.14)$$

Diese Beziehungsgleichungen werden in Gleichung 2.5 eingesetzt.

$$\begin{aligned} P_\delta = & O + (C_{\beta,1} + p_{1\beta}b_{11} + p_{2\beta}b_{21} + p_{3\beta}b_{31}) \cdot \hat{d}_1 \\ & + (C_{\beta,2} + p_{1\beta}b_{12} + p_{2\beta}b_{22} + p_{3\beta}b_{32}) \cdot \hat{d}_2 \\ & + (C_{\beta,3} + p_{1\beta}b_{13} + p_{2\beta}b_{23} + p_{3\beta}b_{33}) \cdot \hat{d}_3 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aus Gleichung 2.15 wird ein Gleichungssystem in der Form von Gleichung 2.16 aufgestellt und gelöst.

$$\begin{aligned} p_{1\delta} &= C_{\beta,1} + (C_{\beta,1} + p_{1\beta}b_{11} + p_{2\beta}b_{21} + p_{3\beta}b_{31}) \\ \rightsquigarrow p_{1\delta} - C_{\beta,1} &= (C_{\beta,1} + p_{1\beta}b_{11} + p_{2\beta}b_{21} + p_{3\beta}b_{31}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Wenn  $P_\beta$  gegeben ist, erhält man auf diese Weise direkt  $P_\delta$ . Wenn jedoch  $P_\delta$  gegeben ist, so muss das in Gleichung 2.17 aufgestellte lineare Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{1\beta} \\ p_{2\beta} \\ p_{3\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1\delta} - C_{\beta,1} \\ p_{2\delta} - C_{\beta,2} \\ p_{3\delta} - C_{\beta,3} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Wenn  $(C, \beta)$  ein kartesisches Koordinatensystem ist, so ist die entstehende koeffizientenmatrix  $D_\beta$  orthogonal und es gilt  $D_\beta^{-1} = D_\beta^T$ .

$$D_\beta^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} p_{1\beta} \\ p_{2\beta} \\ p_{3\beta} \end{pmatrix} = D_\beta^T \begin{pmatrix} p_{1\delta} - C_{\beta,1} \\ p_{2\delta} - C_{\beta,2} \\ p_{3\delta} - C_{\beta,3} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Handelt es sich um kein kartesisches Koordinatensystem, so muss lediglich die Inverse  $D_\beta^{-1}$  anstatt der Transponierten  $D_\beta^T$  gebildet und wie gehabt verfahren werden. Im folgenden wird noch einmal kompakt und in einer symbolischen Schreibweise die Transformation von Welt- in Kamerakoordinaten festgehalten. Einmal wird wie bereits angefangen mit Spaltenvektoren gearbeitet, das selbe Verfahren wird dann noch einmal mit Zeilenvektoren dargestellt. Beide Ansätze funktionieren nach dem selben Prinzip, der

einige Unterschied ist die Darstellung der Matrizen. Es ist jedoch gerade wenn man mit Programmen wie Beispielsweise *Matlab* arbeitet wichtig zu wissen welche Darstellung benutzt wird und worin sie sich unterscheiden. Auf diese weise passieren keine Fehler beim Interpretieren der späteren Resultate. *MatLab* arbeitet beispielsweise mit Spaltenvektoren, während im entstandenen Algorithmus dieser Arbeit mit Zeilenvektoren gearbeitet wurde. Zunächst wird also weiter mit Spaltenvektoren verfahren. Zur Erinnerung, es gilt, dass  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$  durch Rotation  $D$  aus  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$  entstanden ist. Der Ursprung des Kamerakoordinatensystems ist bezüglich des Ursprungs des Weltkoordinatensystems verschoben. Zur Rotation des Koordinatesystems muss also auch noch eine Tranlation des Ursprungs durchgeführt werden. Der Translationsvektor ist gleich den Koordinaten des Ursprungs des Kamerakoordinatensystem  $\vec{V} = C_\beta = (C_{\beta,1}, C_{\beta,2}, C_{\beta,3})^T$ . Die Transformationsmatrix welche aus der Rotation  $D$  und dem Translationsvektor  $\vec{V}$  ensteht, wird im weiteren Verlauf mit  $R$  bezeichnet.  $R$  fasst die extrinsischen Kameraparameter in einer Matrix zusammen.

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ C_\beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & 0 \\ C_{\beta,1} & C_{\beta,2} & C_{\beta,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \\ \hat{d}_3 \\ O_\delta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$D^T = D^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$D = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Für eine Rücktransformation von Kamera in Weltkoordinaten muss die Inverse von  $D$  gebildet werden. Außerdem muss der Translationsvektor  $\vec{V}$  mit dieser Inversen multipliziert werden, um diesen in das Zielkoordinatensystem zu überführen.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \\ \hat{d}_3 \\ O_\delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & 0 \\ -(C_{\beta,1}, C_{\beta,2}, C_{\beta,3})C^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ C_\beta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Das selbe Verfahren mit Zeilenvektoren führt zu den Gleichungen 2.24 und 2.25.

$$(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C_\beta) = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O) \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & C_{\beta,1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & C_{\beta,2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & C_{\beta,2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Daraus folgt, dass für den Fall der Rücktransformation gilt:

$$\rightsquigarrow (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & - \begin{pmatrix} C_{\beta,1} \\ C_{\beta,2} \\ C_{\beta,3} \end{pmatrix} C^{-1} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C_\beta) \quad (2.25)$$

## 2.3 Aufname mit einer willkürlichen Kameraorientierung

Ein beliebiger Punkt im Weltkoordinatensystem kann mit der eingeführten Operation auf einen Sensor Projiziert werden. Es werden insgesamt vier verschiedenen Koordinatensysteme definiert. Das Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$ , das Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$ , das Bildebenenkoordinatensystem  $(I, \tau)$  mit  $\tau = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, I)$  und als letztes das Sensorkoordinatensystem mit  $(S, \sigma)$  mit  $\sigma = (\hat{u}, \hat{v}, S)$ . Abbildung 2.5 zeigt die Koordinatensysteme schematisch im Überblick.

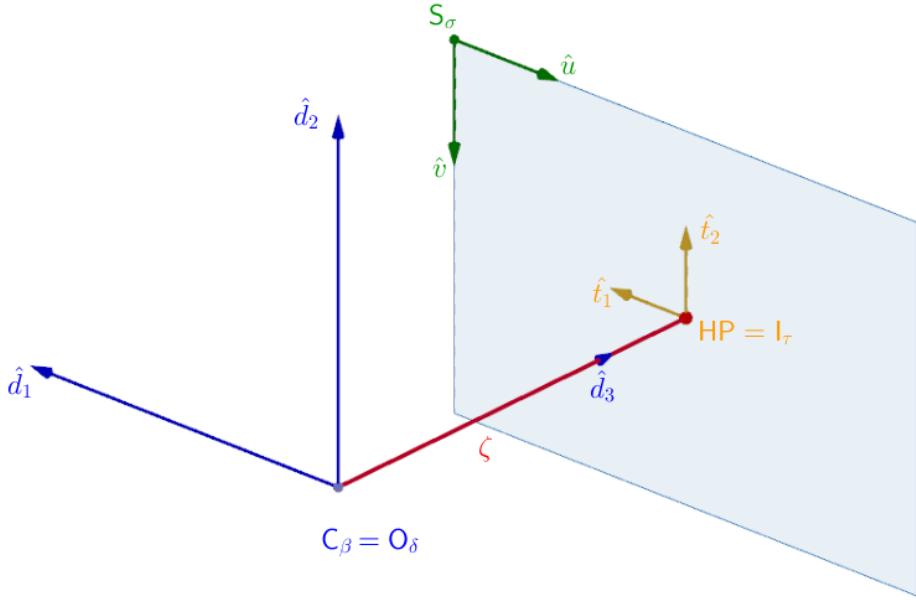


Abbildung 2.5: Koordinatensysteme von einer Kamera aus im Überblick. Das Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  ist Deckungsgleich mit dem Kamerakoordinatensystem  $(C, \beta)$

Für die Projektion eines Punktes  $M_\delta$  bezüglich des Weltkoordinatensystems in einen Punkt  $m_\sigma$  bezüglich des Sensorkoordinatensystems, wir eine Projektionsmatrix  $P$  definiert, welche sich aus den extrinsischen und intrinsischen Kameraparametern zusammensetzt.  $P$  entsteht durch die Vereinigung der Transformationsmatrix  $R$  und der Kamermatrix  $K$ [3].

Für die Transformation der Weltkoordinaten in Kamerakoordinaten gilt, dass  $[\hat{d}_1 \hat{d}_2 \hat{d}_3 1] \cdot R = [\hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{b}_3 1]$ .  $R$  bildet sich aus einer Rotationsmatrix  $D$  und einem Translationsvektor  $\vec{V}$ , so das gilt  $R = [D|V]$ . Der Translationsvektor  $\vec{V}$  setzt sich aus den Koordinaten des Projektionszentrums  $C$  zusammen. Es gilt also  $\vec{V} = C \rightsquigarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} C_{\delta,1} \\ C_{\delta,2} \\ C_{\delta,3} \end{pmatrix}$ .

$$[\hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{b}_3 1] = [\hat{d}_1 \hat{d}_2 \hat{d}_3 1] \cdot \begin{bmatrix} & & & C_{\delta,1} \\ & [D] & & C_{\delta,2} \\ 0 & 0 & 0 & C_{\delta,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ein Punkt  $M_\delta$  Mit  $M_\delta = [X_\delta, Y_\delta, Z_\delta, 1]$  wird mit der soeben aufgestellten Transformationmatrix  $R = [D|V]$  zu einem Punkt  $M_\beta$  bezüglich des Kamerakoordinatensystems transformiert.

$$M_\beta = M_\delta \cdot R \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} X_\beta & Y_\beta & Z_\beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_\delta & Y_\delta & Z_\delta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [D] & C_{\delta,1} \\ & C_{\delta,2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Nach der Transformation eines Punktes  $M_\delta$  in 3D-Kamerakoordinaten zu  $M_\beta$ , erfolgt nun die Projektion des 3D-Kamerapunktes  $M_\beta$  in die 2D-Bildebene, so dass  $M_\beta$  als Punkt  $m_\tau$  bezüglich des Bildkoordinatensystems dargestellt wird. Für die Projektion wird eine  $3 \times 3$ -Kameramatrix  $K_1$  aufgestellt, welche zunächst erstmal den Punkt  $M_\beta$  zu einem auf der Bildebene  $m_\beta$ , jedoch noch bezüglich des Kamerakoordinatensystems darstellt.

$$K_1 = {}_{I_\beta} [\pi]_{C_\beta} = \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\beta \\ Y_\beta \\ Z_\beta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta X \\ \zeta Y \\ \zeta Z \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta \frac{X}{Z} \\ \zeta \frac{Y}{Z} \\ \zeta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Um Bildpunkt  $m_\beta$  bezüglich des zweidimensionalen Bildebenenkoordinatensystems anzugeben, wird die Bildebene mit der Tiefen Komponente  $\zeta$  normiert, so dass  $m_\beta$  auf den zweidimensionalen Raum der Bildebene gemappt wird und der Bildpunkt  $m_\tau$  mit  $m_\tau = [\zeta \frac{X}{Z}, \zeta \frac{Y}{Z}, 1]^T = [X_\tau, Y_\tau, 1]$  entsteht.

Zuletzt folgt noch die Transformation der Bildebenenkoordinaten in die Sensorkoordinaten mit dem Sensorkoordinatensystem  $(S, \sigma)$  mit  $\sigma = (\hat{u}, \hat{v}, S)$ .  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  definieren die geometrische Beschaffung der Pixel. Es wird angenommen, dass es sich um quadratische Pixel handelt. Für die Transformation wird eine Matrix  $M$  aufgestellt, welche die Translation des Koordinatenursprungs und eine Skalierung der Koordinaten beinhaltet.

$$k_x = \hat{u} \hat{t}_1 \quad (2.31)$$

$$k_y = \hat{v} \hat{t}_2 \quad (2.32)$$

$$S_\sigma = I_\tau + V_{\sigma,1} + V_{\sigma,2} \quad (2.33)$$

$$m_\sigma = m_\tau \cdot M \quad (2.34)$$

$$m_\sigma = \begin{bmatrix} k_x & 0 & x_0 \\ 0 & k_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot m_\tau \quad (2.35)$$

Die einzelnen Transformationsschritte, die ein Punkt bei einer Bildaufnahme durchläuft, können in einer einzigen Projektionsmatrix  $P$  zusammengefasst werden.  $P$  setzt sich zusammen aus der Transformationsmatrix  $R$  und der erweiterten Kameramatrix  $K$  [3, 4].

$$m_\sigma = P \cdot M_{delta} = MK_1RM_\delta = KR \cdot M_\delta \quad (2.36)$$

### 3 Homographien

Im vorherigen Kapitel wurde mathematisch die Projektion eines 3D-Punktes in einen 2D-Bildpunkt auf einem Kamerasensor durch Koordinatentransformation aufgezeigt. Im nächsten Schritt soll die Beziehung zwischen dem projizierten 3D-Punkt in zwei perspektivische Kameras und den entstehenden 2D-Bildpunkten genauer erläutert werden. Die 2D-Bilder des projizierten 3D-Punktes sind abhängig vom Aufbau der abgebildeten Szene und den Positionen und Ausrichtungen der Kameras[5]. Die Beziehung zwischen einem 3D-Punkt und seinen Projektionen auf zwei Kameras, kann in einer sogenannten Homographie beschrieben werden. Die Homographie gilt jedoch nur für die Projektion einer planaren Szene im 3D-Raum auf auf zwei Kamerasensoren. Als Homographie wird eine projektive Transformation zwischen zwei Ebenen bezeichnet. Dabei bleiben Kollinearitäten und die Reihenfolge von Punkten auf Geraden, wie zum Beispiel Schnittpunkte mit anderen Geraden, erhalten. Bei den Ebenen handelt sich in diesem Fall um die Bildebene des Kameramodells. Aufgrund dieser Ebenenannahme, kann solch eine projektive Transformation durch eine  $3 \times 3$ -Homographiematrix ausgedrückt werden[12]. Die Homographiematrix  $H$ , projiziert jede Figur in eine Figur gleicher projektiver Entsprechung[3, 5]. Sind die Punkte  $A', B', C'$  und  $D'$  die projektiven Bilder eines Systems von vier kollinearen Punkten, so ist  $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$ [13]. Der Grund warum Homographien in dieser Arbeit eingeführt werden ist, dass sie elementar sind wenn es darum geht Transformationen auf den Bildebene der Kamera durchzuführen, wie es im Kapitel Rektifizierung für die geometrische Entzerrung zweier Bilder von Nöten ist. Außerdem bildet ihre geometrische Herleitung eine gute Brücke zur Epipolar Geometrie, welche im nachfolgenden Kapitel vorgestellt wird und der Elementare Baustein für die Stereobildanalyse bildet. Mit Hilfe der Homography ist es möglich eine Beziehung zwischen den zwei projizierten 2D-Bildpunkten herzuleiten, ohne das intrinsische Parameter in Form einer Kameramatrix  $K$  noch die extrinsischen Parameter in Form der Matrix  $R$  bekannt sind[3, 5]. Diese können dann wiederum aus der, durch die Bildpunkte beider Kameras, entstandenen Homographiematrix geschätzt werden[3]. Die Homographie fasst die Transformationen wie Rotation und Translation, sowie die jeweiligen Abbildungsmatrizen der Kameras in einer  $3 \times 3$ -Matrix zusammen.[5, 13].

Es seien  $m_\tau = \begin{pmatrix} m_{\tau,1} \\ m_{\tau,2} \\ m_{\tau,3} \end{pmatrix}$  die homogenen Koordinaten eines Punktes auf der Bildebene  $(I, \tau)$  und  $m'_{\tau'} = \begin{pmatrix} m'_{\tau',1} \\ m'_{\tau',2} \\ m'_{\tau',3} \end{pmatrix}$  ein Punkt der projektiv transformierten Bildebene  $(I', \tau')$ . Dann gilt

$$m'_{\tau'} = Hm_\tau \quad (3.1)$$

$$Hm_\tau = \begin{bmatrix} h_1^T \cdot m_\tau \\ h_2^T \cdot m_\tau \\ h_3^T \cdot m_\tau \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\rightsquigarrow m'_{\tau'} = Hm_\tau = \begin{bmatrix} h_{11}m_{\tau,1} + h_{12}m_{\tau,2} + h_{13}m_{\tau,3} \\ h_{21}m_{\tau,1} + h_{22}m_{\tau,2} + h_{23}m_{\tau,3} \\ h_{31}m_{\tau,1} + h_{32}m_{\tau,2} + h_{33}m_{\tau,3} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\rightsquigarrow H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Dabei müssen die Koeffizienten so geartet sein, dass die zugehörige Transformation umkehrbar ist[3][13].

$$m'_{\tau'} = Hm_\tau \quad (3.5)$$

$$m_\tau = H^{-1}m'_{\tau'} \quad (3.6)$$

(GRAFIK NOCH ANPASSEN MIT  $m_\beta$  etc)

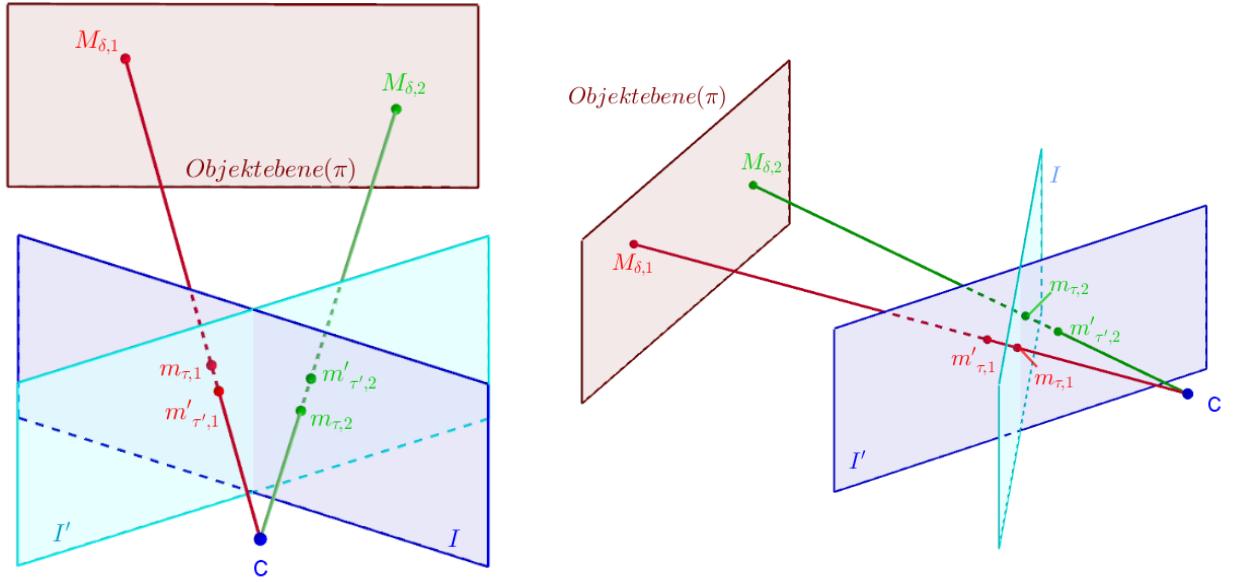


Abbildung 3.1: Die Abbildung zeigt zwei Aufnahmen einer um ihr Projektionszentrum  $C$  gedrehten Kamera. Die zwei blauen Ebenen stellen jeweils die Bildebene vor und nach der Drehung dar sie wird einmal als Bildebene  $(I, \tau)$  und einmal als Bildebene  $(I', \tau')$  bezeichnet. Die Objektebene befindet sich im 3D-Raum, dementsprechend sind die Punkte  $M_{1,\delta}$  und  $M_{2,\delta}$  in homogenen 3D-Koordinaten gegeben. Die Punkte  $m_{1,\tau}$  und  $m_{2,\tau}$  sind die projizierten Punkte auf der Bildebene  $(I, \tau)$  und Die Punkte  $m_{1,\tau'}$  und  $m_{2,\tau'}$  sind die projizierten Punkte auf der Bildebene  $(I', \tau')$

Um die Herleitung der Homographiematrix zu veranschaulichen, werden zwei unterschiedliche Fälle betrachtet. Der erste Fall ist in Abbildung 3.1 gezeigt. Eine planare Szene im Raum soll auf die Bildebene  $(I, \tau)$  einer Kamer projiziert werden, danach wird die Kamera um ihr Projektionszentrum gedreht die 3D-Objektpunkte somit auf die neu ausgerichtet Bildebene  $(I', \tau')$  projiziert. Im zweiten Fall wird die Kamera nicht um ihr Projetionszentrum gedreht, sondern um einen definierten Drehpunkt, so dass zu der Rotation noch eine zusätzliche Translation der Kamera erfolgt. Für Fall eins wird zunächst angenommen, dass die Transformationsmatrizen  $R$  und  $R'$  sowie die Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  bekannt sind.  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  sind die projizierten Punkte von  $M_\delta$  auf den Bildebenen  $(I, \tau)$  mit  $\tau = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, I)$  und  $(I', \tau')$  mit  $\tau = (\hat{t}'_1, \hat{t}'_2, I')$ . Die Kamerakoordinatensysteme werden definiert als  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$ , wobei  $\hat{b}_3 = \overline{CI}$  ist und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = (\hat{b}'_1, \hat{b}'_2, \hat{b}'_3, C')$ , wobei  $\hat{b}'_3 = \overline{C'I'}$  [5]. Die folgenden Gleichungen 4.7 und 4.8 zeigen wieder die bereits bekannte Projektion eines 3D-Punktes auf die 2D-Bildebene, jedoch werden die projizierten Punkte  $m_\beta$  und  $m'_{\beta'}$  noch bezüglich der dreidimensionalen Kamerakoordinatensysteme dargestellt.  $\zeta$  und  $\zeta'$  repräsentieren jeweils die Tiefe von  $m_\beta$  und  $m'_{\beta'}$ , welche gegen Ende eliminiert wird [5].

$$\zeta \vec{m}_\beta = P \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [KR| - KR\vec{C}_\delta] \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = KR(\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta) \quad (3.7)$$

$$\zeta' \vec{m}'_{\beta'} = P' \begin{bmatrix} \vec{M}'_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [K'R'| - K'R'\vec{C}_\delta] \cdot \begin{bmatrix} \vec{M}'_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = K'R'(\vec{M}'_\delta - \vec{C}_\delta) \quad (3.8)$$

Der Vektor  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta)$ , beschreibt die Verbindung zwischen dem Objektpunkt  $M_\delta$  und dem Projektionszentrum  $C$ .

onszentrum  $C_\delta$ . Die Gleichungen 4.7 und 4.8 können auf Grund ihrer identischen Projektionszentren jeweils nach  $(\vec{M}\delta - \vec{C}_\delta)$  aufgelöst werden

$$\zeta R K^{-1} \vec{m}_\beta = \vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta \quad (3.9)$$

$$\zeta' R' K'^{-1} \vec{m}'_{\beta'} = \vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta \quad (3.10)$$

Da die Rechten seiten der Gleichungen 4.9 und 4.10 identisch sind, können die linken Seiten gleichgesetzt werden.

$$\zeta' R' K'^{-1} \vec{m}'_{\beta'} = \zeta R K^{-1} \vec{m}_\beta \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

Um nun die gewünschte Form von  $\vec{m}'_{\beta'} = H \vec{m}_\tau$  zu bekommen, wird die Gleichung nach  $\frac{\zeta'}{\zeta} \vec{m}'_{\beta'}$  aufgelöst.

$$\frac{\zeta'}{\zeta} \vec{m}'_{\beta'} = K' R' R^T K^{-1} \vec{m}_\beta \quad (3.13)$$

$$\lambda \vec{m}'_{\beta'} = H \vec{m}_\beta \quad (3.14)$$

$$\leadsto \vec{m}'_{\beta'} = H \vec{m}_\tau \quad (3.15)$$

Es Resultiert also dass wenn  $\lambda = \frac{\zeta'}{\zeta}$ , dann gilt dass  $H = K' R' R^T K^{-1}$  gleicht. Gilt nun noch der Fall, dass  $K = K'$  ist, dann reduziert sich  $H$  zu  $K^{-1} H K = R' R$ , welches einer Rotation gleicht.[5].

### 3.1 Abbildungsunterschiede bei verschobenen Rotationsachsen

Wie am Anfang des Kapitels erwähnt, sollen zwei verschiedene Fälle für die Homographie betrachtet werden. Der Grund sind, die unterschiedlichen Abbildungsmerkmale die bei einer Drehung um das Projektionszentrum und einer Drehung um einen definierten Drehpunkt entstehen. Die Frage ist, ob und wie sich beim zweiten Fall eine Homographiematrix herleiten lässt und in wie fern sie sich von der bereits bekannten Herleitung unterscheidet. Um zu veranschaulichen, was genau sich bei einer Drehung um ein Drehpunkt und der Drehung um das Projektionszentrum ändert, wurde eine Simulation geschrieben, welche die Abbildungsunterschiede beider Drehungen aufzeigt. Abbildung 3.2 zeigt die Ausgangssituation der Simulation. In einem virtuellen Raum wurde eine Kamera platziert, welche auf ein Objekt gerichtet ist. Dieses Objekt besteht aus einem Quadrat, das durch die schwarzen Eckpunkte begrenzt ist. In der Mitte des Quadrats wurde mit Rot der Mittelpunkt des Quadrats gekennzeichnet. Dieser Mittelpunkt symbolisiert den Drehpunkt um welchem sich die Kamera später drehen soll.

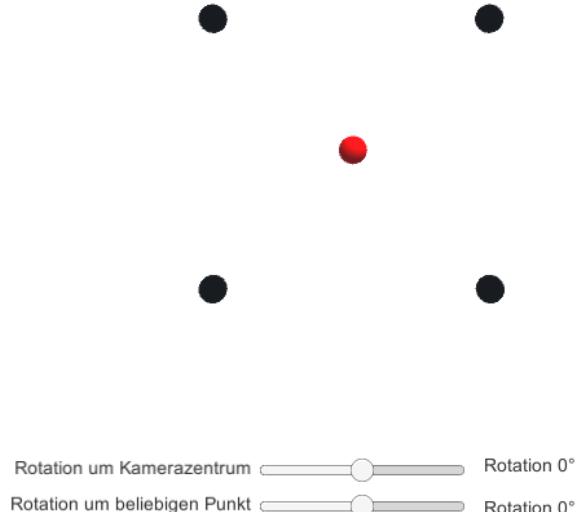


Abbildung 3.2: Ausgangssituation der Simulation

Für die Simulation der unterschiedlichen Drehungen wurden zwei Schieberegler implementiert mit denen sich die Kamera einmal um ihr Projektionszentrum, und einmal um den Drehpunkt drehen lässt. Abbildung 3.3 zeigt jeweils die entstehenden Bilder, wenn die Kamera um  $20^\circ$  beziehungsweise  $-20^\circ$  um das Projektionszentrum gedreht wurde.

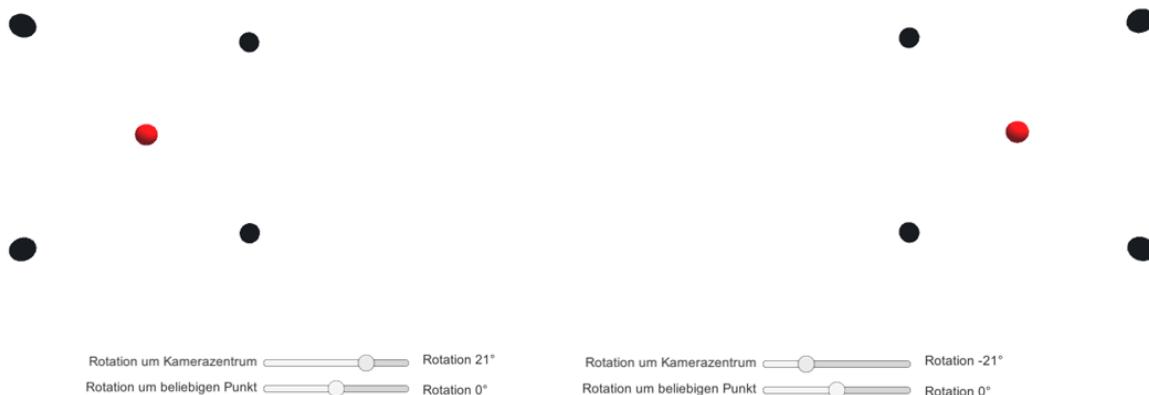


Abbildung 3.3: Drehung um das Projektionszentrum

Abbildung 3.4 zeigt die entstehenden Bilder, wenn die Kamera um  $45^\circ$  beziehungsweise  $-45^\circ$  um den Drehpunkt gedreht wurde. Wie sich zeigt ist hier ein weiterer grüner Punkt zu sehen welcher zu Testzwecken hinter dem roten Punkt platziert wurde sichtbar.



Abbildung 3.4: Drehung um einen Drehpunkt. In diesem Beispiel wurde der rote Punkt als Drehpunkt verwendet

Punkte die bei einer Drehung um das Projektionszentrum verdeckt bleiben, können bei einer Drehung um einen außerhalb der Kamera liegenden Drehpunkt sichtbar werden. Die Abbildungen 3.5 und 3.6 veranschaulichen anhand von Strahlenoptik, was der Grund für die Verdeckung ist.

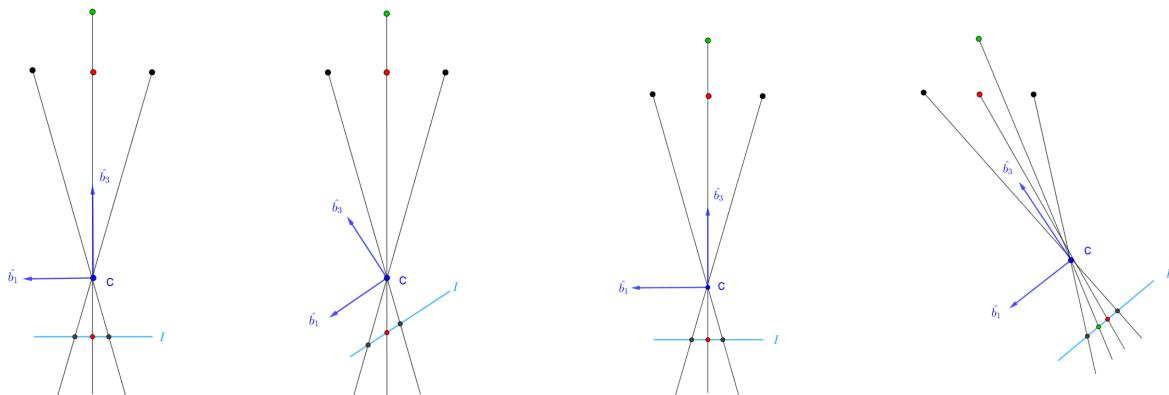


Abbildung 3.5: Strahlengang durch das Projektionszentrum. Auf der Abbildung ist erkennbar, dass der grüne Punkt auch nach der Drehung der Kamera um das Projektionszentrum vom roten Punkt verdeckt bleibt

Abbildung 3.6: Strahlengang durch das Projektionszentrum. Auf der Grafik ist erkennbar, dass der grüne Punkt nach der Drehung der Kamera um einen Drehpunkt, welcher in diesem Fall der rote Punkt darstellt, sichtbar wird.

Die Bildebene ist in diesem Beispiel hinter dem Projektionszentrum platziert. Die Lage der Bildebene ist in sofern egal, dass es sei sie im gleichen Abstand vor oder hinter dem Projektionszentrum, immer zur selben Abbildung kommt. Jedoch ist die Abbildung, bei hinter dem Projektionszentrum platzierten Bildebene, auf dem Kopf abgebildet. Die Positionierung hinter das Projektionszentrum dient allein der Übersichtlichkeit der Abbildungen, im restlichen Verlauf der Arbeit wird die Bildebene immer vor das

Projektionszentrum platziert um Verwirrungen zu vermeiden. Der grüne Punkt wurde nur als Beweis platziert, dass sich die entstehenden Abbildungen beider Fälle voneinander unterscheiden. Für den weiteren Verlauf wird er nicht weiter beachtet. Für die Homographie gelten nur die Punkte, welche sich im Raum auf einer Ebene befinden. Im folgenden wird eine Herleitung der Homographiematrix für den zweiten Fall aufgestellt.

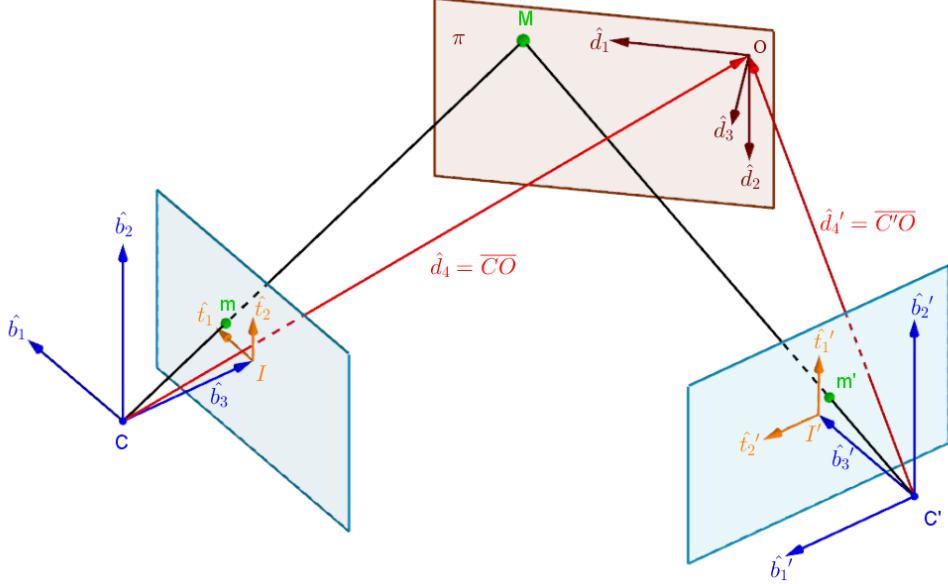


Abbildung 3.7: Veranschaulichung der Homographie bei zwei verschiedenen translatierten und rotierten Kameras.

Angenommen es existiert eine Ebene  $\pi$  im Raum mit einem Objektpunkt  $M_\delta$  bezüglich eines Weltkoordinatensystems  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$ .  $\hat{d}_1$  und  $\hat{d}_2$  spannen die Ebene  $\pi$  auf. Der Punkt  $M_\delta$  wird nun mit den Projektionsmatrizen  $P = [KR] - KRC\vec{\delta}$  und  $P' = [K'R'] - K'R'C\vec{\delta}$  in einen Punkt bezüglich der Bildebenen  $(I, \tau)$  mit  $\tau = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, I)$  und  $(I', \tau')$  mit  $\tau' = (\hat{t}'_1, \hat{t}'_2, I')$  projiziert. Auch hier gilt wie im vorherigen Beispiel, dass die projizierten Bildkoordinaten als  $m_\beta$  und  $m'_\beta$  der jeweiligen Kamerakoordinatensysteme  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$ , wobei  $\hat{b}_3 = \overline{CI}$  und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = (\hat{b}'_1, \hat{b}'_2, \hat{b}'_3, \overline{C'I'})$ , wobei  $\hat{b}'_3 = \overline{C'O}$ , dargestellt werden. Da der Ursprung des Weltkoordinatensystems  $(O, \delta)$  auf der Ebene  $\pi$  liegt und  $\hat{d}_1$  und  $\hat{d}_2$  diese aufspannen, gilt für den Punkt  $M_\delta$  auf  $\pi$

$$M_\delta = \begin{pmatrix} x_{\hat{d}_1} \\ y_{\hat{d}_2} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ die Bezeichnungen } p_i \text{ und } p'_i \text{ stehen im folgenden für die einzelnen Spalten der Projektionsmatrizen } P \text{ und } P'. \text{ Für die Projektion des Punktes } M_\delta \text{ in die Bildpunkte } m_\beta \text{ und } m'_\beta \text{ bezüglich } (C, \beta) \text{ und } (C', \beta') \text{ gelten die folgenden beiden Gleichungen[5].}$$

$$\zeta m_\beta = P \cdot \begin{bmatrix} M_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] \cdot \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [p_1 \ p_2 \ p_4] \cdot \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = G \vec{m}_\tau \quad (3.16)$$

$$\zeta' m'_{\beta'} = P' \cdot \begin{bmatrix} M_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = [p'_1 \ p'_2 \ p'_3 \ p'_4] \cdot \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [p'_1 \ p'_2 \ p'_4] \cdot \begin{bmatrix} x'_\delta \\ y'_\delta \\ 1 \end{bmatrix} = G' \vec{m}'_{\alpha} \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

In diesem Prozess sind sowohl die zwei Matrizen  $G$  und  $G'$ , sowie zwei weitere Koordinatensysteme  $(C, \alpha)$  mit  $\alpha = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_4)$ , wobei  $\hat{d}_4 = \overline{CO}$  und  $(C', \alpha')$  mit  $\alpha' = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}'_4)$ , wobei  $\hat{d}'_4 = \overline{C'O}$  entstanden[5]. Des Weiteren sind zwei neue Punkte  $m_\alpha$  und  $m'_\alpha$  entstanden, von denen behauptet wird, dass  $\zeta m_\beta = G \cdot m_\alpha$  und  $\zeta' m'_{\beta'} = G' \cdot m'_{\alpha'}$  gelte[5]. Um dies zu testen werden  $m_\alpha$  und  $m'_\alpha$  anders formuliert.

$$m_\alpha = M_\alpha + \overline{CO}_\alpha = M_{(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_4)} + \overline{CO}_{(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_4)} = \begin{pmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$m'_{\alpha'} = M_{\alpha'} + \overline{CO}_{\alpha'} = M_{(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}'_4)} + \overline{CO}_{(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}'_4)} = \begin{pmatrix} x_\delta \\ y_\delta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Aus Gleichungen 4.18 und 4.19 folgt dann, dass für alle Punkte in der Ebene  $\pi$  gilt, dass  $m_\alpha = m'_\alpha$ . Woraus für die Punkte  $\zeta m_\beta$  und  $\zeta' m'_{\beta'}$  folgt, dass  $\zeta m_\beta = G \cdot m_\alpha$  und  $\zeta' m'_{\beta'} = G' \cdot m'_{\alpha'}$ [5]. Somit kann für  $\zeta m_\beta$  und  $\zeta' m'_{\beta'}$  folgende Beziehungsgleichung aufgestellt werden[5].

$$\zeta' m'_{\beta'} = G' G^{-1} \zeta m_\beta \quad (3.21)$$

Für  $\frac{\zeta'}{\zeta} = \lambda$ , kann Gleichung 4.20 dann wieder umformuliert werden in:

$$\lambda m'_{\beta'} = H m_\beta \quad (3.22)$$

$$\rightsquigarrow m'_{\tau'} = H m_\tau \quad (3.23)$$

Zwei projizierte Bilder einer Ebene sind also über eine Homographie  $H$  miteinander verwandt, welche wiederum eine Kombination aus denjenigen Homographien ist, welche die jeweiligen Bilder mit der Ebene  $\pi$  in Beziehung setzten[5].

## 3.2 Berechnung der Homographiematrix aus Bildebenenkoordinaten

Nachdem nun bekannt ist, wie eine Homographie Beziehungen zwischen projizierten Punkten beschreiben kann, wird im nächsten Schritt davon ausgegangen, dass die Transformationsmatrizen  $R$  und  $R'$  sowie die Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  nicht bekannt sind. Es wird schematisch aufgezeigt, wie die Homographiematrix aus 2D-Bildpunkten gewonnen werden kann. Um eine Homographiematrix mit

$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$  zu erhalten werden die Punkte beider Kameras in eine Koeffizientenmatrix  $A$  eingetragen, welche sich nach dem in den Gleichungen 4.25 bis 4.34 laufenden Schema aufstellen lässt.

$$H \cdot m_\tau = m'_{\tau'} \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m'_{\tau'} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Aus Gleichung 4.24 lässt sich ein Gleichungssystem mit zwölf bekannten und neun unbekannten aufstellen.

$$h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z = \lambda x' \quad (3.27)$$

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z = \lambda y' \quad (3.28)$$

$$h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z = \lambda z' \quad (3.29)$$

Da mit homogenen Koordinaten gearbeitet wird und somit  $z$  und  $z' = 1$  sind, ergibt sich für die letzte Zeile  $h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z = 1$ . Dieser Ausdruck kann in den ersten beiden Gleichungen für  $\lambda$  eingesetzt werden. Pro Punktpaar  $m_\tau$  und  $m'_\tau$ , ergeben sich somit zwei Gleichungen.

$$h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z = (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot x' \quad (3.30)$$

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z = (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot y' \quad (3.31)$$

Für den Aufbau von  $A$  werden beide Ausdrücke noch nach Null aufgelöst, so dass sich die Gleichungen 4.34 und 4.35 aus 4.32 und 4.33 ergeben.

$$h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z - (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot x' = 0 \quad (3.32)$$

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z - (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot y' = 0 \quad (3.33)$$

$$\rightsquigarrow h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z - h_{31}x \cdot x' - h_{32}y \cdot x' - h_{33}z \cdot x' = 0 \quad (3.34)$$

$$\rightsquigarrow h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z - h_{31}x \cdot y - h_{32}y \cdot y - h_{33}z \cdot y = 0 \quad (3.35)$$

Die entstandenen Gleichungen werden jetzt pro Punktpaar  $m_\tau$  und  $m'_\tau$ , in die Koeffizientenmatrix  $A$  nach folgendem Schema eingetragen.[5, 3, 14, 8]

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1x'_1 & y_1x'_1 & 1 \cdot x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & x_1y'_1 & y_1y'_1 & 1 \cdot y'_1 \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \\ x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & x_ix'_i & y_ix'_i & 1 \cdot x'_i \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 & x_iy'_i & y_iy'_i & 1 \cdot y'_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h1 \\ h2 \\ \vdots \\ hi \end{pmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

Wenn ein nicht überbestimmter Fall vorliegt, sprich wenn der Matrixrang von  $A \leq 8$  beträgt, kann aus  $A$  einfach der Kern bestimmt werden, um so die Einträge für die 3x3-Homographiematrix zu erhalten[3, 5, 14]. Gesucht wird also ein Vektor  $\vec{x}$ , für den gilt das  $H \cdot x = 0$ . Der gesuchte Vektor  $\vec{x}$  entspricht dem Kern der Koeffizientenmatrix und ist ein Spaltenvektor mit insgesamt neun Einträgen, welche in die 3x3-Homographiematrix eingetragen werden können[3, 14]. Tritt nun der Fall ein, dass es zu einem überbestimmten System kommt, sprich wenn der Rang von  $A$  größer 8 ist, so liefert die Bestimmung des Kerns kein eindeutiges Ergebnis mehr für den Vektor  $\vec{x}$  und somit kann die Homographiematrix nicht eindeutig bestimmt werden[3]. Für die Lösung überbestimmter Systeme wird die Singulärwertzerlegung angewandt[3][15]. Das bedeutet es wird nicht mehr derjenige Vektor  $\vec{x}$  gesucht für den gilt  $H \cdot x = 0$  ergibt, sondern es wird derjenige Vektor  $\vec{x}$  gesucht, für den  $\| H \cdot x \|$  minimal wird[3, 14]. Die Singulärwertzerlegung von  $A$  ist eine Faktorisierung der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  der Form  $A = U \cdot S \cdot V^T$  mit orthogonalen Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sowie mit einer Diagonalmatrix  $S$ .

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & s_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Dabei soll für die diagonalen Singulärwerte in  $S$  mit  $s_1$  bis  $s_r$  gelten, dass  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r \geq 0$ [15]. Nach dem Schema der Singulärwertszerlegung, wird Matrix  $A$  in die Form  $USV^T$  zerlegt. Nach der Zerlegung sind die Diagonaleinträge von  $S$  in einer absteigenden Reihenfolge sortiert. Die Spalte von  $V^T$ , welche mit dem kleinsten Singulärwert von  $S$  korrespondiert, ergibt den Vektor  $\vec{x}$ , für den  $\| H \cdot x \|$  minimal wird. Somit gleichen die neun Einträge der Homographiematrix gleich der letzten Spalte von  $V^T$ . Beispielrechnungen, in denen die Homographiematrix einmal für den Fall des rotierten Projektionszentrums und einmal mit der Drehung um einen Drehpunkt mit durchgerechnet wurde befindet sich im Appendix unter 10.1 und 10.2.

## 4 Epipolar Geometrie

Kurze zusammenfassung bis hier her..

Die Epipolargeometrie beschreibt ähnlich der Homographie eine Beziehung der projektiven Geometrie zwischen zwei Bildern[3]. Sie dient insbesondere zur Korrespondenzanalyse von Punkten aus Bildern und zur Gewinnung von 3D-Informationen die abgebildete Szene. Im Gegensatz zur Homographie ist die Epipolargeometrie unabhängig vom Szenenaufbau, sondern hängt nur von den intrinsischen Parametern der Kamera, sowie deren relative Position zueinander ab.[3]. Ohne Kenntnis der Kamera-positionen, kann mit Hilfe der Epipolargeometrie überprüft werden, ob eine Korrespondenz zwischen den Bildpunkten zweier Bilder besteht. Unter korrespondierenden Punkten versteht man Bildpunkte auf zwei Bildern, die Abbilder des selben Objektpunktes im 3D-Raum sind. Ein Beispiel für korrespondierende Punkte wären die Punkte Bildpunkte  $m_\tau$  und  $m'_{\tau}$ . Diese entstanden aus der Projektion von  $M_\delta$  auf zwei Bildebene mit  $m_\tau = PM_\delta$  und  $m'_{\tau} = P'M_\delta$ . Die Verbindungsvektoren zwischen den Projektionszentren  $C$  und  $C'$  mit dem 3D-Objektpunkt  $M_\delta$  und die Basislinie, welche die Projektionszentren verbindet, bilden die Epipolarebene. Auf Abbildung 4.1 ist sie als Dreieck zwischen den Punkten zu sehen. Die Epipolargeometrie beschreibt in die Beziehung zwischen den durch Schnitt der Bildebene und der Epipolarebene entstehenden Schnittgeraden. Für jeden Objektpunkt im Raum, entsteht eine neue solche Ebene, die alle die Basislinie als Drehachse besitzen[3]. Dementsprechend entstehen pro neuen Objektpunkt im Raum auch jeweils zwei Schnittgeraden. Die Schnittgeraden werden als Epipolarlinien  $l$  und  $l'$  bezeichnet.  $l'$  wird als die zu zum Bildpunkt  $m_\tau$  korrespondierende Epipolarlinie bezeichnet und  $l$  die zum Bildpunkt  $m'_{\tau}$ , korrespondierende Epipolarlinie. Die Epipolarlinien eines Bildes verlaufen alle durch einen Epipol  $e$  oder  $e'$  und den abgebildeten Bildpunkten und bilden somit, auf den jeweiligen Bildebene, ein Bündel aus Epipolarlinien. Epipol  $e$  ist die Abbildung von  $C'$  auf der Bildebene  $I$  von  $C$  und Epipol  $e'$  ist die Abbildung von  $C'$  auf Bildebene  $I'$  von  $C'$ . Die Schnittpunkte der Basislinie mit den Bildebene ergeben die jeweiligen Epipole. Ist eine der Bildebene parallel zur Basislinie ausgerichtet, so kommt es zu keinem Schnittpunkt der Basislinie mit der parallelen Bildebene und der Epipol befindet sich somit im unendlichen[3, 1].

