1 Transformationen in Welt- und Kamerakoordinatensystem

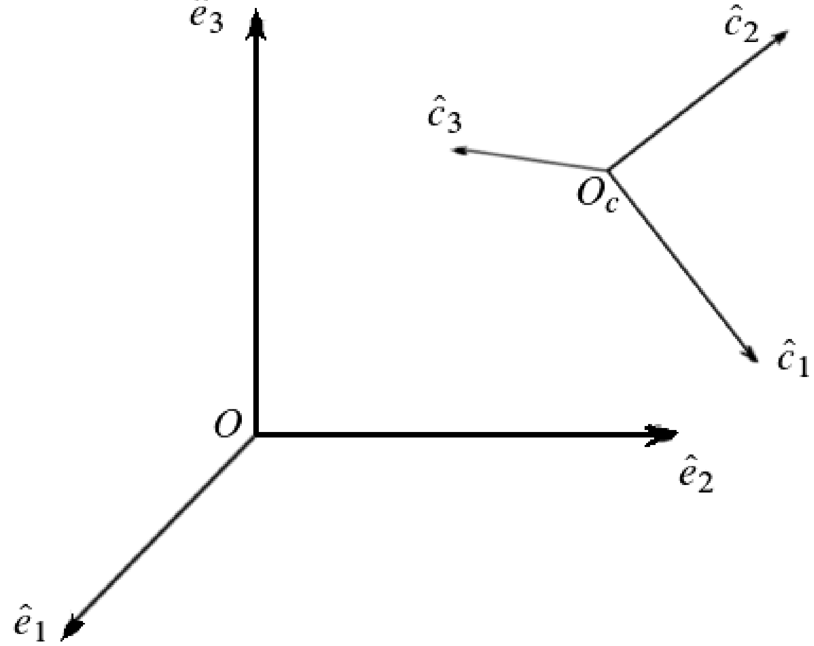

Abbildung 1: Weltkoordinatensystem $K = (O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ und Kamerakoordinatensystem $K_c = (O_c, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$

Koordinatisierung von Punkten

$$P = O + p_1\hat{e}_1 + p_2\hat{e}_2 + p_3\hat{e}_3 \tag{1}$$

$$\text{Kurz: } (P)_K = (p_1, p_2, p_3)^T = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

projektive Erweiterung zum Zweck der Einführung homogener Objekte

$$(P)_K = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ k \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 | k \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

Im Weltkoordinatensystem gilt des Weiteren:

$$\begin{bmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \lambda p_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{für } \lambda \neq 0 \tag{4}$$

Bezüglich des Kamerakoordinatensystem

$$K_c = (O_c, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3) \tag{5}$$
$$P = O_c +_c p_1\hat{c}_1 +_c p_2\hat{c}_2 +_c p_3\hat{c}_3 \tag{6}$$
$$(P)_{K_c} = \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Herstellen einer Beziehung zwischen K und K_c

$$O_c = O + o_{c,1}\hat{e}_1 + o_{c,2}\hat{e}_2 + o_{c,3}\hat{e}_3 \tag{8}$$
$$\hat{c}_1 = (c_1)_1\hat{e}_1 + (c_1)_2\hat{e}_2 + (c_1)_3\hat{e}_3 \tag{9}$$
$$\hat{c}_2 = (c_2)_1\hat{e}_1 + (c_2)_2\hat{e}_2 + (c_2)_3\hat{e}_3 \tag{10}$$
$$\hat{c}_3 = (c_3)_1\hat{e}_1 + (c_3)_2\hat{e}_2 + (c_3)_3\hat{e}_3 \tag{11}$$

