1 Transformationen in Welt- und Kamerakoordinatensystem

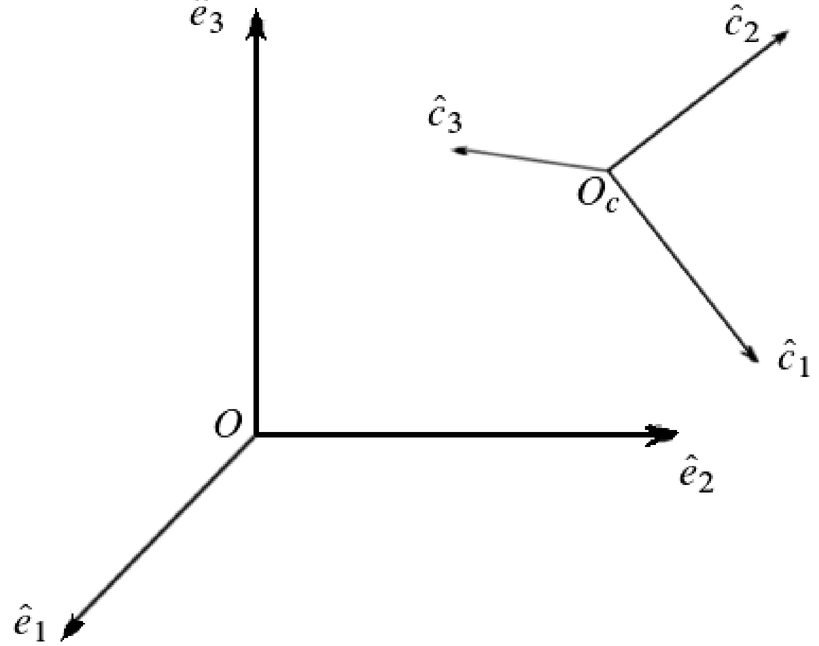

Abbildung 1: Weltkoordinatensystem $K = (O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ und Kamerakoordinatensystem $K_c = (O_c, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$

Koordinatisierung von Punkten

$$P = O + p_1\hat{e}_1 + p_2\hat{e}_2 + p_3\hat{e}_3 \tag{1}$$

$$\text{Kurz: } (P)_K = (p_1, p_2, p_3)^T = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

projektive Erweiterung zum Zweck der Einführung homogener Objekte

$$(P)_K = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ k \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 | k \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

Im Weltkoordinatensystem gilt des Weiteren:

$$\begin{bmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \lambda p_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{für } \lambda \neq 0 \tag{4}$$

Bezüglich des Kamerakoordinatensystem

$$K_c = (O_c, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3) \tag{5}$$
$$P = O_c +_c p_1 \hat{c}_1 +_c p_2 \hat{c}_2 +_c p_3 \hat{c}_3 \tag{6}$$
$$(P)_{K_c} = \begin{pmatrix} {}_c p_1 \\ {}_c p_2 \\ {}_c p_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Herstellen einer Beziehung zwischen K und K_c

$$O_c = O + o_{c,1}\hat{e}_1 + o_{c,2}\hat{e}_2 + o_{c,3}\hat{e}_3 \tag{8}$$
$$\hat{c}_1 = (c_1)_1\hat{e}_1 + (c_1)_2\hat{e}_2 + (c_1)_3\hat{e}_3 \tag{9}$$
$$\hat{c}_2 = (c_2)_1\hat{e}_1 + (c_2)_2\hat{e}_2 + (c_2)_3\hat{e}_3 \tag{10}$$
$$\hat{c}_3 = (c_3)_1\hat{e}_1 + (c_3)_2\hat{e}_2 + (c_3)_3\hat{e}_3 \tag{11}$$

Diese Beziehungsgleichung kann nun in Gleichung 6 eingesetzt werden

$$\begin{aligned} P = O &+ (o_{c,1} +_c p_1(c_1)_1 +_c p_2(c_2)_1 +_c p_3(c_3)_1) \cdot \hat{e}_1 \\ &+(o_{c,2} +_c p_1(c_1)_2 +_c p_2(c_2)_2 +_c p_3(c_3)_2) \cdot \hat{e}_2 \\ &+(o_{c,3} +_c p_1(c_1)_3 +_c p_2(c_2)_3 +_c p_3(c_3)_3) \cdot \hat{e}_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Es lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen und lösen in Form von:

$$\begin{aligned} & p_1 = o_{c,1} + (o_{c,1} +_c p_1(c_1)_1 +_c p_2(c_2)_1 +_c p_3(c_3)_1) \\ \rightsquigarrow\ & p_1 - o_{c,1} = (o_{c,1} +_c p_1(c_1)_1 +_c p_2(c_2)_1 +_c p_3(c_3)_1) \end{aligned} \tag{13}$$