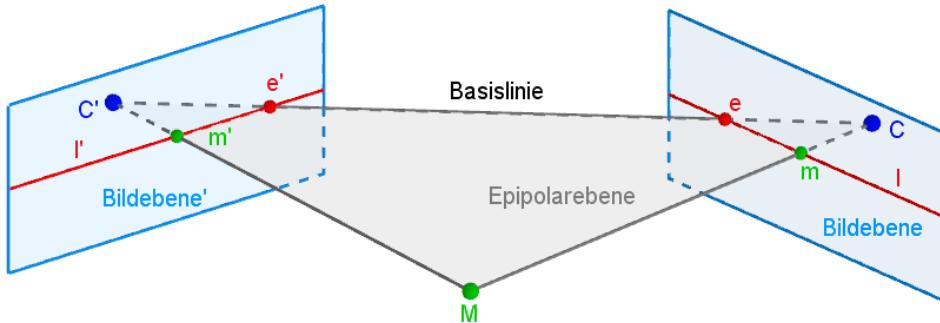


Abbildung 4.1:  $C$  und  $C'$  sind die Projektionszentren zweier Kameras. Beide Kameras besitzen jeweils eine Bildebene. Die Basislinien verbindet die Projektionszentren der Kameras. Der Punkt an welchem die Basislinie die Bildebene schneidet, wird als Epipol bezeichnet. Durch den Epipol verlaufen alle Epipolarlinien des Bildes.  $M$  ist der Objektpunkt im 3D-Raum und  $m_1$  und  $m_2$  sind die jeweiligen Abbildungen dieses Punktes auf den Bildebene. Die Verbindungsvektoren zwischen  $C, C'$  und  $M$  bilden die sogenannte Epipolarebene[5, 3, 1].

Ein Objektpunkt  $M_\delta$  wird auf die Bildebene  $I$  und  $I'$  der beiden Kameras  $C$  und  $C'$  projiziert.

Es entstehen die zueinander korrespondierenden Bildpunkte  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$ . Die durch die Bildpunkte  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  und den entsprechenden Epipolen  $e$  und  $e'$  verlaufenden Epipolarlinien, sind zueinander korrespondierende Epipolarlinien. Die zum Punkt  $m_\tau$  korrespondierende Epipolarlinie  $l'$  beinhaltet alle zu  $m_\tau$  möglichen korrespondierenden Punkte, darunter eben auch der eindeutig korrespondierende Punkt  $m'_{\tau'}$ . Die Epipolargeometrie beschreibt weiterhin eine Beziehung zwischen einem Bildpunkt  $m$  und dessen korrespondierender Epipolarlinie  $l'$ . Diese Beziehung ist der sogenannte *Epipolar-Constraint*[3, 11, 1]. Abbildung 4.2 veranschaulicht die soeben genannte Beziehung eines Bildpunktes zu seiner korrespondierenden Epipolarlinie noch mal grafisch. Der *Epipolar-Constraint* sagt aus, dass wenn ein 3D-Bildpunkt  $M_\delta$  sich entlang seiner Verbindungsgeraden  $CM_\delta$  auf die Bildebene  $I$  zu bewegt, so ändert sich die Position des Bildpunktes  $m_\tau$  auf  $I$  nicht, während der korrespondierende Punkt  $m'_{\tau'}$  sich entlang seiner Epipolarlinie bewegt. In Abbildung 4.2 ist  $m_\tau$  mit  $m_{\tau,i}$  bezeichnet. Ist also nur Bildpunkt  $m_\tau$  bekannt, so können alle Punkte auf dessen korrespondierender Epipolarlinie  $l'$  mögliche korrespondierende Punkte zu  $m_\tau$  sein. Der *Epipolar-Constraint* kann durch  $3 \times 3$ -Matrizen ausgedrückt werden. Bei diesen Matrizen handelt es sich entweder um die Fundamentalmatrix  $F$  oder die essentielle Matrix  $E$ [3, 1, 5, 7, 11]. Deren Herleitung und Beziehung, zu den korrespondierenden Bildpunkten, im weiteren Verlauf noch aufgezeigt wird. Der *Epipolar-Constraint* gilt dann als erfüllt, wenn gilt, dass:

$$m'^T_{\tau'} \cdot F \cdot m_\tau = 0 \quad (4.1)$$

$$\bar{m}'^T_{\tau'} \cdot E \cdot \bar{m}_\tau = 0 \quad (4.2)$$

ergeben. Sind die Gleichungen erfüllt, dann sagt der *Epipolar-Constraint* aus, dass Bildpunkt  $m'_{\tau'}$ , auf der zu  $m_\tau$  korrespondierenden Epipolarlinie  $l'$  liegt und somit ein möglicher korrespondierender Punkt zu  $m_\tau$ [3, 11, 5, 1]. Ist der *Epipolar-Constraint* erfüllt, so wird gleichzeitig der Suchaufwand nach weiteren Korrespondenzen reduziert, da somit nur noch eine eindimensionale Suche, entlang der Epipolarlinie, anstatt einer zweidimensionalen durchgeführt werden muss. Dieser neue *Constraint* wird auch als *Coplanarity-Constraint* oder Koplanaritätsbeschränkung bezeichnet. Er sagt aus, dass die Projektionszentren der Kameras und die korrespondierenden Bildpunkte auf einer und der selben Epipolarebene liegen müssen [11].

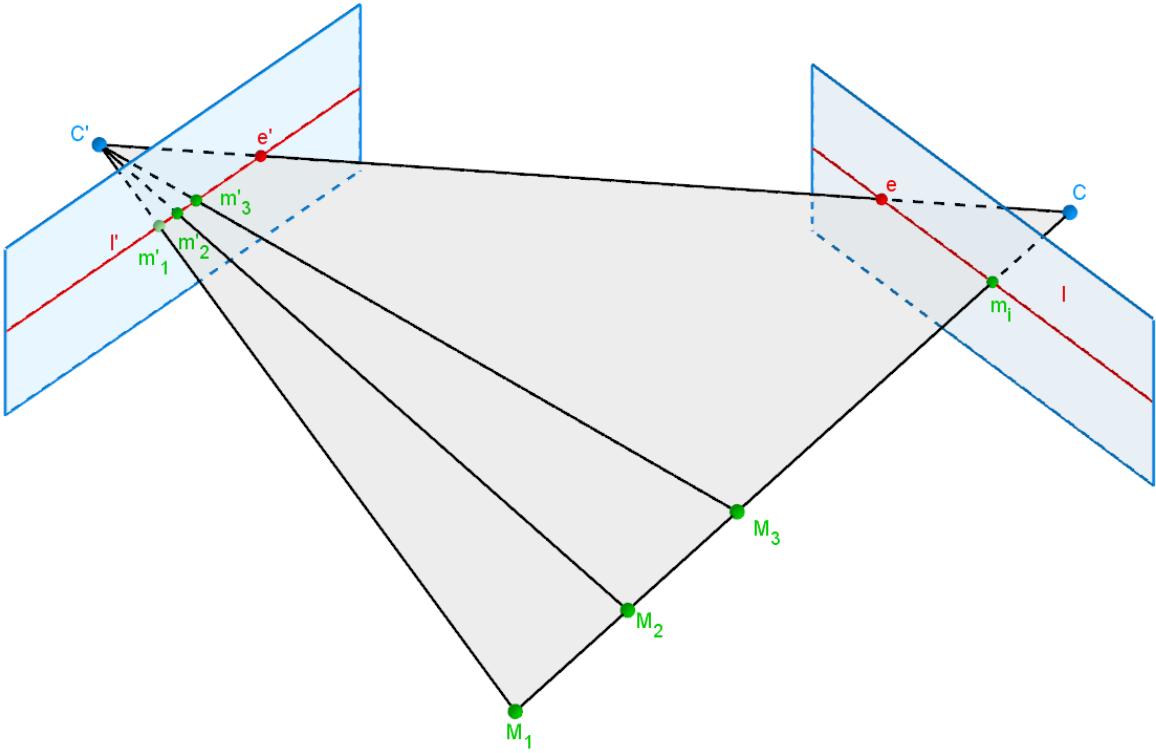


Abbildung 4.2: Die Objektpunkte  $M_1, M_2$  und  $M_3$  werden in  $I'$  als  $m'_1, m'_2$  und  $m'_3$  abgebildet, während sie in  $I$  immer den selben Bildpunkt  $m_1$  ergeben.

Die essentielle Matrix und die Fundamentalmatrix unterscheiden sich darin, ob die intrinsischen Kameraparameter bekannt sind oder nicht. Die Fundamentalmatrix kommt dann zum Einsatz, wenn nur die Bildpunkte  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$ , bekannt sind, die Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  und die Translationsmatrizen  $R$  und  $R'$  jedoch unbekannt sind. Man spricht hier von einem unkalibrierten Fall[3, 1, 4]. Sind die intrinsischen Kameraparameter bekannt, so wird die Fundamentalmatrix  $F$  zur essentiellen Matrix und man spricht von einem kalibrierten FallE[3, 5]. Das Wissen über die Aussagen dieser *Constraints* ist vor allem dann von Nutzen, wenn es darum geht aus einer Stereoskopischen Aufnahme anhand von korrespondierenden Bildpunkten die 3D-Szene zu rekonstruieren. Die korrespondierenden Punkte müssen zu Beginn der Stereobildanlayse erst einmal auf den Bilder ausfindig gemacht werden. Hierfür gibt es unterschiedliche Algorithmen, die in der Einleitung bereits erwähnt wurden. Wird einer dieser Algorithmen auf die Bilder angewandt, kann mit Hilfe des *Epipolar-Constraints* deren Exaktheit der zueinander korrespondierenden Punkte überprüft werden[5, 1, 3].

## 4.1 Geometrische Erläuterung der Fundamentalmatrix und der Essentiellen Matrix

Nachdem die Nutzen der Epipolargeometrie für die Strereobildanalyse bringt, werden nun die beiden Matrizen  $F$  und  $E$  geometrisch hergeleitet. Ähnlich wie die Homographiematrix sind  $F$  und  $E$  auch  $3 \times 3$ -Matrizen, welche eine geometrische Beziehung zwischen dem Objektpunkt  $M_\delta$ , den Kameras  $C$  und  $C'$  sowie den Bildpunkten  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  beschreiben. Während es sich bei der Homographiematrix um eine Matrix mit Rang 3 handelt, sind sowohl  $F$  als auch  $E$  singuläre Matrizen mit Rang 2. Die Vektoren  $\overline{CM} = (\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta)$ ,  $\overline{C'M} = (\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta)$  und  $Basisline = \overline{CC'} = (\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta)$  bilden das in Abbildung 4.1 sichtbare schwarze Dreieck. Die Matrizen  $F$  und  $E$  beschreiben die Geometrie dieses Dreiecks.

Ein Objektpunkt  $M_\delta$  in Weltkoordinaten( $O, \delta$ ) wird von zwei Kameras  $C_\delta$  und  $C'$  mit den Koordinatensystemen  $(C, \beta)$  und  $(C', \beta')$  aufgenommen und auf deren Bildebenen  $I$  und  $I'$  als  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$

abgebildet. Die intrinsischen Kameraparameter und die relativen Positionen der Kameras zueinander werden durch die Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$  dargestellt.

$$P = \begin{bmatrix} KR | - K R \vec{C}_\delta \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$P' = \begin{bmatrix} K'R' | - K'R' \vec{C}'_\delta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$M$  wird mit  $P$  und  $P'$  auf die Bildebene  $I$  und  $I'$  mit den jeweiligen Koordinatensystemen  $I = (I, \tau)$  und  $I' = (I', \tau')$  projiziert. Die Bildebene koordinatensysteme müssen keine Einheitlichen Koordinatensysteme sein, dass ist vor allem später wichtig wenn es um die Frage der Auswirkung unterschiedlicher Kameraauflösungen auf die Epipolargeometrie geht[5]. Es entstehen die Bildpunkte  $\zeta m_\beta$  und  $\zeta' m'_{\beta'}$  bezüglich der Kamerakoordinatensysteme  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$ , wobei  $\hat{d}_3 = \overline{CI}$  und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = (\hat{b}'_1, \hat{b}'_2, \hat{b}'_3, C')$ , wobei  $\hat{d}'_3 = \overline{C'I'}$ . Dabei gilt, dass  $\zeta \geq 0$  und  $\zeta' \geq 0$ .  $\zeta$  und  $\zeta'$  stehen für die Tiefe von  $\vec{m}_\beta$  und  $\vec{m}'_{\beta'}$ , sprich ihr Abstand von der Kamera zur Bildebene. Zunächst werden die Projektionsgleichungen aufgestellt, welche den Punkt  $M_\delta$  auf auf die jeweiligen Bildebene projiziert. Danach soll die Beziehung dieser beiden entstandenen Bildpunkte anhand der Gleichungen 5.3 und 5.4 hergeleitet werden, so dass am Ende die beiden Gleichungen für den *Epipolar-Constraint* mit  $\hat{m}_\tau^T E \hat{m}'_{\tau'} = 0$  und  $m'^T_{\tau'} F m_\tau = 0$  darstehen. Als erstes wird  $M_\delta$  auf die Bildebene projiziert. Dabei sind die projizierten Bildpunkte noch in 3D-Kamerakoordinaten angegeben.

$$\zeta \vec{m}_\beta = P \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\zeta \vec{m}_\beta = \begin{bmatrix} KR | - K R \vec{C}_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\zeta' \vec{m}'_{\beta'} = P' \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\zeta' \vec{m}'_{\beta'} = \begin{bmatrix} K'R' | - K'R' \vec{C}'_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$P \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix}$  ist Gleichbedeutend mit  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta)$  und  $P' \begin{bmatrix} \vec{M}_\delta \\ 1 \end{bmatrix}$  ist ebenfalls gleichbedeutend mit  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta)$ [5]. Beide Beschreiben den Vektor, der den Objektpunkt  $M_\delta$  mit der entsprechenden Kamera verbindet. Weshalb die rechte Seite der Gleichungen 5.3 und 5.4 dem entsprechend umgeformt werden. Zur Erinnerung es soll das in Abbildung 4.1 abgebildete Dreieck, welches aus den Vektoren  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta)$ ,  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta)$  und  $(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta)$  entsteht, geometrisch beschrieben und in eine Beziehung mit  $\zeta m_\beta$  und  $\zeta' m'_{\beta'}$  gebracht werden.

$$\zeta \vec{m}_\beta = KR(\vec{M} - \vec{C}_\delta) \quad (4.9)$$

$$\zeta' \vec{m}'_{\beta'} = K'R'(\vec{M} - \vec{C}'_\delta) \quad (4.10)$$

Gleichungen 5.9 und 5.10 werden nach  $(\vec{M} - \vec{C}_\delta)$  und  $(\vec{M} - \vec{C}'_\delta)$  aufgelöst.

$$\zeta R^T K^{-1} \vec{m}_\beta = (\vec{M} - \vec{C}_\delta) \quad (4.11)$$

$$\zeta R'^T K'^{-1} \vec{m}'_{\beta'} = (\vec{M} - \vec{C}'_\delta) \quad (4.12)$$

Für das Dreieck in Abbildung 4.1 kann aus den drei Vektoren  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta)$ ,  $(\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta)$  und  $(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta)$  die folgende Gleichung aufgestellt werden.

$$(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta) = (\vec{M}_\delta - \vec{C}_\delta) - (\vec{M}_\delta - \vec{C}'_\delta) \quad (4.13)$$

Für  $(\vec{M} - \vec{C}_\delta)$  und  $(\vec{M}' - \vec{C}'_\delta)$  können die in 5.11 und 5.12 entstandenen Ausdrücke eingesetzt werden.

$$(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta) = \zeta R^T K^{-1} \vec{m}_\beta - \zeta' R'^T K'^{-1} \vec{m}'_{\beta'} \quad (4.14)$$

Nun sollen die Tiefen  $\zeta$  und  $\zeta'$  aus  $\zeta \vec{m}_\beta$  und  $\zeta' \vec{m}'_{\beta'}$  eliminiert werden, so werden aus den Bildpunkten bezüglich der Kamerakoordinatensysteme  $(C, \beta)$  und  $(C', \beta')$  Koordinaten bezüglich der Bildebenenkoordinatensysteme  $(I, \tau)$  und  $(I', \tau')$ [5]. Zunächst wird  $(\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta)$  auf die rechte Seite gebracht, so dass die Gleichung nach Null aufgelöst ist.

$$[\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_\times \zeta R^T K^{-1} \vec{m}_\beta - [\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_\times \zeta' R'^T K'^{-1} \vec{m}'_{\beta'} = 0 \quad (4.15)$$

Gleichung 5.15 wird von links mit  $\zeta' \vec{x}'_{\beta'}^T K'^{-T} R'$  multipliziert. Auf diese Weise wird eine der beiden Schiefsymmetrischen Matrizen aus der Gleichung eliminiert.

$$\zeta' \vec{m}'_{\beta'} K'^{-T} R' [\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_\times \zeta R^T K^{-1} \vec{m}_\beta = 0 \quad (4.16)$$

Da  $\zeta \neq 0$  und  $\zeta' \neq 0$ , ist Gleichung 5.16 gleichbedeutend mit 5.17.(das versteh ich noch nicht sooo ganz warum dann die )

$$\vec{m}'_{\tau'} K'^{-T} R' [\vec{C}'_\delta - \vec{C}_\delta]_\times R^T K^{-1} \vec{m}_\tau = 0 \quad (4.17)$$

Gleichung 5.17 beschreibt die gesuchte geometrische Beziehung zwischen den Punkten  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$ . Hier werden jetzt die Matrizen  $F$  und  $E$  eigenführt. Bei  $E$  handelt es sich um einen Kalibrierten Fall, dass bedeutet dass sowohl  $K$  als auch  $K'$  bekannt sind.  $K$  und  $K'$  werden jetzt mit den Punkten  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  multipliziert daraus resultieren die sogenannten normierten Bildkoordinaten  $\vec{m}_\tau$  und  $\vec{m}'_{\tau'}$ . Was es genau mit denen auf sich hat wird im Kapitel Virtuelle Rekonstruktion noch genauer erklärt[5].

$$\vec{m}'_{\tau'}^T K'^{-T} E K^{-1} \vec{m}_\tau = 0 \quad (4.18)$$

$$\vec{m}_\tau^T E \vec{m}'_{\tau'} = 0 \quad (4.19)$$

Bei einem unkalibrierten Fall sind sowohl  $R$  und  $R'$  als auch  $K$  und  $K'$  unbekannt. Die informationen über diese Matrizen sind in der FUndamentalmatrix integriert. Bei  $F$  werden die Matrizen  $K$  und  $K'$  nicht mit den Bildpunkten multipliziert, sondern sind in der Fundamentalmatrix mit beinhaltet[5]. Sind die Kameraparameter nicht bekannt, kann allein durch korrespondierende Bildpunkte die Fundamentalmatrix geschätzt werden, was für die Szenenrekonstruktion von elementarer Bedeutung ist[3, 11, 2, 5, 4]. Wie man auf die Fundamentalmatrix kommt wird ebenfalls im Kapitel Virtuelle Rekonstruktion aufgezeigt.

$$\vec{m}'_{\tau'}^T K'^{-T} E K^{-1} \vec{m}_\tau = 0 \quad (4.20)$$

$$\vec{m}'_{\tau'}^T F \vec{m}_\tau = 0 \quad (4.21)$$

Ist entweder  $F$  oder  $E$  über korrespondierende Punkte geschätzt worden, können Epipole und Epipolarlinien der jeweiligen korrespdierenden Punkt über diese Matrizen ermitteln werden, ohne das dafür die genauen Kameraparameter  $R$  und  $K$  bekannt sein müssen[3, 5, 1]. Für die Epipole gilt, dass sie gleich demjenigen Vektor sind, der die Gleichungen 5.22 und 5.23 erfüllt. Dementsprechend muss für die Bestimmung der Epipole nur der Kern der Matrix  $F$  ermittelt werden. Selbes gilt für die essentielle Matrix  $E$ [3, 5, 1].

$$Fe = 0 \quad (4.22)$$

$$F^T e' = 0 \quad (4.23)$$

Um die zu  $m_\tau$  korrespondierende Epipolarlinie  $l'$  zu finden, muss der Bildpunkt einfach mit der  $F$  multipliziert werden und anders herum, um die zu Punkt  $m'_\tau$  korrespondierende Epipolarlinie  $l$  zu erhalten wird  $F$  transponiert und mit  $m'_\tau$  multipliziert[3, 5].

$$l' = Fm \quad (4.24)$$

$$l = F^T m' \quad (4.25)$$

Das wiederum gleicht der bereits bekannten Beziehungsgleichung der Homographien mit  $m' = Hm$  und  $m' = H^T m$ . Während bei der Homographie eine Beziehung zwischen den korrespondierenden Punkten beschrieben wird. Wird in der Epipolargeometrie eine Beziehung zwischen Punkt und korrespondierender Epipolarlinie beschrieben. Nachdem mit der Epipolargeometrie alle theoretisch notwendigen Grundlagen für die Szenenrekonstruktion aufgeführt wurden, werden diese jetzt in den folgenden Kapitel, welche einmal eine virtuelle Rekonstruktion und einmal eine reelle Rekonstruktion vorführen, zum Einsatz gebracht. (Ok letzter satz ist richtig mies ...)

# 5 Virtuelle Rekonstruktion

Nachdem die theoretischen Grundlagen geschaffen wurden, wird nun der Algorithmus für die Rekonstruktion der Szene aus einer Stereoskopischen Bildaufnahme vorgestellt, welcher im Laufe dieser Masterarbeit entstanden ist. Zuerst wird die Funktionsweise und der Ablauf des Algorithmus anhand eines eigens erstellten virtuellen Beispiels näher gebracht. Dieses dient gleichzeitig dazu, die Funktionalität des Algorithmus unter optimal Bedingungen zu veranschaulichen. Im Anschluss wird der Algorithmus auf ein reales Beispiel einer Stereoaufnahme angewendet. Ein weiterer Vorteil, den das virtuelle Beispiel mit sich bringt, ist, dass wenn im real Beispiel Fehler oder Unklarheiten beim Anwenden des Algorithmus auftreten sollten, diese im virtuellen Beispiel nachgestellt und simuliert werden können. Anhand dessen, kann dann die Ursache des Fehlers ausfindig gemacht werden und ein Lösungsansatz entwickelt werden. Abbildung 5.1 veranschaulicht den Arbeitsprozess des Algorithmus vom Aufbau der Szene bis zu Szenerekonstruktion. In den folgenden Abschnitten des Kapitels, werden die einzelnen Schritte der Reihe nach beschrieben.

dass entstehende Fehler oder Unklarheiten im realen Beispiel hier simuliert werden können und somit Lösungsansätze für diese zu finden. Für das virtuelle Beispiel, wurde ein Quader in einem Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$  platziert. Innerhalb dieses Koordinatensystems wurden des Weiteren zwei virtuelle Kameras  $C_\delta$  und  $C'_\delta$  eingefügt, welche jeweils ein eigenes Koordinatensystem  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (b_1, b_2, b_3, C)$  und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C')$  besitzen.

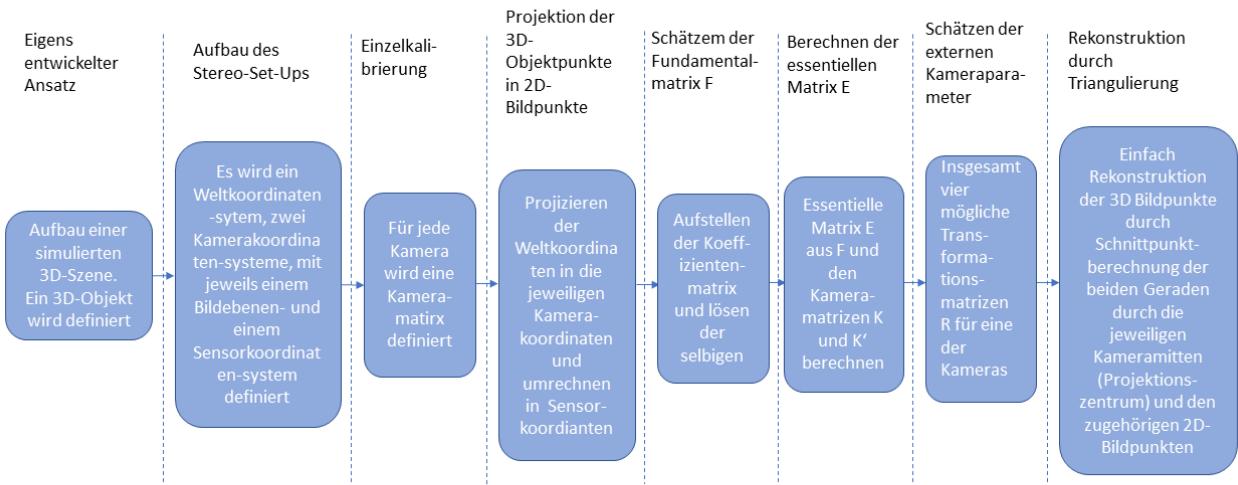


Abbildung 5.1: Arbeitsprozesse der Stereoanalyse bei Verwendung von eigens erstellten synthetischen Bilddaten

(Noch sagen dass sensorkoordinatensystem und Bildebenenkoordinatensystem im virtuellen Beispiel gleich definiert sind.)

Um den Mathematischen Vorgänge der stereoskopischen Szenenrekonstruktion zu veranschaulichen und besser nachvollziehen zu können, wurde ein Minimalszenario erstellt. Mit Hilfe dieses Minimalszenarios, können Theorien besser getestet und bestimmte Situationen simuliert werden. Des Weiteren kann es von Nutzen sein, wenn es darum geht, Fehler in Realbeispielen nachzustellen oder eine Lösung

für diese zu finden. Für dieses Minimalscenario wurde ein Objekt, in diesem Falle ein Quader, in ein zuvor definiertes Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = (d_1, d_2, d_3)$  platziert. Außerdem wurden zwei Kameras  $(C, \beta)$  mit  $\beta = (b_1, b_2, b_3)$  und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = (b'_1, b'_2, b'_3)$  definiert und in  $(O, \delta)$  platziert. Kamera eins  $(C, \beta)$  ist Deckungsgleich mit  $(O, \delta)$ . Kamera zwei  $(C', \beta')$  wurde von  $C$  in positive  $d_1$ -Richtung, verschoben und um einen Winkel  $\alpha$  zu  $C$  um die eigene  $b'_3$ -Achse rotiert. Die verwendeten kartesischen Koordinatensysteme sind in diesem Minimalbeispiel alle rechtshändig orientiert. Die äußeren und inneren Kameraparameter wurden für den Aufbau der Szene festgelegt. Dies hat den positiven Effekt, dass somit die späteren Ergebnisse besser validiert werden können. In den Abbildung 5.2 bis 5.4 wird der Aufbau noch einmal genauer veranschaulicht.

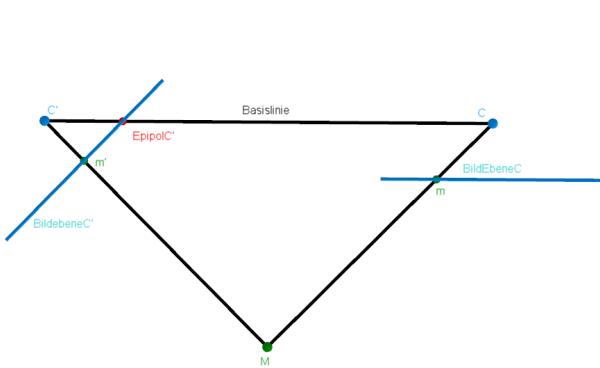


Abbildung 5.2: vereinfachte Top-Down-Ansicht des Szenenaufbaus des Minimalbeispiels

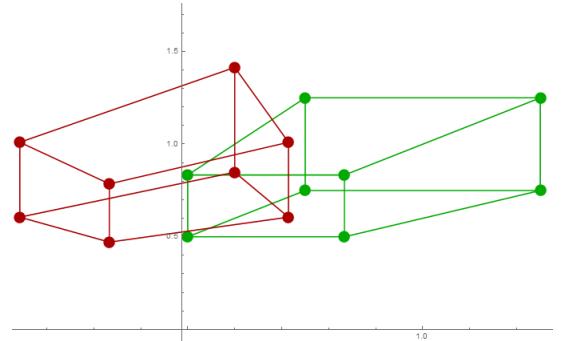


Abbildung 5.3: In Grün ist die Abbildung auf der Bildebenen  $I$  von  $C$  und in rot ist die Abbildung auf der Bildebenen  $I'$  von  $C'$

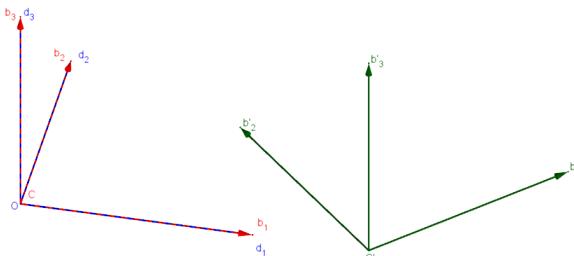


Abbildung 5.4: In Blau und Rot sind jeweils das Welt- und Kamerakoordinatensystem von Kamera eins zu sehen. In grün ist das gedrehte Koordinatensystem von Kamera 2 zu sehen.

## 5.1 Vorgehen: Projektion eines Quaders in zwei verschiedene transformierte Kameras

Für die Stereokamerakalibrierung wird  $C'$  relativ zu  $C$  um einen Vektor  $\vec{V}'$  verschoben und anschließend um einen Winkel  $\alpha$  um die  $b'_3$  Achse gedreht. Für die Rotation um  $b'_3$  wird eine Drehmatrix  $D'$  aufgestellt.

$$D' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Um die Transformationsmatrix  $R'$ , welche die Rotation und die Translation von  $C'$  beinhaltet, zu erhalten werden  $D'$  und  $\vec{V}'$  miteinander verrechnet.

$$\vec{V}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v'_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v'_3 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$R' = D'^T \cdot \vec{V}' \quad (5.3)$$

$$R' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v'_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v'_3 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$R' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) & -v'_1 \cos(\alpha) + v'_3 \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & -v'_2 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & -v'_1 \sin(\alpha) - v'_3 \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Die entstandene Matrix  $R'$  beschreibt die Transformation  $C'$  und somit auch die Transformation von Punkten des Koordinatensystems  $(C, \beta)$  in  $(C', \beta')$ . Da  $(C, \beta) = (O, \delta)$  ist, beinhaltet die Transformationsmatrix  $R$  für  $C$  weder eine Translation noch eine Rotation.

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$R = [I|V] \quad (5.7)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

## 5.2 Berechnung der Projektionsmatrizen

Die Eckpunkte des Quaders  $A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta, A'_\delta, B'_\delta, C'_\delta, D'_\delta$  sind bekannt. Neben den Eckpunkten des Quaders wird noch ein neunter Punkt  $E_\delta$  außerhalb des Quaders platziert und zwar so, dass es zu keinen linearen Abhängigkeiten zwischen  $E_\delta$  und den anderen Punkten kommt. So kann vermieden werden, dass die später aufgestellt Koeffizientenmatrix, zum berechnen der Fundamentalmatrix, einen Rang kleiner als acht bekommt und somit zwei linear unabhängige Lösungen ausgibt[3]. Im Unterkapitel Fundamentalmatrix und der eight-Point-Algorithmus wird nochmal genauer drauf eingegangen, was das für  $F$  bedeutet. Fürs erste wird festgelegt, dass insgesamt neun Punkte sich in der Szene befinden. Um diese Punkte auf die Bildebenen  $(I, \tau)$  und  $(I', \tau)$  zu projizieren, müssen neben den Transformationsmatrizen  $R$  und  $R'$  noch die Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  festgelget werden.

$$K = \begin{bmatrix} \zeta_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$K' = \begin{bmatrix} \zeta_{C'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{C'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{C'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Sind  $R, R', K$  und  $K'$  bekannt, können die Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$  berechnet werden. Vorher werden  $R$  und  $R'$  noch projektiv erweitert.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$P = K \cdot R \quad (5.12)$$

$$P = \begin{bmatrix} \zeta_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$P' = K' \cdot R' \quad (5.14)$$

$$P' = \begin{bmatrix} \zeta_{C'} \cos(\alpha) & 0 & \zeta_{C'} \sin(\alpha) & -\zeta_{C'}(v'_1 \cos(\alpha) + v'_3 \sin(\alpha)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_{C'} - v'_2 & 0 \\ \zeta_{C'} \sin(\alpha) & 0 & \zeta_{C'} \cos(\alpha) & -\zeta_{C'}(v'_1 \sin(\alpha) + v'_3 \cos(\alpha)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

### 5.3 Transformation der Objektpunkte von Weltkoordinaten in Kamerakoordinaten

Die 3D-Punkte  $A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta, A'_\delta, B'_\delta, C'_\delta, D'_\delta, E_\delta$ , werden um eine Homogene Komponenten erweitert und mit den Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$  zu, auf die Bildebenen  $I$  und  $I'$  projizierten, Punkten der Kamerakoordinatensysteme  $(C, \beta)$  und  $C', \beta'$  transformiert.

$$Q_\beta = P \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} E_\delta \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$Q_{\beta'} = P' \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D'_\delta \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} E_\delta \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Die entstandenen Bildebenenkoordinaten zur Basis der Kamerakoordinatensysteme müssen dann wieder auf eine homogene Form gebracht werden, indem sie durch ihre jeweils letzten Komponenten dividiert werden.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \\ \gamma \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_\beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{\gamma} \\ \frac{b_3}{\gamma} \\ \frac{b_2}{\gamma} \\ \frac{\gamma}{\gamma} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_\beta = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Der in Gleichung 4.18 verwendete Kamerapunkt  $A_\beta$  liegt direkt auf der Bildebene  $I$ , was durch die Projektionsmatrix  $P$  bedingt wurde. Die Tiefenkomponente entspricht deshalb nach der homogenisierung des Punktes dem Wert  $\zeta$ , welcher den Abstand  $\overline{IC}$  beschreibt. Um die 3D-Kamerapunkte in 2D-Bildebenenpunkte zur Basis  $(I, \tau)$  mit  $\tau = (t_1, t_2)$  und für  $C'$  entsprechend  $(I', \tau')$  mit  $\tau' = (t'_1, t'_2)$

umzuwandeln, muss lediglich der Tiefenwert  $\zeta$  entfernt und durch die Homogene Komponenten ersetzt werden. In Abbildung 4.4, sind die entstehenden Abbildilder auf die jeweiligen Bildebenden in 2D-Bildebendenkoordinaten  $(I, \tau)$  und  $(I', \tau')$  zu sehen.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$\rightsquigarrow A_\tau = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

(5.22)

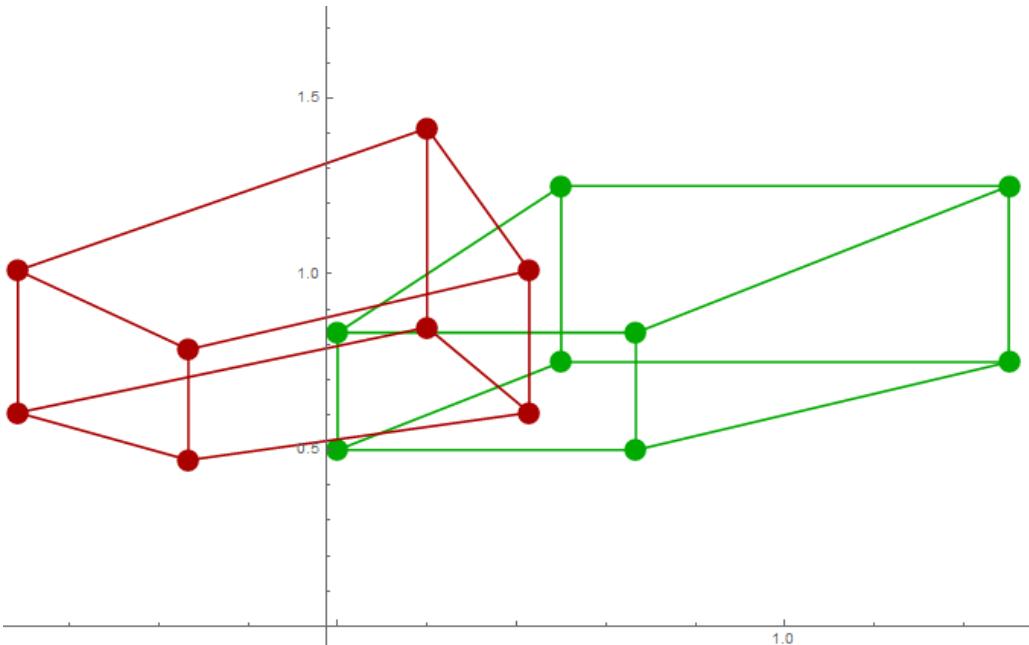


Abbildung 5.5: Grün zeigt den Quader welcher auf  $I$  von  $C$  abgebildet wird. Das größere Quadrat sind die vorderen Punkte  $A, B, C, D$ , das kleinere Quadrat sind die hinteren Punkte  $A', B', C', D'$ . Der Punkt  $E$  ist weiter weg von den Abbildungen und deshalb auf dieser Abbildung momentan nicht zu sehen. Rot zeigt denselben Quader auf  $I'$  von  $C'$  abgebildet.

## 5.4 Umrechnung von Bildebendenkoordinaten in Sensorkoordinaten

Für die Umrechnung der Bildebendenkoordinaten  $A_\tau, B_\tau, C_\tau, D_\tau, A'_\tau, B'_\tau, C'_\tau, D'_\tau, E_\tau$  und  $A_{\tau'}, B_{\tau'}, C_{\tau'}, D_{\tau'}, A'_{\tau'}, B'_{\tau'}, C'_{\tau'}, D'_{\tau'}, E_{\tau'}$  in Sensorkoordinaten  $(S, \sigma)$  mit  $\sigma = (\vec{u}, \vec{v})$ , muss der sogenannte Pixelpitch des Sensors bekannt sein. Für das Minimalbeispiel wird ein PixelPitch von 1 angenommen. Die Bildebendenkoordinaten werden so 1:1 in die Sensorkoordinaten umgesetzt. In Realbeispielen ist dies aber eher selten der Fall. Die Sensorkoordinaten sind im normalfall in Pixeleinheiten gegeben und werden für die Berechnung der Fundamentalmatrix benötigt.

$$\sigma = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (5.23)$$

$$\vec{u} = u_1 t_1 + u_2 t_2 \quad (5.24)$$

$$\vec{v} = v_1 t_1 + v_2 t_2 \quad (5.25)$$

$$S_\sigma = I_\tau + p_{x\tau} + p_{y\tau} \quad (5.26)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, S_\sigma) = (t_1, t_2, I\tau) \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & z_1 \\ v_1 & v_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Mit dem Berechnen der Sensorkoordinaten ist der Aufbau der Szene vollendet. Das Ergebnis sind zwei Bilder des Quaders von zwei verschiedenen Kameras mit momentan noch gleicher Auflösung. In den nächsten Schritten soll nun anhand der Bildpunkte eine Rekonstruktion der externen Kameraparameter und eine Rekonstruktion der synthetischen Szene folgen. Die intrinsischen Parameter werden in dieser Arbeit immer als bereits bekannt festgelegt. (Hier vllt noch erwähnen, dass die calibrierung der inneren Kameraparameter in einer anderen Arbeit behandelt wurde, außerdem kann hier auch eine getrennt kalibrierung beider kameras durchgeführt werden)

## 5.5 Fundamentalmatrix und der eight-Point-Algorithmus

Nachdem nun die Bildkoordinaten in Pixel des Quaders auf den Bildern der beiden Kameras bekannt sind, kann nun die eigentliche Rekonstruktion der externen Kameraparameter und die 3D-Szenenrekonstruktion beginnen. Der erste Schritt beinhaltet die Ermittlung der Fundamentalmatrix  $F$  mit den korrespondierenden Bildpunkten der beiden Kamerabilder mit Hilfe des sogenannten *8-Point-Algorithmus*. Der *8-Point-Algorithm* ist eine lineare Technik die angewandt wird, um die essentielle Matrix und die Fundamentalmatrix aus  $n \geq 8$  Punkten zu schätzen [11, 3]. Der Algorithmus benötigt  $n \geq 8$  Punkte, um ein valides eindeutiges Ergebnis zu liefern [3, 4]. Es besteht noch die Möglichkeit den *7-Point-Algorithm* anzuwenden, welcher nach dem selben Prinzip wie sein Verwandter *8-Point-Algorithm* verfährt, jedoch kein eindeutiges Ergebnis liefert. Mit sieben Punkten bekommen wir als Lösung zwei linear unabhängige Kerne als Lösung der zuvor aufgestellten Koeffizientenmatrix mit welchen für ein eindeutiges Ergebnis noch weiter verfahren werden muss [3, 4]. Die aufgestellte Koeffizientenmatrix, hat im Fall des *7-Point-Algorithm* nämlich nur den Rang 7 [3]. In Für Schätzung von  $F$  wurde in diesem Minimalbeispiel und auch später in Realbeispiel der *8-Point-Algorithm* verwendet. Im Falle des Minimalbeispiels, wurde mit einem zusätzlichen neunten Punkt auch noch dafür gesorgt, dass die aufgestellte Koeffizientenmatrix auch den Rang 8 besitzt. Somit kann, wie bei der Bestimmung der Homographie, einfach der Nullraum der Koeffizientenmatrix bestimmt werden, welcher die Einträge der 3x3-Matrix von  $F$  liefert [3]. Besitzt die Koeffizientenmatrix  $A$  einen Rang größer 8, so wird auch hier mit einem *least-square*-Verfahren, mit Hilfe der Singulärwertszerlegung, angewendet werden, so dass  $\|A \cdot f\|$  minimal wird.  $f$  ist der Singulärvektor, welcher mit dem kleinsten Singulärwert korrespondiert [3]. Die genaue Abfolge des Verfahrens, wird im Kapitel Singularity-Constraint der Fundamentalmatrix genauer aufgezeigt. Da im Minimalbeispiel der Rang 8 der Koeffizientenmatrix erzwungen wurde, reicht es vorerst den Nullraum zu bestimmen. Die Koeffizientenmatrix wird aus dem Ausdruck *epipolar-constraint* in Gleichung 4.29 aufgestellt. Der ermittelte Kern und alle seine Vielfache sind mögliche Lösungen für  $F$  [3, 4].

$$m'^T_{\sigma'} \cdot F \cdot m_{\sigma} = 0 \quad (5.29)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{122} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} x'_n & y'_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & f_{122} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.31)$$

$$f_{11}x_nx'_n + f_{12}y_nx'_n + f_{13}x'_n + f_{21}x_ny'_n + f_{22}y_ny'_n + f_{23}y'_n + f_{31}x_n + f_{32}y_n + f_{33} = 0 \quad (5.32)$$

$$(x_nx'_n, y_nx'_n, x'_n, x_ny'_n, y_ny'_n, y'_n, x_n, y_n, 1) \cdot f = 0 \quad (5.33)$$

$$\begin{bmatrix} x_1x'_1 & y_1x'_1 & x'_1 & x_1y'_1 & y_1y'_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2x'_2 & y_2x'_2 & x'_2 & x_2y'_2 & y_2y'_2 & y'_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_nx'_n & y_nx'_n & x'_n & x_ny'_n & y_ny'_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.34)$$

## 5.6 Epipole und Epipolargeraden

Mit Hilfe der Fundamentalmatrix und dem Wissen über die Epipolargerometrie, kann man die Epipole  $e$  und  $e'$ , sowie die Epipolargeraden  $l$  und  $l'$  ermitteln.

$$l' = F \cdot m \quad (5.35)$$

$$l = F^T \cdot m' \quad (5.36)$$

$l'$  ist die zu  $m$  korrespondierende Epipolargerade.  $l$  ist die zu  $m'$  korrespondierende Epipolargerade. Zu Berechnung des Epipols  $e$  muss der Rechte Kern von  $F$  ermitteln werden und für den Epipol  $e'$  brauchen wir den linken Kern. Die Abbildung 4.5 zeigt, dass Ergebnis der Epipole im Minimalbeispiel.