Diese Beziehungsgleichung kann nun in Gleichung 6 eingesetzt werden

$$\begin{aligned} P = O &+ (o_{c,1} +_c p_1(c_1)_1 +_c p_2(c_2)_1 +_c p_3(c_3)_1) \cdot \hat{e}_1 \\ &+(o_{c,2} +_c p_1(c_1)_2 +_c p_2(c_2)_2 +_c p_3(c_3)_2) \cdot \hat{e}_2 \\ &+(o_{c,3} +_c p_1(c_1)_3 +_c p_2(c_2)_3 +_c p_3(c_3)_3) \cdot \hat{e}_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Es lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen und lösen in Form von:

$$\begin{aligned} p_1 &= o_{c,1} + (o_{c,1} +_c p_1(c_1)_1 +_c p_2(c_2)_1 +_c p_3(c_3)_1) \\ \rightsquigarrow\ p_1 - o_{c,1} &= (o_{c,1} +_c p_1(c_1)_1 +_c p_2(c_2)_1 +_c p_3(c_3)_1) \end{aligned} \tag{13}$$

<u>Bemerkung:</u>

Wenn $(P)_{K_c}$ gegeben ist, erhält man auf diese Weise direkt $(P)_K$. Wenn jedoch $(P)_K$ gegeben ist, so muss das LGS

$$\begin{bmatrix} (c_1)_1 & (c_2)_1 & (c_3)_1 \\ (c_1)_2 & (c_2)_2 & (c_3)_2 \\ (c_1)_3 & (c_2)_3 & (c_3)_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p1 - o_{c,1} \\ p2 - o_{c,2} \\ p3 - o_{c,3} \end{pmatrix} \tag{14}$$

gelöst werden. Wenn K_c ein kartesisches Koordinatensystem ist, so ist diese koeffizientenmatrix

$$M_c = \begin{bmatrix} (c_1)_1 & (c_2)_1 & (c_3)_1 \\ (c_1)_2 & (c_2)_2 & (c_3)_2 \\ (c_1)_3 & (c_2)_3 & (c_3)_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

orthogonal.

Das bedeutet es gildet:

$$
\begin{aligned}
& M_c^{-1} = M_c^T \\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_2 \end{pmatrix} = M_c^T & \begin{pmatrix} p_1 - o_{c,1} \\ p_2 - o_{c,2} \\ p_3 - o_{c,3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{16}
$$

Handelt es sich um kein kartesisches Koordinatensystem, so muss lediglich die Inversen M_c^{-1} anstatt M_c^T gebildet und mit dieser weiter wie gehabt verfahren werden.

Transformation von Welt- in Kamerakoordinaten kompakt in einer symbolischen Schreibweise dargestellt:

$$
(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c) = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O) \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & o_{c,1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & o_{c,2} \\ c_{13} & c_{32} & c_{33} & o_{c,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}
$$

$$
R = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{18}
$$

$$
R^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{19}
$$

Anmerkung: Wir stellen uns vor, dass $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$ durch eine Rotation R aus $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ entstanden ist.

Umgekehrt: Transformation von Kamera- in Weltkoordinaten:

$$
\rightsquigarrow \big(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\big) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -\begin{pmatrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{pmatrix} R^T \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \big(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c\big) \tag{20}
$$

Die Form der Rücktransformation von Kamera- in Weltkoordinaten beinhaltet folgendes:

$$
(a, b, c, 1) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & o_{c,1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & o_{c,2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & o_{c,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 0, 1) \tag{21}
$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} R^T & -\begin{pmatrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{pmatrix} R^T \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \begin{matrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{matrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Zwischenfazit:

Soeben haben wir die symbolischen Transformationsformeln für die Objekte $(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ der Koordinatensysteme festgehalten. Jetzt zurück zur Transformation der Koordinatentupel.

Aus der Gleichung 14 folgt

$$R \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - o_{c,1} \\ p_2 - o_{c,2} \\ p_3 - o_{c,3} \end{pmatrix} \; | R^T \tag{23}$$

$${}_cp := \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - R^T \begin{pmatrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{pmatrix} \; | \text{ proj. Erweiterung} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} {}_cp \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T o_c \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Umgekehrt:

$$\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & O_c \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_cp \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Das heißt:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \end{pmatrix}_k & \begin{pmatrix} c_2 \end{pmatrix}_k & \begin{pmatrix} c_3 \end{pmatrix}_k & O_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[{}_cp_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} +_c p_2 \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix} +_c p_3 \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_c \\ 1 \end{pmatrix} \right] \tag{28}$$

Probe: Vergleich Gleichung 28 mit Gleichung 12.