1 Koordinatenssysteme im Programm

1. Kartesisches rechtsdrehendes Weltkoordinatensystem $K = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O)$
2. Bildebene E, ein Projektionszentrum Z
3. kartesisches rechtsdrehendes Kamerakoordinatensystem mit $K_c = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c)$. Beim Kamerakoordinatensystem gilt wiederum $O_c = Z$ und $< \hat{c}_1, \hat{c}_2 > +P = E$. $P =$ Hauptpunkt auf der Bildebene.
4. Bildebenenkoordinatensystem $K_b = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, O_b),$. $O_b = P$, $\hat{b}_1 = \hat{c}_1$, $\hat{b}_2 = \hat{c}_2$.
5. Sensorkoordinatensystem (Name wird noch überarbeitet) $K_s = (\vec{u}, \vec{v}, O_s)$. Dieses Koordinatensystem ist an die Geometrie der Pixel und des Sensors angepasst und daher muss es sich nicht unbedingt um ein karthesisches Koordinatensystem handeln.

Zu 2.

Bildebene beschrieben in Hess'scher Normalform: $E : \hat{n} \cdot (\vec{x} - \vec{q}) = 0$

Zu 3.:

Für die Wahl der Kamerakoordinatenachsen wird folgendes Schema verfolgt: $\hat{c}_1 \cdot \hat{n} = 0$, $\hat{c}_2 \cdot \hat{n} = 0$, $\hat{c}_3 = \pm\, \hat{n}$.
Für die Transformation der Weltkoordinatenachsen in Kamerakoordinatenachsen gilt: $D\hat{e}_i = \hat{c}_i$, wobei D eine 3x3-Rotationsmatrix darstellt.

Definiere Drehung D:

$$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)[D] = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3) \rightsquigarrow \hat{c}_1 = D_{11}\hat{e}_1 + D_{21}\hat{e}_2 + D_{31}\hat{e}_3 \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \end{pmatrix}_K & \begin{pmatrix} \hat{c}_2 \end{pmatrix}_K & \begin{pmatrix} \hat{c}_3 \end{pmatrix}_K \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c) = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O) \cdot \begin{bmatrix} & & & Z \\ & [D] & & Z \\ & & & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Herleitung von ζ :

$$\vec{p} + |\vec{QZ} \cdot \vec{n}|\vec{n} = \vec{Z} \tag{4}$$

Q ist ein beliebiger Punkt auf der Ebene. Setze

$$\vec{QZ} \cdot \hat{n} = \zeta \tag{5}$$

$$\vec{p} = \vec{Z} - \zeta\hat{n} \tag{6}$$

Wähle $\hat{c}_3 = \hat{n}$, $\vec{p} = \vec{Z} - \zeta\hat{n}$

Zentralprojektion:

$$ {}_{K_c}\left[\pi\right]_{K_c} = \begin{pmatrix} -\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7} $$

Probe:

$$ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\zeta X \\ -\zeta Y \\ -\zeta Z \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta \frac{X}{Z} \\ -\zeta \frac{Y}{Z} \\ -\zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8} $$

<u>Zu 4</u>

Es gilt: $O_B = Z - \zeta \hat{n} = \vec{p},\ \hat{b}_1 = \hat{c}_1,\ \hat{b}_2 = \hat{c}_2$

$$ {}_{K_b}\left[\pi\right]_{K_c} = \begin{pmatrix} -\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9} $$

Probe:

$$ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\zeta X \\ -\zeta Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta \frac{X}{Z} \\ -\zeta \frac{Y}{Z} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10} $$

Wie wird der Übergang korrekt beschrieben?

$$ (\hat{b}_1, \hat{b}_2, O_B) = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11} $$

Sei $(X)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$ \rightsquigarrow (x)_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12} $$

Umkehrung mit Hilfe der Pseudoinversen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\rightsquigarrow {}_{K_c}\big[\pi\big]_{K_b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

<u>Zu 5</u>:

Sensorkoordinatensystem $= K_s = (\vec{u}, \vec{v}, O_s)$. es gilt:

$$\vec{u} = u_1 \hat{b}_1 + u_2 \hat{b}_2 \tag{15}$$

$$\vec{v} = v_1 \hat{b}_1 + v_2 \hat{b}_2 \tag{16}$$

$$O_S = O_B + p_1 \hat{b}_1 + p_2 \hat{b}_2 \tag{17}$$

$$\big(\vec{u}, \vec{v}, O_S\big) = \big(\hat{b}_1, \hat{b}_2, O_B\big) \cdot \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & p_1 \\ u_2 & v_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Es sei $(X)_S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow x = a\vec{u} + b\vec{v} + O_S \tag{19}$$

$$= a(u_1 \hat{b}_1 + u_2 \hat{b}_2) + b(v_1 b_1 + v_2 b_2) + O_B + p_1 b_1 \tag{20}$$

$$\mapsto (X)_B = \begin{bmatrix} p_1 + a v_1 + b v_1 \\ p_2 + a u_2 + b u_2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$(X)_S = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}^{-1} & & -M^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad X \quad \end{bmatrix}_B \tag{22}$$

Stelle nun ${}_{K_s}\big[\pi\big]_{K_c}$ dar

$$\begin{bmatrix} M^{-1} & & -M \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\zeta M^{-1} & & -M \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Beispiel:

$\vec{u} = 1pb_1 \quad$ (p = Pixelpitch)
$\vec{v} = 2pb_2$
$p_1 = 15, p_2 = 20$

$$O_S = O_B - \vec{u} - \vec{v} \rightsquigarrow O_S = O_B - 15b_1 - 20b_2 \tag{24}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2p} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$[\pi] = \begin{bmatrix} \frac{-\zeta}{p} & 0 & 15 & 0 \\ 0 & \frac{-\zeta}{p} & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Ein anderes Beispiel:

$\vec{v} = 1pb_1 + 2pb_2$
$\vec{u} = 1pb_1$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$_{K_s}\left[\pi\right]_{K_c} = \begin{bmatrix} \frac{-\zeta}{p} & \frac{-\zeta}{2p} & 10 & 0 \\ 0 & \frac{-\zeta}{p} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$= [K|0] \tag{29}$$

Darstellung von $_{K_s}\left[\pi\right]_K$

$$_{K_s}\left[\pi\right]_K = {}_{K_s}\left[\pi\right]_{K_c} \cdot \begin{bmatrix} & [D]^{-1} & & -[D]^{-1}Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Hartley&Zisserman schreibt R für $[D]^{-1}$

$$[K|0] \begin{bmatrix} & R & & -RZ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$[KR| - KRZ] = KR[I_{3x3}| - Z] \tag{32}$$