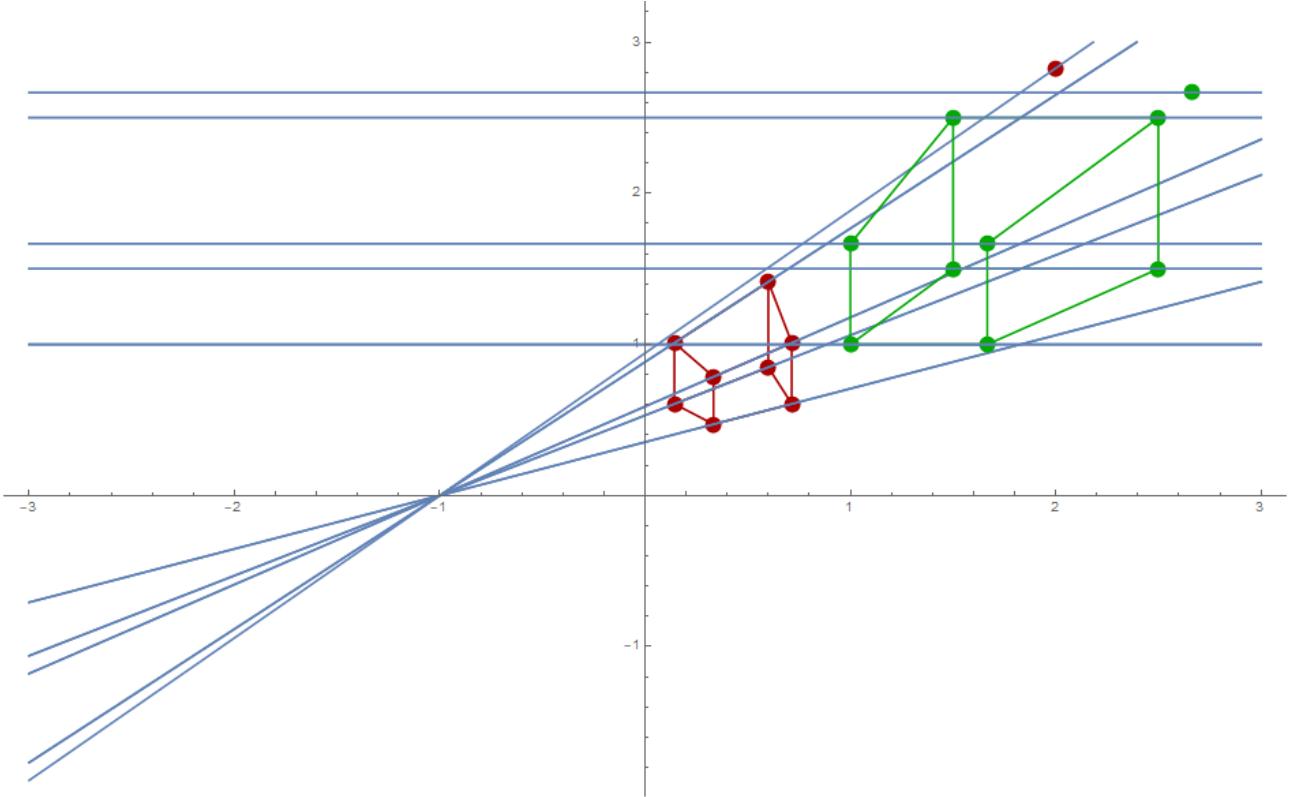


Abbildung 5.6: Die blauen Geraden zeigen die jeweiligen Epipolgeraden. Die vom roten Quader schneiden sich bei  $-1$  im Epipol  $e'$ . Die Epipolgeraden vom grünen Quader schneiden sich im Epipol  $e'$  im Unendlichen, weshalb die Epipolarlinien Parallel zueinander verlaufen.

### 5.6.1 Geometrische Konstruktion der Epipole und der Epipolarlinien

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Epipole und der Epipolgeraden ist zwar schnell aber zur Verdeutlichung der geometrischen Beziehungen untereinander wird nochmal eine rein geometrische Konstruktion der Epipole und der Epipolgeraden durchgeführt. Im nachfolgenden Beispiel wird der Epipol  $e'$  geometrisch konstruiert. Umrechnung von allen Punkten in ein gemeinsames Koordinatensystem, zum Beispiel in  $(C, \beta)$ . Für die Konstruktion der Epipole wird die BasisLinie  $B = C'_\beta - C_\beta$ , ein Bildebenenpunkt  $A_{C'_\beta}$  auf  $I'$  und die Position von  $I'$  selbst benötigt.

$$B = C'_\beta + t \cdot (C'_\beta - C_\beta) \quad (5.37)$$

Um den Epipol zu ermitteln wird der Schnittpunkt der Gerade  $B$  mit der Bildebenen  $I'$  von  $C'$  benötigt. Die Bildebene  $I'$  wird in einer Ebenen Normalenform dargestellt. Als Bildebenenpunkt wird  $A_{C'_\beta}$  von  $I'$  von  $C'$  gewählt.

$$\vec{n}_0 \cdot [\vec{x} - A_{C'_\beta}] \quad (5.38)$$

Um den Schnittpunkt der Gerade  $B$  mit der Ebene  $I$  zu berechnen, wird die Gerade  $B$  in die Ebenengleichung eingesetzt und es wird ein Wert für  $t$  ermittelt.

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{x} - \vec{n}_0 \cdot \vec{a} \quad (5.39)$$

$$(5.40)$$

Danach wird die Geradengleichung *BaseLine* in die Ebenengleichung *ImagePlane* eingesetzt und es wird ein Wert für  $t$  ermittelt. Der berechnete Wert für  $t$  wird dann wiederum in  $G$  eingesetzt und das

Ergebnis ist der Epipol  $e'_\beta$ . Dieser kann dann wieder über bereits bekannte Transformationen in die Sensorkoordinaten von  $(S', \sigma)$  bezüglich  $C'$  überführt werden.

$$e'_\sigma = P' \cdot e'_\beta \quad (5.41)$$

Für die Epipolarlinien  $l'_{\sigma'}$  durch  $e'_{\sigma'}$ , müssen einfach Geradengleichungen eines Sensorpunktes, beispielsweise  $A_{\sigma'}$ , durch  $e'_{\sigma'}$  aufgestellt werden. Die entstandenen Linie ist dann die Epipolarlinie zum Punkt  $A_{\sigma'}$  und gleichzeitig die korrespondierende Epipolarlinie zum Sensorpunkt  $A_\sigma$  von  $I$  von  $C$ .

$$g := A_{\sigma'} + t \cdot (A_{\sigma'} - e'_{\sigma'}) \quad (5.42)$$

## 5.7 Essentiellen Matrix

Für die Rekonstruktion der externen Kameraparameter, gibt es verschiedene Ansätze [3]. Es ist zum einen Möglich, ohne Vorwissen der Kameramatrizen oder Transformationsmatrizen, aus der Fundamentalmatrix über den sogenannten *Stratified approach* die komplette Projektionsmatrix  $P$  und  $P'$  zu ermitteln, jedoch ohne weitere Informationen über die 3S-Szene nur bis zu einem Projektiven Vieldeutigkeit[3]. Da in dieser Arbeit davon ausgegangen wird, dass die Kameras zuvor einzeln Kalibriert wurden und die intrinsischen Kameraparameter bereits bekannt sind(hier vllt vorherige Arbeit erwähnen), wird für die Rekonstruktion der externen Kameraparameter ein Ansatz verfolgt, in welchen die essentielle Matrix zum Einsatz kommt. Die essentielle Matrix ist eine Spezialform der Fundamentalmatrix und beschreibt den *epipolar constraint*, im kalibrierten Fall, zwischen den normalisierten Bildkoordinaten  $\hat{m}_\sigma$  und  $\hat{m}'_{\sigma'}$ [3, 5, 1, 11, 4].

$$\hat{m}'_{\sigma'}^T \cdot E \cdot \hat{m}_\sigma = 0 \quad (5.43)$$

Ist die Fundamentalmatrix  $F$  bereits ermittelt worden und die Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  bekannt, kann die essentielle Matrix wie im Kapitel Epipolar Geometrie aus  $F$  berechnet werden. Die essentielle Matrix ist eine Fundamentalmatrix, welche zu einem paar normalisierten Projektionsmatrizen  $P$  mit  $P = [I|0]$  und  $P'$  mit  $P' = [R'|V']$  korrespondierend ist[3, 11, 1, 4]. Um eine Projektionsmatrix  $P' = K'[R'|V']$  auf die normalisierte Form zu bringen, müssen die intrinsischen Parameter für  $K'$  bekannt sein.

$$m'_\sigma = P' \cdot M_\delta \quad (5.44)$$

$$m'_\sigma = K'[R'|V'] \cdot M_\delta \mid \cdot K'^{-1} \quad (5.45)$$

$$K'^{-1} \cdot m'_\sigma = K'^{-1} \cdot K'[R'|V'] \cdot M_\delta \quad (5.46)$$

$$\hat{m}'_\sigma = [R'|V']M_\delta \quad (5.47)$$

$M_\delta$  ist der ein Objektpunkt im 3D-Raum, welcher mit  $P'$  zum Sensorpunkt  $m'_{\sigma'}$  abgebildet wird. Nach der Normalisierung, wird  $\hat{m}'_\sigma$  als normalisierte Koordinat bezeichnet und die entstandene Projektionsmatrix  $P' = [R'|V']$  als normalisierte Projektionsmatrix[3, 4]. Die essentielle Matrix  $E$  beschreibt dann die Korrespondenz zwischen den korrespondierenden normalisierten Koordinaten  $\hat{m}_\sigma$  und  $\hat{m}'_{\sigma'}$ , wie in Gleichung 4.43 gezeigt. Um  $E$  aus  $F$  zu gewinnen, werden die Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  mit  $F$  multipliziert. Zu Erinnerung im Kapitel Epipolar Geometrie wurde genau diese Beziehung zwischen  $E$  und  $F$  in den Gleuchungen 3.98 bis 3.101 aufgeführt.

$$E = K'^T \cdot F \cdot K \quad (5.48)$$

Das Ergebnis dieser Gleichung 4.48 und alle deren Vielfache, sind mögliche Lösungen für die essentielle Matrix. Wie die Fundamentalmatrix muss auch die essentielle Matrix einen Rang von 2 haben. Des Weiteren darf eine 3x3-Matrix nur dann als essentielle Matrix bezeichnet werden, wenn die Singulärwerte, welche durch eine Singulärwertszerlegung ersichtlich werden, bestimmte Merkmale aufweisen. So müssen zwei der drei Singulärwerte gleich und die dritte null sein[3]. Des Weiteren muss für die Determinante gelten, dass  $\det(E) = 0$  ist und die Quadratwurzel der Eigenwerte müssen wieder die Singulärwerte ergeben. Die essentielle Matrix kann, wie die Fundamentalmatrix auch, über den *8-Point-Algorithm* ermittelt werden. Jedoch müssen auch hier die intrinsischen Kameraparameter  $K$  und  $K'$  bekannt sein. Die korrespondierenden Punkte, werden in normalisierte Bildkoordinaten umgerechnet und dann in eine Koeffizientenmatrix gleich der Matrix in Gleichung 4.34 eingetragen. Danach kann  $E$  entweder über die Bestimmung des Kerns oder, im Falle von Realen Bilddaten, dem *least-square-* Verfahren geschätzt werden[3, 4].

## 5.8 Exteren Kameraparameter mit essentieller Matrix

Mit der essentiellen Matrix ist es möglich die Transformationsmatrix  $R'$  zu ermitteln. Es wird davon ausgegangen, dass für  $R$  gilt  $R = [I|0]$ . Die aus  $E$  ermittelte Matrix  $R'$  beschreibt dann die Transformation von  $C'$  relativ zu  $C$ [3, 4]. Um die externen Kameraparameter zu bestimmen, wird zunächst die essentielle Matrix  $E$  mit Hilfe der Singulärwertszerlegung in drei Matrizen zerlegt.

$$E = U\Sigma V^T \quad (5.49)$$

Die Singulärwerte befinden sich in der mittleren Matrix  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  wieder. Damit die Matrix  $E$  sich essentielle Matrix nennen darf, muss für zwei der Diagonaleinträge für die Singulärwerte gelten das  $\sigma_1 = \sigma_2$  und für  $\sigma_3$  muss dann dementsprechend gelten, dass  $\sigma_3 = 0$ . Sollten die Singulärwerte diesen Bedingungen nicht entsprechen, so wird ein so genannten *singularity-constraint*, der Form  $\Sigma = \text{diag}(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0)$ , erzwungen[3]. Im Minimalbeispiel kommt es auf Grund der eigens erstellten Bildpunkte zu keinen Bildfehlern, wie im Realbeispielen. Deswegen ist der *singularity-constraint* nicht notwendig, da die Bedingungen für  $E$  erfüllt sind.

Ein wichtiges Detail, was sich später auch auf die vier möglichen Ergebnisse für  $P$  auswirkt, ist noch zu beachten. Zum einen sollte einem bewusst sein, dass die Zerlegung der essentiellen Matrix keine eindeutige Lösung hervorbringen muss. Für  $E$  muss gelten, dass  $\det(E) = 0$  ist. Es wird also vorausgesetzt, dass die Determinante der aus der *SVD* gewonnenen Matrizen  $UV^T = 1$  ist. Angenommen aus der *SVD* von  $E$  ergibt sich für die Determinanten von  $UV^T = -1$ , so können die Determinanten der Matrizen  $U$  und  $V$  getrennt voneinander bestimmt werden. Sollte  $\det(U) = -1$  oder  $\det(V) = -1$  oder beides zusammen der Fall sein, so kann die jeweilige Matrix einfach mit  $-1$  multipliziert werden.  $E$  setzt sich zusammen aus einer Rotationsmatrix  $R$  und einer schiefsymmetrischen Matrix  $S$ .

$$E = [v]_x R \quad (5.50)$$

$$S = [v]_x \quad (5.51)$$

$$E = SR \quad (5.52)$$

Zur Schätzung von  $S$  und  $R$  werden des Weiteren die schiefsymmetrische Matrix  $W$  und die Blockdiagonale Matrix  $Z$  eingeführt[3]. Mit diesen Matrizen lassen sich die gesuchten  $R$  und  $S$  für  $C'$  rekonstruieren, jedoch nur bis zu einer gewissen Skaleninvarianz[3, 4].

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

Mit dem, je nach dem leicht modifizierten, Ergebnis der *SVD* von  $E$  lassen sich nun jeweils zwei mögliche Lösungen für  $S$  und  $R$  aufstellen.

$$S_1 = -UZU^T \quad R_1 = UW^TV^T \quad (5.54)$$

$$S_2 = UZU^T \quad R_2 = UWV^T \quad (5.55)$$

Um sicher zu gehen, dass es sich bei  $R_1$  und  $R_2$  auch um gültige Rotationsmatrizen handelt, kann eine Probe durchgeführt werden. Zum einen muss  $R \cdot R^T = I_{3x3}$  sein.  $I_{3x3}$  bezeichnet in diesem Fall die 3x3-Einheitsmatrix. Des Weiteren kann man überprüfen, ob die Determinante  $\det(R_1) = 1$  ist. Ist die Determinante = -1, so ist die Rotation für ein Rechtsdrehendes System, ist die Determinante = 1, so handelt es sich um ein linksdrehendes System[3].  $S_1$  und  $S_2$  sind jeweils schiefsymmetrische Matrizen aus welchen, jetzt noch zwei Lösungen für  $v$  finden lassen müssen[3].

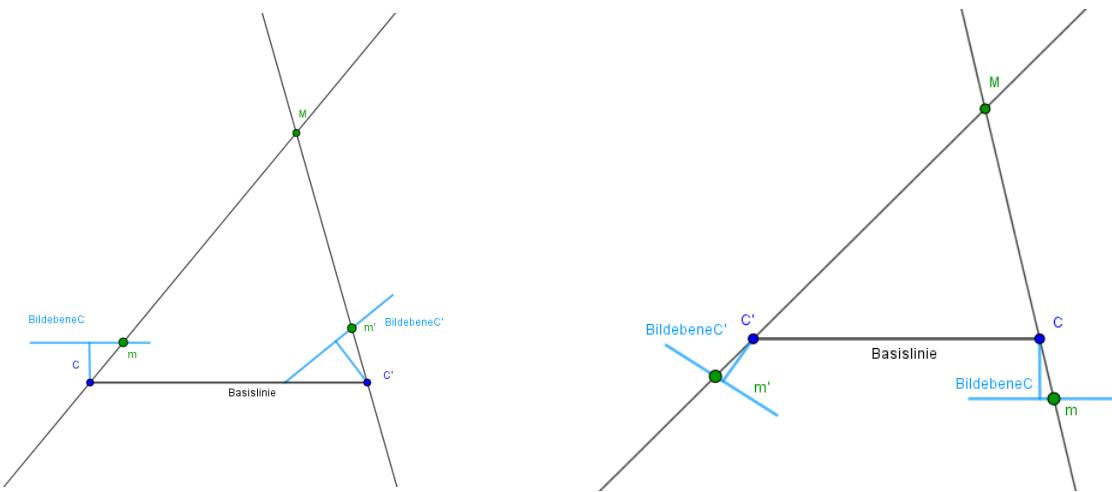
$$St = [v]_\times \cdot v = v \times v \quad (5.56)$$

Um  $v$  zu ermitteln muss also lediglich der Kern von  $S_1$  und  $S_2$  gefunden werden. Die jeweiligen Ergebnisse für  $v_1$  und  $v_2$  sind bis auf ihre Vorzeichen die selben.

Die externen Kameraparameter lassen sich wie gesagt nur bis zu einem Skalierungsfaktor genau bestimmen. Die Rotationen  $R$  ist von dieser Skaleninvarianz nicht betroffen, es betrifft nur den Translationsvektor  $\vec{v}$ . Wie mit der Skaleninvarianz weiter Verfahren wird, wird im nachfolgenden Abschnitt der Szenenrekonstruktion durch Triangulierung noch aufgeführt. Letztendlich können, für die Rekonstruktion der externen Kameraparameter vier Lösungen für  $P$  gefunden werden.[3, 4].  $\lambda v$  heißt dabei, dass sowohl  $v$  also auch alle Vielfache von  $v$ , Lösungen sein können, was durch die Skaleninvarianz der Lösung bedingt ist[3, 4].

$$P = [UWV^T| + \lambda v] \quad \text{oder} \quad [UW^TV^T| + \lambda v] \quad (5.57)$$

$$\text{oder} \quad [UWV^T| - \lambda v] \quad \text{oder} \quad [UW^TV^T| - \lambda v] \quad (5.58)$$



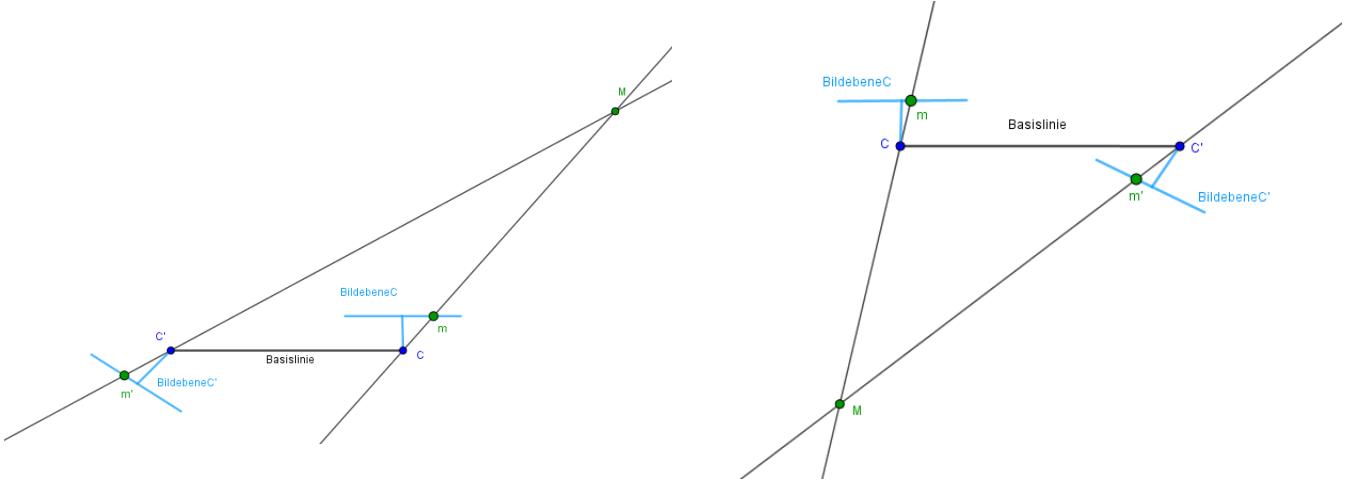


Abbildung 5.7: Anordnung der Kameras bei den vier verschiedenen Lösungen für  $P$

## 5.9 Szenenrekonstruktion durch Triangulation

Unter Triangulierung versteht man das Rekonstruieren der 3D-Szenenpunkte durch Schnittpunktberechnung derjenigen Geraden, welche durch die jeweiligen Projektionszentren der Kameras und deren korrespondierenden Bildpunkten auf deren Bildebenen gehen, so dass sich ein Dreick bildet.

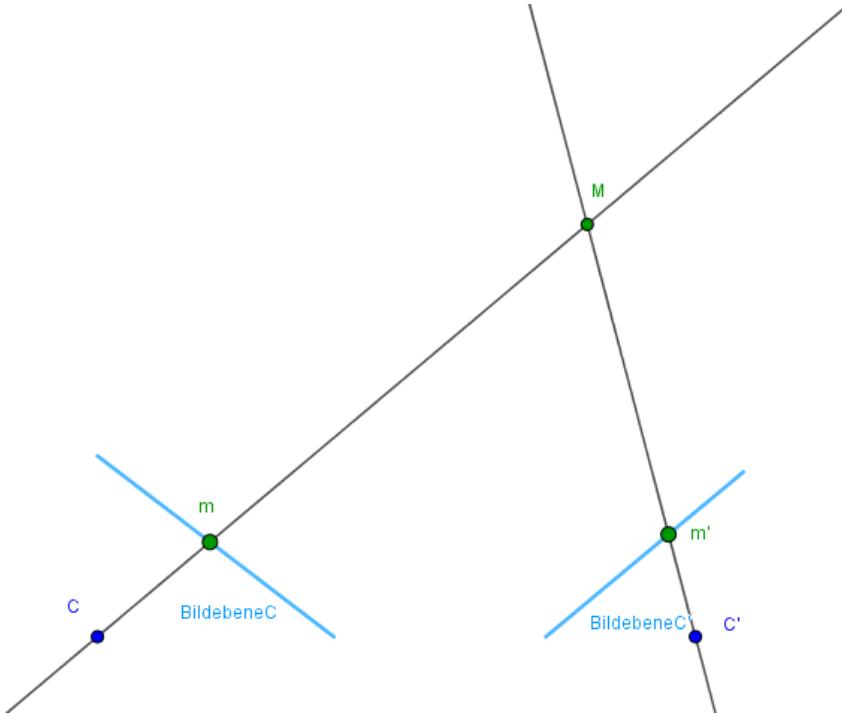


Abbildung 5.8: Optimale Triangulierung: Beide Geraden Treffen sich in einem Punkt im 3D-Raum

Da das Minimalbeispiel mit reinen Daten arbeitet, ist damit garantiert, dass die Linien sich in einem Schnittpunkt treffen. Anders hingegen wäre es in einem realen Beispiel mit korrespondierenden Punkten, welche Beispielsweise über einen SURF-Algorithmus detektiert wurden[18]. In Realbildern, können Bildfehler wie beispielsweise Rauschen nicht vermieden werden, des Weiteren können korrespondierende Punkte nicht immer exakt auf den Pixel genau bestimmt werden. Diese Fehler führen dazu, dass wenn ein Schnittpunkt der Geraden durch die vermeintlichen korrespondierenden Punkte nicht gefunden werden kann, da die Geraden sich sehr wahrscheinlich nicht in einem Punkt treffen werden[18, 3].

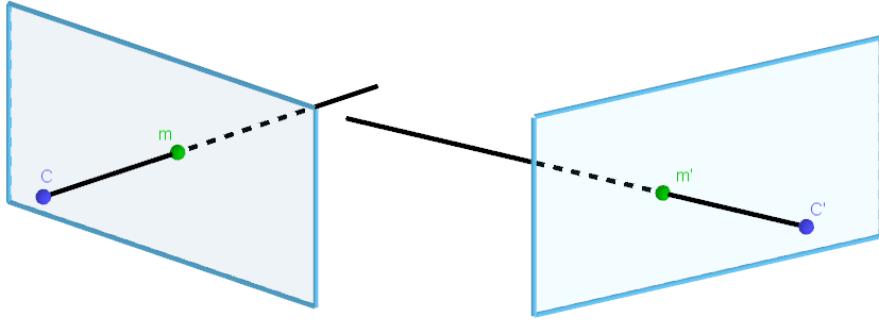


Abbildung 5.9: Durch Ungenauigkeiten in der korrespondierenden Punkte, verfehlten sich die Linien und es kommt zu keinem Schnittpunkt

Für diese Fälle gibt es mehrere Näherungsverfahren, wovon eines, im Kapitel Minimieren der Kostenfunktion durch Sampson-approximation, im Realbeispiel eingeführt wird[3]. In diesem Minimalbeispiel tritt der optimale Fall ein. Das bedeutet, dass ein zu Bildpunkt  $m$  korrespondierender Bildpunkt  $m'$  auf der zu  $m$  korrespondierenden Epipolarlinie  $l'$  liegt und somit garantiert ist, dass sich die Geraden  $mm'$  und  $m'm$  auf jedenfall in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Um den Schnittpunkt beider Geraden zu berechnen, werden zum einen die Bildpunkte  $A_\tau, B_\tau, C_\tau, D_\tau, A2_\tau, B2_\tau, C2_\tau, D2_\tau$  und  $A_{\tau'}, B_{\tau'}, C_{\tau'}, D_{\tau'}, A2_{\tau'}, B2_{\tau'}, C2_{\tau'}, D2_{\tau'}$ , sowie die korrekt ermittelte Projektionsmatrix  $P'$  von zuvor benötigt. Bei der Berechnung der externen Kameraparameter wurde festgesetzt, dass die Projektionsmatrix von Kamera eins  $P = [I|0]$  und dementsprechend  $P' = [R^T | -R^T V]$  die Transformation für Kamera zwei, ausgehend von Kamera eins ist. Also ist die Position von Kamera eins in Weltkoordinaten  $C_\delta = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Was jetzt noch fehlt ist die Position von Kamera zwei in Weltkoordinaten. Da die Szene dieses Minimalbeispiels durchkonstruiert wurde, ist  $C'$  eigentlich bekannt. Es soll nun aber angenommen werden, dass die Position von Kamera zwei nicht bekannt ist und diese wie im realen Fall erst einmal aus  $P$  berechnet werden muss. Um  $C'$  zu ermitteln, wird der Translationsvektor  $V$  aus  $P' = [R^T | -R^T V]$  benötigt.

$$C'_\delta = -R * (-R^T V) \quad (5.59)$$

Im nächsten Schritt, müssen die Bildebenepunkte von  $C'$  noch in das selbe Koordinatensystem wie die Bildebenepunkte von  $C$  transformiert werden. Da Kamera eins Deckungsgleich mit dem Weltkoordinatensystem ist, sind die Bildpunkt der Bildebene  $I$  von  $C$  bereits in Weltkoordinaten gegeben, diese müssen nur noch mit,  $\zeta$  als dritte Tiefenkomponenten  $z$ , erweitert werden. Die Bildpunkte von  $C'$ , werden ebenfalls mit ihrem  $\zeta$  erweitert und danach mit der Projektionsmatrix  $P$ , welche als  $V$  die Koordinaten von  $C'$  besitzt, in das Weltkoordinatensystem überführt. Sind die Basen der Bildpunkte von  $C_\delta$  und  $C'_\delta$ , mit  $\delta = \beta$  im selben Koordinatensystem, so können nun die Gleichungen durch die Projektionszentren  $C$  und  $C'$  und den entsprechenden Bildebene koordinaten  $A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta, A2_\delta, B2_\delta, C2_\delta, D2_\delta$  und den neu umgerechneten Punkten  $A'_\delta, B'_\delta, C'_\delta, D'_\delta, A2'_\delta, B2'_\delta, C2'_\delta, D2'_\delta$  gezogen. Beispielhaft wird dies Anhand der korrespondierenden Punkte  $A_\tau$  und dem umgerechneten  $A'\tau$  aufgezeigt.

$$\begin{aligned} A_\delta + t * (A_\delta - C_\delta) &= 0 \\ A'_\delta + t' * (A'_\delta - C'_\delta) &= 0 \\ \text{Geraden gleichsetzen:} \\ A_{\delta x} - t_x - C_{\delta x} &= A'_{\delta x'} - t'_x - C'_{\delta x'} \\ A_{\delta y} - t_y - C_{\delta y} &= A'_{\delta y'} - t'_y - C'_{\delta y'} \end{aligned}$$

Nun muss für jedes Linienpaar eine Lösung für  $t$  und  $t'$  gefunden werden und die Lösungen in die Gleichungen 4.65 und 4.66 eingesetzt werden. Es sollte für beide Gleichungen die selbe Lösung für den rekonstruierten Punkt  $A$  im Raum ergeben. Die Lösung entspricht meist noch nicht exakt dem eigentlichen Ergebnis, das liegt an der zuvor erwähnten Skaleninvariants der Rekonstruktion der externen Kameraparameter. Bei den zuvor ermittelten externen Kameraparametern, ist der Translationsvektor Skaleninvariant, was dazu führt, dass die rekonstruierten Objekte nach der Szenenrekonstruktion noch nicht ihrer Originalgröße entsprechen. Es wird noch ein Skalierungsfaktor benötigt, welcher die Szene auf Originalgröße skaliert. Hierfür ist es in einer Realsszene ratsam, wenn man zuvor von zwei Punkten in Szene den Abstand zueinander abmisst, um anhand dessen einen Skalierungsfaktor zu berechnen. Im hier beschriebenen Minimalbeispiel sind die Originalkoordinaten der Objektpunkte im Raum bekannt, weshalb hier nach dem passenden Vielfachen der Rekonstruierten Punkte gesucht werden kann. Da die Verhältnisse der Abstände der Punkte zueinander bei der Skalierung beibehalten wird, kommt zu keinen Verfälschungen des Objektes, da die Rotationen der beiden Kameras unangetastet bleibt. Abbildung 4.6 zeigt, dass sich durch verändern des Translationsvektors nur die Größe des Objektes ändert nicht aber seine Orientierung im Raum.

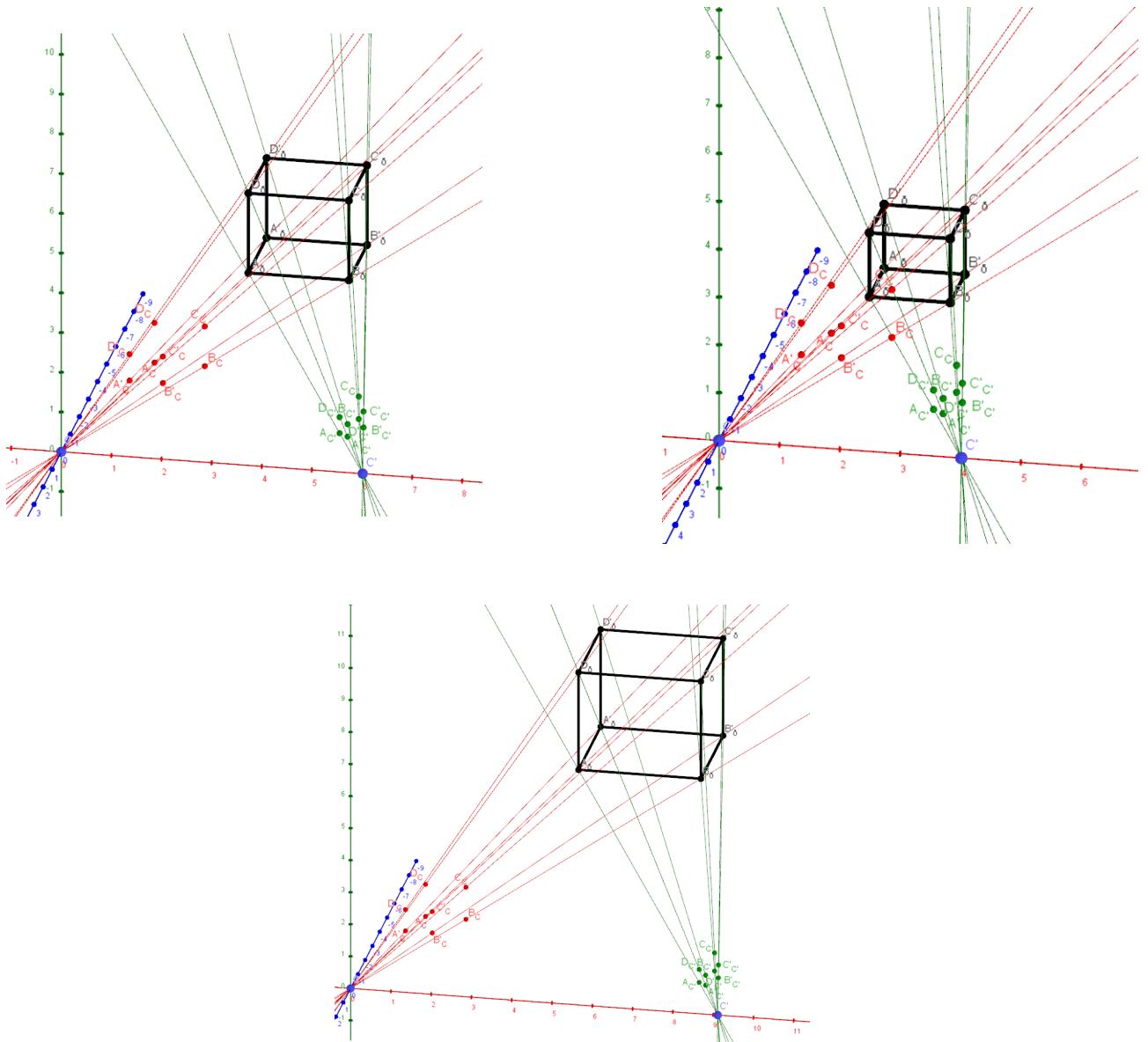


Abbildung 5.10: Veranschaulichung der Skaleninvarianz und dessen Auswirkung auf die geometrische Form der Objekte

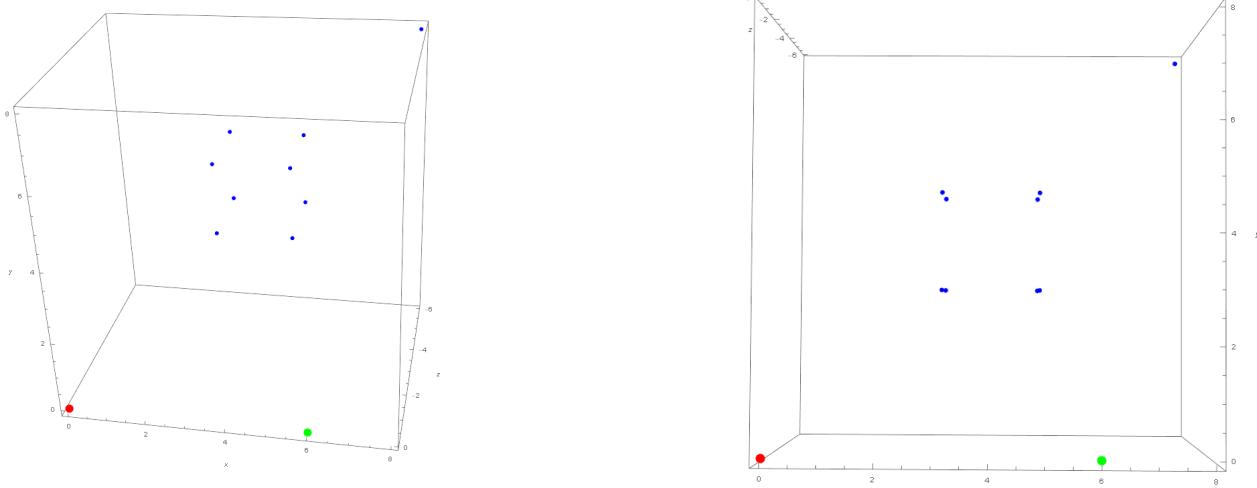


Abbildung 5.11: auf Originalgröße skalierte rekonstruierte Szene

Abbildung 4.7 zeigt die Komplett rekonstruierte Szene des Minimalbeispiels, welche beweist, dass die beschriebenen Methoden für das Minimalbeispiel mit reinen Daten und auch bei Kameras mit unterschiedlichen Auflösungen, funktioniert hat.

## 5.10 Rektifizierung

Im Minimalbeispiel ist die Triangulierung und Rekonstruktion der 3D-Weltpunkte ohne Kommunikationen durchführbar. Das liegt daran, dass mit reinen Werten gerechnet wird und Fehler wie Beispielsweise Bildrauschen nicht vorkommen. Im Minimalbeispiel kann davon ausgegangen werden, dass die Linien zweier korrespondierender Punkte sich, welche durch die jeweiligen Kamerazentren und Bildpunkte gehen, sich ziemlich sicher in einem Punkt treffen werden. In einem Beispiel mit realen Daten ist es nicht unwahrscheinlich, dass die herausgefilterten korrespondierenden Punkte, nicht zu hundert Prozent stimmen. Es kommt immer zu kleineren Abweichungen, was dazu führen kann, dass wenn die Linien der korrespondierenden Punkte im Realbild sich nicht treffen. Ein Grund dafür ist, dass sie nicht hundertprozentig auf der selben Höhe im Bild liegen und die Linien sich somit verfehlten

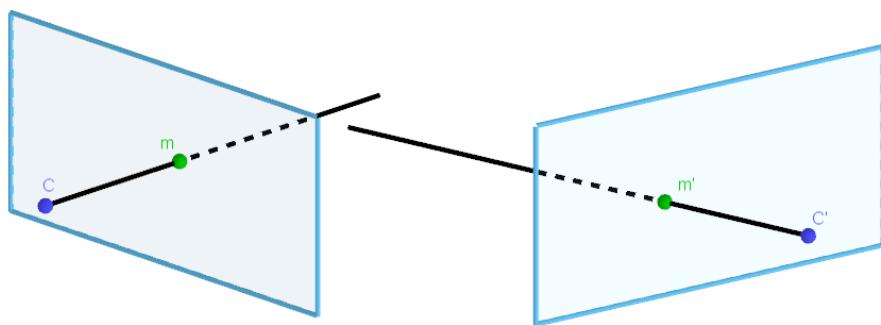


Abbildung 5.12: Durch Ungenauigkeiten in der korrespondierenden Punkte, verfehlen sich die Linien und es kommt zu keinem Schnittpunkt

Im Realbeispiel dieser Arbeit wird das Auftreten solcher Fehler durch das sogenannte *Sampson-Approximation* - Verfahren behoben, welches bei kalibrierten Fällen zum Einsatz kommt[3]. Mehr zu diesem Verfahren wird im Kapitel Minimieren der Kostenfunktion durch Sampson-approximation

aufgeführt. Das ist eine Möglichkeit um eine Szenerekonstruktion trotz Fehlerhafter korrespondierender Punkte zu ermöglichen. Ein weiteres weit verbreitetes Verfahren, ist cor der Szenenrekonstruierung durch Triangulierung eine Rektifizierung beider Bilder vorzunehmen[19, 20, 21, 22]. Da bestimmte Formen der Rektifizierung keine vorherige Kalibrierung der Kameras benötigen, wird diese Methode in den meisten gängigen Echtzeit-Szenenrekonstruktionen eingesetzt. [22, 21, 23]. Rektifizierte Bilder müssen zwei Eigenschaften erfüllen. Zum einen müssen alle Epipolareraden parallel zur x-Koordinatenachse verlaufen und zweitens müssen alle korrespondierenden Punkte die selben y-Koordinaten besitzen[20]. Mit Hilfe dieser Eigenschaften ist es somit möglich die entstandenen korrespondierenden Epipolarlinien als horizontale Scanlinien zu benutzen[21, 20]. Mit hilfe dieser Scanlinien und den darauf sich befindenden korrespondierenden Punkten ist es zum Beispiel Möglich eine Tiefenkarte des Bildes zu berechnen allein durch die Differenz der horizontalen Lage der korrespondierenden Punkte[21, 20].

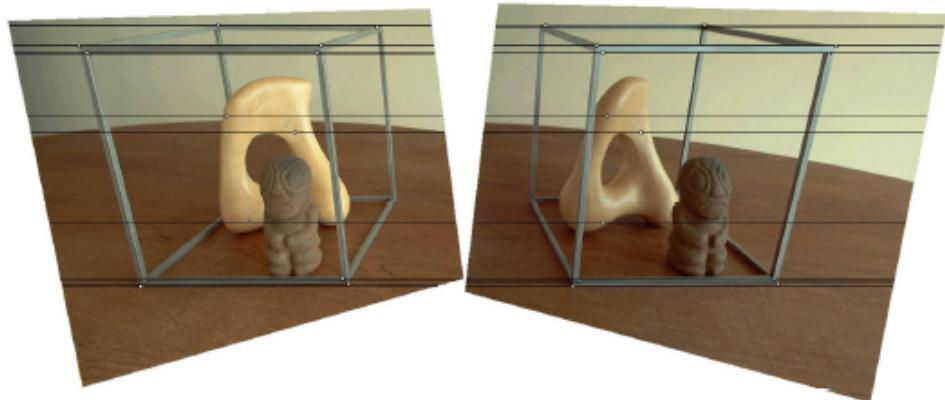


Abbildung 5.13: Beispiel eines rektifizierten Bildes. Quelle: [20]



Abbildung 5.14: Beispiel einer einfachen Tiefenkarte eines Stereobildpaars nach der Rektifizierung. Quelle: [21]

Die Rektifizierung, allem voraus vor allem die Optimierung des Rektifizierungsvorgangs, von Stereo- oder auch multplen- Kamerasystemen, wird heutzutage von vielen Entwicklergruppen der Computer Vision untersucht(Der satz ist mist!). Es gibt mittlerweile viele Ansätze, jedoch funktionieren nicht alle bei den selben Fällen. So setzten zum Beispiel manche Rektifizerungsalgorithmen voraus, dass die Bilder von Kameras mit selber Auflösung aufgenommen wurden. Ein Beispiel ist die Rektifizierung welche in *Matlab* verwendet wird [19]. Die Rektifizierung wurde anhand einer Methode implementiert, welcher sich ähnlich verhält wie in [24] beschrieben. Die Grundidee hier hinter ist, dass die Kameramatrizen von zwei Kameras so aufgebaut sind dass die intrinsischen Parameter die selben sind, sie sich aber in ihren Rotationen und Translationen voneinander unterscheiden. Die extrinsischen Kameraparameter werden dann dementsprechend so manipuliert, dass die Bildebenen Achsenparallel zueinander stehen[24, 22]. Um horizontale Epipolarlinien zu erhalten muss gleichzeitig die Basislinie zwischen den zwei Kamerazentren parallel zur neuen x-Achse beider Kameras sein. Zudem soll, um eine angemessene Rektifizierung zu gewährleisten, müssen konjugierende Punkte die selbe vertikale Koordinate haben. Dies wird hier durch die die Bedingung gewährleistet, dass beide Kameras die selben intrinsischen Parameter haben[24]. Eine Frage welche mit unter in dieser Arbeit beantwortet werden sollte, war, ob es möglich ist, ohne deutlich größeren Aufwand eine Kamerakalibrierung und Szenerekonstruktion mit Kameras unterschiedlicher Auflösung zu gewährleisten. Im Kapitel Epipolar Geometrie, in welchem ausführlich die Epipolargeometrie vorgestellt wurde, wurde bereits bezug auf die unterschiedlichen Auflösungen genommen. Prinzipiell spielen unterschiedliche intrinsische Kameraparameter keine Rolle, wenn es um die Rekonstruktion der Kameraposen geht, da die Fundamental Matrix und die essentielle Matrix die Information über die intrinsischen und extrinsischen Kameraparameter besitzen und es klar gestellt wurde, dass die Bildkoordinatensysteme der Kameras nicht identisch sein müssen. [5]. In dieser Arbeit wurde ein Rektifizierungsalgorithmus nach *Zhang*[20] implementiert, welcher sich die Fundamentalmatrix zu nutzen macht. *Loop* und *Zhang* zerlegen jede Kollinearität in eine Ähnlichkeitstransformation, eine Schertransformation und eine projektive Transformation. Die projektive Komponenten wird dabei in einem nichtlinearen Optimierungsprozess so affin wie möglich gemacht.[22, 20]. Im folgenden wird zunächst der genaue Vorgang des implementierten Algorithmus genauer erklärt und **des Weiteren werden zwei Beispiele vorgestellt, welche die Bilder des Minimalbeispiels einmal mit gleichen intrinsischen Parametern und einmal mit unterschiedlichen intrinsischen Parametern der Kamera aufzeigt. Es wird sich Herausstellen, dass beide Beispiele eine gelungene Rektifizierung der Bilder aufweisen.(Nochmal genau nachprüfen ob das geht!!!)**. Während sich einige Rektifizierungsverfahren im 3D-Raum abspielen, wird beim Verfahren nach *Zhang*, hauptsächlich im 2D-Raum gearbeitet. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass die Fundamental Matrix  $F$  und somit auch korrespondierende Punkte bereits bekannt sind. Sind die intrinsischen Kameraparameter bekannt, so wird aus der Fundamentalmatrix die Essentielle Matrix. Das Verfahren kann sowohl in einem kalibrierten als auch in einen unkalibrierten Fall angewendet werden[20]. Im Algorithmus wurde der unkalibrierte Fall implementiert und somit wird in der Erläuterung und in den danach folgenden Beispielen die Fundamentalmatrix  $F$  verwendet. Die korrespondierenden Punkte werden mit  $x$  für das erste beziehungsweise  $x'$  für das zweite Bild definiert, die Kamerazentren dementsprechend mit  $C$  und  $C'$ . Bildebene der ersten Kamera wird mit  $I$  definiert und die Bildebene von Kamera zwei mit  $I'$ , die entsprechenden Epipole mit  $e$  und  $e'$ . Der Prozess der im Algorithmus erfolgt kann quasi als eine Transformation der Epipolar Geometrie eines Bildpaars in eine kanonische Form angesehen werden. Diese Transformation wird durch eine Homographiematrix durchgeführt, welche sich aus den bereits erwähnten drei Komponenten zusammenstellt. Zu Beginn sei noch erwähnt dass wir pro Bild zwei unterschiedliche Homographien  $H$  und  $H'$  brauchen. Die Fundamentalmatrix liefert, die Epipolarbedingung, dass  $x'^T F x = 0$  ergibt, wenn  $x'$  auf der zu  $x$  korrespondierenden Epipolarlinie liegt. Die korrespondierenden Punkte  $x$  und  $x'$  werden, für die Rektifizierung, jeweils mit den Homographien  $H$  und  $H'$  verrechnet.

$$\bar{x} = Hx \quad (5.60)$$

$$\bar{x}' = Hx' \quad (5.61)$$

Die Fundamentalmatrix, welche sich aus durch die Rektifizierten korrespondierenden Punkte resultiert, wird mit  $\bar{F}$  bezeichnet. Daraus folgt für die Fundamentalmatrix folgendes:

$$\bar{x}'^T \bar{F} \bar{x} = 0 \quad (5.62)$$

$$\rightsquigarrow x'^T H' T \bar{F} H x = 0 \quad (5.63)$$

$$\rightsquigarrow F = H'^T [i]_x H \quad (5.64)$$

Das Ziel ist es diese zwei Homographien in deren bereits erwähnten projektiven und affinen Komponenten zu zersetzen, wobei diese die jeweils entstehenden Bildverzerrungen minimieren sollen. Die Homographiematrizen bestehen aus drei Linien, welche jeweils durch den Epipol verlaufen. Des Weiteren werden noch ein paar weitere Bedingungen für die jeweils drei Linien festgelegt. So müssen die Linien  $v$  und  $v'$  sowie  $w$  und  $w'$  korrespondierende Epipolarlinien sein. Diese Bedingung schafft eine geometrische Verbindung beider Bilder zueinander und ist gerade bei der Minimierung der durch die Rektifizierung entstehenden Bildverzerrung von Bedeutung.

$$H = \begin{bmatrix} u^T \\ v^T \\ w^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$H' = \begin{bmatrix} u'^T \\ v'^T \\ w'^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_a & u'_b & u'_c \\ v'_a & v'_b & v'_c \\ w'_a & w'_b & w'_c \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Für die Bestimmung der einzelnen Komponenten von  $H$  und  $H'$  werden diese in ihre projektiven und affinen Teilstücke zerlegt. Davor wird noch die letzte Komponente  $w_c$  raus dividiert, um somit skaleninvariante Matrizen  $H$  und  $H'$  zu bekommen.

$$H = \begin{bmatrix} u^T \\ v^T \\ w^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & 1 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

$$H' = \begin{bmatrix} u'^T \\ v'^T \\ w'^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_a & u'_b & u'_c \\ v'_a & v'_b & v'_c \\ w'_a & w'_b & 1 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Beide Matrizen werden nun auf die selbe Weise in ihre projektiven und affinen Bestandteile zerlegt.

$$H = H_p \cdot H_a \quad (5.69)$$

$$H' = H'_p \cdot H'_a \quad (5.70)$$

$H_p$  ist die projektive Komponente, sie bezieht sich nur auf die letzte Zeile der Matrix  $H$  und wirkt sich somit auch nur auf die homogenen Komponenten der mit ihr verrechneten Punkte aus.