<u>Bemerkung:</u>

Wenn $(P)_{K_c}$ gegeben ist, erhält man auf diese Weise direkt $(P)_K$. Wenn jedoch $(P)_K$ gegeben ist, so muss das LGS

$$\begin{bmatrix} (c_1)_1 & (c_2)_1 & (c_3)_1 \\ (c_1)_2 & (c_2)_2 & (c_3)_2 \\ (c_1)_3 & (c_2)_3 & (c_3)_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}_c p_1 \\ {}_c p_2 \\ {}_c p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p1 - o_{c,1} \\ p2 - o_{c,2} \\ p3 - o_{c,3} \end{pmatrix} \tag{14}$$

gelöst werden. Wenn K_c ein kartesisches Koordinatensystem ist, so ist diese koeffizientenmatrix

$$M_c = \begin{bmatrix} (c_1)_1 & (c_2)_1 & (c_3)_1 \\ (c_1)_2 & (c_2)_2 & (c_3)_2 \\ (c_1)_3 & (c_2)_3 & (c_3)_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

orthogonal.

Das bedeutet es gildet:

$$M_c^{-1} = M_c^T$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_2 \end{pmatrix} = M_c^T \begin{pmatrix} p_1 - o_{c,1} \\ p_2 - o_{c,2} \\ p_3 - o_{c,3} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Transformation von Welt- in Kamerakoordinaten kompakt in einer symbolischen Schreibweise dargestellt:

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c) = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O) \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & o_{c,1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & o_{c,2} \\ c_{13} & c_{32} & c_{33} & o_{c,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Handelt es sich um ein kartesisches Koordinatensystem, so muss von C für die Rücktransformation nur die Transformierte C^T bebildet werden.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Handelt es sich um kein kartesisches Koordinatensystem, so muss lediglich die Inverse C^{-1} anstatt C^T gebildet und mit dieser weiter wie gehabt verfahren werden.

Anmerkung: Wir stellen uns vor, dass $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$ durch eine Rotation aus $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ entstanden ist.

Allgemein: Die Matrix zur Beschreibung der Koordinatentransformation setzt sich zusammen aus C, einem Spaltentupel $\vec{v}$ der Form:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\text{vgl mit Gleichung (17)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & o_{c,1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & o_{c,2} \\ c_{13} & c_{32} & c_{33} & o_{c,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

In symbolischer Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} & K & \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \end{pmatrix}_k \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \end{pmatrix}_k \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \end{pmatrix}_k \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} O_c \end{pmatrix}_k \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} & K_c & \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\rightsquigarrow \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) = \begin{bmatrix} & C & & \vec{v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c\right) \tag{23}$$

Sei Punkt $P = \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c\right) \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ so liefert die Kombination der Koordinatensysteme:

$$\left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c\right) \begin{bmatrix} & C & & \vec{v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Aus AG und der Eindeutigkeit von Koordinatendarstellung folgt:

$$\begin{bmatrix} & C & & \vec{v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{kc} \end{pmatrix}_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k \end{pmatrix}_k \\ 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

<u>Umgekehrt</u>: Transformation von Kamera- in Weltkoordinaten:

$$\rightsquigarrow \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -\begin{pmatrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{pmatrix} C^T \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c\right) \tag{26}$$

Probe:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} & & \\ & C^T & \\ & & \end{matrix} & -\begin{pmatrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{pmatrix} C^T \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} & & \\ & C & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

In allgemeiner symbolischer Form:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{kc} \end{pmatrix}_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} & C & \end{matrix} & \vec{v} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k \end{pmatrix}_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} & C^{-1} & \end{matrix} & -\left(C^{-1})\right) \vec{v} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Falls

$$\left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O\right) = \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) \begin{bmatrix} \begin{matrix} & C & \end{matrix} & \vec{v} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

so

$$\begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} & C^{-1} & \end{matrix} & -C^{-1}(O_c)_K \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Zwischenfazit:

Soeben haben wir die symbolischen Transformationsformeln für die Objekte $(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ der Koordinatensysteme festgehalten. Jetzt zurück zur Transformation der Koordinatentupel.

Aus der Gleichung 14 folgt

$$C \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - o_{c,1} \\ p_2 - o_{c,2} \\ p_3 - o_{c,3} \end{pmatrix} \, |C^T \tag{31}$$

$${}_cp := \begin{pmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - C^T \begin{pmatrix} o_{c,1} \\ o_{c,2} \\ o_{c,3} \end{pmatrix} \, | \text{ proj. Erweiterung} \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} {}_cp \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & C^T & & -C^T{}_{o_c} \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Umgekehrt:

$$\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & C & & O_c \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_cp \\ 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Das heißt:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \end{pmatrix}_k & \begin{pmatrix} c_2 \end{pmatrix}_k & \begin{pmatrix} c_3 \end{pmatrix}_k & O_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_cp_1 \\ {}_cp_2 \\ {}_cp_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} {}_cp_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} +_c p_2 \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix} +_c p_3 \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_c \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Probe: Vergleich Gleichung 28 mit Gleichung 12.