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ w_a & w_b & 1 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Die affine Komponenten  $H_a$  lässt sich aus  $H$  und  $H_p$  konstruieren. Es gilt:

$$H_a = H \cdot H_p^{-1} = \begin{bmatrix} u_a - v_c w_b & v_c w_a - v_a & 0 \\ v_a - v_c w_a & v_b - v_c w_b & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Für die Matrizen  $H'_p$  und  $H'_a$  gilt das selbe nur mit den Epipolarlinien  $u'$ ,  $v'$  und  $w'$ . Die projektive Matrix sorgt dafür, dass die Epipole beider Bilder ins unendliche gesetzt werden und die Epipolarlinien der Bilder jeweils parallel zueinander verlaufen. Zu Beginn wurde erwähnt, dass es eine Zerlegung in eine projektive, eine Ähnlichkeits- und eine Scherungstransformation gibt. Die projektive Komponente ist mit  $H_p$  und  $H'_p$  bereits vollständig definiert. Was nun noch fehlt ist die Zerlegung der affinen Matrizen  $H_a$  und  $H'_a$  in ihre jeweiligen Ähnlichkeits- und Scherungstransformationen.

$$H_a = H_s \cdot H_r \quad (5.73)$$

$$H_r = \begin{bmatrix} v_b - v_c w_b & v_a - v_c w_a & 0 \\ v_a - v_c w_a & v_b - v_c w_b & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$H_s = \begin{bmatrix} u_a & u_b & u_c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

$H_r$  und auch  $H'_r$  definieren eine Rotation und auch eine Verschiebung, welche die bereits parallelen Epipolarlinien beider Bilder zueinander parallel und horizontal ausrichtet. Durch die Verschiebung werden die korrespondierenden Epipolarlinien noch auf die selbe Höhe verschoben. Somit entstehen die gewünschten Scanlinien in den Bildern. Die Matrix  $H_s$  und  $H'_s$  wirken sich nur auf die  $u$ -Elemente der Matrix  $H$  und  $H'$  aus und definieren eine Scherung. Sie haben keine Auswirkung auf die Rektifizierung an sich, aber sorgen dafür, dass die horizontale Verzerrung der beiden Bilder zueinander reduziert wird.

### 5.10.1 Projektive Transformation

Die projektiven Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  werden von den Linien  $w$  und  $w'$  bestimmt.  $w$  und  $w'$  sind dabei jedoch nicht unabhängig. Definiert werden sie durch einen Punkt  $z = [\lambda \ \mu \ 0]^T$ , welche die, durch die Rektifizierung entstehende, Bildverzerrung minimieren soll. Für beide Bilder werden  $w$  und  $w'$  folgendermaßen gewählt

$$w = [e]_x \cdot z \quad (5.76)$$

$$w' = F \cdot z \quad (5.77)$$

Jedes beliebige  $z$  würde zwei korrespondierende Epipolarlinien definieren, um ein  $z$  zu finden, welches die Verzerrung der Bilder minimiert, wird ein Kriterium aufgestellt, welches ein  $z$  finden soll, dass

die Verzerrung minimal halten wird. Minimierung bedeutet in diesem Falle, dass versucht wird die Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  so affin wie möglich zu machen. So affin wie möglich bedeutet, dass die Werte von  $w_a$  und  $w_b$  so nah wie möglich an den Wert 0 gebracht werden sollen.

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ w_a & w_b & 1 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Jedoch sollen sie nicht ganz null werden, da die projektive Matrix dann keine projektive mehr wäre, sondern eine affine. Deswegen heißt es auch sie soll so affin wie möglich gemacht werden. Das selbe gilt natürlich auch für  $w'_a$  und  $w'_b$  aus  $H'_p$ . Wäre das der Fall, so wären die beiden Epipole  $e$  und  $e'$  bereits im unendlichen und die Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$  hätten keine Auswirkungen auf die Punkte. Für die Minimierung wird die Methode des *least-square-fitting*, also die Anpassung des kleinsten Quadrats, genutzt[25]. Es werden also die Gewichtungen der Punkte in beiden Bildern in der Methode der Anpassung der kleinsten Quadrate verbaut, welche versucht eine Funktion zu finden, die einen Wert für  $z$  berechnen soll welcher die Bildverzerrung minimal hält. **Anders ausgedrückt man sucht einen Wert für  $z$ , welcher am nächsten an den gegebenen Punktesammlungen der jeweiligen Bildern dran liegt, wobei für  $z$  bereits gilt, dass es sich um einen Punkt im Unendlichen handeln soll**[20, 25]. Angenommenem, dass die Annäherungsfunktion  $g(x)$  eine Funktion  $f(x)$ , mit  $x \in [a, b]$ , annähern soll, dann versucht die Methode, die Summe der Quadrate der ordinatischen Differenzen, welche zwischen den von der Funktion generierten Punkten und den Punkten aus den Daten gewonnen wird, zu minimieren[25, 26]. Zum Beispiel werden  $n$  Datenpunkte angenommen, dann gilt:

$$e = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)]^2 \quad (5.79)$$

Für die Minimierung der Bildverzerrung werden die Gewichtungen der Punkte beider Bilder benötigt.  $p_i$  beinhaltet alle Punkte von Bild eins und  $p_j$  beinhaltet alle Punkte von Bild zwei. Angenommen wir nehmen einen Punkt aus Bild eins  $p_{i1} = [p_{i1,u} \ p_{i1,v} \ 1]^T$ , so soll dieser Punkt mit der Matrix  $H_p$  zu einem Punkt der Form  $p_{i1} = [\frac{p_{i1,u}}{w_i} \ \frac{p_{i1,v}}{w_i} \ 1]^T$  transformiert werden.  $w_i$  ist die Gewichtung welche durch die Verrechnung von  $w$  mit  $p_i$  zustande kommt.

$$w_i = w^T p_i \quad (5.80)$$

Ist die Gewichtung der Punkte identisch gibt es keine projektive Verzerrung und die Homographie ist eine affine Transformation. Jedoch wenn die Epipole der Bilder ins Unendliche transformiert werden sollen, so können  $H_p$  und  $H'_p$  keine affine Homographien sein. Sonst könnte man die Epipole nur innerhalb der affinen Ebenen, sprich den Bildebenen, verschieben. Also bildet der Versuch  $H_p$  und  $H'_p$  so affin wie möglich zu machen die Basis für die Minimierung. Im Realbeispiel werden alle Pixel des Bildes verwendet. Die Rektifizierung wurde im aufgeführten Beispiel anhand des erstellten Minimalbeispiels durchgeführt, somit wurden die Eckpunkte des Quaders des jeweiligen Bildes für die das Minimierungskriterium verwendet. Es wird eine Funktion nach dem Prinzip der Anpassung der kleinsten Quadrate aufgestellt, welche die Abweichung der Gewichtung der Punkte in Bezug auf die Gewichtung des Bildzentrums  $p_c$  berechnet.  $p_c$  ergibt sich aus der Mittelung aller verwendeten Punkte eines Bildes  $p_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$ , dessen Gewichtung ergibt sich aus  $w_c = w^T p_c$ . Die gesuchte Abweichung ausgedrückt in der Anpassung der kleinsten Quadrate ergibt dann die folgende Formel.

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{w_i - w_c}{w_c} \right]^2 \quad (5.81)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^n \left[ \frac{w^T(p_i - p_c)}{w^T p_c} \right]^2 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^n \left[ \frac{w^T(p_i - p_c)(p_i - p_c)^T w}{w^T p_c p_c^T w} \right] \quad (5.82)$$

Vereinfacht lässt sich das auch in einer Matrixgleichung angeben

$$\frac{w^T P P^T w}{w^T p_c p_c^T w} \quad (5.83)$$

in welcher für  $P$  gilt:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,u} - p_{c,u} & p_{2,u} - p_{c,u} & \dots & p_{i,u} - p_{c,u} \\ p_{1,v} - p_{c,v} & p_{2,v} - p_{c,v} & \dots & p_{i,v} - p_{c,v} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

die Gleichungen 4.79 bis 4.83 werden ebenfalls für die Punkte  $p_j$  in Bild zwei aufgestellt. So ergibt sich für das zweite Bild die Matrixgleichung:

$$\frac{w'^T P' P'^T w'}{w'^T p'_c p'_c^T w'} \quad (5.85)$$

Das Ziel ist es einen Wert für  $z$  zu finden, welches bis jetzt noch nicht ersichtlich in den Gleichungen vorkommt. Also werden  $w$  und  $w^T$  noch mit ihren Definitionen aus den Gleichungen 4.75 und 4.76 ersetzt. Gleichzeitig werden die Gleichungen 4.82 und 4.84 summiert um die Gleichung zu erhalten, welche sich auf beide Bilder gleichzeitig bezieht und somit eine Lösung für  $z$ , das für beide Bilder gilt, gesucht werden kann.

$$\frac{z^T [e]_x^T P P^T [e]_x z}{z^T [e]_x^T p_c p_c^T [e]_x z} + \frac{z^T F^T P' P'^T F z}{z^T F^T p'_c p'_c^T F z} \quad (5.86)$$

Für den weiteren Verlauf werden die Ausdrücke noch durch die Variablen  $A, B, A'$  und  $B'$  vereinfacht.

$$A = [e]_x^T P P^T [e]_x \quad (5.87)$$

$$B = [e]_x^T p_c p_c^T [e]_x \quad (5.88)$$

$$A' = F^T P' P'^T F \quad (5.89)$$

$$B' = F^T p'_c p'_c^T F \quad (5.90)$$

$$\rightsquigarrow \frac{z^T A z}{z^T B z} + \frac{z^T A' z}{z^T B' z} \quad (5.91)$$

Da die dritte Komponente von  $z$  laut definition null sein soll, wird zu  $z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  umgeschrieben.  $A, B, A'$  und  $B'$  sind 3x3-Matrizen, von welchen uns dann nur noch der erste 2x2-Block interessiert. Bei dem somit aufgestellten Minimalisierungs Kriterium, handelt es sich um ein nicht lineares optimierungs Problem. Die Gleichung 4.90 ist dann minimiert, wenn die erste Ableitung dieser Funktion nach  $\lambda =$  gleich null ist. Es entsteht also ein Polynom mit dem Grad sieben, da die 4.90 die Summe zweier rationaler Funktionen ist, welche jeweil das Verhältnis von quadratischen Polynomen darstellt.

$$Hier soll das Polynom aufgestellt werden, ist aber nicht mehr klar wie das ging!!! \quad (5.92)$$

Für die nicht lineare Optimierung wird das gesamte Polynom aufgeteilt, so minimieren wir zunächst  $\frac{z^T A z}{z^T B z}$  und danach  $\frac{z^T A' z}{z^T B' z}$ . So entstehen für  $z$  zunächst zwei Lösungen  $\hat{z}_1$  und  $\hat{z}_2$ , welche über eine Mittelung eine ersten Schätzung für  $z$  geben, welche schon ziemlich nah an den optimalen Wert heranreicht.

$$z = \frac{\frac{\hat{z}_1}{\|\hat{z}_1\|} + \frac{\hat{z}_2}{\|\hat{z}_2\|}}{2} \quad (5.93)$$

Da es sich um eine nicht lineare Optimierung handelt ist die Minimierung von  $\frac{z^T A z}{z^T B z}$  gleichzusetzen mit der Maximierung von  $\frac{z^T B z}{z^T A z}$ . Beide als eine Funktion von  $f(z)$ . Matrix  $A$  wird mit der Cholesky-Zerlegung in zwei höhere Dreiecksmatrizen zerlegt  $A = D^T D$ [27]. Dies geht nur da  $A$  nachweislich eine symmetrische und positiv-definite Matrix ist.[27] positiv-Definite bedeutet, dass die Singulärwerte von  $A$  immer positiv bleiben, egal mit welchem Vektor  $z$  diese multipliziert wird. (**HIER NOCH LITERATUR FINDEN UND NOCHMAL PRÜFEN OB DEFINITION SO STIMMT**). Des Weiteren wir definiert, dass  $y = Dz$  ist und  $f(z)$  wird dann zu einen  $\hat{f}(y)$

$$A = D^T D \quad (5.94)$$

$$y = Dz \rightsquigarrow z = D^{-1}y \quad (5.95)$$

$$f(z) = \frac{z^T B z}{z^T A z} \quad (5.96)$$

$$\rightsquigarrow f(z) = \frac{z^T B z}{z^T D^T D z} \quad (5.97)$$

$$\hat{f}(y) = \frac{y^T D^{-T} B D^{-1} y}{y^T y} \quad (5.98)$$

Durch die Defintion von  $y = Dz$  ist  $y$  bis auf einen Skalierungsfaktor definiert.  $\hat{f}(y)$  ist maximiert, wenn  $y$  gleich dem Eigenvektor von  $D^{-T} B D - 1$  ist, welcher mit dem größten Eigenwert assoziiert wird. Zum Schluss erhalten wir dann einen Wert für  $\hat{z}_1$  mit  $\hat{z}_1 = D^{-1}y$ . Exakt das selbe Verfahren wird für die Findung von  $z_2$  mit  $\frac{z^T B' z}{z^T A' z}$  angewandt. Sind  $z_1, z_2$  und eine erste Schätzung für  $z$  gefunden, so kann ein Wert für  $z$  gesucht werden, welcher noch näher an ein optimales Ergebnis heranreicht. Beide Lösungen  $z_1$  und  $z_2$ , werden in die Funktion  $f(z)$  eingesetzt und es jeweils ein wert ermittelt, welcher am nächsten an einem Nullpunkt sich befindet. So kann iterativ eine optimale Lösung für  $z$  gefunden werden. Ist der Wert für  $z$  bestimmt, so kann dieser die Gleichungen 4.75 und 4.76 eingesetzt werden und  $w$  beziehungsweise  $w'$  bestimmt werden, welche die Elemente für die Matritzen  $H_p$  und  $H'_p$  bereitstellen. Abbildung 4.7 zeigt in rot den Quader des Minimalbeispiels wie er in Kamera zwei abgebildet ist und in grün wie er in Kamera eins abgebildet ist. Kamera zwei ist horizontal zu Kamera eins verschoben und um  $45^\circ$  zu Kamera eins um die eigene vertikale Achse gedreht. Die Auflösungen beider Kameras sind identisch, sprich die intrinsischen Kameraparameter sind die selben. Abbildung 4.8 zeigt die momentanen Epipolarlinien. Die Epipolarlinien von Bild eins, also dem grünen Abbild, sind bereits Parallel, was aber keine Voraussetzung für die Funktion des Rektifizierungsalgorithmus ist. Der Schnittpunkt der Epipolarlinien von Bild zwei, also dem Roten Abbild, treffen sich in einem Punkt und bilden somit den Epipol von Bild zwei.

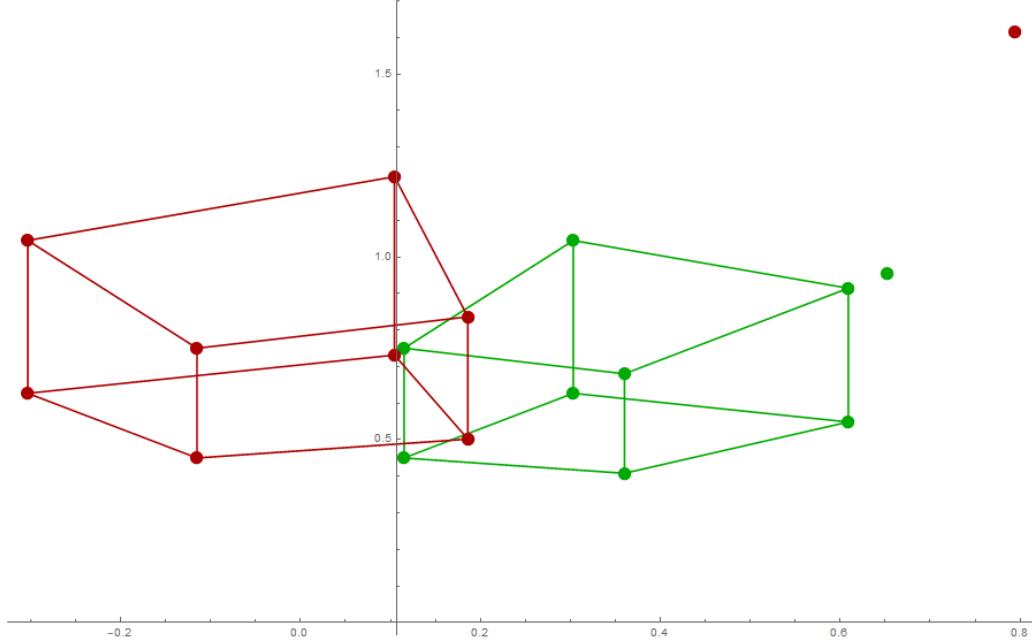


Abbildung 5.15: Aufnahmen zweier Kameras mit den selben Auflösungen, Kamera eins(Grün) und Kamera(rot) zwei gelten jeweils  $\zeta = 1$

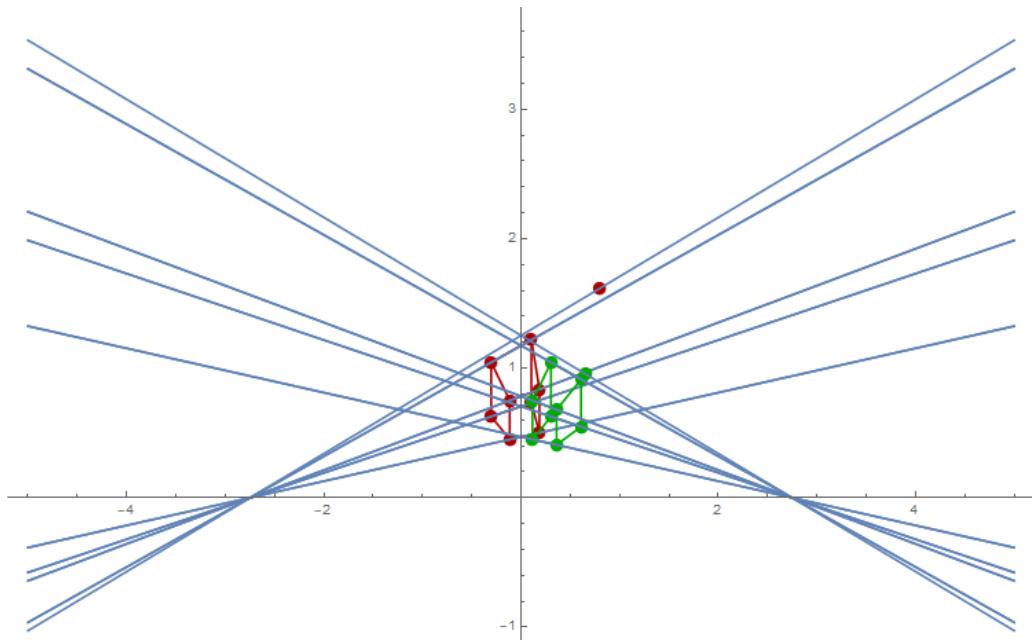


Abbildung 5.16: Epipole für Kamera eins und Kamera zwei vor der Rektifizierung

Werden nun die Matritzen  $H_p$  und  $H'_p$  auf die jeweiligen Punkte der Bilder,  $p_i$  für Bild eins und  $p_j$  für Bild zwei, angewandt, so kann man eine erste Veränderung beobachten. Abbildung 4.9 zeigt beide Quader aus Abbildung 4.7 nachdem die jeweiligen Bildpunkte mit den projektiven Matrizen multipliziert wurden. Der Epipol in Bild eins bleibt natürlich wie zuvor im unendlichen, jedoch kann man erkennen, dass der rote Quader aus Bild zwei sich verändert hat. Sein Epipol wurde ins Unendliche transformiert und parallele Linien sind nun auch auf dem Bild parallel. Das die Epipolarlinien bereits horizontal parallel zur x-Achse verlaufen ist Zufall und ist nach der Anwendung der projektiven Matrizen auch noch nicht verlangt. Das Anpassen der Epipolarlinien, dazu gehört sie zunächst von beiden Bildern aus parallel zur x-Achse verlaufen zu lassen und dann noch sie so zueinander anzupassen, dass sie zu Scanlinien über beide Bilder verlaufen, vergleiche Abbildung 4.12, folgt im nächsten Schritt.

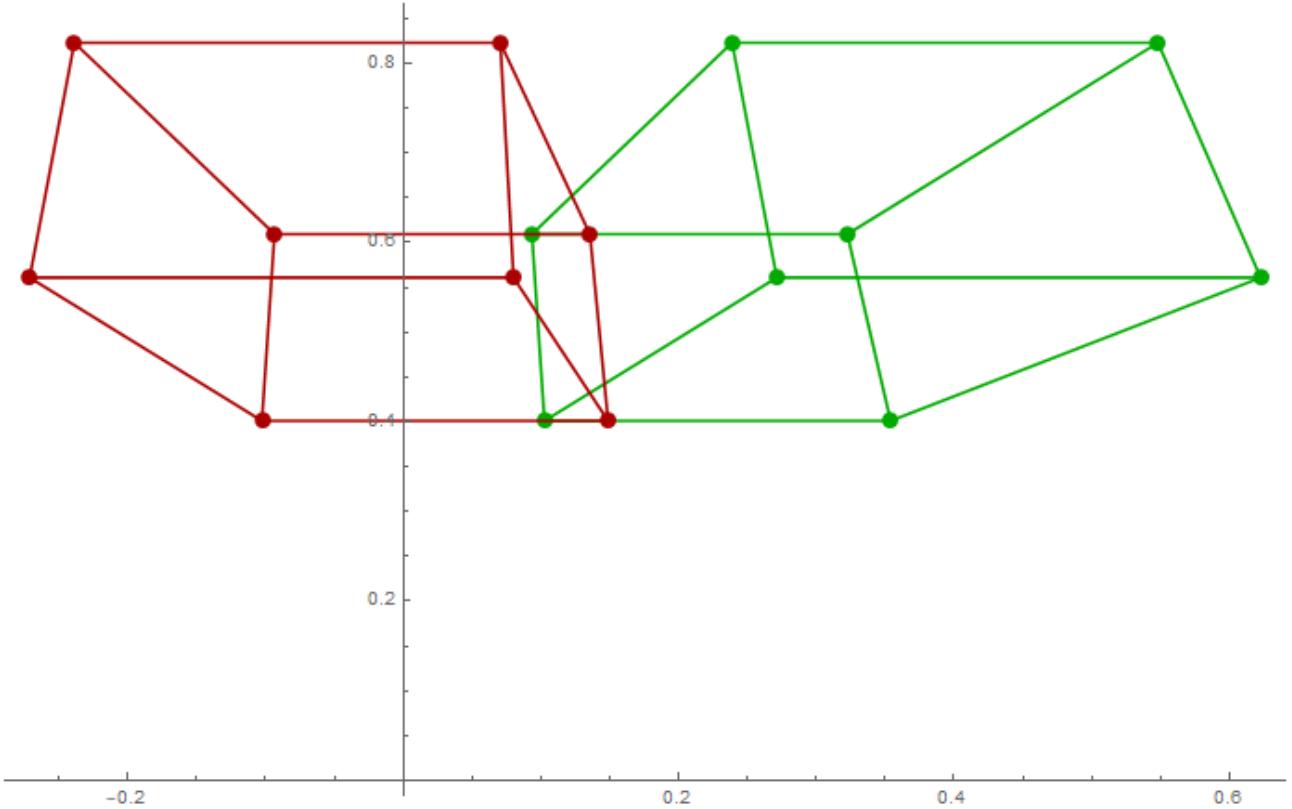


Abbildung 5.17: Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen  $H_p$  und  $H'_p$ . Die Epipole beider Bilder sind nun im unendlichen. Das die entstehenden parallelen Epipolarlinien auch hier schon horizontal ausgerichtet sind ist Zufall. Die Epipolarlinien sind immer parallel nach dieser Transformation aber die Richtung ist nicht immer automatisch bereits  $i = [1,0,0]$ .

### 5.10.2 Ähnlichkeitstransformation

Nachdem die Epipole ins Unendliche verschoben wurden, müssen diese nun so rotiert und verschoben werden, dass die Epipolarlinien als Richtung  $i = [1 \ 0 \ 0]$  haben und die Epipolarlinien beider Bilder zu einheitlichen Scanlinien werden. Für die Ähnlichkeitstransformation wird davon ausgegangen, dass  $w$  und  $w'$  bereits bekannt sind.  $H_r$  und  $H'_r$  wurden bereits aus der Zerlegung von  $H_a$  und  $H'_a$  gewonnen.

$$H_r = \begin{bmatrix} v_b - v_c w_b & v_a - v_c w_a & 0 \\ v_a - v_c w_a & v_b - v_c w_b & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

$$H'_r = \begin{bmatrix} v'_b - v'_c w'_b & v'_a - v'_c w'_a & 0 \\ v'_a - v'_c w'_a & v'_b - v'_c w'_b & v'_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

$$(5.101)$$

$w$  und  $w'$  sind bereits bekannt. Mit Hilfe von  $F$ , können  $v_a$  und  $v_b$  ersetzt werden. Dazu kann die letzte Zeile von  $F$  nach  $v_a, v_b$  und  $v_c$  aufgelöst werden. Für  $v'_a, v'_b$  und  $v'_c$  wird die letzte Spalte von  $F$  verwendet. So können folgende Gleichungen für  $v_a, v'_a, v_b, v'_b, v_c$  und  $v'_c$  gewonnen werden.

$$F = H'^T[i]_x H \quad (5.102)$$

$$F = \begin{bmatrix} v_a w'_a - v'_a w_a & v_b w'_a - v'_a w_b & v_c w'_a - v'_a \\ v_a w'_b - v'_b w_a & v_b w'_b - v'_b w_b & v_c w'_b - v'_b \\ v_a - v'_c w_a & v_b - v'_c w_b & v_c - v'_c \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

$$v_a = F_{31} + v'_c w_a \quad (5.104)$$

$$v_b = F_{32} + v'_c w_b \quad (5.105)$$

$$v_c = F_{33} + v'_c \quad (5.106)$$

$$v'_a = v_c w'_a - F_{13} \quad (5.107)$$

$$v'_b = v_c w'_b - F_{23} \quad (5.108)$$

$$v'_c = v_c - F_{33} \quad (5.109)$$

Eingesetzt in die jeweiligen Matrizen  $H_r$  und  $H'_r$ , entstehen die folgenden Matrizen in Gleichungen 4.114 und 4.115, welche nur noch die unbekannte  $v'_c$  beinhalten. Die gemeinsame Variable  $v'_c$  zeigt die geometrische Verbindung beider Bilder in ihrer Verschiebung entlang ihrer v-Richtung. Es wird also ein Offset von  $F_{33}$  benötigt, um die Epipolarlinien horizontal zu Scanlinien auszurichten. Den Wert für  $v_c$  wird so ermittelt, dass das Minimum einer v-Koordinaten eines Pixel als minimum den Wert null besitzt

$$H_r = \begin{bmatrix} F_{32} - w_b F_{33} & w_a F_{33} - F_{31} & 0 \\ F_{31} - w_a F_{33} & F_{32} - w_b F_{33} & F_{33} + v'_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

$$H'_r = \begin{bmatrix} w'_b F_{33} - F_{23} & F_{13} - w'_a F_{33} & 0 \\ w'_a F_{33} - F_{13} & w'_b F_{33} - F_{23} & v'_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

Das Ergebnis der Bildpunkte  $p_i$  und  $p_j$  multipliziert mit den Matrizen  $H_r H_p$  und  $H'_r H'_p$  mit ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Als letztes folgt noch die Scherungstransformation  $H_s$  und  $H'_s$  für die horizontale Entzerrung beider Bilder.

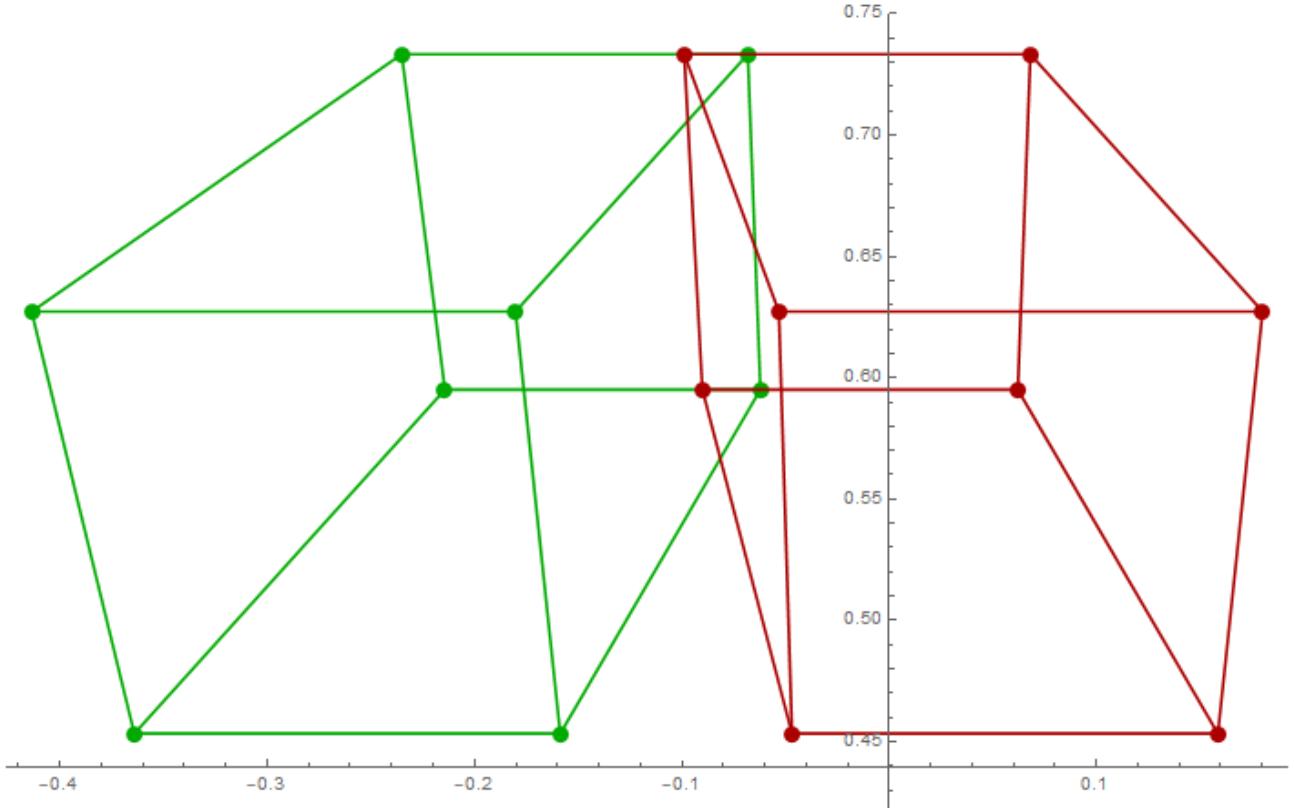


Abbildung 5.18: Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen  $H_r \cdot H_p$  und  $H'_r \cdot H'_p$ . Die Epipolarlinien sind nun horizontal zueinander ausgerichtet

### 5.10.3 Scherungstransformation

Die letzte Transformation, welche an den Bilder durchgeführt werden soll, ist die sogenannten Scherungstransformation. Sie soll vor allem dazu dienen, die horizontale Verzerrung der Bilder zueinander nochmal weiter zu minimieren. Die Matrizen  $H_s$  und  $H'_s$  wirken sich hauptsächlich auf die  $u$  und  $u'$  Komponenten aus.

$$H_s = \begin{bmatrix} u_a & u_b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

$$H'_s = \begin{bmatrix} u'_a & u'_b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

Um die richtigen Werte für  $a, a', b$  und  $b'$  zu bekommen, werden zunächst Punkte an den jeweiligen gegenüberliegenden Kanten der Bilder definiert. Da die Bilder des Quaders nicht aus tausenden von Pixeln bestehen, wie ein reales Bild, sondern nur über dessen Eckpunkte bestimmt ist, wird eine Bildbreite  $w$  und  $w'$  und eine Bildhöhe  $h$  und  $h'$  definiert. Die Höhen und Breiten der Bilder rahmen die abgebildeten Quader ein, somit wurde quasi eine Bildgröße für beide Bilder definiert. Nun können die Punkte an den Kantenhalbierenden  $a = [\frac{w-1}{2} \ 0 \ 1]^T, b = [w-1 \ \frac{h-1}{2} \ 1]^T, c = [\frac{w-1}{2} \ h-1 \ 1]^T, d = [0 \ \frac{h-1}{2} \ 1]^T$  gebildet werden. Der Gedanke, der damit verfolgt wird ist, dass die Punkte der jeweiligen gegenüberliegenden Kanten mit einander verbunden werden können und dann so ausgerichtet werden sollen, dass sie sich wieder direkt gegenüber liegen. Schematisch wird as in Abbildung ???? aufgezeigt.

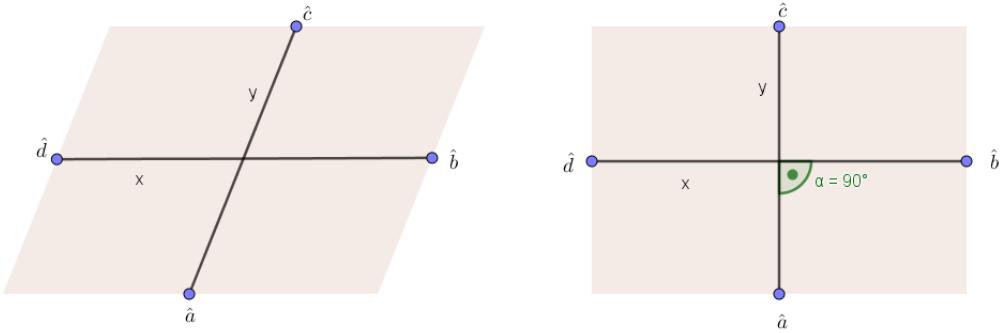


Abbildung 5.19: Die Abbildung verdeutlicht noch mal Schematisch, wie sich die Punkte ausrichten sollen. Bild a) zeigt die durch die Rektifizierung verschobenen Bildkantenmitten. Bild b= zeigt, wie sich die Bildkantenmitten durch die Scherungstransformation wieder ausrichten sollen.

Die Punkte  $a, b, c, d$  und auch  $a', b', c', d'$  geben die Bildbreiten der noch unberührten Bilder an. Nach der Rektifizierung sind die Bilder so verzerrt, dass die Kanten mitten sich meistens nicht mehr direkt gegenüber von einander befinden. Die Punkte  $a, b, c, d$  und  $a', b', c', d'$  werden mit den Matrizen  $H_p, H'_p, H_r$  und  $H'_r$  verrechnet, so dass man die genaue neue Position der Kanten Mitten nach der Rektifizierung hat.

$$\hat{a} = H_r \cdot H_p \cdot a$$

$$\hat{b} = H_r \cdot H_p \cdot b$$

$$\hat{c} = H_r \cdot H_p \cdot c$$

$$\hat{d} = H_r \cdot H_p \cdot d$$

$$\hat{a}' = H'_r \cdot H'_p \cdot a'$$

$$\hat{b}' = H'_r \cdot H'_p \cdot b'$$

$$\hat{c}' = H'_r \cdot H'_p \cdot c'$$

$$\hat{d}' = H'_r \cdot H'_p \cdot d'$$

Um aus  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  und auch  $\hat{a}', \hat{b}', \hat{c}', \hat{d}'$  wieder Punkte der affinen Ebene zu machen werden sie jeweils durch ihre dritte Komponenten geteilt, so das  $\hat{a}_w, \hat{b}_w, \hat{c}_w, \hat{d}_w$  und  $\hat{a}'_w, \hat{b}'_w, \hat{c}'_w, \hat{d}'_w$  jeweils den Wert eins besitzen. Danach können die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  aus den Differenzen der sich ursprünglich gegenüberliegenden Punkte gebildet werden.

$$x = \hat{b} - \hat{d} \quad (5.114)$$

$$y = \hat{c} - \hat{a} \quad (5.115)$$

$$x' = \hat{b}' - \hat{d}' \quad (5.116)$$

$$y' = \hat{c}' - \hat{a}' \quad (5.117)$$

$x$  und  $y$  sind Vektoren der euklidischen Bildebene. Die Rechtwinkligkeit beider wird also erhalten, wenn gilt:

$$(H_s x)^T (H_s y) = 0 \quad (5.118)$$

$$(H'_s x')^T (H'_s y') = 0 \quad (5.119)$$

Die Seitenverhältnisse der Bilder werden beibehalten, wenn gilt:

$$\frac{(H_s x)^T (H_s x)}{(H_s y)^T (H_s y)} = \frac{w^2}{h^2} \quad (5.120)$$

$$\frac{(H'_s x')^T (H'_s x')}{(H'_s y')^T (H'_s y')} = \frac{w'^2}{h'^2} \quad (5.121)$$

Für  $u_a, u'_a, u_b$  und  $u'_b$  jeweils Gleichungen auf Basis der jeweiligen Bild Höhen und Breiten  $w, w', h, h'$  und  $x, x', y$  und  $y'$  und unter einhaltung der Aussagen der Gleichungen 5.118 bis 5.121, aufgestellt werden[20, 28].

$$u_a = \frac{h^2 x_v^2 + w^2 + y_v^2}{h w (x_v y_u - x_u y_v)} \quad (5.122)$$

$$u_b = \frac{h^2 x_u x_v + w^2 y_u y_v}{h w (x_u y_v - x_v y_u)} \quad (5.123)$$

Selbe Gleichungen werden auch für  $u'_a$  und  $u'_b$  aufgestellt. Das Ergebnis der Scherungstransformation ist in Abbildung 5.17 dargestellt. Wie zu sehen ist, ist die Minimierung noch nicht zu hindert prozent perfekt, hierfür müsste man noch ein paar mehr Interationsschritte bei finden von  $z$  einfügen.(ICH WEIß GANZ EHRLICH NICHT WORAN ES LIEGT...)

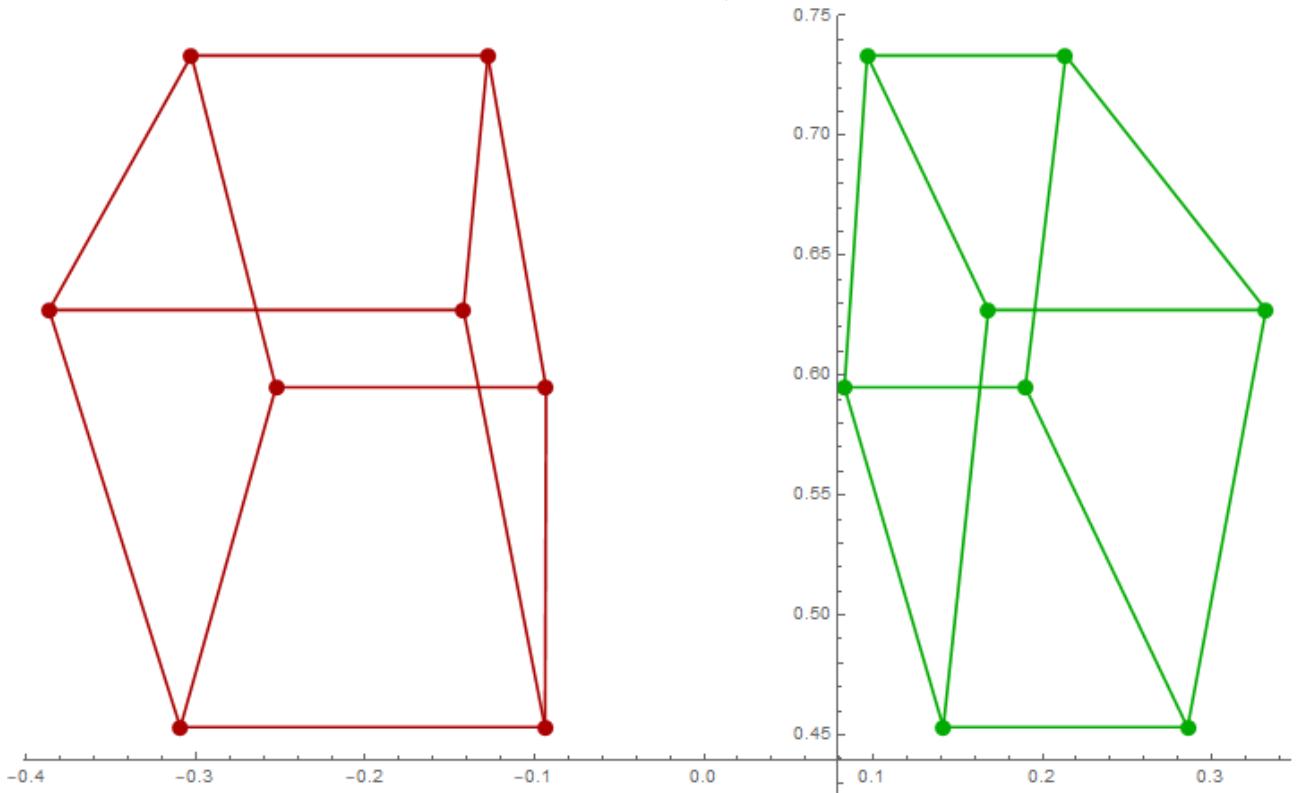


Abbildung 5.20: Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen  $H_s \cdot H_r \cdot H_p$  und  $H'_s \cdot H'_r \cdot H'_p$ . Die horizontale Verzerrung wurde reduziert.

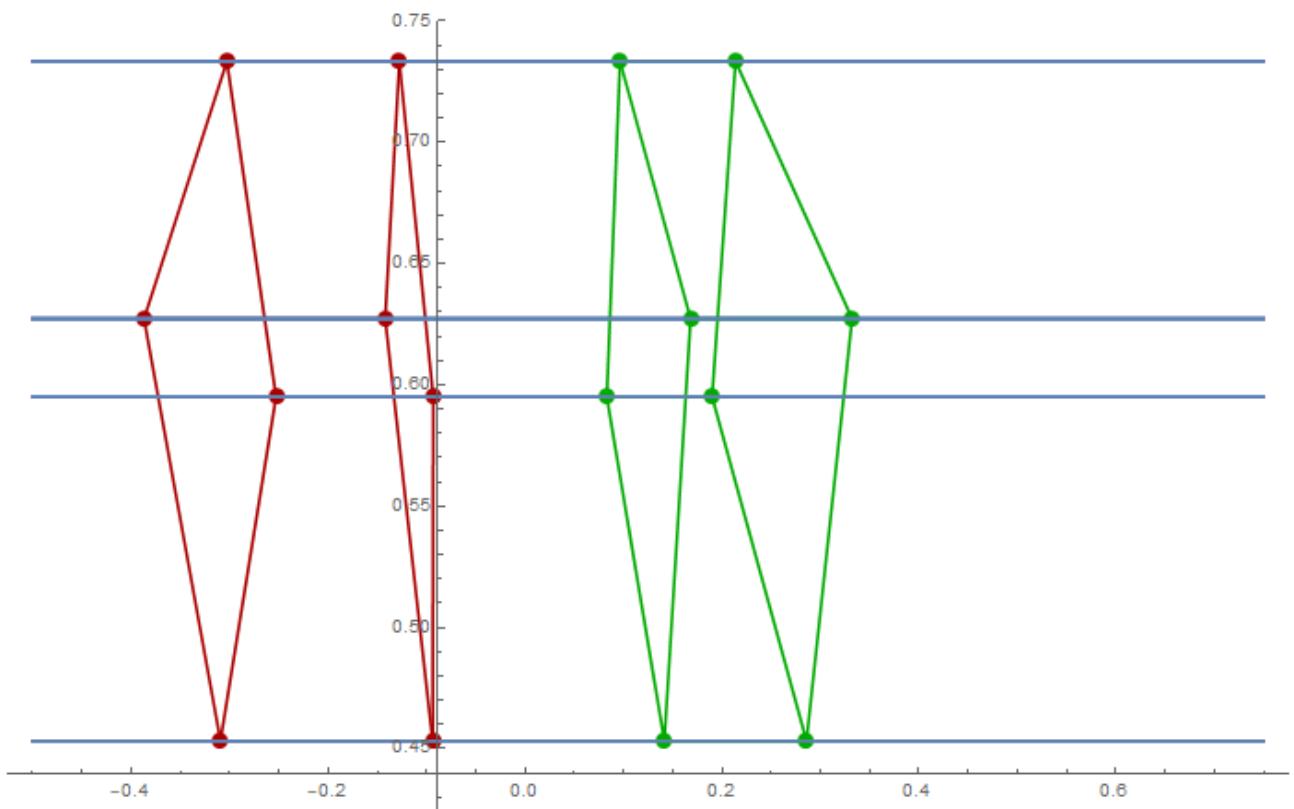


Abbildung 5.21: In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut

# 6 Auswirkungen von unterschiedlichen Kameraauflösungen

Wenn man sich mit digitalen Bilddaten auseinandersetzt, so kommt man nicht drum herum sich auch mit den verschiedenen Auflösungsarten beschäftigen zu müssen. Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, wie eine 3D-Szene aus zwei heterogenen Bildquellen, welche von zwei Kameras gleicher Auflösung aufgenommen wurden, rekonstruiert werden konnte und gleichzeitig noch die externen Kameraparameter von  $C'$  in Relation zu  $C$  geschätzt werden konnten. Dies wirft die Frage auf, welche Auswirkungen Bilder zweier Kameras mit unterschiedlichen Auflösungen für die Rekonstruktionen haben können. Aus der Stereokalibrierungsapp, welche *MatLab* anbietet, ist bekannt, dass diese nicht mit Bildern unterschiedlicher Auflösung eine Szeneriekonstruktion durchführen kann. Der erste Schritt bestand erstmal darin zu überprüfen, warum zwei unterschiedliche Auflösungen in *MatLab* Probleme machen. *MatLab* verfolgt einen etwas anderen Rekonstruktionsansatz. Zu aller erst werden die Kameras kalibriert. Dies geschieht über die Matlab-Funktion `estimateCameraParameters`[29]. Diese Funktion funktioniert auch bei Bildern unterschiedlicher Auflösung noch ohne Probleme. Das Problem, welches sich als eigentlich minimales Problem herausstellt, ist, dass die darauf folgenden Rektifizierung der Stereobilder nicht mit zwei Bildern unterschiedlicher Auflösung funktioniert. In den *MatLab* references, steht es nicht explizit drin [19]. Die Rektifizierung in Matlab funktioniert nach einem Schema, welches ähnlich dem aufgezeigten Beispiel im Kapitel Rektifizierung bereits erwähnt wurde und in [22, 24] nochmal genau aufgeführt wird. Das Problem liegt also nicht daran, dass Bilder unterschiedlicher Auflösung nicht rektifiziert werden können, sondern das Problem liegt an dem in *MatLab* verwendeten Algorithmus für die Rektifizierung zweier Stereobilder (Foren Zitieren????). Warum *MatLab* überhaupt rektifiziert, liegt daran, dass ein Ansatz der Szeneriekonstruktion gewählt wurde, welcher die essentielle Matrix nicht benötigt. In diesem Falle, werden zwei Stereobilder aufgenommen, danach rektifiziert und anschließend über eine sogenannte *Disparity-Map*, die Szenen Punkte rekonstruiert[30, 6, 22, 21]. Der in dieser Arbeit gewählte Rektifizierungsalgorithmus, ist nicht auf gleiche Kameraauflösungen beschränkt. Mittlerweile gibt es natürlich deutlich fortgeschrittenere Rektifizierungsansätze, jedoch wurde für diese Arbeit der Ansatz von [20] gewählt, um ein Gefühl zu vermitteln, dass wenn man sich auf die Epipolargeometrie bezieht, die Auflösungen der Kameras keine Rolle spielen[5]. Was genau unterschiedliche Auflösungen der Kameras für die einzelnen Bilder bedeutet und was genau sich bei der Aufnahme mit dem Sensor dabei ändert, soll im folgenden Unterkapitel kurz erläutert werden. Danach wird aufgezeigt, was genau diese Veränderungen für die Epipolargeometrie bedeuten und letztendlich wird das Minimalbeispiel so angepasst, als hätten zwei Kameras unterschiedlicher Auflösung die selbe Szene wie davor aufgenommen und die Resultate miteinander verglichen.

## 6.1 Abbildungsunterschiede

Das Herz einer modernen Kamera ist der Halbleiter-Bildsensor. Die Bildsensoren spielen in der optischen Messtechnik und industriellen Bildverarbeitung eine große Rolle[10]. Die in dieser Arbeit verwendeten Kameras für die Aufnahme der Stereobildpaare, waren zum einen die Vollformatkamera Canon EOS 6D und die Halbformatkamera Canon EOS 60D. Beide besitzen einen CMOS-Sensorchip, welcher zu den Halbleiterbildsensoren gehört[31]. Die Geometrie dieser Sensoren, ist grob gesprochen als eine  $M \times N$  - Matrix, bestehend aus  $M \times N$  Pixeln. Die Pixel bedecken nur einen Teil der Sensorfläche und können in ihrer geometrischen Beschaffenheit von der Form des Sensors unterschieden werden[10]. Abbildung 5.1 zeigt einen schematischen Aufbau eines Halbleiterbildsensors

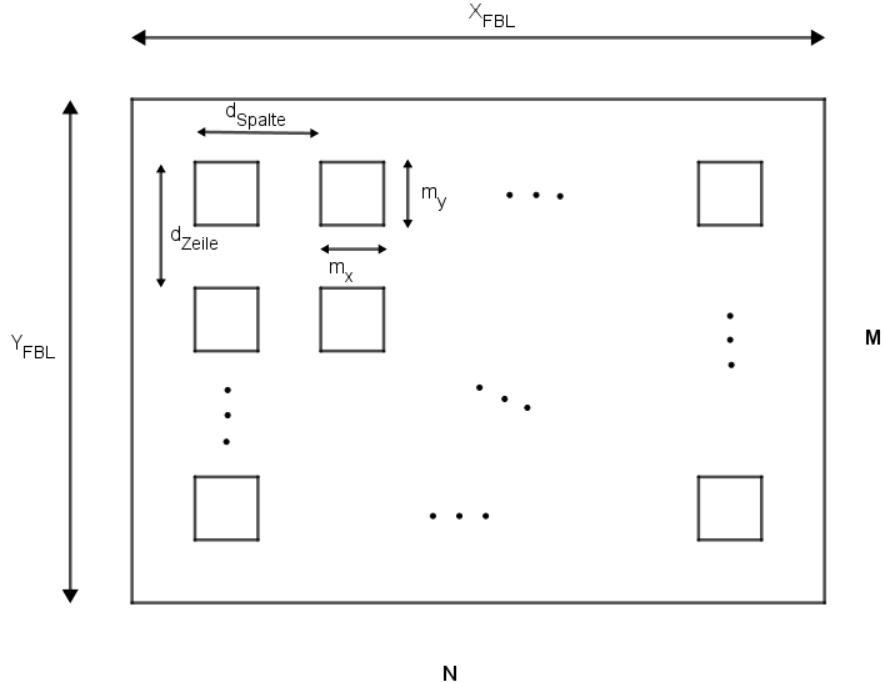


Abbildung 6.1: Rechteckiger Bildsensor mit darauf sich befindenden quadratischen Pixeln. Vlg [10]

Die Auflösung des Sensors hängt von den horizontalen und vertikalen Pixelabständen ab und gibt wieder, welche Objektdetails mit dem Sensor gerade noch erkannt werden können.[10]. Ein Sensor hat eine maximale Auflösung, welche durch die Anzahl seiner fest installierten Pixel bestimmt wird. Die Bildqualität ist abhängig von der Größe des Sensorchips und der Menge der sich darauf befindenden Pixel. Der CMOS-Sensor einer Canon 6D hat beispielsweise eine Größe von  $36 \times 24\text{mm}$  und eine maximale Auflösung von  $5.472 \times 3.648$  Pixel. Jedoch ist das nicht die einzige Auflösung, welche beim photographieren oder filmen mit der Kamera genutzt werden kann. Es können sowohl die Pixelanzahl als auch das Seitenverhältnis der entstehenden Bilder eingestellt werden. Bei der Canon EOS 6D können insgesamt vier verschiedene Seinsverhältnisse eingestellt werden [3 : 2], [4 : 3], [16 : 9] und [1 : 1][31]. Die Bildauflösungen unterscheiden sich pro Seitenverhältnis in sechs Auflösungseinstellungen  $L$ ,  $M$ ,  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$ .

Tabelle 6.1: Auflösungen Canon EOS 6D

	3:2	4:3	16:9	1:1
L	$5478 \times 3648$ px	$4864 \times 3648$ px	$5472 \times 3072$ px	$3648 \times 3648$ px
M	$4104 \times 2736$ px	$3648 \times 2736$ px	$4104 \times 2310$ px	$2736 \times 2736$ px
S1	$2736 \times 1824$ px	$2432 \times 1824$ px	$2736 \times 1536$ px	$1824 \times 1824$ px
S2	$1920 \times 1280$ px	$1696 \times 1280$ px	$1920 \times 1080$ px	$1280 \times 1280$ px
S3	$720 \times 480$ px	$640 \times 480$ px	$720 \times 408$ px	$480 \times 480$ px

Tabelle 6.2: Vgl [31]

Je geringer die Auflösung, desto geringer ist die Anzahl der Pixel. Die Anzahl der Pixel auf einem Sensorchip kann natürlich nicht variieren. Eine geringere Pixelanzahl bei gleichbleibender Bildgröße, bedeutet, dass sich ein Pixel mit den um sich befindenden Pixeln interpoliert, so dass ein neuer Pixel bestehend aus mehreren kleinen Pixeln entsteht. Dieser Prozess wird Nachbarschaftsoperation genannt. Für die Berechnung des neuen Bildpixels  $px'$  an der Stelle  $(m, n)$  wird nicht nur das Bildpixel  $p$  des Originalbildes an der Stelle  $(m, n)$  verwendet, sondern auch einige seiner Nachbarpunkte[10]. Bei

der Canon 6D bietet das Seitenverhältnis [3 : 2] die Möglichkeit die maximale Pixelanzahl des Sensors zu verwenden, vergleiche hierzu Tabelle 5.1. Bei einem Seitenverhältnis von [4 : 3] ist die Anzahl der maximal möglichen Pixel nur noch  $4864 \times 3648$ . Anders sich das Seitenverhältnis des Bildausschnitts, so wird auch nicht mehr die gesamte Fläche des Sensors benutzt.

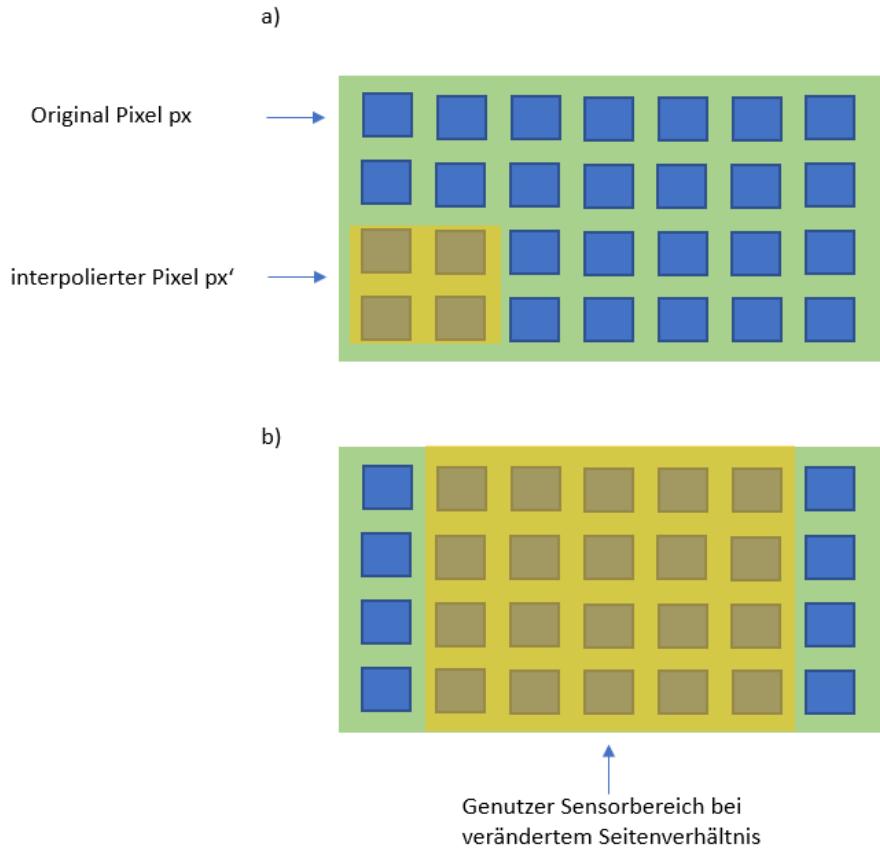


Abbildung 6.2: Bild a) zeigt die Interpolation von Pixeln, wenn bei gleichbleibenden Seitenverhältnissen weniger Pixel für das Bild verwendet werden sollen. Die interpolierten Pixel leiten dann alle das selbe Signal weiter. Bild b) zeigt in gelb markiert, den verwendeten Bereich des Sensors, wenn sich die Seitenverhältnisse ändern und nicht mehr der volle Sensor genutzt wird.

## 6.2 Auswirkungen auf die Epipolargeometrie

Um nun auf die Fragestellung der Auswirkung unterschiedlicher Auflösungen auf die Szenenrekonstruktion zu kommen, kann nun folgende Behauptung aufgestellt werden. Beide Kameras besitzen einen Bildsensor, welcher fest in der Kamera installiert ist und sich weder in Position noch seiner Form ändern kann. Dieser Bildsensor beinhaltet sowohl das Bildebenenkoordinatensystem, bei welchem der Hauptpunkt den Koordinatenursprung bildet als auch das Sensorkoordinatensystem, dess Ursprung leicht außerhalb einer der Ecken des Sensors sich befindet. Abbildung ??? zeigt einen stereoskopischen Szenenaufbau mit Kameras gleicher Auflösung. Die Sensorkoordinatensysteme besitzen die selbe Skalierung.

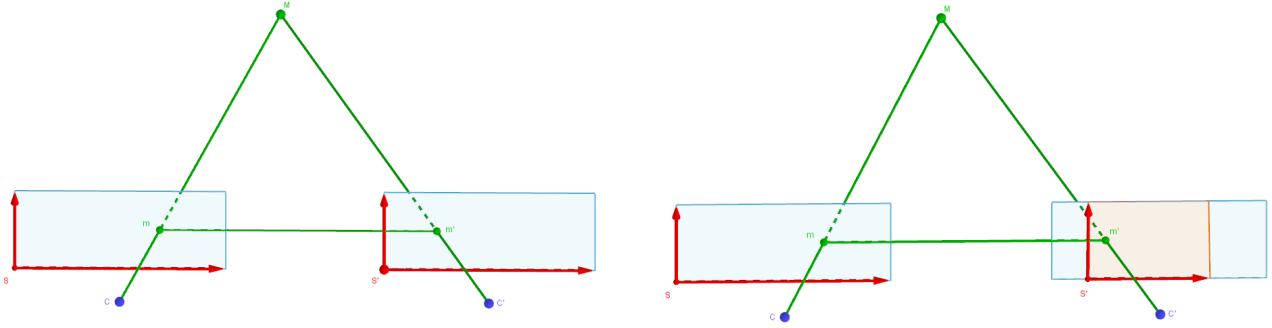


Abbildung 6.3:  $C$  und  $C'$  haben die selbe Auflösung  
Abbildung 6.4:  $C$  und  $C'$  haben unterschiedliche  
eingestellt Auflösungen eingestellt

Es bildet sich wieder das bekannte Dreieck zwischen den Bildpunkten  $m_\sigma$  und  $m'_\sigma$  und dem Objektpunkt  $M_\delta$ . Das in diesem Falle einen korrekten Szenenrekonstruktion funktioniert, ist im Kapitel Virtuelle Rekonstruktion anhand des Minimalbeispiels aufgezeigt worden. Wird die Auflösung auf einer der beiden Kameras verringert und damit einhergehend auch noch das Seitenverhältnis geändert, so ändert sich zum einen der aktive Teilbereich des Sensorschips, sowie die Skalierung der Werte auf den Koordinatenachsen des Sensorkoordinatensystems. Die Skalierung der Koordinatenachsen hängt mit der Interpolation der mehreren Pixel zu einem neuen Pixel zusammen. Abbildung 5.3 zeigt schematisch, was sich nach veränderten Auflösungseinstellungen am Sensor verändert. Epipolare Geometrie ändert sich wie man in Abbildung ??? sehen kann nichts. Das zuvor erwähnte Dreieck zwischen den Bildpunkten und dem Objektpunkt bleibt unverändert. Wie in Kapitel Epipolar Geometrie bereits erwähnt, dürfen die Bildebenenkoordinatensysteme und somit auch die Sensorkoordinatensysteme unterschiedlich voneinander sein [5]. Für die relative Position des Bildpunktes auf dem Sensor ändert sich nichts, dieser bleibt statisch, einzige seine Koordinatenwerte ändern sich im Bezug auf das Sensorkoordinatensystems. Für die Fundamentalmatrix und die Essentielle Matrix ergeben sich lediglich andere Vielfache voneinander, welche wie erwähnt ebenfalls gültige Lösungen sind [3, 4].

### 6.3 Minimalbeispiel mit unterschiedlichen Kameraauflösungen

Als Beweise der aufgestellten Behauptung wurde im Minimalbeispiel die Kameramatrix einer der beiden Kameras unterschiedlich modifiziert. Während für die Kameramatrix von  $C$  der Wert  $\zeta = -1$  in der Kameramatrix  $K$  bleibt, wurde das  $\zeta$  in  $C'$  verändert, so dass sie drei verschiedene neue Kameramatrizen  $K'_1, K'_2$  und  $K'_3$  ergeben. Die resultierenden Abbildungen des Quaders sind in den Abbildungen ??? bis ??? zu sehen.

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$K'_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$(6.3)$$

$$K'_2 = \begin{bmatrix} -3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$K'_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

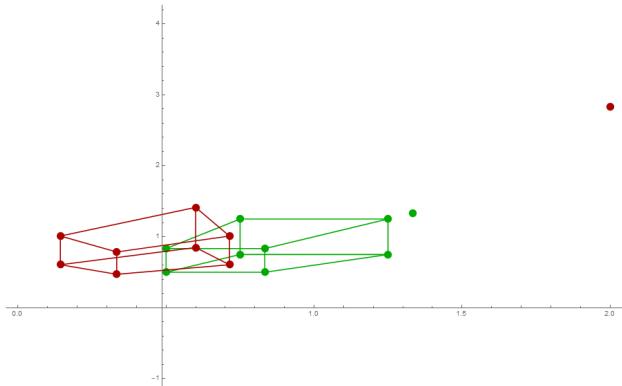


Abbildung 6.5:  $C$  und  $C'$  haben die selbe Auflösung eingestellt

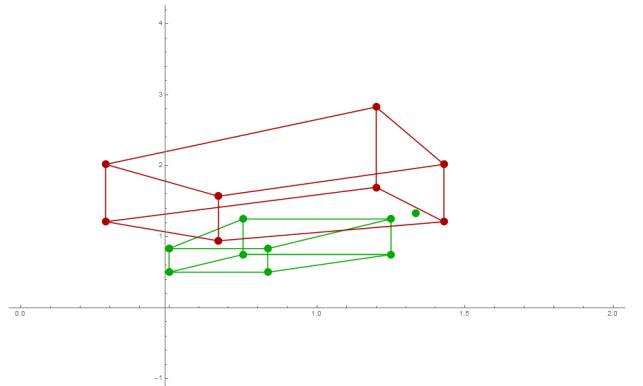


Abbildung 6.6:  $C$  und  $C'$  haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt

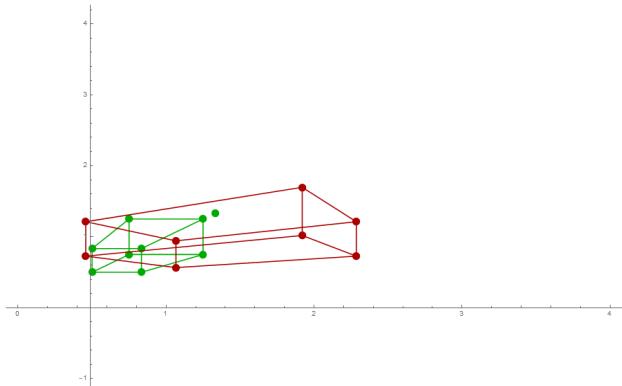


Abbildung 6.7:  $C$  und  $C'$  haben die selbe Auflösung eingestellt

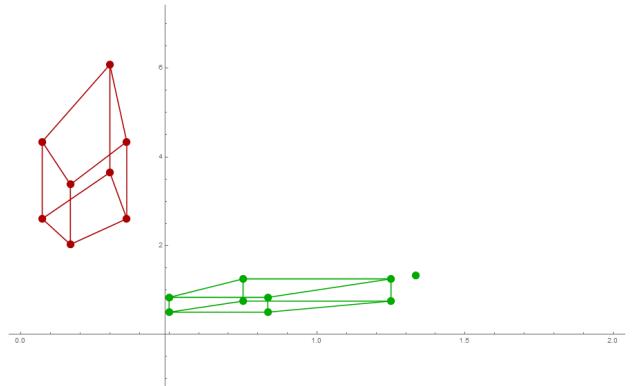


Abbildung 6.8:  $C$  und  $C'$  haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt

Während die Abbildung von  $C$  Unverändert bleibt, wird in Abbildung ??? Die Abbildung des Quaders in  $C'$  "vergrößert", was für eine höhere Anzahl an verwendeten Pixeln steht. In Abbildung ??? werden die Pixel in horizontaler Richtung um das 3.2-fache und in vertikaler Richtung um das 1.2-fache erweitert und in Abbildung ??? wird in horizontaler Richtung die Anzahl der Pixel um das 0.5-fache und in vertikaler Richtung um das 4.3-fache skaliert. Für die Fundamentalmatrix und die essentielle Matrix ergeben sich verglichen mit denen aus dem Beispiel mit gleicher Abbildung folgende Matrizen.

$$\zeta_x = 1, \zeta_y = 1 : F = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} | : -0.5 \rightsquigarrow F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_x = 2, \zeta_y = 2 : F = \begin{pmatrix} 0 & 0.378 & 0 \\ 0 & 0 & -0.534 \\ 0 & 0.756 & 0 \end{pmatrix} | : 0.756 \rightsquigarrow F = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\zeta_x} = 0.5, \quad \frac{\sqrt{2}}{\zeta_y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\zeta_x = 3.2, \zeta_y = 1.2 : F = \begin{pmatrix} 0 & 0.198 & 0 \\ 0 & 0 & -0.747 \\ 0 & 0.634 & 0 \end{pmatrix} | : 0.634 \rightsquigarrow F = \begin{pmatrix} 0 & 0.312 & 0 \\ 0 & 0 & -1.178 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\zeta_x} = 0.312, \quad \frac{\sqrt{2}}{\zeta_y} = -1.178$$

$$\zeta_x = 0.5, \zeta_y = 4.3 : F = \begin{pmatrix} 0 & 0.885 & 0 \\ 0 & 0 & -0.145 \\ 0 & 0.442 & 0 \end{pmatrix} | : 0.442 \rightsquigarrow F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.328 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\zeta_x} = 2, \quad \frac{\sqrt{2}}{\zeta_y} = -0.328$$

(hier können vllt noch die verschiedenen rotationen gezeigt werden ,welche immer die selbe rotation bewirken) Die Werte für  $\zeta_x$  wirken sich auf die erste Zeile der Fundamentalmatrix aus, während die Werte von  $\zeta_y$  sich auf die zweite Zeile auswirken. Bei der nachfolgenden Umrechnung der Fundamentalmatrix in die essentielle Matrix mit Hilfe der Kameramatrizen  $K$  und  $K'$ , kann gestellt werden, dass die Ergebnisse jeweils Vielfache voneinander sind.

$$\zeta_x = 1, \zeta_y = 1 : E = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} | : 0.5 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_x = 2, \zeta_y = 2 : E = \begin{pmatrix} 0 & 0.756 & 0 \\ 0 & 0 & 1.069 \\ 0 & -0.756 & 0 \end{pmatrix} | : -0.756 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_x = 3.2, \zeta_y = 1.2 : E = \begin{pmatrix} 0 & 0.634 & 0 \\ 0 & 0 & 1.069 \\ 0 & -0.634 & 0 \end{pmatrix} | : -0.634 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_x = 0.5, \zeta_y = 4.3 : E = \begin{pmatrix} 0 & 0.442 & 0 \\ 0 & 0 & 1.069 \\ 0 & -0.442 & 0 \end{pmatrix} | : -0.442 \rightsquigarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei der Rekonstruktion der externen Kameraparameter ergibt sich daraus stehts die selbe Matrix für  $P'$ . Was wie gezeigt daran liegt, dass sich geometrisch nichts ändert, sondern lediglich die Skalierung der Koordinatenwerte der Bildpunkte und somit auch eine Skalierung der Einträge in  $F$  und  $E$ , welche aber ebenfalls als Skaleninvariant definiert sind[3]. Die Ergebnisse der darauffolgenden Szenenrekonstruktionen, der einzelnen Szenen zeigt, dass sich immer die selbe Szene ergibt, welche mit der eigens aufgebauten Szene übereinstimmen.

Reconstructed scaled Points 3D =

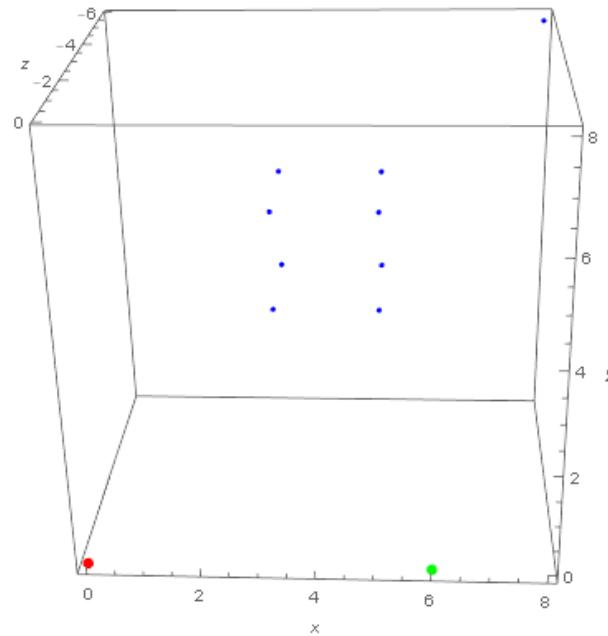
$$\begin{pmatrix} 3. & 3. & -4. \\ 5. & 3. & -4. \\ 5. & 5. & -4. \\ 3. & 5. & -4. \\ 3. & 3. & -6. \\ 5. & 3. & -6. \\ 5. & 5. & -6. \\ 3. & 5. & -6. \\ 8. & 8. & -6. \end{pmatrix}$$


Abbildung 6.9: Die rekonstruierten Szenenpunkte und Kamerapositionen bleibt auch bei unterschiedlichen Auflösungen die selben

Die Behauptung, dass die Auflösung der Kamera bei dem in dieser Arbeit gewählten Workflow für die Rekonstruktion der Szene keine Auswirkung hat, kann für das Minimalbeispiel bestätigt werden.

(HIER VLLT NOCH ZEIGEN, DAS DER REKTIFIZIERUNGSANSATZ AUCH MIT KAMERA UNTERSCHIEDLICHER AUFLÖSUNG FUNKTIONIERT)

# 7 Relle Rekonstruktion

Durch im Minimabeispiel durchgeführten Stereoanalyse steht das Grundgerüst für die Stereoanalyse mit realen Bilddaten. Der selbe Arbeitsprozess soll nun auch auf ein Realbeispiel mit Bildern zweier Kameras durchgeführt werden. Die externen Kameraparameter, werden in extern beschaffen. Über *Matlab* wird für jede Kamera einzeln mit Hilfe der *Single-camera-aclibration* App eine Kalibrierung durchgeführt. Da diese auch die externen Parameter liefert, können diese später als Vergleich mit den eigens berechneten Parameter dienen. Im fortschreitenden Arbeitsprozess der Stereoanalyse, werden des öfteren Ungereimtheiten im Vergleich mit dem Minimalbeispiel auftreten, welche behoben werden müssen um weiter zu verfahren. Diese Fehler entstehen durch die Ungenauigkeit, der zuvor detektierten korrespondierenden Punkte oder durch Bildfehler wie Rauschen oder Unschärfe, welche in der Photographie nicht immer vermieden werden können. Um diese Fehler zu beheben, werden einige Zwischenschritte benötigt, welche im Minimalbeispiel durch die Reinheit der Daten und der selbst aufgebauten Szenen nicht nötig waren. Im Minimalbeispiel wurden einige solcher möglichen Fehler bereits erwähnt. Für die Stereoaufnahmen wurden die halbformat Kamera Canon 60 D und die Vollformatkamera 6D verwendet. Die Bilder wurden mit beiden Kameras mit selber Auflösung und Seitenverhältnis aufgenommen. Später wurden auch noch Aufnahmen mit unterschiedlichen Auflösungen gemacht und ebenfalls die Stereoanalyse auf die Bildpaare angewandt.

## 7.1 Arbeitsprozess

Die beiden Kameras wurden so im Raum platziert, dass sie leicht zueinander hin gedreht waren. Da die Canon 60D eine halbformatkamera ist, wurde sie weiter hinten als die Canon 6D positioniert. Somit konnte ungefähr der selbe Bildausschnitt der Szene mit beiden Kameras aufgenommen werden.

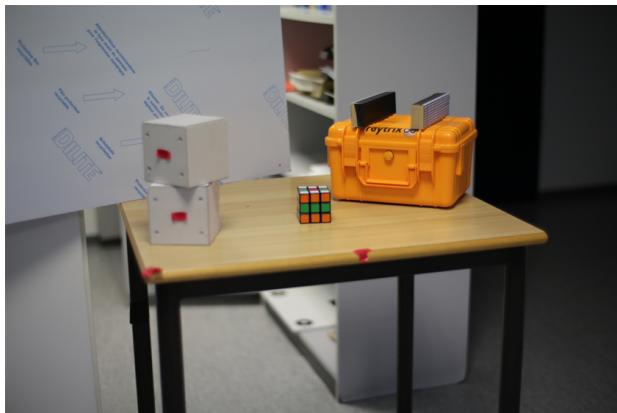


Abbildung 7.1: Aufnahme der Canon 6D von links

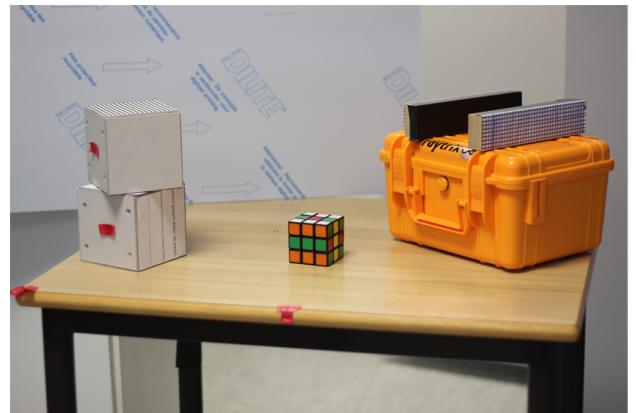


Abbildung 7.2: Aufnahme der Canon 60D von rechts



Abbildung 7.3: Szenenaufbau: Die Canon 60D befindet sich in dieser Abbildung auf der linken Seite, die Canon 60 D auf der rechten. Auf dem Tisch zwischen den Kamerassen ist die in den Abbildungen 6.1 und 6.1 abgebildete Szene zu sehen. Die Canon 60D ist etwas hinter der Canon 6D positioniert. Beide Kamerassen sind zu Szene hin gedreht und auch leicht nach unten geneigt.

Die Canon 6D wird als primär Kamera definiert und bekommt somit die Bezeichnung  $C$ , während die Canon 60D ab jetzt mit  $C'$  gekennzeichnet wird. Die räumliche Orientierung und Position von  $C'$  wird also relativ zu  $C$  berechnet und auch die Szene wird davon ausgehend, dass  $C$  als Projektionsmatrix  $P = [I|0]$  besitzt.

$$P = (I|0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Die Koordinatensysteme von  $C$  mit  $(C, \beta)$  und das Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  werden deckungsgleich definiert. Das Koordinatensystem von  $C'$  wird mit  $(C', \beta')$  definiert. Für die spätere Skalierung der rekonstruierten Szene ist es ratsam innerhalb der Szene einen Abstand zweier Punkte zueinander abzumessen, um einen Referenzwert für die Skalierung zu bekommen. Der Stereoaufbau ist somit fertig installiert. Der nächste Schritt ist mit Hilfe von *Matlab* und dem mitgelieferten Kalibrierungs-Tool namens *Single-camera-calibration* für jede Kamera eine Kalibrierung durchzuführen, um so die intrinsischen Parameter  $K$  und  $K'$  zu bekommen. Diese werden für den verwendeten Ansatz für die Schätzung der extrinsischen Parameter benötigt. Nach der Kalibrierung werden Stereoaufnahmen der Szene gemacht und anschließend korrespondierende Bildpunkte aus den beiden Bildern gesucht. Für den ersten Versuch wurden diese von Hand ausgelesen, da dies jedoch sehr Zeitaufwändig ist, wurden andere Möglichkeiten zur Detektion von korrespondierenden Bildpunkten überlegt. Wie in Abbildung (Einleitung Workflow) ersichtlich ist, wurde zwei Ansätze verfolgt. Fürs erste, wurde überlegt, ähnlich wie in *Matlab* anhand von 2D-Schachbrettern eine Stereoanalyse durchzuführen. [6]. Ein 2D-Schachbrett wird von beiden Kamerassen positioniert und es werden Stereoaufnahmen des selben gemacht. Mit Hilfe eines Algorithmus, welcher in einer vorherigen Arbeit angefertigt wurde, können die Eckpunkte des Schachbretts der jeweiligen Bilder bestimmt werden. Wichtig für die Funktion des Algorithmus ist, dass die Schachbretter vor einem einfarbigen Hintergrund aufgenommen wurden, so dass sich die Eckpunktbestimmung auch nur auf das Schachbrett bezieht und keine weiteren Punkte außerhalb mit in die entstehende Punkteliste aufgenommen werden. Wenn die Koordinaten der Eckpunkte des

Schachbrettmusters bekannt sind, folgt ein weiterer Algorithmus, welcher im Zuge dieser Arbeit implementiert wurde. Dieser Algorithmus nimmt die Liste mit den Koordinaten der Eckpunkte entgegen und sortiert und nummeriert diese Zeilen- und Spaltenweise durch. Jeder Punkt ist somit über zwei Indizes codiert und enthält die Information, in welcher Zeile und in welcher Spalte des Schachbrettmusters er sich befindet. Dieser Algorithmus wird auf beiden Schachbrettern angewandt. Nach der Sortierung der Punkte auf beiden Bildern, ist es möglich, korrespondierende Punkte der Bilder anhand gleicher Indizes der Eckpunkte zu bestimmen. Da nicht immer garantiert ist, dass alle Punkte innerhalb des Schachbretts zuvor gefunden worden, enthält der Sortierungsalgorithmus eine Funktion, in welchem er Lücken des innerhalb ausfindig macht und synthetische Eckpunkte setzt. Diese synthetisch gesetzten Punkte, werden markiert, so dass sie nicht in die Liste der möglichen korrespondierenden Punkte fallen. Wie genau der Sortierungsalgorithmus implementiert wurde wird im Kapitel Punktesortierung in Schachbrettmustern genauer beschrieben. Danach wird wie in Abbildung ???(Einleitung) gezeigt weiter verfahren. Um eine 3D Szene rekonstruieren zu können, wurde mit Hilfe eines in *Mathematica* bereits implementierten Verfahren zu Findung korrespondierender Punkte in zwei Bildern genutzt. Die benutzte Funktion basiert auf dem sogenannten *SURF*-Algorithmus. *SURF* steht für *Speeded Up Robust Features* und ist ein Rotations- und Skaleninvarianter Punkte Detektor und Deskriptor[32]. Die Suche nach diskreten Bildkorrespondenzen kann in drei Schritte eingeteilt werden. Im ersten Schritt werde sogennaten *Point of interest* an markanten Stellen im Bild detektiert. Darunter fallen zum Beispiel Eckpunkte-Erkennung, "Blob"- Erkennung oder "T-Junctions"- Erkennung[32]. Diese Aufgabe wird dem Detektor zugeordnet. Der wohl am meisten genutzte Detektor in heutigen Computer Vision Applikationen ist der sogenannte *Harris corner detector*[32]. Die Umgebung eines jeden gefundenen Punktes wird durch einen Merkmalsvektor beschrieben, den Deskriptor[32]. Dieser Deskriptor muss unverwechselbar und zu gleichen Zeit robust gegenüber Bildrauschen, Detektionsfehlern und geometrischen Deformationen sein. Im letzten Schritt müssen die Deskriptoren zwischen den Bildern abgestimmt werden. Meistens wird dieses *matching* über die Distanzen der Vektoren betrieben. In Abbildung 6.4 ist eines der Ergebnisse des verwendeten *SURF*-Algorithmus zu sehen. Das linke Bild wurde mit der Canon 6D aufgenommen, das rechte mit der Canon 60D. Die gelben Ziffern in den Bildern markieren die jeweiligen korrespondierenden Punkte in den Bildern.

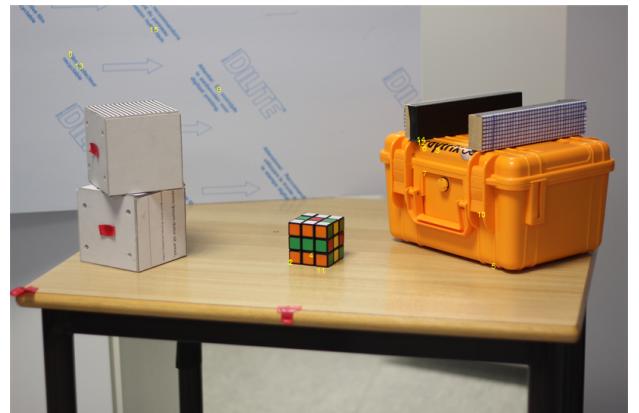
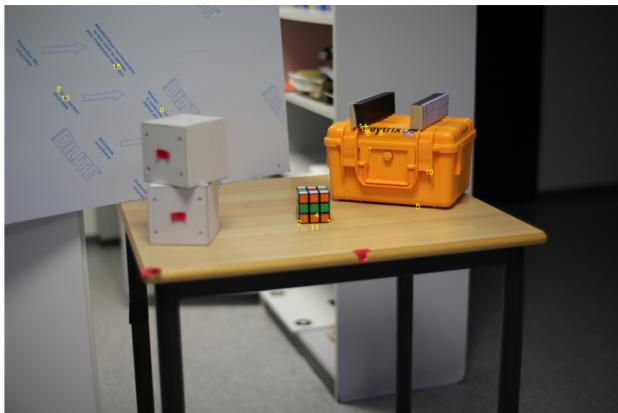


Abbildung 7.4: Die mit dem *SURF*-Algorithmus gefundenen Punkte sind mit den gelben Ziffern im Bild gekennzeichnet

## 7.2 Normalized-eight-Point-Algorithm

Nachdem die korrespondierenden Punkte in den Bilder gefunden wurden, wird nun der Arbeitsprozess wie in den Abbildungen ??? und ??? in der Einleitung und wie bereits aus dem Minimalbespiel bekannt, weiterverfolgt. In den einzelnen Schritten müssen jedoch ein paar Änderungen vorgenommen werden, um die durch die ungenauen Bilddaten entstehenden Fehler im Verlauf des Arbeitsprozesses zu minimieren.

Als erstes erfolgt die Schätzung der Fundamentalmatrix. Für die Schätzung wurde eine leicht abgeänderte Form des *eight-point-algorithms* namens *normalized-eight-point-algorithm* angewandt[3, 17, 4]. Zur Durchführung des *normalized-eight-point-algorithm* wird eine vorherige Normierung der eingehenden Bildpunkte pro Bild verlangt. Diese sollen so normiert werden, dass ihr durchschnittlicher Abstand zu ihrem den Koordinatenursprung verschobenenen Schwerpunkt  $\sqrt{2}$  beträgt[3, 17, 4]. Zu aller erst werden die jeweiligen Schwerpunkte der Punkte in den einzelnen Bildern gesucht und dieser dann in den jeweiligen Sensorskoordinatenursprung verschoben. Die Bildpunkte werden unter Beibehaltung ihres momentanen Abstandes zum Schwerpunkt mit verschoben. Danach werden die Anständer der Bildpunkten zum Schwerpunkt so skaliert, dass der Durchschnittsabstand der Punkte zu Schwerpunkt  $\sqrt{2}$  beträgt. Die so skalierten Bildpunkte befinden sich nun in einem deutlich kleineren Zahlenbereich von circa -1 bis 1[3, 17, 4]. Die Transformation der Bilddpunkte für beide Bilder wird jeweils einer Matrix  $T$  und  $T'$  vollzogen. Diese Matrix ist wichtig, um nach dem schätzen einer auf den normalisierten Koordinaten basierten Fundamentalmatrix  $\hat{F}$  wieder eine denormalisierte  $F$  zu generieren. Die Normierung der Bildkoordinaten ist wichtig, um die Auswirkung der Bildfehler auf das Endergebnis zu minimieren. Die Entscheidung den normalized-8-Point-Algorithm zu benutzen fiel als festgestellt wurde, dass ohne vorherige Normalisierung der ausgelesenen Punkte es zu größeren Fehlern in den weiteren Berechnungen kam. Zur Erklärung dieser Fehler kann zum einen die *Condition-Number* betrachten. Als *Condition Number*, Kondition im deutschen, wird die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten beschrieben. Die Kondition lässt sich durch Bestimmung des kleinsten Eigenvektors der Matrixmultiplikation der Koeffizientenmatrix  $A$  mit ihrer Transponierten  $A^T$  herausfinden. Die Matrix  $AA^T$  wird in die Matrizen  $UDU^T$ , wobei  $U$  eine orthogonale und  $D$  eine diagonale Matrix ist, zerlegt. Die diagonaleinträge von  $D$  sind in einer nicht ansteigenden Reihenfolge, woraus resultiert, dass der kleinste Singulärwert von  $D$  mit der letzten Spalte von  $U$  korrespondiert und somit ist die letzte Spalte von  $U$  gleich dem kleinsten Eigenvektor von  $AA^T$ [17]. Wird angenommen, dass  $AA^T$  eine  $9 \times 9$ -Matrix ist, so ergeben die Einträge  $d_1/d_9$  die gesuchte *Condition Number*. Je größer die *Condition-Number* ist, desto größer wirken sich auch kleinste Abweichungen, wie Bildrauschen, auf die Resultate aus. Da sich die original Bildkoordinaten in diesem Beispiel in einem Zahlenbereich von 0 bis 5478 befinden, sind auch die Werte innerhalb der Koeffizientenmatrix in einem sehr großen Zahlenbereich, was zu Folge hat, dass schon kleinste Abweichungen in den Bilddaten, große Auswirkungen auf die daraus resultierende Fundamentalmatrix haben kann, in Bezug darauf, dass die Werte der Einträge innerhalb von  $F$ , sehr große Ungleichgewichte aufweisen. Anders im Fall von Normierten Koordinaten, deren Zahlen sich in einem Bereich zwischen circa -1 und 1 befinden.

$$F = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-2} \\ 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-2} \\ 10^{-2} & 10^{-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$$F = \begin{pmatrix} -10^{-9} & 10^{-6} & -10^{-4} \\ -10^{-7} & 10^{-4} & 10^{-3} \\ 10^{-4} & -10^{-3} & -10^{-2} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Gleichung 6.2 zeigt schematisch was unter einer Gleichgewichtigen Fundamentalmatrix zu verstehen ist, welche bei einer sehr geringen *Condition-number* resultieren kann. Gleichung 6.3 wiederum zeigt schematisch das Resultat einer Ungleichgewichteten Fundamentalmatrix, dessen *Condition-Number* sehr groß ausfällt[17]. Durch normieren der Bildkoordinaten, kann die *Condition-Number* kleiner und damit einhergehend die entstehenden Fehler minimiert werden. Nachdem die Fundamentalmatrix aus den normierten Koordinaten geschätzt wurde, wird sie anschließend mit den beiden aufgestellten Matrizen  $T$  und  $T'$  wieder denormalisiert, so dass sie wieder als *epipolar – constraint* zwischen die original Koordinaten geschalten werden kann. Für normierte Koordinaten  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  gilt  $\hat{m}'^T \cdot \hat{F} \cdot \hat{m} = 0$  und für die ursprünglichen Bildkoordinaten gilt, dass  $m'^T \cdot T'^T \cdot \hat{F} \cdot T \cdot m = 0$  und somit wieder  $m'^T \cdot F \cdot m = 0$  [3, 17, 4]. Die Normierung der Koordinaten für die Verwendung des *eight-point-algorithms* darf auf keinen Fall mit der Normierung der Koordinaten für die essentielle Matrix  $E$  verglichen werden. Die Normierung der Koordinaten für die Schätzung von  $F$ , soll die Auswirkungen von Fehler auf die Resultate minimieren, während die Normierung der Koordinaten durch deren Verrechnung mit den

Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  dafür sorgt, dass daraus normierte Bildkoordinaten entstehen, dessen Koordinatenursprung nicht mehr in einer Bildecke sondern in der Bildmitte sich befindet[3]. Um zurück zum Arbeitsprozess zu kommen, sind die Koordinaten normiert, so wird der im Kapitel Einleitung aufgezeigte Verfahren zur Schätzung der Fundamentalmatrix gleichermaßen wie in den Gleichungen 4.29 bis 4.34 aufgebaut. Durch die möglichen Ungenauigkeiten wie Bildrauschen oder dem detektieren der korrespondierenden Punkte, ist der Rang der aufgestellten Koeffizientenmatrix  $A$  in den meisten Fällen größer als acht, was bedeutet, dass hier nicht einfach der Kern mit  $A \cdot f = 0$  gesucht werden kann, um eine Lösung zu finden. Im Falle eines höhren Ranges als 8 muss ein Verfahren, ähnlich wie dem, welches angewandt wurde um überbestimmte Systeme zu Lösen um eine Homographiematrix zu erhalten. Es wird also derjenige Vektor für  $f$  gesucht, welcher  $\|A \cdot f\|$  minimiert. Hierzu wird eine Singulärwertszerlegung von  $A$  in  $A = UDV^T$  durchgeführt. die Lösung für  $f$ , welche  $\|A \cdot f\|$  minimiert ist dann diejenige Spalte von  $V^T$ , welche mit dem kleinsten Singulärwert von  $D$  korrespondiert. Da die Singulärwerte eine absteigende Reihenfolge besitzen, bildet die letzte Spalte von  $V^T$  den Vektor  $f$ [3].

### 7.2.1 Singularity-Constraint der Fundamentalmatrix

Die Fundamentalmatrix ist eine singuläre-Matrix und ist somit eine Matrix von Rang zwei. Die Singularität der Fundamentalmatrix sorgt zum einen dafür das ihr rechter und linker Kern jeweils den Epipol des jeweiligen Bildes ergibt und die Epipolarlinien auch alle durch eben diese Epipole verlaufen. wird die Fundamentalmatrix durch eine Singulärwertszerlegung von  $A$  geschätzt, ist die Chance sehr hoch, dass das Ergebnis für  $\hat{F}$  eine Matrix von Rang 3 ist. Sollte dies der Fall sein gehen die Epipolarlinien der Bilder nicht mehr durch genau einen Punkt, wie man in den Abbildungen 6.5 und 6.6 erkennen kann. Diese bilden Epipolarlinien in einem Stereobildpaar ab.

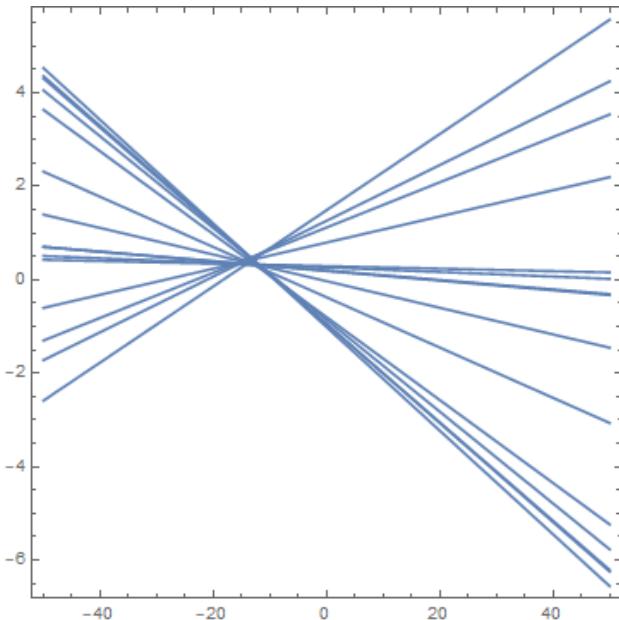


Abbildung 7.5: Epipolarlinien ohne *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 6D

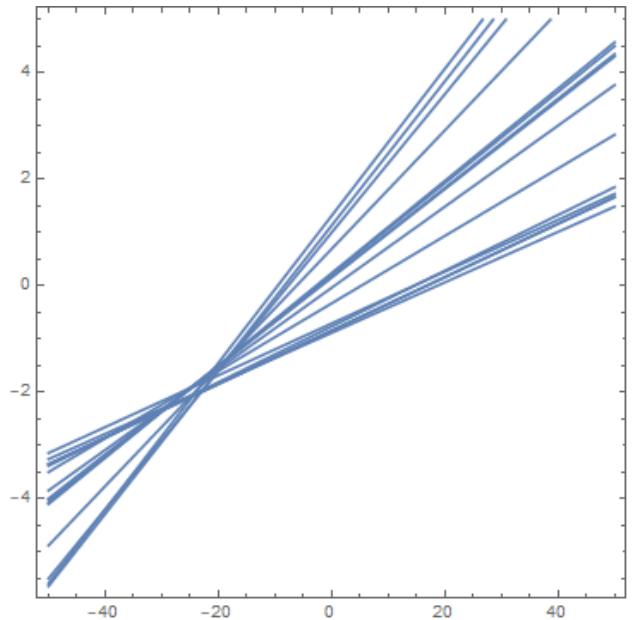


Abbildung 7.6: Epipolarlinien ohne *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 60D

Um eine gültige Fundamentalmatrix für den weiteren Arbeitsprozess zu generieren, kommt hier ein sogenannter *singularity constraint* zum Einsatz. Dieser erzwingt in  $\hat{F}$  eine Singularität. Zu aller erst wird eine Singulärwertszerlegung an  $F$  durchgeführt, so dass  $\hat{F}$  in  $\hat{F} = UDV^T$  zerlegt wird.  $D$  beinhaltet in einer diagonalen Matrix die Singulärwerte  $D = \text{diag}(r, s, t)$ , welche die Bedingung  $r \leq s \leq t$  erfüllen. Um nun den *singularity-constraint* in  $\hat{F}$  zu erzwingen, wird der letzte Singulärwert  $t = 0$

gesetzt, so dass am Ende dasteht  $D = \text{diag}(r, s, 0)$ . Danach werden die Matrizen  $UDV^T$ , wobei  $D$  nun die modifizierten Singulärwerte beinhaltet, wieder zu  $\hat{F}$  multipliziert. Die jetzt resultierende Fundamentalmatrix  $\hat{F}$  besitzt den Rang 2. Der rechte und linke Kern ergeben wieder die Epipole und die Epipolarlinien verlaufen wieder durch eben diese Epipole. Die Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen die selben Epipolarlinien wie in 6.5 und 6.6 nachdem der *singularity-constraint* in  $\hat{F}$  erzwungen wurde. Die somit entstandene Matrix  $\hat{F}$ , ist die laut Frobenius norm, nächste zum ursprünglichen  $\hat{F}$ [3]. Jetzt erst erfolgt die zuvor erwähnte Denormierung von  $\hat{F}$  durch  $T$  und  $T'$ . Die Abbildungen 6.9 und 6.10 zeigen die Epipolarlinien im Originalbild mit denormalisierten Koordinaten.

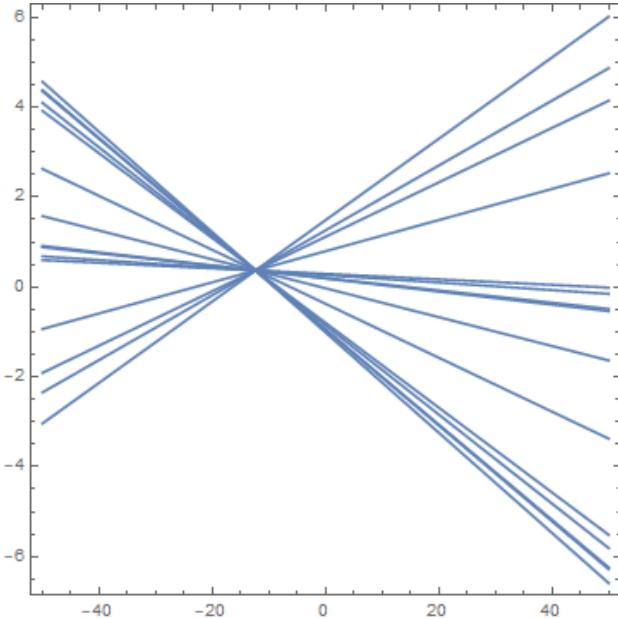


Abbildung 7.7: Epipolarlinien mit *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 6D

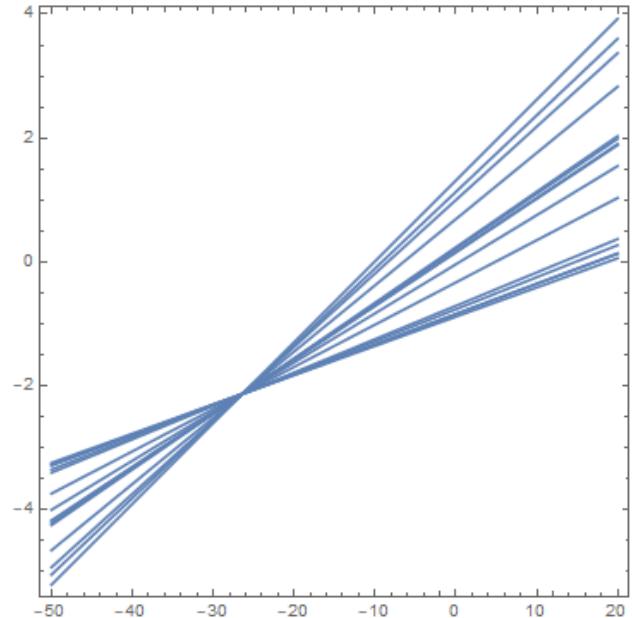


Abbildung 7.8: Epipolarlinien ohne *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 60D

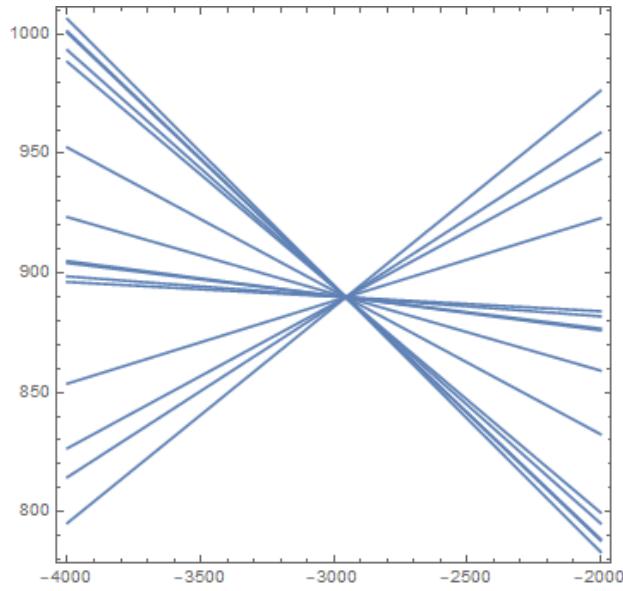


Abbildung 7.9: Epipolarlinien mit *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 6D, nach der denormalisierung von  $F$

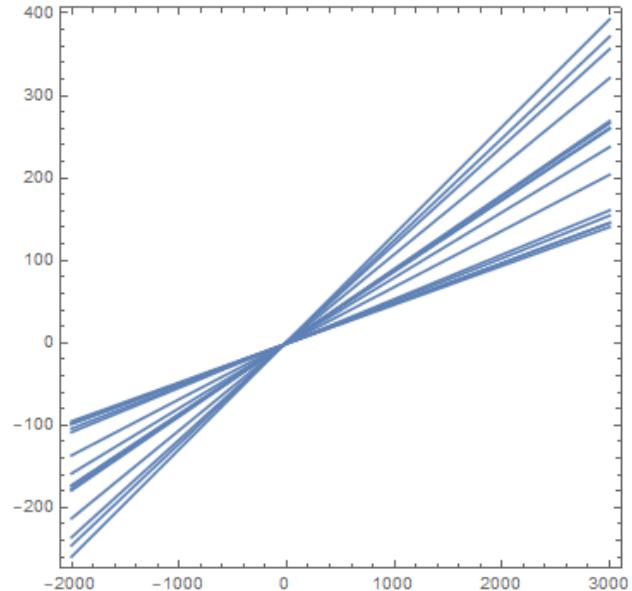


Abbildung 7.10: Epipolarlinien ohne *Epipolar-constraint* im Bild der Canon 60D, nach der denormalisierung von  $F$

## 7.2.2 Singularity- Constraint der essentiellen Matrix

Die essentielle Matrix  $E$  kann wenn sie über den *eight-point-algorithm* ermittelt wird, auch eine Rang 3 Matrix anstelle einer Rang 2 Matrix sein. Eine essentielle Matrix wird darüber definiert, dass sie eine Matrix mit Rang 2 ist und ihre Singulärwerte in  $D$  von  $E = UDV^T$  die Eigenschaft besitzen, dass  $D = \text{diag}(a, b, c)$  mit  $a = b$  und  $c = 0$ . Sind die Singulärwerte nicht in der gezeigten Form vorhanden und  $E$  hat den Rang 3, so ist sie keine gültige essentielle Matrix[3]. Im implementierten Algorithmus, welcher in dieser Arbeit vorgestellt wird, wird die essentielle Matrix über die Fundamentalmatrix  $F$  und den intrinsischen Kameraparameter  $K$  und  $K'$  gewonnen. Da im vorherigen Schritt für die Matrix  $F$  schon der *singularity-constraint* erwirkt wurde, ist dadurch dass  $F$  nun eine Matrix von Ran 2 ist auch versichert, dass  $E$  ebenfalls von Rang 2 ist. Jedoch bedeutet das nicht gleichzeitig, dass auch die Bedingungen für die Singulärwerte von  $E$  erfüllt sind. Wird  $E$  in  $UDV^T$  zerlegt und die Singulärwerte in  $D$  haben beispielsweise die Form  $D = \text{diag}(a, b, c)$  mit  $a \geq b \geq c$ , so muss auch hier die für  $E$  typische Singularität erzwungen werden. Die laut Frobenuis Norm nächste Matrix  $E$  zur momentanen  $E$  kann durch modifizieren der Singulärwerte von  $D$  mit  $D = \text{diag}(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, 0)$  erzwungen werden[3]. Mit der neuen essentiellen Matrix können dann genau wie im Kapitel Virtuelle Rekonstruktion auch wieder die vier möglichen Lösungen der externen Kameraparameter ermittelt werden.

## 7.3 Szenenrekonstruktion

Im letzten Schritt des Arbeitsprozesses, wird nun noch die Szenen mit Hilfe eines Triangulationsverfahrens rekonstruiert. Wie bereits im Kapitel Virtuelle Rekonstruktion erwähnt wurde, ist es bei den Fehlerhaften Bildkoordinaten nicht möglich die 3D-Szenenpunkte durch eine einfache Rückprojektion der Bildpunkte zu einem Punkt im 3D-Raum zu erhalten. liegt nur einer der beiden Bildpunkte  $m$  oder  $m'$  nicht hundert prozentig auf der jeweiligen korrespondierenden Epipolarlinie, so liegen die rückprojizierten Strahlen windschief im Raum. Das liegt daran, dass die Bildpunkte  $m$  und  $m'$  nicht den *Epipolar-Constraint*  $m'^T F m = 0$  erfüllen. Sprich die Gleichungen  $m = PM$  und  $m' = P'M$  können nicht erfüllt werden, da es kein  $M$  gibt, dass für beide Gleichungen mit den momentanen  $m$  und  $m'$  gilt. Abbildung 6.11 veranschaulicht die Rückprojektion der Kamerazentren durch zwei Fehlerhafte Bildpunkte.

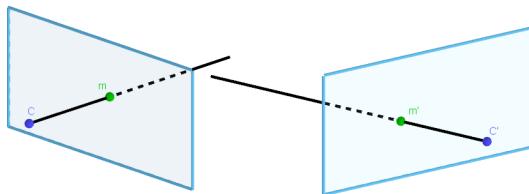


Abbildung 7.11: a)

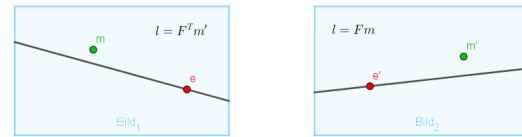


Abbildung 7.12: b)

Abbildung 7.13: a) Die rückprojizierten Strahlen der ungenauen korrespondierenden Punkte  $m$  und  $m'$  sind schief und treffen sich nicht in einem Punkt im 3D-Raum. b) The epipolar geometry for  $m$ ,  $m'$ . The measured points do not satisfy the epipolar constraint. The epipolar line  $l' = Fm$  is the image of the ray through  $n$ , and  $l = F^T m'$  is the image of the ray through  $m'$ . Since the rays do not intersect,  $m'$  does not lie on  $l'$ , and  $m$  does not lie on  $l$ .

Um eine Triangulation zu ermöglichen, muss eine Methode gefunden werden, welche diesen Fehler so weit minimiert, dass es zu einer erfolgreichen Rückprojektion kommt. Die verwendete Methode zur Rekonstruktion der Szene wurde nach der Vorlage von Hartley & Zisserman[3] implementiert und wird im folgenden Schritt für Schritt beschrieben. Voraussetzung ist, dass die Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$ , sowie die Fundamentalmatrix  $F$  bekannt sein müssen. Sind die Projektionsmatrizen  $P$  und  $P'$  bis auf eine projektive oder affine Komponenten bekannt, so ist es wünschenswert, wenn die

Triangulierung auf einem affinen und projektiv invarianten Verfahren funktioniert[3]. Die hier verwendeten Projektionsmatrizen sind bis auf eine Skaleninvarianz genau bestimmt, was unter den Fall der affinen Invarianz Fällt. Wären die intrinsischen Kameraparameter  $K$  und  $K'$  nicht bekannt gewesen, gibt es die Möglichkeit die Projektionsmatrizen über die Fundamentalmatrix  $F$  mit dem, im Buch von *Hartley & Zisserman* beschriebenen *Stratified-Approach* bis auf eine projektive Invarianz genau zu bestimmen[3]. Die hier verwendete Triangulierung ist nur projektiv invariant, kann aber trotzdem genutzt werden. Die rekonstruierte Szene ist, dann wie im Minimalbeispiel auch, nicht auf ihre Originalmaße skaliert, was aber nach der Triangulierung noch getan werden kann. Die Triangulierung ist deshalb projektiv invariant, weil alle Rechenoperationen, wie die Minimierungen von Distanzen, sich nur auf die 2D-Bildern beziehen und sich nicht in den projektiven 3D-Raum erstreckt[3]. Der Grundgedanke der Triangulation ist, dass zwei Punkte  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  gefunden werden sollen, die möglichst nah an den ursprünglichen  $m$  und  $m'$  sind und gleichzeitig den *Epipolar-Constraint*  $\hat{x}'^T F \hat{x} = 0$  erfüllen. Dies erfolgt durch die Minimierung einer Kostenfunktion  $C$ . In vielen bekannten Computer Vision Applikationen wird für diese Minimierung eine numerische Lösung gewählt, die wohl bekannteste Methode ist der *Levenberg-Marquardt Algorithmus*[3]. Jedoch hat sich gezeigt, dass ein nahezu optimales Minimum der geometrischen Kostenfunktion  $C$  auch durch eine Annäherung ersten Grades finden lässt. Die Annährung um die es sich handelt ist die sogenannten *Sampson-approximation*

### 7.3.1 Minimieren der Kostenfunktion durch Sampson-approximation

Es sollen zwei Punkte  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  gefunden werden, welche nahe an den Ursprünglichen  $m$  und  $m'$  liegen und gleichzeitig den *Epipolar-Constraint* erfüllen.  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  sollen durch Minimierung einer Kostenfunktion  $C$  ermittelt werden, welche die Distanz  $d$  zwischen  $m$  und  $\hat{m}$  und  $m'$  und  $\hat{m}'$  minimiert.

$$C(m, m') = d(m, \hat{m})^2 + d(m', \hat{m}')^2 \quad (7.4)$$

Die projizierten Punkte  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  eines 3D-Objektpunktes  $\hat{M}$  liegen auf einem paar korrespondierender Epipolarlinien. Jedes Punktpaar, welches den *Epipolar-Constraint* erfüllt, liegt auf einem paar korrespondierender Epipolarlinien. Die optimalen  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  liegen am Fuße des Lots, welches von den ursprünglich projizierten Punkten  $m$  und  $m'$  ausgeht. Zusätzlich liegen  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  auf korrespondierenden Epipolarlinien  $l$  und  $l'$ [3].

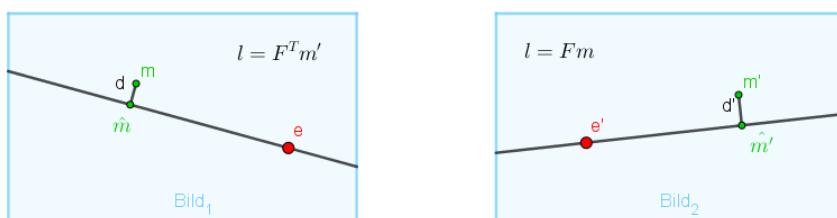


Abbildung 7.14: Frafische Darstellung der optimalen Punkte  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$

Jedes Punktpaar auf  $l$  und  $l'$  würde den *Epipolar-Constraint* erfüllen, jedoch minimieren nur  $x_{\perp}$  und  $x'_{\perp}$  die quadratischen Distanzen in der Kostenfunktion  $C$ . Ausgehend von dieser Aussagen wird  $C$  so umformuliert, dass gilt  $d(m, \hat{m}) = d(\hat{m}, l)$  und  $d(m', \hat{m}') = d(\hat{m}', l')$ , was jeweils den senkrechten Abstand  $m$  zu  $l$  und  $m'$  zu  $l'$  beschreibt. Werden  $l$  und  $l'$  frei aus allen möglichen Epipolarlinien gewählt, so wird immer der senkrechte Abstand von  $x$  zu dieser gewählten  $l$  berechnet, entsprechend gilt das auch für  $m'$  und irgendeine  $l'$ . Nun muss der Abstand  $d(\hat{m}, l)^2 + d(\hat{m}', l')$  minimiert werden, da natürlich nicht einfach jede beliebigen Epipolarlinien genutzt werden können. Es wird eine Strategie mit insgesamt vier Schritten für die Minimierung verfolgt[3]. Zuerst werden die Epipolarlinienbündel

pro Bild so Parametrisiert, dass beispielsweise eine Epipolarlinie im ersten Bild als  $l(t)$  geschrieben werden kann. Danach wird die Fundamentalmatrix  $F$  dazu benutzt, die entsprechend korrespondierende Epipolarlinie  $l'$  zu berechnen. Die Kostenfunktion  $C$  kann somit als eine Funktion von  $t$  definiert werden. Schlussendlich muss ein Wert für  $t$  gefunden werden, welcher  $C$  minimal werden lässt.

$$C(m, m') = d(m, \hat{m})^2 + d(m', \hat{m}')^2 \quad (7.5)$$

$$\rightsquigarrow C(m, m') = d(m, l(t))^2 + d(m', l'(t))^2 \quad (7.6)$$

Es kann passieren, dass ein Bildpunkt korrespondierend zum jeweiligen Epipol des anderen Bildes ist, der Rückprojizierte Punkt im 3D-Raum würde sich dann auf der Basislinie der zwei Projektionszentren befinden und es ist somit nicht möglich ihn zu rekonstruieren. Um solche Fälle zu vermeiden, wird eine Transformation der Punkte  $m$  und  $m'$  in den Ursprung  $(0, 0, 1)^T$  zu verschieben.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \bar{m} = T \cdot m \quad (7.7)$$

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x' \\ 0 & 1 & -y' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \bar{m}' = T' \cdot m' \quad (7.8)$$

Die Fundamentalmatrix  $F$  wird dann wieder an die neu translatierten Punkte  $\bar{m}$  und  $\bar{m}'$  angepasst.

$$\bar{F} = T'^{-T} F T^{-1} \quad (7.9)$$

Als nächstes wird  $F$  mit  $T$  und  $T'$  so Transformiert, dass den *Singularity-Constraint* zwischen Des Weiteren sollen die Epipole auf die x-Achse an die Punkte  $\hat{e} = (1, 0, f)^T$  und  $\hat{e}' = (1, 0, f')^T$ , wobei  $f$  und  $f'$  nahezu null sein werden. Die Epipole lassen sich durch den rechten und linken Kern der neuen  $\bar{F}$  berechnen. Angenommen  $f$  und  $f'$  seien genau 0, so lauten die Koordinaten der Epipole  $e = (1, 0, f)^T$  und  $e' = (1, 0, f')^T$ . Ist dies der Fall so hat  $\bar{F}$  für welche dann gilt, dass  $\bar{F}(1, 0, f)^T = (1, 0, f')\bar{F} = 0$  eine spezielle Form.

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

$$\begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ff'd + (-ff'd) \\ -fb + fb \\ -fd + fd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

$$(1 \ 0 \ f') \cdot \begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ff'd + (-ff'd) \\ -f'c + f'c \\ -f'd + f'd \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0) \quad (7.12)$$

Im Realfall sind die Werte der Epipole  $e$  und  $e'$  nicht so rein wie im Beispiel gezeigt. Aufgrund dessen, werden zwei Rotationsmatrizen aufgestellt, welche die Epipole  $e$  und  $e'$  auf  $Re = (1, 0, e_3)$  und  $R'e' = (1, 0, e'_3)$  rotiert.

$$R = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$R' = \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & 0 \\ -e'_2 & e'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$\bar{F}$  wird dann nochmals mit  $R'FR^T$  ersetzt. Die Einträge in  $\bar{F}_{Rot}$  haben nun die Form wie in Gleichung 7.10, mit  $f = e_3$ ,  $f' = e'_3$ ,  $a = \bar{F}_{Rot,22}$ ,  $b = \bar{F}_{Rot,23}$ ,  $c = \bar{F}_{Rot,32}$  und  $d = \bar{F}_{Rot,33}$ . Angenommen eine Epipolarlinie verläuft nun durch einen Punkt  $(0, t, 1)^T$  und dem Epipol  $e = (1, 0, f)^T$ , wird diese Epipolarlinie mit  $l(t)$  bezeichnet. Das Kreuzprodukt dieser beiden Punkte beschreibt die Gerade.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tf \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Die quadratische Distanz dieser Linie zum Ursprung wird dann bezeichnet mit:

$$d(m', l'(t))^2 = \frac{t^2}{1 + (tf)^2} \quad (7.16)$$

Für die Herleitung von Gleichung 7.16 wird angenommen die Gleichung einer Gerade sei zunächst in Koordinatenform Dargestellt

$$Ax + By - C = 0 \quad (7.17)$$

Die Selbe Gerade kann auch in Normalform ausgedrückt werden

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad (7.18)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad (7.19)$$

Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden kann folgend ausgedrückt werden.

$$\vec{v} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n} \rightsquigarrow \frac{-C}{A^2 + B^2} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| \rightsquigarrow \|\vec{v}\| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad (7.21)$$

$$\Rightarrow |C| = |\vec{p} - \vec{n}| \quad (7.22)$$

$$\Rightarrow |\sqrt{A^2 + B^2}| = \|\vec{n}\| \quad (7.23)$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (7.24)$$

Werden nun  $A$ ,  $B$  und  $C$  mit den Werten der Geraden  $(tf, 1, -t)^T$  ersetzt, kann Gleichung 7.16 rekonstruiert werden.

$$A = tf, B = 1, C = -t, \vec{v} = d \quad (7.25)$$

$$d^2 = \frac{t^2}{\sqrt{((tf)^2 + 1^2)^2}} = \frac{t^2}{(tf)^2 + 1^2} = \frac{t^2}{1 + (tf)^2} \quad (7.26)$$

Für korrespondierende Epipolarlinie  $l'(t)$  wird der Punkt  $(0, t, 1^T)$  und die Fundamentalmatrix  $\bar{F}_{Rot}$  multipliziert.

$$l'(t) = F(0, t, 1)^T = (-f'(ct + d), at + b, ct + d)^T. \quad (7.27)$$

Für die quadratische Distanz  $d(m', l'(t))^2$  ergibt sich dann:

$$d(m', l'(t))^2 = \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2} \quad (7.28)$$

Für die ursprüngliche Kostenfunktion  $C$  kann jetzt eine Funktion  $s(t)$  überestzt werden.

$$C(m, m') = d(m, \hat{m})^2 + d(m', \hat{m}')^2 \quad (7.29)$$

$$\rightsquigarrow C(m, m') = d(m, l(t))^2 + d(m', l'(t))^2 \quad (7.30)$$

$$\rightsquigarrow s(t) = \frac{t^2}{1 + (tf)^2} + \frac{(ct + d)^2}{(at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2} \quad (7.31)$$

$s(t)$  ist dann Minimal, wenn für dessen Ableitung gilt  $s'(t) = 0$ . Werden die beiden Terme in  $s(t)$  Nennergleich gemacht und der Nenner gleich Null gesetzt, ergibt sich der folgende Ausdruck  $g(t)$

$$g(t) = t((at + b)^2 + f'^2(ct + d)^2)^2 - (ad - bc)(1 + f^2t^2)^2(at + b)(ct + d) \quad (7.32)$$

Funktion  $g(t)$  ist ein Polynom vom Grad 6. Das Minimum von  $s(t)$  ergibt sich aus einer der 6 möglichen Lösungen für  $t$  aus  $g(t)$ . Für die Ermittlung des Minimums werden nur die reellen Lösungen in betracht gezogen, die nicht-reellen Lösungen können ignoriert werden. Die reellen Lösungen für  $t$  aus  $g(t)$ , werden dann wieder in  $s(t)$  eingesetzt. Das  $t$ , welches durch einsetzte in  $s(t)$  den kleinsten Wert ergibt, ist das gesuchte Minimum. Ist  $t_{min}$  gefunden, können die Epipolarlinien  $l = (tf, 1, -t)$  und  $l'$  durch einsetzen von  $t_{min}$  berechnet werden. Nun müssen nur noch die zwei Punkte  $\hat{m}_{Rot}$  und  $\hat{m}'_{Rot}$  gefunden werden, welche dieser Epipolarlinien vom Ursprung aus am nächsten sind. Der Punkt vom Ursprung aus mit dem geringsten Abstand zu einer Linie  $(\lambda, \mu, v)$  berechnet sich durch  $(-\lambda \cdot v, -\mu \cdot v, \lambda^2 + \mu^2)$

$$l = (tf, 1, -t) \quad (7.33)$$

$$\hat{m}_{Rot} = (-(tf) \cdot v, -1 \cdot v, (tf)^2 \cdot 1^2) \quad (7.34)$$

Nachdem zu beiden Linien  $l$  und  $l'$  der jeweils nächste Punkte  $\hat{m}_{Rot}$  und  $\hat{m}'_{Rot}$  vom Ursprung aus gefunden wurden, müssen diese nun wieder mit an ihre Ausgangsposition verschoben werden.

$$\hat{m} = T^{-1}R^T \hat{m}_{Rot} \quad (7.35)$$

$$\hat{m}' = T'^{-1}R'^T \hat{m}'_{Rot} \quad (7.36)$$

Vergleicht man die Punkte  $m$  und  $\hat{m}$  und die Punkte  $m'$  und  $\hat{m}'$ , so kann die minimalen Abweichungen der Punkte voneinander sehen. Um nun noch den Punkt  $\hat{M}$  im 3D-Raum zu rekonstruieren, kann nun

jegliche bekannte Methode für die Triangulierung verwendet werden. Durch die zuvorigen Rechenoperationen ist nun gewährleistet, dass sich die Gerade der Projektionszentren  $C$  und  $C'$  durch ihre jeweiligen Bildpunkte  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  auf jeden Fall im Raum treffen[3]. Für Doe Rückprojektion der Punkte  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  zu  $\hat{M}$  wurde ebefalls sich wieder auf ein Verfahren von *Hartley & Zisserman* berufen. Es handelt sich um eine lineare Triangulierungsmethode. Die Gleichungen  $\hat{m} = P\hat{M}$ ,  $\hat{m}' = P'\hat{M}$  werden in eine Gleichung der Form  $AX = 0$  zusammengeschrieben. Durch die Verwendung des Kreuzproduktes, wird die Homogene Komponente eliminiert.

$$\hat{m} \times (P\hat{M}) = 0 \quad (7.37)$$

$$\hat{m}' \times (P'\hat{M}') = 0 \quad (7.38)$$

Was ausgeschrieben für  $\hat{m}$  und  $\hat{m}'$  zu den folgenden drei Gleichungen führt.

$$x(p^{3T}X) - (p^{1T}X) = 0 \quad (7.39)$$

$$y(p^{3T}X) - (p^{2T}X) = 0 \quad (7.40)$$

$$x(p^{3T}X) - y(p^{1T}X) = 0 \quad (7.41)$$

$p^{iT}$  bezeichnet hier jeweils die Reihen der Projektionsmatrix  $P$  beziehungsweise  $P'$ . Die Matrix  $A$  stellt sich, aufgrund der Tatsache, dass die Komponenten der Gleichungen 7.37 bis 7.39 linear zu  $\hat{M}$  sind, wie folgt zusammen.

$$A = \begin{bmatrix} xp^{3T} - p^{1T} \\ yp^{3T} - p^{2T} \\ x'p'^{3T} - p'^{1T} \\ y'p'^{3T} - p'^{2T} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

Die zwei Wege eine solche Matrix zu lösen sind bereits bekannt, so kann zum einen wieder die Inhomogenene Methode angewandt werden und Kern dieser Koeffizientenmatrix berechnet werden, oder es kann das homogene Verfahren verfolgt werden. Hier wird die Singulärwertzerlegung an A durchgeführt und derjenige Vektor gesucht werden, welcher mit dem kleinsten Singulärwert korrespondiert[3]. Das Ergebnis ist jeweils  $\hat{M}$  im 3D-Raum. Da die vorherige  $P$  und  $P'$  nur bis zu einem Skalierungsfaktor genau bestimmt wurden, muss nachdem die Punkte rekonstruiert wurden noch die Skalierung auf ihre ursprüngliche Größe erfolgen. Dies ist am einfachsten, wenn eine Referenzgröße zuvor in der Originalszene gemessen wurde. Die Abbildungen 7.15 und 7.16 zeigen die Rekonstruierte Szene des Beispiels, jedoch noch nicht skaliert auf ihre Ursprungsgrößen. Abbildung 7.15 zeigt die 3D Szene. Der Rote Punkt symbolisiert die Position von  $C$  also der Canon 6D und der grüne Punkt symbolisiert die Position von  $C'$  also der Canon 60D. Die Blauen Punkte sind die durch den *SURF*-Algorithmus detektierten Punkte der Szene. Abbildung 7.16 zeigt die rekonstruierten Objektpunkte als 2D-Punkte, hierfür wurden ihre Koordinaten einfach durch ihren Tiefenwert geteilt.

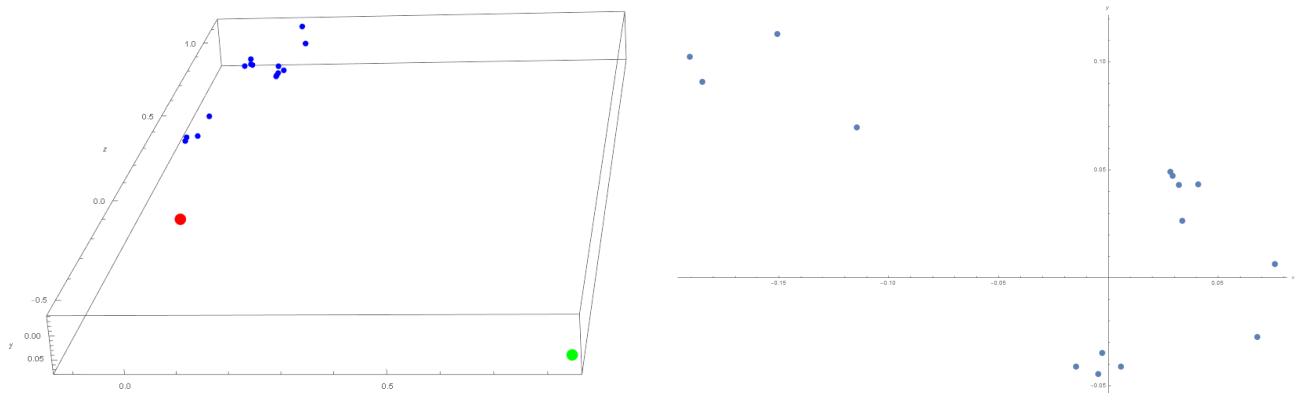


Abbildung 7.15: Rekonstruierte Szene, unskaliert  
in Pixeleinheiten

Abbildung 7.16: Rekonstruierte Szene, unskaliert, in Pixeleinheiten und in einem 2D-Plot geschrieben

# 8 3D-Stereokalibrierung und Szenenrekonstruktion mit reellen Daten und Kameras unterschiedlicher Auflösung

## 8.1 Ergebnisse einer Stereoanalyse mit Kameras unterschiedlicher Auflösung

Für den Test, ob Szeneriekonstruktion im Realbeispiel auch mit unterschiedlichen Kameraauflösungen funktioniert, wurde eine der von Matlab ermittelten Kameramatrizen  $K'$  und auch die durch den Surf Algorithmus detektierten Punkte jeweils skaliert. Im Kapitel ?? wurden die einzelnen Bauteile der Kameramatrix genau beschrieben. Die Kameramatrix  $K'$  aus Matlab für die Canon 60D gegeben.

$$K' = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

$\alpha_x$  und  $\alpha_y$  setzen sich auch dem Abstand des Kamerazentrums zum Hauptpunkt zusammen, welcher in dieser Arbeit als mit  $\zeta$  bezeichnet wurde, und den Kantenlängen der Pixel auf dem Sensor  $m_x$  und  $m_y$ . Um die Auflösung der Kamera zu verändern, wird auf  $\alpha_x$  und  $\alpha_y$  jeweils ein beliebiger Faktor dazu multipliziert. Zum Beweis, dass die Rekonstruktion der externen Kameraparameter und die Szeneriekonstruktion, bei egal welcher Skalierung, die ähnlichen Ergebnisse liefern, wurde die Kameramatrix  $K'$  mit den Verhältnissen [2 : 2], [5 : 2], [2 : 1], [1 : 2] und [1.2 : 2.3] skaliert.

$$\begin{aligned} K'_{[2:2]} &= \begin{bmatrix} \alpha_x \cdot 2 & s & x_0 \cdot 2 \\ 0 & \alpha_y \cdot 2 & y_0 \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K'_{[5:2]} &= \begin{bmatrix} \alpha_x \cdot 5 & s & x_0 \cdot 5 \\ 0 & \alpha_y \cdot 2 & y_0 \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K'_{[2:1]} &= \begin{bmatrix} \alpha_x \cdot 2 & s & x_0 \cdot 2 \\ 0 & \alpha_y \cdot 1 & y_0 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K'_{[1:2]} &= \begin{bmatrix} \alpha_x \cdot 1 & s & x_0 \cdot 1 \\ 0 & \alpha_y \cdot 2 & y_0 \cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ K'_{[1.2:2.3]} &= \begin{bmatrix} \alpha_x \cdot 1.2 & s & x_0 \cdot 1.2 \\ 0 & \alpha_y \cdot 2.3 & y_0 \cdot 2.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Formulierung, dass die jeweils neu rekonstruierten Szenen ähnlich sind, wurde deshalb verwendet, da durch die zuvorigen Fehler der korrespondierenden Punkte und später, bei der Triangulierung, durch die *Sampson-Approximation* Abweichungen auftreten können. Als Beweise werden im folgenden

vier Beispiele für die vier Lösungen der rekonstruierten Translationsmatrizen  $R'$  aufgezeigt. Des Weiteren werden die 3D-Plots und 2D-Plots der rekonstruierten Szenen bei unterschiedlich Auflösungen im Vergleich mit der Szene bei gleichen Auflösungen gezeigt. Die Koordinaten sind in unskalierten Pixel-einheiten gegeben. Die Originalszene ist in Abbildung 7.15 und 7.16 zu sehen. Zu beachten ist, das die Ausgabe des 3D Plots in *Mathematica* manchmal rechtsdrehend, manchmal linksdrehend dargestellt sind, weshalb der Eindruck aufkommt, die Szene und die Kameraposition seien gespiegelt dargestellt. Dies leidet auf ein generellen Darstellungsproblem von 3D-Plots in *Mathematica* zurückzuführen. Dieses kann mit zusätzlichem Code bereinigt werden, wurde aber zu diesem Zeitpunkt noch nicht implementiert.

$$\begin{aligned} P1 &= \begin{pmatrix} 0.991092 & 0.120891 & 0.0558752 & -0.812277 \\ -0.120366 & 0.992649 & -0.0126719 & 0.0389145 \\ -0.0569964 & 0.00583352 & 0.998357 & 0.581973 \end{pmatrix} \\ P2 &= \begin{pmatrix} 0.991092 & 0.120891 & 0.0558752 & 0.812277 \\ -0.120366 & 0.992649 & -0.0126719 & -0.0389145 \\ -0.0569964 & 0.00583352 & 0.998357 & -0.581973 \end{pmatrix} \\ P3 &= \begin{pmatrix} 0.378236 & -0.0296342 & -0.925235 & -0.812277 \\ 0.0547644 & -0.997021 & 0.0543212 & 0.0389145 \\ -0.924088 & -0.0712161 & -0.375487 & 0.581973 \end{pmatrix} \\ P4 &= \begin{pmatrix} 0.378236 & -0.0296342 & -0.925235 & 0.812277 \\ 0.0547644 & -0.997021 & 0.0543212 & -0.0389145 \\ -0.924088 & -0.0712161 & -0.375487 & -0.581973 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbildung 8.1: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $R'$  bei unveränderter Auflösung. Die Auflösungen von  $C_\delta$  und  $C'_\delta$  sind die selben.

$$\begin{aligned} P1 &= \begin{pmatrix} 0.376619 & -0.0296193 & -0.925895 & 0.812113 \\ 0.0551443 & -0.996999 & 0.0543246 & -0.0388039 \\ -0.924725 & -0.0715175 & -0.373856 & -0.582208 \end{pmatrix} \\ P2 &= \begin{pmatrix} 0.376619 & -0.0296193 & -0.925895 & -0.812113 \\ 0.0551443 & -0.996999 & 0.0543246 & 0.0388039 \\ -0.924725 & -0.0715175 & -0.373856 & 0.582208 \end{pmatrix} \\ P3 &= \begin{pmatrix} 0.991142 & 0.121017 & 0.0546967 & 0.812113 \\ -0.120498 & 0.992632 & -0.0126975 & -0.0388039 \\ -0.0558303 & 0.00599422 & 0.998422 & -0.582208 \end{pmatrix} \\ P4 &= \begin{pmatrix} 0.991142 & 0.121017 & 0.0546967 & -0.812113 \\ -0.120498 & 0.992632 & -0.0126975 & 0.0388039 \\ -0.0558303 & 0.00599422 & 0.998422 & 0.582208 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbildung 8.2: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $R'$  wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[5 : 2]$  skaliert wurde

$$\begin{aligned} P1 &= \begin{pmatrix} 0.990947 & 0.120272 & 0.0596553 & 0.810768 \\ -0.119751 & 0.992728 & -0.0122401 & -0.0387536 \\ -0.0606937 & 0.0049855 & 0.998144 & -0.584083 \end{pmatrix} \\ P2 &= \begin{pmatrix} 0.990947 & 0.120272 & 0.0596553 & -0.810768 \\ -0.119751 & 0.992728 & -0.0122401 & 0.0387536 \\ -0.0606937 & 0.0049855 & 0.998144 & 0.584083 \end{pmatrix} \\ P3 &= \begin{pmatrix} 0.37685 & -0.0292569 & -0.925812 & 0.810768 \\ 0.0543725 & -0.997079 & 0.0536412 & -0.0387536 \\ -0.924677 & -0.0705534 & -0.374158 & -0.584083 \end{pmatrix} \\ P4 &= \begin{pmatrix} 0.37685 & -0.0292569 & -0.925812 & -0.810768 \\ 0.0543725 & -0.997079 & 0.0536412 & 0.0387536 \\ -0.924677 & -0.0705534 & -0.374158 & 0.584083 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbildung 8.3: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $R'$  wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1 : 2]$  skaliert wurde

$$\begin{aligned} P1 &= \begin{pmatrix} 0.990963 & 0.12034 & 0.0592445 & -0.81095 \\ -0.119818 & 0.99272 & -0.0122887 & 0.0387766 \\ -0.060292 & 0.0050791 & 0.998168 & 0.583829 \end{pmatrix} \\ P2 &= \begin{pmatrix} 0.990963 & 0.12034 & 0.0592445 & 0.81095 \\ -0.119818 & 0.99272 & -0.0122887 & -0.0387766 \\ -0.060292 & 0.0050791 & 0.998168 & -0.583829 \end{pmatrix} \\ P3 &= \begin{pmatrix} 0.377058 & -0.0293027 & -0.925726 & -0.81095 \\ 0.0544044 & -0.997073 & 0.0537206 & 0.0387766 \\ -0.92459 & -0.0706194 & -0.37436 & 0.583829 \end{pmatrix} \\ P4 &= \begin{pmatrix} 0.377058 & -0.0293027 & -0.925726 & 0.81095 \\ 0.0544044 & -0.997073 & 0.0537206 & -0.0387766 \\ -0.92459 & -0.0706194 & -0.37436 & -0.583829 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbildung 8.4: Zeigt die rekonstruierte Matrix  $R'$  wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1.2 : 2.3]$  skaliert wurde

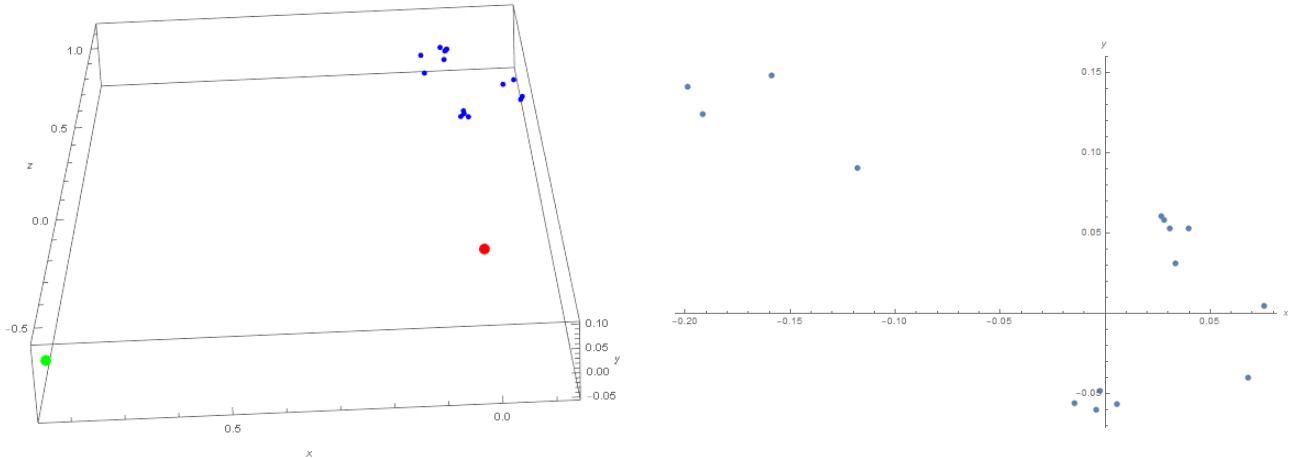


Abbildung 8.5: Rekonstruierte Szene, wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[5 : 2]$  skaliert wurde

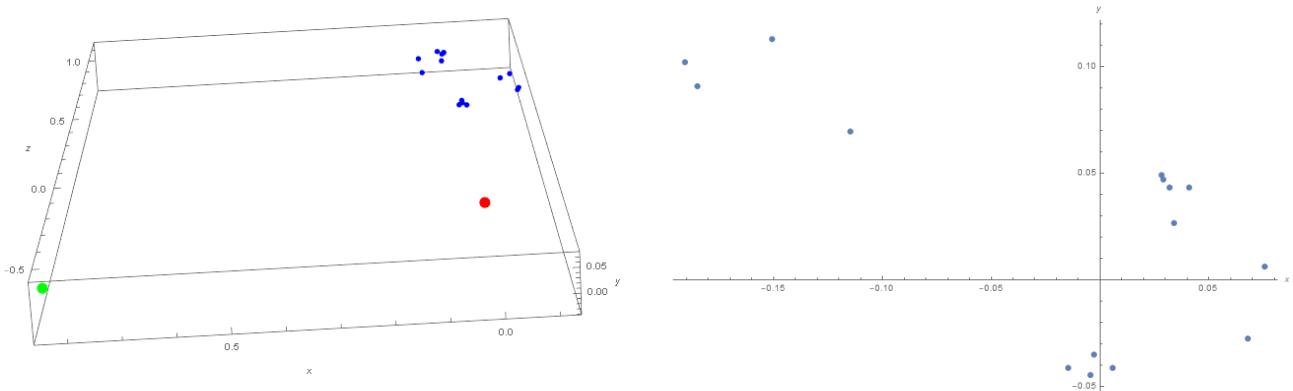


Abbildung 8.6: Rekonstruierte Szene, wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[2 : 1]$  skaliert wurde

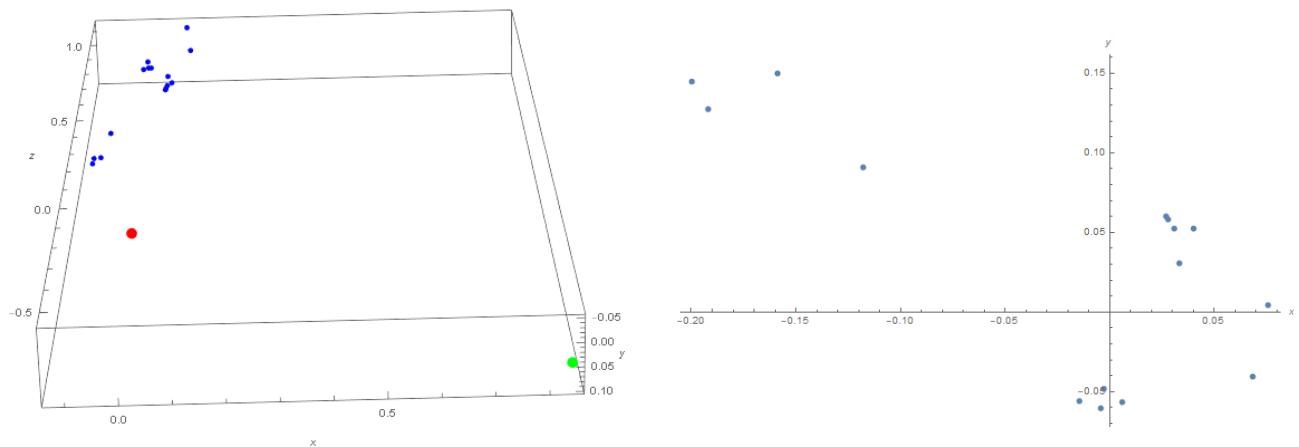


Abbildung 8.7: Rekonstruierte Szene, wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1 : 2]$  skaliert wurde

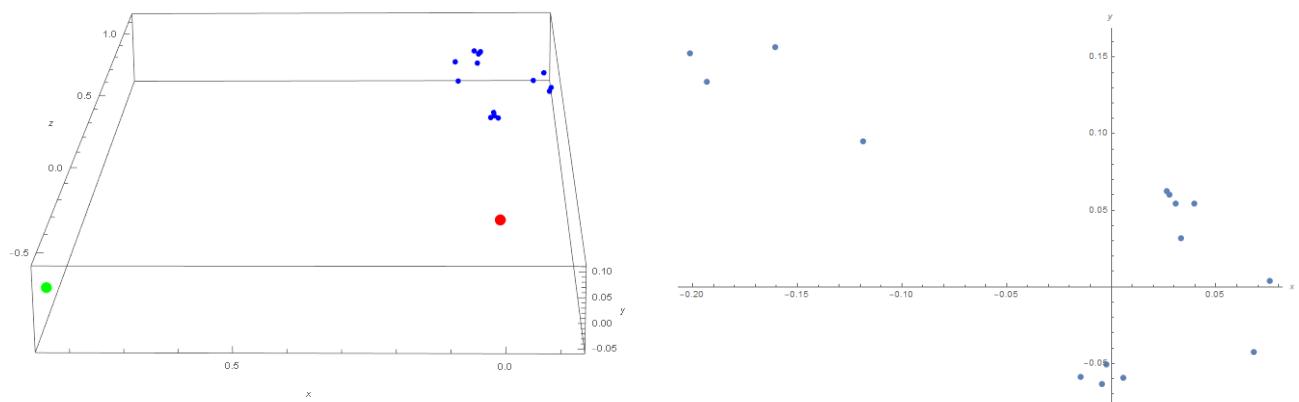


Abbildung 8.8: Rekonstruierte Szene, wenn  $K'$  mit einem Verhältnis von  $[1.2 : 2.3]$  skaliert wurde

# 9 Punktesortierung in Schachbrettmustern

## 9.1 Algorithmus zur Punktesortierung in verzeichneten Schachbrettbildern

In diesem Teil der Masterthesis soll am Ende ein Algorithmus entstehen, welcher durch einen bereits bestehenden Algorithmus zur Detektion von Eckpunkten eines Schachbretts, eine Liste an Eckpunkten bekommt und diese auf deren Nachbarschaftsverhältnisse prüft. Die Schachbretter können dabei sowohl Kissen- als auch Tonnennverzeichnungen aufweisen und oder perspektivisch verzerrt sein. Mit den Algorithmus sollen Punkte wissen in welchen Reihen sie sich sowohl in x- als auch y-Richtung befinden. Jeder Punkt bekommt also eine Indexnummer in x-, sowie y-Richtung beziehungsweise in unserem Beispiel wird die y-Koordinate als  $j$  bezeichnet und die x-Koordinate als  $i$ , zugewiesen. Jeder Punkt bekommt mit Hilfe von den Mathematica eigenen *Associations* einen *Key* mit *NeighbourJ* und *NeighbourI* zugeteilt. Mit Hilfe dieser *Keys* kann dann später bei einem Stereobildpaar zum Beispiel die Korrespondierenden Eckpunkte der Schachbretter rausgesucht werden, was vielleicht genauere Ergebnisse liefert also die Suche von Hand. Des weiteren kann dieser Algorithmus in späteren Projekten vielleicht bei der Rausrechnung von Verzeichnungen hilfreich sein.

### 9.1.1 Vorläufiges Klassendiagramm

Module	Parameter	Lokale Variablen	Funktion
FindMinMax	Pointlist	Imin, imax, jmin, jmax, iSplits, jSplits, iDistance, jDistance	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die minimas und maximas der i und j-Werte der Koordinaten werden gesucht, um den „Rahmen“ des Gitters um das Schachbrett festzulegen</li> <li>In den ConstantArrays JSplits und ISplits werden die Zellen des Gitters gespeichert. Diese werden über die Distanz der jeweiligen Minimalwerte und Maximalwerte geteilt durch die gewünschte Anzahl an Zellen geteilt.</li> </ul>
SortPointList	iSplits, jSplits, Pointlist	pj,pj	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Eckpunkte werden zunächst der Größe nach nach ihren i-Werten Sortiert. Die sortierte Liste wird dann durchgezählt, so dass jeder Punkt seinen Indexwert in I-Richtung bekommt</li> <li>Danach werden die Eckpunkte der Größe nach nach ihren J-Werten sortiert und bekommen hier ebenfalls einen Index zugeordnet</li> <li>(Diese Sortierung ist nach jetzigem Stand des Algorithmus vllt nicht mehr zwingend notwendig)</li> </ul>
GoThroughConvex Hulls	iSplits, jSplits, pj	ConvexHull	<ul style="list-style-type: none"> <li>Nun wird herausgefiltert, welcher Punkt in welche Zelle des erstellten Gitters gehört, somit wird eine grobe Vorsortierung der Punkte für den weiteren Verlauf vorgenommen.</li> <li>In einer For-Schleife welche alle iSplits durchzählt wird die Funktion FindPointsInConvexHull bei jedem Durchgang aufgerufen welche eine Liste mit Associations in die Liste ConvexHull hinzufügt.</li> <li>Der Funktion werden die momentanen iSplits der Durchzählung übergeben und alle Jsplits. Des Weiteren wird die nach J sortierte Punktliste übergeben</li> </ul>
FindPointsInConvexHull	iSplits[[1,ii]], iSplits[[1,ii+1]], jSplits, pj	ConvexHullCell={}, ConvexHullList, ConvexHullCellKeys = <  >	<ul style="list-style-type: none"> <li>Eine Liste namens ConvexHullCell und eine Association nach dem ConvexHullKeys wird angelegt</li> <li>Zwei For-Schleifen werden gestartet. Die erste läuft durch alle Jsplits, die zweite geht alle Punkte von pj durch.</li> <li>Innerhalb der For-Schleife wird dann überprüft, welche Punkte aus pj sich innerhalb der übergebenen iSplits und den dazugehörigen jSplits befinden.</li> <li>Die Koordinaten, die Indizes und die Zellenbezeichnung werden dann in Keys in die Association ConvexHullCellKeys gespeichert und er Liste ConvexHullCell angehängt. Diese Liste wird dann und die Liste ConvexHull angehängt</li> <li>Wiederholung des Vorganges mit neuen iSplits.</li> </ul>

Abbildung 9.1: Klassendiagramm

FindStartVectors	ConvexHull	PointCloud={}, StartPointCloudKeys=<  >, VecI,VecJ,countI,countJ, Start, nextI,nextJ,	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Punkte der Zellen (<math>i = 1, j = \text{All}</math>) und (<math>i = \text{all}, j = 1</math>) werden in eine neue Liste namens StartPointCloud gespeichert.</li> <li>Die Liste wird zweimal durchlaufen <ul style="list-style-type: none"> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = 1</math> und <math>i = \text{all}</math> aufhalten. Aus ihnen wird der geringste i-Wert ermittelt (VecI)</li> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = \text{all}</math> und <math>i = 1</math> aufhalten. Aus ihnen wird der geringste j-Wert ermittelt (VecJ)</li> </ul> </li> <li>Die Punkte mit den geringsten Werten werden in VecI und VecJ gespeichert.</li> <li>Jetzt wird die Liste nochmals zweimal durchgegangen. <ul style="list-style-type: none"> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = 1</math> und <math>i = \text{all}</math> aufhalten werden durchgegangen. Aus ihnen wird derjenige Wert ermittelt, welcher einen Wert für <math>j</math> besitzt der kleiner ist als der momentane j-Wert von VecI und dessen i-Wert kleiner ist als der i-Wert von VecI plus einem Offset. Dieser Wert ist das neue VecI</li> <li>Alle Punkte welche sich in den Zellen <math>j = \text{all}</math> und <math>i = 1</math> aufhalten. Aus ihnen wird derjenige Wert ermittelt, welcher einen Wert für <math>i</math> besitzt der kleiner ist als der momentane i-Wert von VecJ und dessen j-Wert kleiner ist als der j-Wert von VecI plus einem Offset. Dieser Wert ist das neue VecJ</li> </ul> </li> <li>VecI und VecJ ergeben den gleichen Punkt und somit ist der Startwert gesetzt.</li> <li>Nun sollen die ersten Punkte in i- und j-Richtung vom Startpunkt aus gefunden werden.</li> <li>Es wird ein nexti und ein nextj definiert, dessen Koordinaten sehr groß anfangen</li> <li>Es wird wieder die StartPointListe zweimal durchlaufen <ul style="list-style-type: none"> <li>Es werden Punkte gesucht, welche sich in der selben Zelle <math>i</math> wie der Startpunkt befinden und auch die Zellen +1 und -1 drum herum. Sollte es ein Punkt geben, der kleiner ist als das momentane nexti und größer als der Startpunkt, jedoch nicht gleich dem Startpunkt. So nimmt nexti dessen Wert an.</li> <li>Danach muss geprüft werden, ob das potentielle nexti auch wirklich das richtige nexti ist. Hierzu wird eine neue For-Schleife gestartet, welche wieder die StartPointCloud durchgeht und überprüft ob es einen Punkt gibt dessen j-Koordinatenabstand zum Startpunkt kleiner ist also der j-Koordinatenabstand des momentanen nexti zum Startpunkt und ob dessen i-Koordinatenabstand zum Startpunkt kleiner ist als der momentane i-Koordinatenabstand von nexti zum Startpunkt.</li> </ul> </li> </ul>
------------------	------------	---	---

Abbildung 9.2: Klassendiagramm

			<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist dies der Fall so wird dieser Punkt zum neuen nexti.</li> <li>Mit dem potentiellen nextj wird ebenso verfahren.</li> </ul>
CreatePossiblePoint - ListsIAndJ	nextI, nextJ, Start, ConvexHull	IList= {}, JList= {}, IDir, JDir, distance, cache, PotNextI, PotNextJ	<ul style="list-style-type: none"> <li>IDir und JDir sind die Richtungsvektoren vom Startpunkt aus in beide Kantenrichtungen des Schachbretts.</li> <li>Danach werden die ersten beiden Spalten in I- und J-Richtung jeweils durchlaufen, und in IList und JList gespeichert.</li> <li>Diese Listen enthalten weitere potentielle Punkte entlang der gesuchten Kante.</li> <li>Die Kanten können natürlich durch die perspektivische Verzerrung mancher Bilder auch noch weiter in die Zellen hineinragen. Hierum kümmert sich dann im späteren Algorithmus die SaftyJList[] und SaftyIList[] Funktionen</li> </ul>
FindNeighbours	IList, JList ,Start, nextI, nextJ, ConvexHull	SortedPointsKeys = <>, Sortedpoints = {}, proportionJ, proportionI, Jtemp, itemp, PotNextJDir, distanceNextPotPointJ, PotNextIDir, distanceNextPotPointI, NeighbourNumberJ, NeighbournumberI, distanceJ, distanceI, NextJDir, NextIDir, StartPropJForFirstCompleteGridJ	<ul style="list-style-type: none"> <li>StartPoint und NextPointI und NextPointJ werden die Keys NeighbourI und NeighbourJ gegeben mit startPoint(NeighbourJ → 1, NeighbourI → 1), NextPointI(NeighbourJ → 1, NeighbourI → 2) und NextPointJ(NeighbourJ → 2, NeighbourI → 1).</li> <li>Diese drei bereits bekannten Punkte werden dann auch in eine angelegte CheckPointList gespeichert, diese wird für das spätere Prüfen von weiteren Punkten benötigt.</li> <li>Nun wird zunächst in einer For-Schleife die Punkte von startPoint und NextPointJ aus gesucht. <ul style="list-style-type: none"> <li>Anmerkung: Für die Punkte in I-Richtung des Schachbretts wird das selbe Verfahren angewandt.</li> </ul> </li> <li>Benötigt wird die Distanz zwischen dem momentanen startPointJ, welcher nach jedem Durchlauf der Schleife den Wert des momentanen NextPointJ bekommt und einem momentanen NextPointJ, welcher nach jedem Durchlauf der Schleife den Wert des gerade neu gefundenen nächsten Punktes bekommt.</li> <li>Die Schleife selbst durchläuft alle Punkte, welche in der für die Richtung entsprechenden Richtung Liste sind. In diesem Fall die JList</li> <li>Es wird außerdem bei der Suche den nächsten Punktes in j-Richtung eine Distanz namens proportion berechnet, welcher die Distanz i zwischen startPoint und Nextpoint beinhaltet.</li> <li>Innerhalb der durchlaufenden Liste wird derjenige Punkt gesucht welcher zum NextPointJ den geringsten Abstand in J-Richtung hat und dessen Abstand in I-Richtung &lt;= der i-Koordinate des NextPointJ + proportion+noch einen Puffer ist und &gt;= der i-Koordinate des NextPointJ – proportion+noch einen Puffer.</li> </ul>

Abbildung 9.3: Klassendiagramm

			<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist der nächste Punkt gefunden, so wird dieser der SortedPointsList und der der CheckPointsList übergeben mit den passenden NeighbourI und NeighbourJ associationKey.</li> <li>Des Weiteren bekommt für den nächsten Schleifendurchlauf startPointJ die Werte von NextPointJ und NextPointJ' in wird der neu gefundenen Punkt aus der JList gespeichert.</li> <li>Im Anschluss werden noch in AppendTo[SortedPoints, SaftyListJ[Start, CheckPointJ, proportionY, CheckCellForJ, ConvexHull, distanceJ]], AppendTo[SortedPoints, CompleteJGrid[ nextI, ConvexHull, StartDistanceJ, StartProportionJ, Start_Jp, al]] Weitere Punkte zur SortedList in J-Richtung hinzugefügt, bei ersterem nur in bestimmten Fällen. Mehr zu den Funktionen folgt.</li> <li>Nicht zu vergessen: selbiges wie oben wird auch mit den Punkten in I-Richtung vollzogen, bis auf die CompleteGrid Funktion</li> </ul>
SaftyList	Start, CheckLastPointJ , proportionJ, LastJPointsCell, ConvexHull, NextJDir	SaftyList = {}, SaftyKeys =<>, SaftyKeysList = {}, propJ, lastDir, lastdistanceJ	<ul style="list-style-type: none"> <li>Der Funktion werden die Parameter CheckLastPointJ und LastJPointCell mitgegeben. Diese stammen aus der Funktion FindNeighbours und es handelt sich um den letzten Punkt der innerhalb der JListe ermittelt wurde und dessen i-Zelle in welcher sich dieser befindet.</li> <li>Da die I- bzw die JListe in jede Richtung nur die Punkte der ersten beiden Zellen beinhaltet, kann es bei einem rotierten Schachbrett sein, dass sich noch weitere Punkte in Zellen weiter oben/unten befinden</li> <li>Die Funktion SaftyList, erstellt eine Liste aus möglichen weiteren Punkten, indem sie die in diesem Falle I-Zelle des letzten Punktes nimmt und diese so wie die unter und oberhalb dieser Zelle und alle deren J-Zellen aufwärts auf einen möglichen nächsten Punkt untersucht. → Dies geschieht nach dem selben Verfahren wie in FindNeighbours.</li> <li>Sollte es noch einen geben wird dieser ebenfalls der CheckPointList und der SortedPointsList zugewiesen, ansonsten passiert nichts.</li> </ul>
CompleteJGrid	StartPointI, ConvexHull, StartDistanceJ, proportionJ, Start,	PossiblePointsList = {}, SortedPointsKeys = <>, SaftyPossiblePointsListJ = {}, propJ, StartPointForJGrid, distanceJ,	<ul style="list-style-type: none"> <li>Nachdem die äußersten Punkte der linken und unteren Kante des Schachbretts gefunden wurden, muss nun das restliche Grid des Schachbretts detektiert und mit den richtigen NeighbourI und NeighbourJ Werten versehen werden.</li> <li>Jeder Punkt der in I-Richtung als „Rahmenpunkt“ detektiert wurde, wird einmal als Startpunkt gesetzt, von ihm aus wird dann in einem sehr ähnlichen Verfahren wie schon zuvor der nächste Punkt in J-Richtung gesucht und wenn nötig tritt auch hier</li> </ul>

Abbildung 9.4: Klassendiagramm

NeighbourNumberJ, aI	NextNeighbourNumberJ, distanceNextPotGridPointJ, tempJ, NextPointJDir, NextJDir, CheckPointJ, CheckCellForJ	nochmal die SaftyList Funktion in kraft um auch wirklich alle Punkte jeder Reihe ausfindig zu machen
----------------------	--	--

Abbildung 9.5: Klassendiagramm

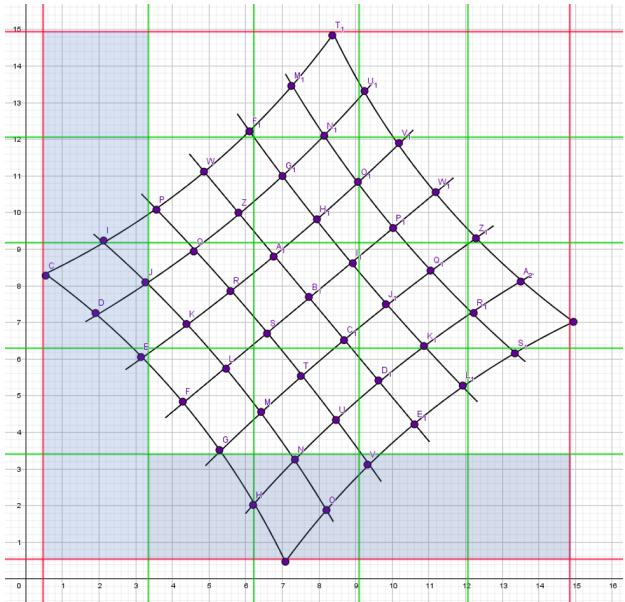


Abbildung 9.6

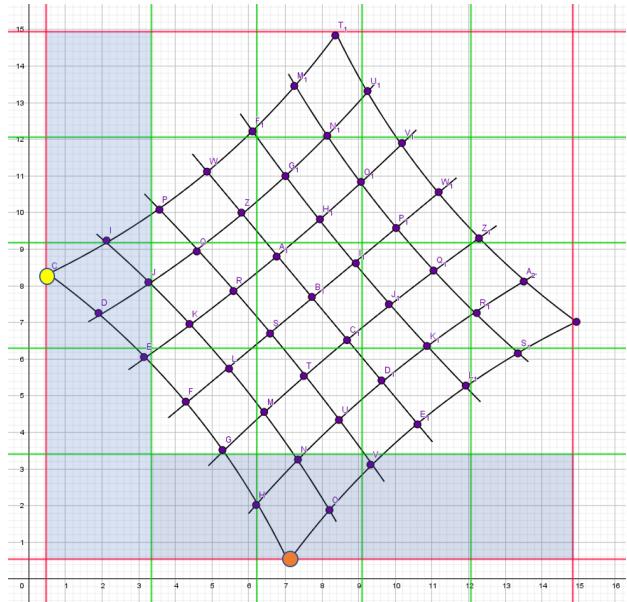


Abbildung 9.7

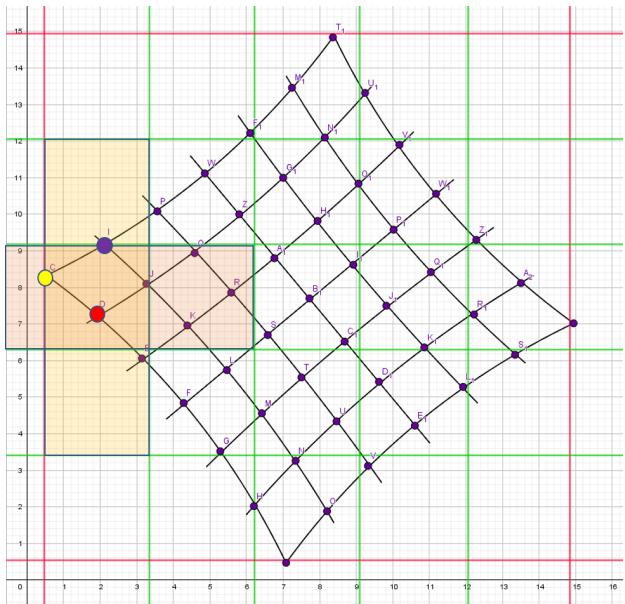


Abbildung 9.8

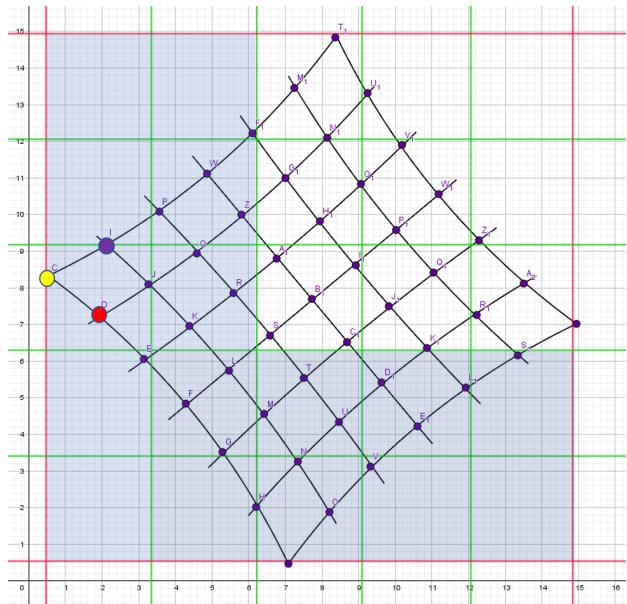


Abbildung 9.9

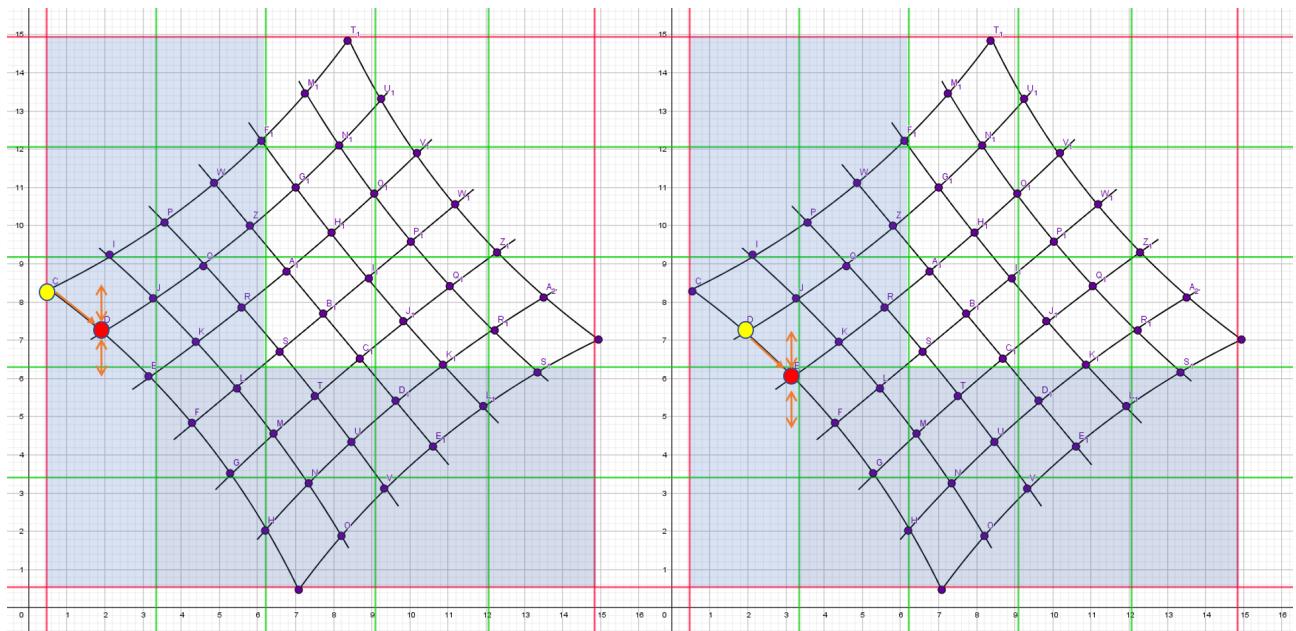


Abbildung 9.10: Klassendiagramm

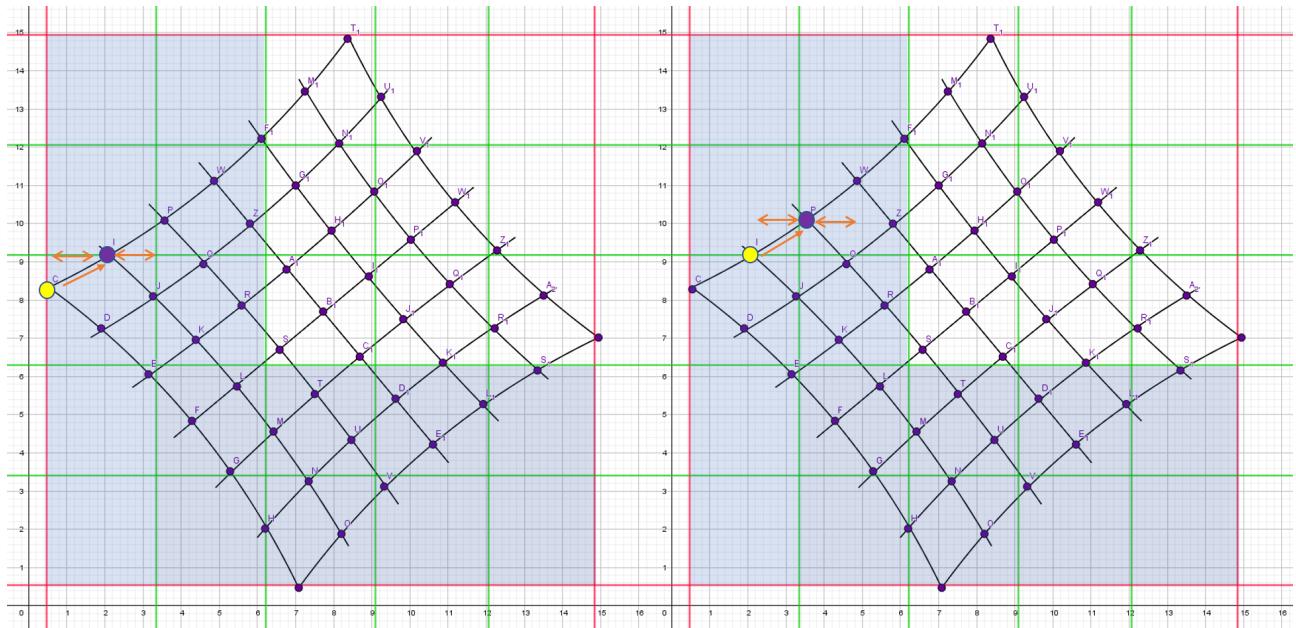


Abbildung 9.11: Klassendiagramm

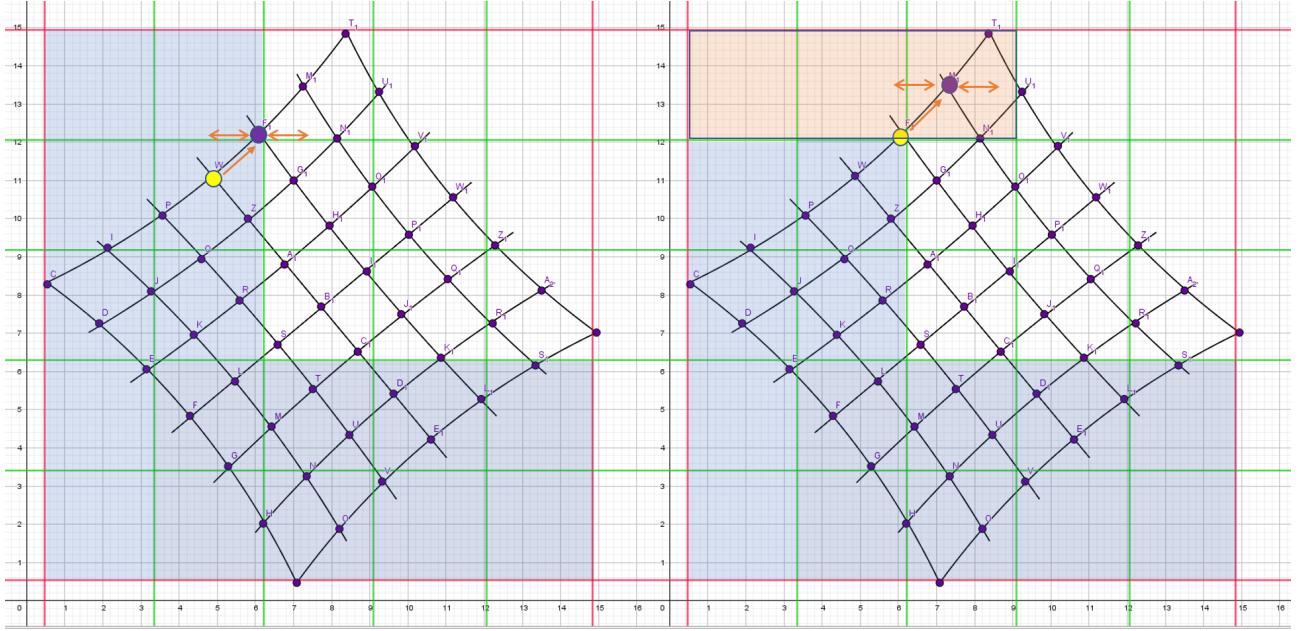


Abbildung 9.12: Klassendiagramm

### 9.1.2 Beispiele

In den folgenden Beispielen sieht man jeweils das Originalbild und ein Bild welches die durch den Algorithmus sortierten Punkte farbig ausgibt. Die grünen eingefärbten Punkte sind in den Bildern des Algorithmus die Nachbarn, welche sich in i-Richtung an der dritten Stelle befinden. Natürlich können auch andere Reihen oder auch einzelne Punkte abgefragt werden.

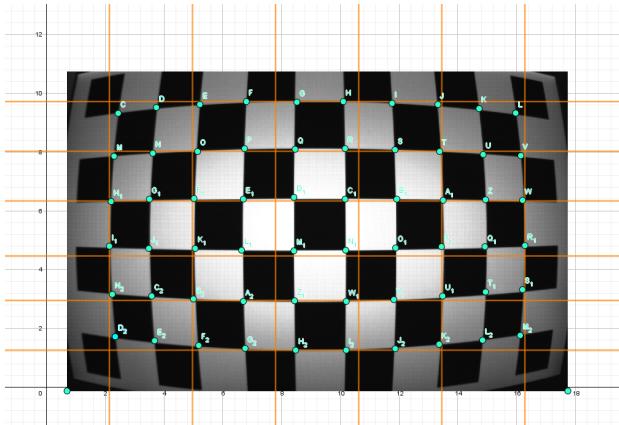


Abbildung 9.13: Bild eines Tonnenförmig verzeichneten Schachbretts

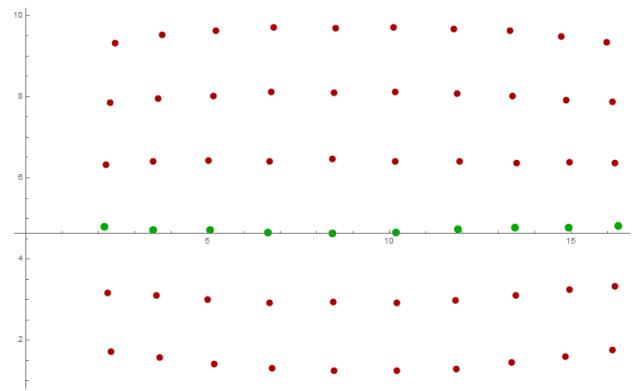


Abbildung 9.14: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

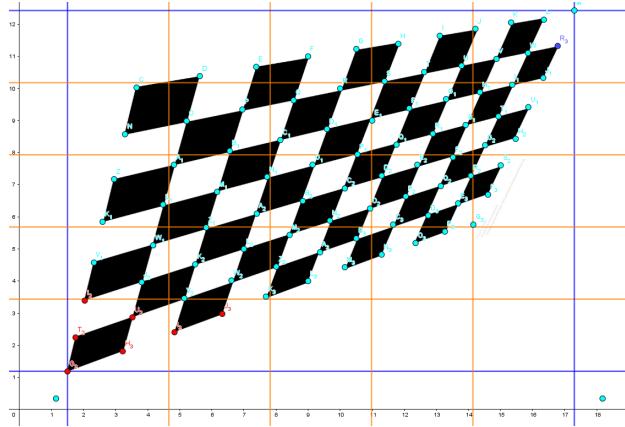


Abbildung 9.15: Bild eines perspektivisch verzerrtem Schachbretts

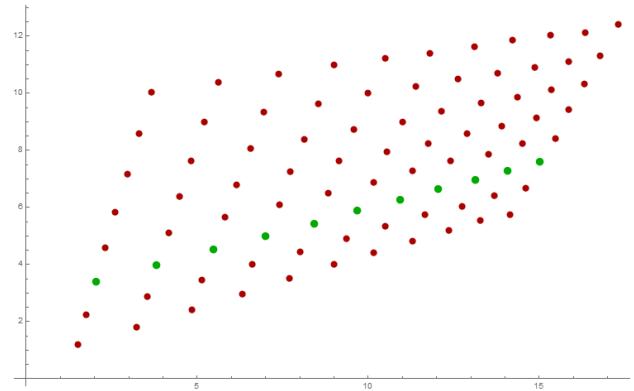


Abbildung 9.16: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

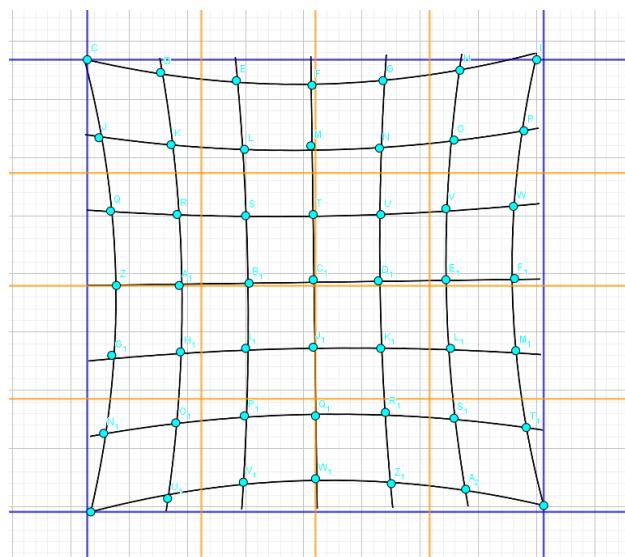


Abbildung 9.17: Bild eines Kissenförmig verzeichnetem Schachbretts

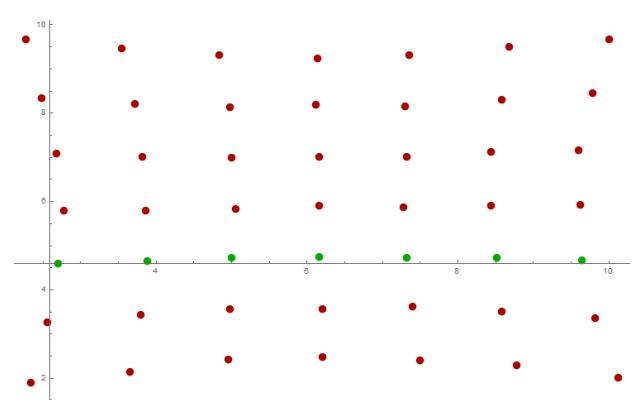


Abbildung 9.18: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

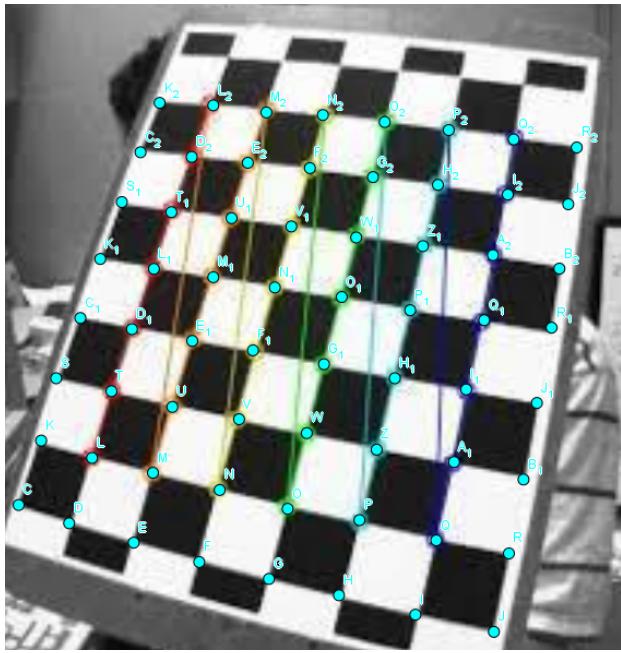


Abbildung 9.19: Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts(GRFIK AUSTAUSCHEN BILD IS KACKE)

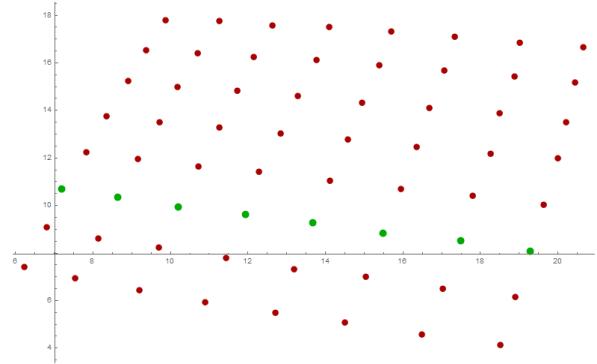


Abbildung 9.20: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

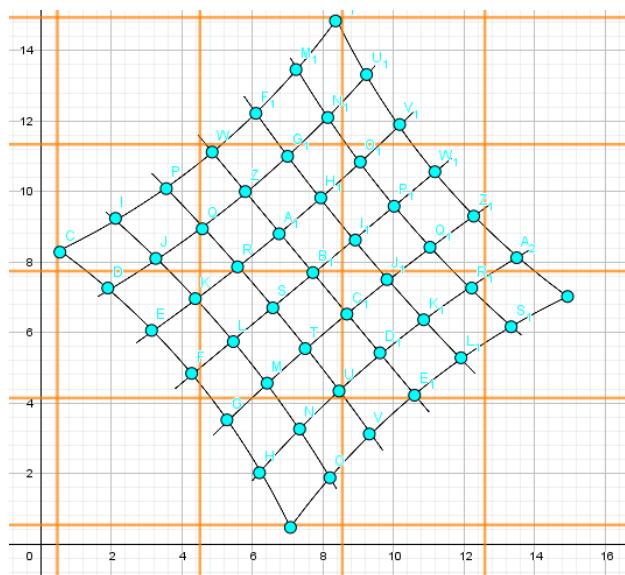


Abbildung 9.21: Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts

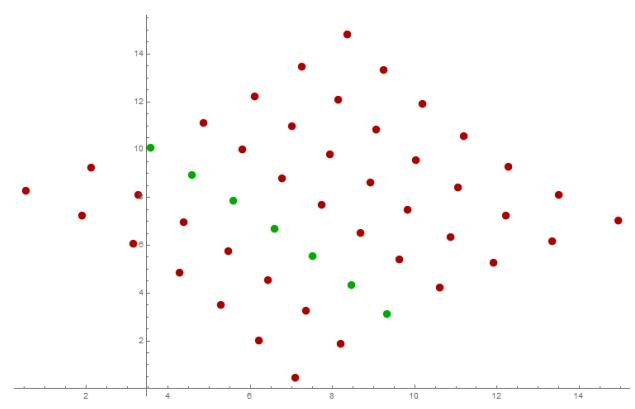


Abbildung 9.22: Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe

# 10 Appendix

## 10.1 Homographien bei Drehungen um ein Projektionszentrum

In diesem Beispiel werden die abgebildeten Punkte eines Quadrats einer Kamera ( $C_\beta$ ) mit  $\beta = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, C]$  in die einer anderen Kamera ( $C', \beta'$ ) mit  $\beta' = [\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3, C']$  mit Hilfe einer selbst aufgestellten Homographiematrix überführt. Hierzu wird zunächst eine Szene mit den Eckpunkten des Quadrates  $A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta$  und dessen Mittelpunkt mit  $E_\delta$  und zwei Kameras  $C_\delta$  und  $C'_\delta$  definiert. Für Die Projektionszentren der Kameras gilt hier, dass  $C'_\delta = C_\delta$ . Die Eckpunkte so wie die Kameras werden in Weltkoordinaten mit den Basen  $(O, \delta)$  mit  $\delta = [\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, O]$  angegeben. Mit Hilfe der gelernten Transformationsmethoden, werden die Eckpunkte in ihre jeweiligen 2D-Bildebenenkoordinaten  $(I, \tau)$  und  $(I', \tau')$  umgerechnet. Nachdem die Szene vollständig definiert und die auf den Kameras abgebildeten Punkte berechnet sind, werden zwei Methoden gezeigt, mit welchem die Homographiematrix ermittelt werden kann. Da es sich in diesem Beispiel um ein selbst aufgestelltes Minimalbeispiel handelt, kommt es zu keinem überbestimmten Fall bei der Berechnung der Homographiematrix. Da in Realbeispielen, jedoch immer damit gerechnet werden muss, dass es zu einem überbestimmten Fall kommt, wird das Verfahren, welches diesen Fall abdeckt ebenfalls aufgezeigt. Der Szenenaufbau des Minimalbeispiels soll folgendermaßen aussehen. Die Kamerakoordinatensysteme unterscheiden sich vom Weltkoordinatensystem durch eine Drehung um  $180^\circ$  um die  $\vec{d}_1$ -Achse. Der Ursprung beider Kamerakoordinatensysteme entspricht dem Projektionszentrum  $C$ . Des Weiteren ist Kamera eins noch um  $45^\circ$  um die  $\vec{b}_2$  zu Kamera eins eingedreht. Es werden zwei Bilder der selben Szene mit diesen Kameras aufgenommen. Die Behauptung ist, dass sich die beiden entstandenen Bilder mit einer Homographie ineinander überführen lassen. In Abbildung 10.1 ist der Aufbau nochmal grafisch veranschaulicht.

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

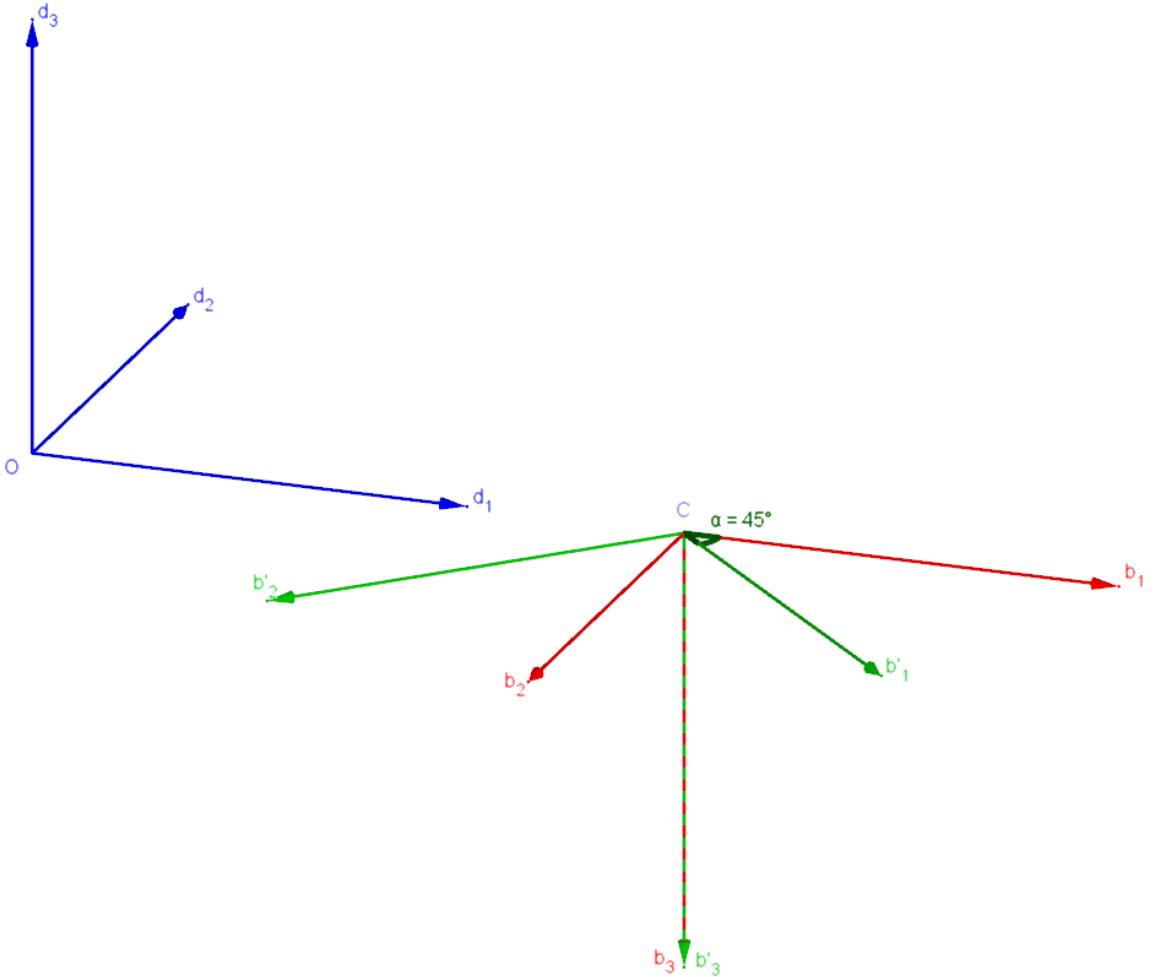


Abbildung 10.1: Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = [\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, O]$  und Kamerakoordinatensysteme  $\beta = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, C]$  und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = [\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3, C']$ .

Als nächstes werden die intrinsischen Kameraparameter  $K$  und  $K'$  für beide Kameras festgelegt. Für das Beispiel

$$K = K' = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta X \\ \zeta Y \\ \zeta Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{Z} X \\ \frac{\zeta}{Z} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Für das Beispiel gilt die Bedingung, dass  $\zeta \neq 0$  sein soll. Des Weiteren soll gelten, dass  $\vec{b}_1$  gleich der Lotgeraden vom Objektpunkt zum Projektionszentrum entspricht und somit folgt, dass  $\vec{b}_1$  in Sensorebene liegt und  $\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \times \vec{b}_1$  ist. Der Quader besteht aus den Punkten  $A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta$  und  $E\delta$  in homogenen Weltkoordinaten. Die Punkte in Weltkoordinaten bekommen die Koordinatenwerte zugewiesen.

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, D_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, E_\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

Für die Transformation der Weltkoordinatentupel in die Bildebenen  $I$  und  $I'$  werden die Projektionsmatrizen  $P = [KR] - KRC_\delta$  und  $P' = [K'R'] - K'R'C_\delta$  aufgestellt werden.  $R$  soll eine Drehung der Punkte um  $180^\circ$  um die  $\vec{d}_1$ -Achse durchführen.  $R'$  muss zusätzlich im Anschluss noch eine Drehung, um  $45^\circ$  um die neue  $\vec{b}_3'$ -Achse von Kamera zwei, an die vorherige Drehung anhängen. Die so erhaltenen Matrizen  $R$  und  $R'$  können nun dazu verwendet werden, die Objektpunkte bezüglich des Weltkoordinatensystems  $(O, \delta)$  in Punkte bezüglich der jeweiligen Kamerakoordinatensysteme  $(C, \beta)$  und  $(C', \beta')$  zu transformieren.

$$\begin{bmatrix} \cos(180) & -\sin(180) & 0 & 0 \\ \sin(180) & \cos(180) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, O) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, O) \quad (10.5)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R \quad (10.6)$$

Im nächsten Schritt wird Kamera zwei noch um  $45^\circ$  um ihre  $\vec{b}_3'$ -Achse gedreht. Diese Transformation wird mit der vorherigen Transformation multipliziert und es entsteht  $P'$  für Kamera zwei.

$$\cos(45) = \sin(45) = \frac{1}{\sqrt{2}} = a \quad (10.7)$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, O) \quad (10.8)$$

$$= \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R' \quad (10.9)$$

Handelt es sich bei den Kamerakoordinatensystemen nicht um kartesische Koordinatensysteme, so muss von den Rotationsmatrizen jeweils die Inverse genommen werden, um  $R$  und  $R'$  zu erhalten. Die Inversen Rotationsmatrizen werden in den folgenden Gleichungen nicht mit  $R^{-1}$ , sondern  $R$  bezeichnet. So entsprechen sie auch den Notationen der Literatur[5, 3]. Sind die Matrizen  $R$  und  $R'$  ermittelt, können nun die Punkte des Quadrats im Raum in Punkte der jeweiligen Kameras umgerechnet werden. Für Punkte spezifisch Kamera eins ergeben sich die in den Gleichungen 3.23 bis 3.27 aufgezeigten Werte.

$$\begin{pmatrix} A_\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

$$\begin{pmatrix} B_\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

$$\begin{pmatrix} C_\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

$$\begin{pmatrix} D_\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

$$\begin{pmatrix} E_\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

Für Punkte spezifisch Kamera zwei ergeben sich die Punkte aus den Gleichungen 3.28 bis 3.32.

$$\begin{pmatrix} A'_{\beta'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.15)$$

$$\begin{pmatrix} B'_{\beta'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

$$\begin{pmatrix} C'_{\beta'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

$$\begin{pmatrix} D'_{\beta'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -1 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

$$\begin{pmatrix} E'_{\beta'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.19)$$

Die entstandenen Punkte sind nun entsprechend der Kamerakoordinatensysteme definiert. Jetzt müssen noch die jeweiligen Kameramatrizen  $K$  und  $K'$  mit diesen verrechnet werden, um so die 2D-Bildebenenpunkte der entsprechenden Kameras zu erhalten.  $\zeta$  bekommt in diesem Beispiel den Wert -1, das bedeutet laut der Definition der Kamerakoordinatensysteme, dass der Sensor sich hinter dem Projektionszentrum befindet. Das entstehende Bild ist somit um  $180^\circ$  gedreht auf dem Sensor abgebildet.

$$K = K' = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.20)$$

Man kann natürlich wie bereits gewohnt die Rotationsmatrizen und die Kameramatrizen bereits im Vorhinein miteinander multiplizieren und dann auf einen 3D-Weltpunkt anwenden. Auf diese Weise bekommt man die fertigen Projektionsmatrizen  $P = [KR| - KRC_\delta]$  und  $P' = [K'R'| - K'R'C_\delta]$ . In diesem Beispiel werden sie nochmal getrennt voneinander auf die Punkte angewandt. Die fünf Punkte werden jeweils in einer Matrix zusammengeschrieben und mit  $K$  beziehungsweise  $K'$  verrechnet.

$$K \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.23)$$

$$K' \cdot \begin{pmatrix} 2a & a & a & 2a & \frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2a & 3a & 3a & 2a & \frac{5}{2}a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a & a & 2a & \frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2a & 3a & 3a & 2a & \frac{5}{2}a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.24)$$

$$= \begin{pmatrix} -2a & -a & -a & -2a & -\frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2a & -3a & -3a & -2a & -\frac{5}{2}a \\ 2a & 3a & 3a & 2a & \frac{5}{2}a \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{3}{5}a \\ 0 & 0 & \frac{1}{3a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{5}a \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

Die entstandenen Punkte beider Kameras ergeben die in Abbildung 10.2 veranschaulichten Abbildungen, des Quadrats mit seinem Mittelpunkt, auf den jeweiligen Kamerabildebenen. Die aus den Objektpunkten  $M_\delta$  entstandenen 2-D-Bildebenenkoordinaten  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  werden in den Koordinatensystemen  $(I, \tau)$  mit  $(\tau = \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4)$  und  $(I', \tau')$  mit  $(\tau = \vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_4)$  dargestellt.

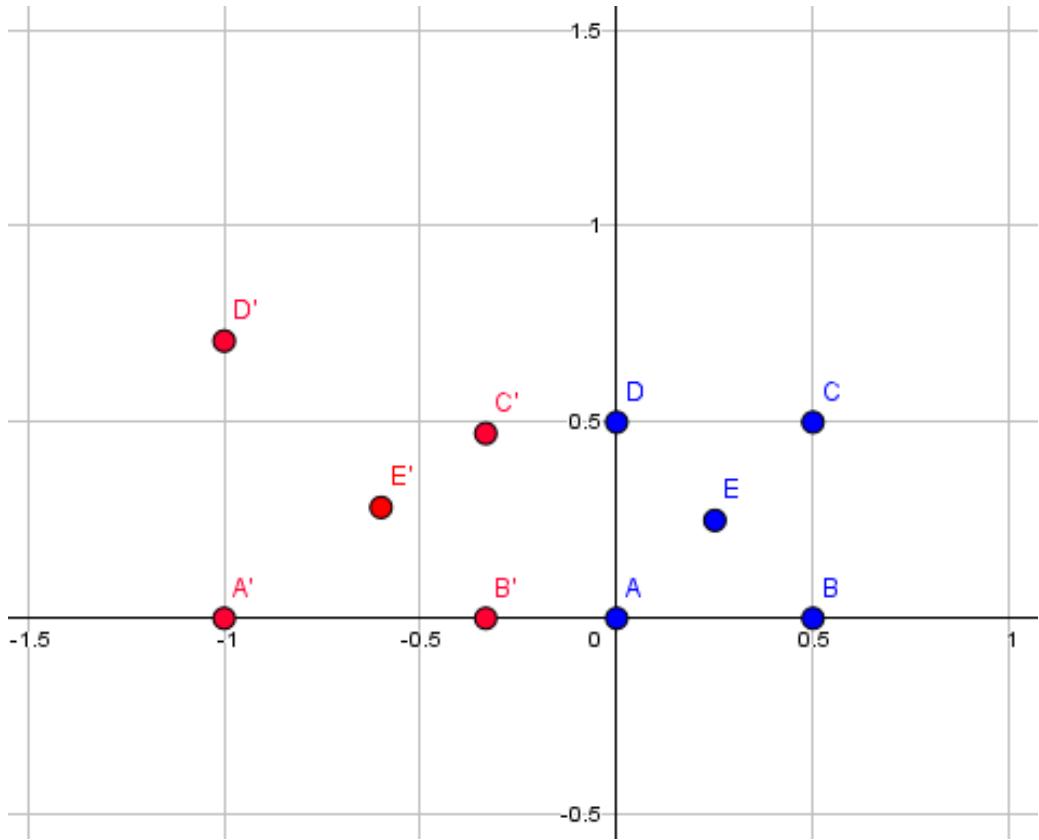


Abbildung 10.2: in blau ist die Abbildung des Quaders von Kamera eins und in rot die Abbildung des selben Quaders in Kamera zwei

Die fertigen Bildebenekoordinaten beider Kameras, sollen nun durch eine eigens aufgestellte Homographiematrix  $H$  ineinander überführt werden. Um eine Homographiematrix mit  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$  zu erhalten werden die Punkte beider Kameras in eine Koeffizientenmatrix eingetragen, welche sich nach dem in den Gleichungen 4.40 bis 3.52 laufenden Schema ergibt. Das Verfahren wird anhand der Bildebenekoordinaten aufgezeigt.

$$H \cdot m_\tau = m'_\tau \quad (10.27)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m'_{\tau'} \end{bmatrix} \quad (10.28)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (10.29)$$

Aus Gleichung 3.42 lassen sich ein Gleichungssystem mit zwölf bekannten und neun unbekannten aufstellen.

$$h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z = \lambda x' \quad (10.30)$$

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z = \lambda y' \quad (10.31)$$

$$h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z = \lambda z' \quad (10.32)$$

Da mit homogenen Koordinaten gearbeitet wird und somit  $z$  und  $z' = 1$  sind, ergibt sich für die letzte Zeile  $h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z = 1$ . Dieser Ausdruck kann in den ersten beiden Gleichungen für  $\lambda$  eingesetzt werden. Pro Punktpaar  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  ergeben sich somit zwei Gleichungen.

$$h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z = (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot x' \quad (10.33)$$

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z = (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot y' \quad (10.34)$$

Für den Aufbau der nötigen Koeffizientenmatrix werden beide Ausdrücke noch nach Null aufgelöst, so dass sich die Gleichungen 3.48 und 3.49 aus 3.46 und 3.47 ergeben.

$$h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z - (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot x' = 0 \quad (10.35)$$

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z - (h_{31}x + h_{32}y + h_{33}z) \cdot y' = 0 \quad (10.36)$$

$$\rightsquigarrow h_{11}x + h_{12}y + h_{13}z - h_{31}x \cdot x' - h_{32}y \cdot x' - h_{33}z \cdot x' = 0 \quad (10.37)$$

$$\rightsquigarrow h_{21}x + h_{22}y + h_{23}z - h_{31}x \cdot y' - h_{32}y \cdot y' - h_{33}z \cdot y' = 0 \quad (10.38)$$

Die entstandenen Gleichungen werden jetzt pro Punktpaar  $m_\tau$  und  $m'_{\tau'}$  in eine Matrix nach folgendem Schema eingetragen.[5, 3, 14, 8]

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1x'_1 & y_1x'_1 & 1 \cdot x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & x_1y'_1 & y_1y'_1 & 1 \cdot y'_1 \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & x_ix'_i & y_ix'_i & 1 \cdot x'_i \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 & x_iy'_i & y_iy'_i & 1 \cdot y'_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h1 \\ h2 \\ \vdots \\ \vdots \\ hi \end{pmatrix} = 0 \quad (10.39)$$

Wenn ein nicht überbestimmter Fall vorliegt, sprich wenn der Rang der Koeffizientenmatrix genau acht und nicht höher beträgt, kann aus der Koeffizientenmatrix einfach der Nullraum berechnet werden, um so die Einträge für die 3x3-Homographiematrix zu erhalten[3, 5, 14]. Gesucht wird also ein Vector  $\vec{x}$ , für den gilt das  $H \cdot \vec{x} = 0$ . Der gesuchte Vektor  $\vec{x}$  entspricht dem Kern der Koeffizientenmatrix und ist ein Spaltenvektor mit 9 Einträgen, welche in die 3x3-Homographiematrix eingetragen werden können[3, 14]. Tritt nun der Fall ein, dass es zu einem überbestimmtes System kommt, **was Beipelsweise auftritt wenn mehr als neun Punktpaare durch eine Homographie ineinander überführt werden sollen**, so kann nicht mehr die Ermittlung des Nullraums für die Berechnung der Homographiematrix genutzt werden. Für die Lösung überbestimmter Gleichungssysteme bietet sich die Singulärwertzerlegung an[3][15]. Das bedeutet es wird nicht derjenige Vektor  $\vec{x}$  gesucht für den gilt  $H \cdot \vec{x} = 0$ , sondern es wird derjenige Vektor  $\vec{x}$  gesucht, für den  $\| H \cdot \vec{x} \|$  minimal wird[3, 14]. Die Singulärwertzerlegung von zum Beispiel der Koeffizientenmatrix ist eine Faktorisierung einer beliebigen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  der Form  $A = U \cdot S \cdot V^T$  mit orthogonalen Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sowie mit einer Diagonalmatrix.

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & \dots & & s_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (10.40)$$

Dabei soll für die Singulärwerte  $s_1$  bis  $s_r$  gelten, dass  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r \geq 0$ [15]. Entsprechend dieser Methode wird eine Singulärwertszerlegung, kurz *SVD* der entstandenen Koeffizientenmatrix

durchgeführt. Wir erhalten 3 Matrizen  $U \cdot S \cdot V^T$ . Durch die Zerlegung sind die diagonaleinträge von  $S$  in einer absteigenden Reihenfolge sortiert. Die Spalte von  $V^T$ , welche mit dem kleinsten Singulärwert von  $S$  korrespondiert, ergibt den Vektor  $\vec{x}$ , für den  $\| H \cdot x \|$  minimal wird. Somit gleichen die neun Einträge der Homographiematrix gleich der letzten Spalte von  $V$ . Das Ergebnis für  $H$  hat dann die folgende Form

$$H = \begin{pmatrix} v_{19} & v_{29} & v_{39} \\ v_{49} & v_{59} & v_{69} \\ v_{79} & v_{89} & v_{99} \end{pmatrix} \quad (10.41)$$

Für das Minimalbeispiel mit reinen Punkten, welches in diesem Kapitel erstellt wurde, würde die Herleitung der Homographiematrix über die Ermittlung des Nullraumes der Koeffizientenmatrix genügen. Für die Matrix  $H$  ergibt sich aus den Werten der im Beispiel verwendeten Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.42)$$

Nun werden die Punkte aus Kamera eins  $s$  mit Hilfe von  $H$  in die Punkte von Kamera zwei überführt und umgekehrt werden die Punkte aus Kamera zwei mit der Inversen  $H^{-1}$  in die Punkte von Kamera eins überführt.

$$x' = H \cdot x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3a} & \frac{1}{2a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.43)$$

$$x = H^{-1} \cdot x' \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3a} & \frac{1}{2a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

## 10.2 Realbeispiel der Homographieberechnung bei Drehung um einen Drehpunkt

Im folgenden wird das breits bekannte Beipiel für die Drehung um das Projektionszentrum, für die Drehung um einen Drehpunkt umgebaut. Danach soll nach dem gleichen Verfahren wie im vorherigen Beispiel aufgezeigt wurde eine Homographiematrix ermittelt werden, welche die Bildebenenkoordinaten der einen Kamera in die der anderen Kamera überführen kann. Die Herangehensweise für dieses Beispiel größtenteils die selbe wie in dem Beispiel zuvor. Der unterschied liegt lediglich in der Transformation der Punkte in as Koordinatensystem von der gedrehten Kamera zwei. Diese besteht, im Gegensatz zum vorherigen Beispiel, nicht nur aus hintereinander geschalteten Rotationen, sondern beinhaltet des Weiteren noch zwei Translationen. Die komplette Transformationsmatrix wird, um der vorherigen Notation gerecht zu bleiben, wieder mit  $R$  beziehungsweise  $R'$  notiert, auch wenn es sich hier nicht mehr um eine Reine Rotation handelt. In der Literatur wird die gesamte Transformationsmatrix ebenfalls mit  $R$  notiert[3, 5, 14].  $R$  und  $R'$  bestehen aus insgesamt drei Transformationsmatrizen  $R = \text{Verschiebung}_1 \cdot \text{Rotation} \cdot \text{Verschiebung}_2$ . Da die Position des Projektionszentrums von Kamera zwei nicht mehr mit dem von Kamera eins übereinstimmt, muss diese erst mit Hilfe einer Tranformationsmatrix  $T$  berechnet werden.  $C_\delta = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$  sind die Koordinaten von Kamera eins in Weltkoordinaten. Da in diesem Beispiel das Kamerakoodrinatensystem von Kamera eins und das Weltkoordinatensystem deckungsgleich sind heißt das,  $C_\beta = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ . somit ist Matrix  $R$ , welche die Transformation der ersten Kamera im Bezug auf das Weltkoordinatensystem beschreibt gleich der Einheitsmatrix.

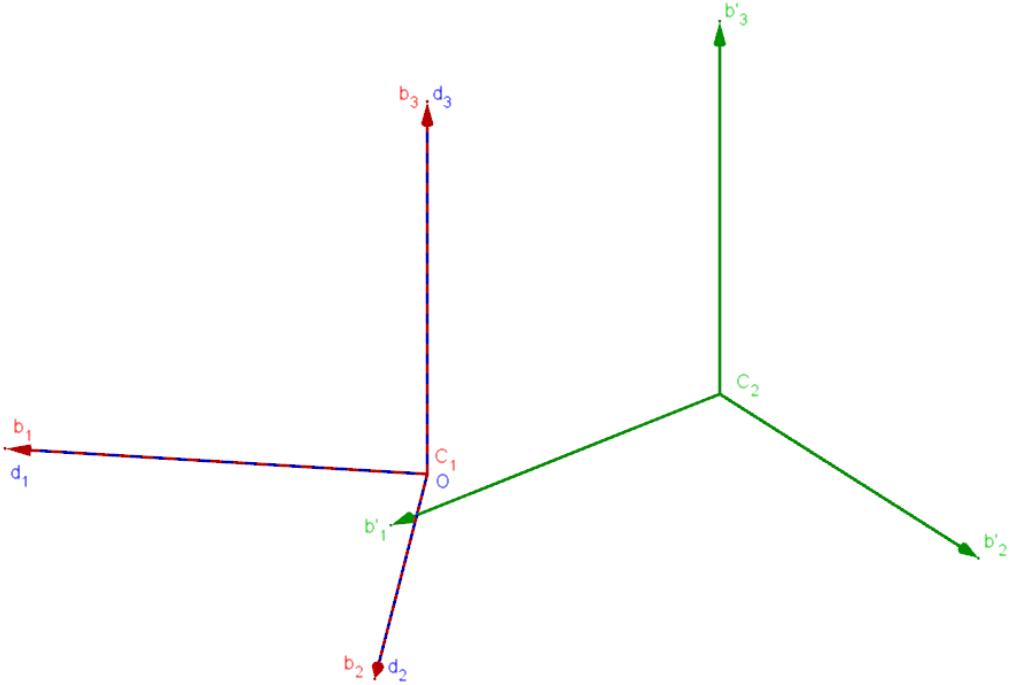


Abbildung 10.3: Weltkoordinatensystem  $(O, \delta)$  mit  $\delta = [\vec{d}_1, \vec{d}_1, \vec{d}_1, O]$  und Kamerakoordinatensysteme  $\beta = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, C]$  und  $(C', \beta')$  mit  $\beta' = [\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3, C']$ .

Mit  $C'$  wird der Ursprung des Koordinatensystems von Kamera zwei bezeichnet. Als Objekte in der Ebene im  $\mathbb{R}^3$ -Raum, werden die selben Punkte  $A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta$  und  $E_\delta$  wie im vorherigen Beispiel verwendet.

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, D_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, E_\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

Punkt  $E_\delta$  bildet den Mittelpunkt des Quadrates und wird als Drehpunkt gewählt und mit *PivotPoint* bezeichnet. Als nächstes wird Matrix  $T$  aus drei Transformationsmatrizen zusammengestellt. Diese Matrix verschiebt das Projektionszentrum von  $C'$  an den gewünschten Ort im Weltkoordinatensystem. Bezeichnet werden die drei Matrizen mit  $T_1, T_2$  und  $T_3$ .  $T_1$  beinhaltet die Verschiebung von des Ursprungs von Kamera eins zum *PivotPoint*,  $T_2$  bildet die Rotationsmatrix, welche den verschobenen Punkt um die gewünschten  $45^\circ$  dreht. Die letzte Matrize  $T_3$  beinhaltet wieder eine Translation, welche den Punkt vom *PivotPoint* zurück verschiebt.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -PivotPoint_x \\ 0 & 1 & 0 & -PivotPoint_y \\ 0 & 0 & 1 & -PivotPoint_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.46)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & 0 & \sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(45^\circ) & 0 & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.47)$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & PivotPoint_x \\ 0 & 1 & 0 & PivotPoint_y \\ 0 & 0 & 1 & PivotPoint_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.48)$$

$$T = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1.26777 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.93934 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.49)$$

$$C'_\delta = T \cdot C_\delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1.26777 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.93934 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.27 \\ 0 \\ 0.94 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.50)$$

Der Ursprung des Koordinatensystems von Kamera zwei befindet sich, angegeben in Weltkoordinaten, bei  $C'_\delta = [-1.26777 \ 0 \ 0.93934 \ 1]^T$ . Da nun die  $C'_\delta$  bekannt ist, können die 3D-Objektpunkte in das Kamerakoordinatensystem von Kamera zwei transformiert werden. Hierzu wird die Matrix  $R'$  aufgestellt.

$$R' = \begin{bmatrix} [T_2]^{-1} & -[T_2]^{-1} \cdot V \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.51)$$

aufgestellt werden.  $V$  ist der Translationsvektor welcher den Wert von  $C'_\delta$  bekommt. Da es sich wieder um kartesische Koordinatensysteme handelt gilt wieder  $[T_2]^{-1} = [T_2]^T$ .

$$-[T_2]^T \cdot C'_\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.27 \\ 0 \\ 0.94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.56 \\ 0 \\ 0.23 \end{pmatrix} \quad (10.52)$$

Für die Transformationsmatrizen  $R$  und  $R'$  gilt dann jeweils:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.53)$$

$$R' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1.56 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.54)$$

Nachdem  $R$  und  $R'$  bestimmt sind, müssen die Punkte in Weltkoordinaten noch in die entsprechenden Kamerakoordinatensysteme und mit den Projektionsmatrizen  $K$  und  $K'$  in deren Bildkoordinatensysteme transformiert werden. Es gilt wieder wie im Beispiel zuvor, dass  $K = K'$  ist.

$${}_{K_{c1}} [\pi]_{K_{c1}} = {}_{K_{c2}} [\pi]_{K_{c2}} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.55)$$

Es entstehen die folgenden beiden Punktematrizen  $pC$  für Kamera eins und  $pC'$  für Kamera zwei. Die Koordinaten der jeweiligen Punkte  $pC = [A_\tau \ B_\tau \ C_\tau \ D_\tau \ E_\tau]$  und  $pC' = [A_{\tau'} \ B_{\tau'} \ C_{\tau'} \ D_{\tau'} \ E_{\tau'}]$  aus Sicht der beiden Kameras befinden sich der Reihe nach in den Spalten der Punktematrix.

$$pC = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.56)$$

$$pC' = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.36 & 0.36 & 0.09 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0.42 & 0.61 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.57)$$

$$(10.58)$$

Die Homographiematrix wird durch aufstellen der Koeffizientenmatrix und anschließendes Bestimmen von  $H \cdot x = 0$  oder durch findes desjenigen Vektors  $\vec{x}$  für den  $\|H \cdot x\|$  minimal wird. Da es sich auch hier nicht um einen überbestimmten Fall handelt, kann die homographiematrix entweder durch die Bestimmung des Kerns oder durch anwenden der Singulärwertszerlegung  $SVD$ , gewonnen werden. Die resultierende Homographiematrix sieht folgendermaßen aus.

$$H = \begin{bmatrix} 0.43 & 0 & 0.43 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (10.59)$$

Wird  $H$  auf die Punkte  $pC$  angewandt, so liefert das Ergebnis die Punkte von  $pC'$  und wird die Inverse  $H^{-1}$  auf die Punkte  $pC'$  angewandt, so erhält man die Punkte von  $pC$ . Somit wurde bewiesen, dass Homographiematrizen immer zur Transformation von Punkten genutzt werden können, solange sich diese Punkte auf einer Ebene im Raum befinden. Die Definition der Homographie sagt aus, dass sowohl Translationen und Rotationen in der Homographiematrix vorkommen dürfen [12] [13]. Die Drehung um einen Drehpunkt ist nicht weiter als die Hintereinaderschaltung verschiedener Transformationsmatrizen. Das wichtigste Kriterium welches erfüllt sein muss, damit Homographien angewendet werden können ist, dass die Abbildungen der Punkte in allen Kameras auf einer Ebene sich befinden müssen [5].

In der Abbildung 3.4 ist ein grüner Punkt zu sehen welcher sich in Gegensatz zu den anderen Punkten nicht auf der selben Ebene befindet. Dieser Punkt lässt sich nicht mit der errechneten Homographiematrix ineinander überführen. Mit Hilfe von Homographien, können die Positionen und Orientierung der jeweiligen Kameras zueinander ermittelt werden, jedoch nur wenn sich die Szenepunkte auf einer Ebene befinden. Ein Beispiel hierfür wäre zum Beispiel die Aufnahme einer Gebäudefassade aus unterschiedlichen Kamerawinkeln und Positionen [5]. Für eine Szenenrekonstruktion einer kompletten 3D-Szene reichen pure Homographien nicht aus, hierfür muss sich der geometrischen Eigenschaften der Epipolaregeometrie bedient werden.

## **11 Fazit - Conclusion**

## **12 Nächste Schritte - next steps**

## **13 Protocol - 10.11.2015**

## **14 Abkürzungsverzeichnis - List of Abbreviations**

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematik eines Abbildendes System. Eine Punkt $M$ im Weltkoordinatensystem wird durch eine Kamera $C$ aufgenommen. Diese Aufnahme wird durch eine Projektion, die als Verbindungsline von $M$ zu $C$ dargestellt ist und $M$ auf $m$ abbildet, beschrieben. . . . .	7
2.2	Lochkameramodell [9] . . . . .	8
2.3	$\zeta_x$ und $\zeta_y$ beschreiben den Abstand des Kamerazentrums zu den jeweiligen Pixelkanten	9
2.4	Weltkoordinatensystem $(O, \delta)$ mit $\delta = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3, O)$ und Kamerakoordinatensystem $(C, \beta)$ mit $\beta = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, C)$ . . . . .	10
2.5	Koordinatensysteme von einer Kamera aus im Überblick. Das Weltkoordinatensystem $(O, \delta)$ ist Deckungsgleich mit dem Kamerakoordinatensystem $(C, \beta)$ . . . . .	13
3.1	Die Abbildung zeigt zwei Aufnahmen einer um ihr Projektionszentrum $C$ gedrehten Kamera. Die zwei blauen Ebenen stellen jeweils die Bildebene vor und nach der Drehung dar sie wird einmal als Bildebene $(I, \tau)$ und einmal als Bildebene $(I', \tau')$ bezeichnet. Die Objektebene befindet sich im 3D-Raum, dementsprechend sind die Punkte $M_{1,\delta}$ und $M_{2,\delta}$ in homogenen 3D-Koordinaten gegeben. Die Punkte $m_{1,\tau}$ und $m_{2,\tau}$ sind die projizierten Punkte auf der Bildebene $(I, \tau)$ und Die Punkte $m_{1,\tau'}$ und $m_{2,\tau'}$ sind die projizierten Punkte auf der Bildebene $(I', \tau')$ . . . . .	16
3.2	Ausgangssituation der Simulation . . . . .	18
3.3	Drehung um das Projektionszentrum . . . . .	18
3.4	Drehung um einen Drehpunkt. In diesem Beispiel wurde der rote Punkt als Drehpunkt verwendet . . . . .	19
3.5	Strahlengang durch das Projektionszentrum. Auf der Abbildung ist erkennbar, dass der grüne Punkt auch nach der Drehung der Kamera um das Projektionszentrum vom roten Punkt verdeckt bleibt . . . . .	19
3.6	Strahlengang durch das Projektionszentrum. Auf der Grafik ist erkennbar, dass der grüne Punkt nach der Drehung der Kamera um einen Drehpunkt, welcher in diesem Fall der rote Punkt darstellt, sichtbar wird. . . . .	19
3.7	Veranschaulichung der Homographie bei zwei verschieden translatierten und rotierten Kameras. . . . .	20
4.1	$C$ und $C'$ sind die Projektionszentren zweier Kameras. Beide Kameras besitzen jeweils eine Bildebene. Die Basislinien verbindet die Projektionszentren der Kameras. Der Punkt an welchem die Basislinie die Bildebenen schneidet, wird als Epipol bezeichnet. Durch den Epipol verlaufen alle Epipolarlinien des Bildes. $M$ ist der Objektpunkt im 3D-Raum und $m_1$ und $m_2$ sind die jeweiligen Abbildungen dieses Punktes auf den Bildebenen. Die Verbindungsvektoren zwischen $C, C'$ und $M$ bilden die sogenannte Epipolarebene[5, 3, 1]. . . . .	24
4.2	Die Objektpunkte $M_1, M_2$ und $M_3$ werden in $I'$ als $m'_1, m'_2$ und $m'_3$ abgebildet, während sie in $I$ immer den selben Bildpunkt $m_1$ ergeben. . . . .	26
5.1	Arbeitsprozesse der Stereoanalyse bei Verwendung von eigens erstellten synthetischen Bilddaten . . . . .	30
5.2	vereinfachte Top-Down-Ansicht des Szenenaufbaus des Minimalbeispiel . . . . .	31
5.3	In Grün ist die Abbildung auf der Bildebenen $I$ von $C$ und in rot ist die Abbildung auf der Bildebenen $I'$ von $C'$ . . . . .	31
5.4	In Blau und Rot sind jeweils das Welt- und Kamerakoordinatensystem von Kamera eins zu sehen. In grün ist das gedrehte Koordinatensystem von Kamera 2 zu sehen. . . . .	31

5.5	Grün zeigt den Quader welcher auf $I$ von $C$ abgebildet wird. Das größere Quadrat sind die vorderen Punkte $A, B, C, D$ , das kleinere Quadrat sind die hinteren Punkte $A', B', C', D'$ . Der Punkt $E$ ist weiter weg von den Abbildungen und deshalb auf dieser Abbildung momentan nicht zu sehen. Rot zeigt denselben Quader auf $I'$ von $C'$ abgebildet.	34
5.6	Die blauen Geraden zeigen die jeweiligen Epipolargeraden. Die vom roten Quader schneiden sich bei -1 im Epipol $e'$ . Die Epipolargeraden vom grünen Quader schneiden sich im Epipol $e'$ im Unendlichen, weshalb die Epipolarlinien Parallel zueinander verlaufen.	37
5.7	Anordnung der Kameras bei den vier verschiedenen Lösungen für $P$	41
5.8	Optimale Triangulierung: Beide Geraden Treffen sich in einem Punkt im 3D-Raum	41
5.9	Durch Ungenauigkeiten in der korrespondierenden Punkte, verfehlten sich die Linien und es kommt zu keinem Schnittpunkt	42
5.10	Veranschaulichung der Skaleninvarianz und dessen Auswirkung auf die geometrische Form der Objekte	43
5.11	auf Originalgröße skalierte rekonstruierte Szene	44
5.12	Durch Ungenauigkeiten in der korrespondierenden Punkte, verfehlten sich die Linien und es kommt zu keinem Schnittpunkt	44
5.13	Beispiel eines rektifizierten Bildes. Quelle: [20]	45
5.14	Beispiel einer einfachen Tiefenkarte eines Stereobildpaars nach der Rektifizierung. Quelle: [21]	45
5.15	Aufnahmen zweier Kameras mit den selben Auflösungen, Kamera eins(Grün) und Kamera(rot) zwei gelten jeweils $\zeta = 1$	52
5.16	Epipole für Kamera eins und Kamera zwei vor der Rektifizierung	52
5.17	Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen $H_p$ und $H'_p$ . Die Epipole beider Bilder sind nun im unendlichen. Das die entstehenden parallelen Epipolarlinien auch hier schon horizontal ausgerichtet sind ist Zufall. Die Epipolarlinien sind immer parallel nach dieser Transformation aber die Richtung ist nicht immer automatisch bereits $i = [1,0,0]$ .	53
5.18	Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen $H_r \cdot H_p$ und $H'_r \cdot H'_p$ . Die Epipolarlinien sind nun horizontal zueinander ausgerichtet	55
5.19	Die Abbildung verdeutlicht noch mal Schematisch, wie sich die Punkte ausrichten sollen. Bild a) zeigt die durch die Rektifizierung verschobenen Bildkantenmitten. Bild b= zeigt, wie sich die Bildkantenmitten durch die Scherungstransformation wieder ausrichten sollen.	56
5.20	Abbildung beider Bilder nach anwenden der Matrizen $H_s \cdot H_r \cdot H_p$ und $H'_s \cdot H'_r \cdot H'_p$ . Die horizontale Verzerrung wurde reduziert.	57
5.21	In dieser Abbildung wurden die Epipolarlinien noch in den Grafikplot mit eingebaut	58
6.1	Rechteckiger Bildsensor mit darauf sich befindenden quadratischen Pixeln. Vlg [10]	60
6.2	Bild a) zeigt die Interpolation von Pixeln, wenn bei gleichbleibenden Seitenverhältnissen weniger Pixel für das Bild verwendet werden sollen. Die interpolierten Pixel leiten dann alle das selbe Signal weiter. Bild b) zeigt in gelb markiert, den verworrenen Bereich des Sensors, wenn sich die Seitenverhältnisse ändern und nicht mehr der volle Sensor genutzt wird.	61
6.3	$C$ und $C'$ haben die selbe Auflösung eingestellt	62
6.4	$C$ und $C'$ haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt	62
6.5	$C$ und $C'$ haben die selbe Auflösung eingestellt	63
6.6	$C$ und $C'$ haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt	63
6.7	$C$ und $C'$ haben die selbe Auflösung eingestellt	63
6.8	$C$ und $C'$ haben unterschiedliche Auflösungen eingestellt	63
6.9	Die rekonstruierten Szenenpunkte und Kamerapositionen bleibt auch bei unterschiedlichen Auflösungen die selben	65
7.1	Aufnahme der Canon 6D von links	66
7.2	Aufnahme der Canon 60D von rechts	66

7.3 Szenenaufbau: Die Canon 60D befindet sich in dieser Abbildung auf der linken Seite, die Canon 60 D auf der rechten. Auf dem Tisch zwischen den Kameras ist die in den Abbildungen 6.1 und 6.1 abgebildete Szene zu sehen. Die Canon 60D ist etwas hinter der Canon 6D positioniert. Beide Kameras sind zu Szene hin gedreht und auch leicht nach unten geneigt. . . . .	67
7.4 Die mit dem <i>SURF</i> -Algorithmus gefundenen Punkte sind mit den gelben Ziffern im Bild gekennzeichnet . . . . .	68
7.5 Epipolarlinien ohne <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 6D . . . . .	70
7.6 Epipolarlinien ohne <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 60D . . . . .	70
7.7 Epipolarlinien mit <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 6D . . . . .	71
7.8 Epipolarlinien ohne <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 60D . . . . .	71
7.9 Epipolarlinien mit <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 6D, nach der denormalisierung von $F$ . . . . .	71
7.10 Epipolarlinien ohne <i>Epipolar-constraint</i> im Bild der Canon 60D, nach der denormalisierung von $F$ . . . . .	71
7.11 a) . . . . .	72
7.12 b) . . . . .	72
7.13 a) Die rückprojizierten Strahlen der ungenauen korrespondierenden Punkte $m$ und $m'$ sind schief und treffen sich nicht in einem Punkt im 3D-Raum. b) The epipolar geometry for $m$ , $m'$ . The measured points do not satisfy the epipolar constraint. The epipolar line $l' = Fm$ is the image of the ray through $n$ , and $l = F^T m'$ is the image of the ray through $m'$ . Since the rays do not intersect, $m'$ does not lie on $l'$ , and $m$ does not lie on $l$ . . . . .	72
7.14 Frafische Darstellung der optimalen Punkte $\hat{m}$ und $\hat{m}'$ . . . . .	73
7.15 Rekonstruierte Szene, unskaliert in Pixeleinheiten . . . . .	78
7.16 Rekonstruierte Szene, unskaliert, in Pixeleinheiten und in einem 2D-Plot geschrieben . . . . .	78
 8.1 Zeigt die Die rekonstruierte Matrix $R'$ bei unveränderter Auflösung. Die Auflösungen von $C_\delta$ und $C'_\delta$ sind die selben. . . . .	80
8.2 Zeigt die rekonstruierte Matrix $R'$ wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[5 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	80
8.3 Zeigt die rekonstruierte Matrix $R'$ wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	80
8.4 Zeigt die rekonstruierte Matrix $R'$ wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1.2 : 2.3]$ skaliert wurde . . . . .	80
8.5 Rekonstruierte Szene, wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[5 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	81
8.6 Rekonstruierte Szene, wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[2 : 1]$ skaliert wurde . . . . .	81
8.7 Rekonstruierte Szene, wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1 : 2]$ skaliert wurde . . . . .	82
8.8 Rekonstruierte Szene, wenn $K'$ mit einem Verhältnis von $[1.2 : 2.3]$ skaliert wurde . . . . .	82
 9.1 Klassendiagramm . . . . .	84
9.2 Klassendiagramm . . . . .	84
9.3 Klassendiagramm . . . . .	85
9.4 Klassendiagramm . . . . .	85
9.5 Klassendiagramm . . . . .	85
9.6 . . . . .	86
9.7 . . . . .	86
9.8 . . . . .	86
9.9 . . . . .	86
9.10 Klassendiagramm . . . . .	87
9.11 Klassendiagramm . . . . .	87
9.12 Klassendiagramm . . . . .	88
9.13 Bild eines Tonnenförmig verzeichneten Schachbretts . . . . .	88
9.14 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	88
9.15 Bild eines perspektivisch verzerrtem Schachbretts . . . . .	89

9.16 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	89
9.17 Bild eines Kissenförmig verzeichnetem Schachbretts . . . . .	89
9.18 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	89
9.19 Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts(GRFIK AUSTAUSCHEN BILD IS KACKE) . . . . .	90
9.20 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	90
9.21 Bild eines Tonnenförmig verzeichnetem leicht perspektivisch verzerrtem Schachbretts . .	90
9.22 Algorithmisch detektierte Linie der dritten i-Reihe . . . . .	90
10.1 Weltkoordinatensystem $(O, \delta)$ mit $\delta = [\vec{d}_1, \vec{d}_1, \vec{d}_1, O]$ und Kamerakoordinatensysteme $\beta = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, C]$ und $(C', \beta')$ mit $\beta' = [\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3, C']$ . . . . .	92
10.2 in blau ist die Abbildung des Quaders von Kamera eins und in rot die Abbildung des selben Quaders in Kamera zwei . . . . .	96
10.3 Weltkoordinatensystem $(O, \delta)$ mit $\delta = [\vec{d}_1, \vec{d}_1, \vec{d}_1, O]$ und Kamerakoordinatensysteme $\beta = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, C]$ und $(C', \beta')$ mit $\beta' = [\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3, C']$ . . . . .	99

## **Tabellenverzeichnis**

6.1	Auflösungen Canon EOS 6D . . . . .	60
6.2	Vgl [31] . . . . .	60

# Literaturverzeichnis

- [1] Zhengyou Zhang Gang Xu. *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition: A Unified Approach*. Springer-Science and Business Media, 1996.
- [2] Lutz Pries. *Computer Vision, Einführung in die Verarbeitung und Analyse digitaler Bilder*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [3] Richard Hartley and Andrew Zisserman. *Multiple View Geometry in computer vision*. Cambridge, 2004, Second Edition.
- [4] Ferid Bajrmovic. *Self- Calibration of Multi- Camera Systems*. Logos Verlag Berlin GmbH, 2010.
- [5] Tomas Pajdla. *Elements of Geometry for Computer Vision*. "<http://people.ciirc.cvut.cz/pajdla/>", 2013, überarbeitet am 27.2.2017.
- [6] MathWorks. Mathworks documentation, stereo camera calibration app. "<https://de.mathworks.com/help/vision/stereo-camera-calibration.html>".
- [7] Ramalingam Tardif S.Gasparini J.Barreto R.Sturm, S. Camera models and fundamental concepts used in geometric computer vision. Mitsubishi Electric Research Laboratories, 2011.
- [8] Christian Heipke. *Photogrammetrie und Fernerkundung*. 2017 Springer, 1. Auflage.
- [9] Jianzhong Lu. *Ein dreidimensionales Bildverarbeitungssystem für die Automatisierung visueller Prüfvorgänge*.
- [10] Rolf Martin Ekbert Hering. *Photonik, Grundlagen, Technologien und Anwendung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [11] Zhengyou Zhang. *Epipolar Geometry*, pages 247–258. Springer US, Boston, MA, 2014.
- [12] Dipl.-Ing. Martin Roser. *Modellbasierte und positionsgenaue Erkennung von Regentropfen in Bildfolgen zur Verbesserung von viedeoisierten Fahrerassistenzfunktionen*. 1986, 1994 Springer Basel AG, KIT Scientific Publishing.
- [13] Jeanne Peiffer and Amy Dahan-Dalmedico. *Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik*. 1986, 1994 Springer Basel AG, Editions du Seuil, Springer Basel AG, aus dem französischen von Klaus Volkert.
- [14] Norbert Köckler Hans Rudolf Schwarz. *Numerische Mathematik*. 2011, Springer Verlag, 8. Auflage.
- [15] Daniel Scholz. *Numerik interaktiv, Grundlagen verstehen, Modelle erforschen und Verfahren anwenden mit taramath*. 2016, Springer Verlag.
- [16] Zhengyou Zhang. Determining the epipolar geometry and its uncertainty: A review. Received July 16, 1996; Accepted February 13, 1997.
- [17] Richard I. Hartley. In defence of the 8-point algorithm. GE-Corporate Research and Development, Schenectady, NY, 12309.
- [18] Cui Guodong Yu Ming Zhang Mandun, Qi Lichao. A triangulation method in 3d reconstruction from image sequences. College of Computer Science and Software, Hebei University of Technology Tianjin, China, 2009, Second International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems.

- [19] MathWorks. Mathworks documentation, rectify stereo images. "<https://de.mathworks.com/help/vision/ref/rectifystereoimages.html>".
- [20] Charles Loop and Zhengyou Zhang. Computing rectifying homographies for stereo vision. Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Vol.1, pages 125–131, June 23-25, 1999. Fort Collins, Colorado, USA, 1999 Errors corrected on June 6, 2001.
- [21] Carlos VILLAGRÁ ARNEDOr Antonio Javier GALLEGÓ SÁNCHEZ, Rafael MOLINA CARMONA. *Scene reconstruction and geometrical rectification from stereo images*. Januar 2005,uploaded by Antonio Javier Gallego Sánchez on 21 May 2014, ResearchGate.
- [22] Luca Irsara Andrea Fusiello. Euclidean epipolar rectification of uncalibrated images. Eurac researc, IT.
- [23] Richard I. Hartley. Euclidean reconstruction from uncalibrated views. G.E. CRD, Schenectady, NY, 12301.
- [24] Andrea Fusiello. Euclidean epipolar rectification. "[http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL\\_COPIES/FUSIELLO2/rectif\\_cv01.html](http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL_COPIES/FUSIELLO2/rectif_cv01.html)".
- [25] Dongqing Li, editor. *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*, pages 999–999. Springer US, Boston, MA, 2008.
- [26] S. Margulies. Fitting experimental data using the method of least squares. Department of Physics, University of Illinois at Chicago Circle, Chicago, Illinois 60680, 1967.
- [27] William T. Vetterling Brian P. Flannery William H. Press, Saul A. Teukolsky. *Numerical Recipes in Fortran 77 The Art Of Scientific Computing*. Copyright Numerical Recipes Software 1986, 1992, 1997 All Rights Reserved., Reprinted with corrections 1997, Volume 1 of Fortran Numerical Recipes.
- [28] James Demmel Dinesh Manocha. Algorithms for interesting parametric and algebraic curves 1: Simple intersections. ACM Transactions of Graphics:73–100, 1994.
- [29] MathWorks. Mathworks documentation,estimate camera parameters. "<https://de.mathworks.com/help/vision/ref/estimatecameraparameters.html>".
- [30] MathWorks. Mathworks documentation, disparity. "<https://de.mathworks.com/help/vision/ref/disparity.html>".
- [31] Canon. Eos 6d, eos 6d (wg), eos 6d (n), instruction manual, pages 188. "[http://gdlp01.c-wss.com/gds/6/0300009626/01/EOS\\_6D\\_Instruction\\_Manual\\_DE.pdf](http://gdlp01.c-wss.com/gds/6/0300009626/01/EOS_6D_Instruction_Manual_DE.pdf)".
- [32] Herbert Bay, Tinne Tuytelaars, and Luc Van Gool. Surf: Speeded up robust features. In Aleš Leonardis, Horst Bischof, and Axel Pinz, editors, *Computer Vision – ECCV 2006*, pages 404–417, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Berlin Heidelberg.