Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Analyse einiger Kavalierprojektionen*

Untersuchen Sie einige spezielle Kavalierprojektionen (siehe Tafel). Die Bildebene ist jeweils die x_2-x_3-Ebene. Die Projektionsrichtung liegt immer in derjenigen Ebene , welche die x_1-Achse enthält und den Winkel zwischen der x_2-Achse und der x_3-Achse halbiert. Diese Ebene ist durch die Gleichung $x_2 = x_3$ gegeben. Im Folgenden bezeichne E_1' stets den Schnittpunkt der durch E_1 verlaufenden Projektionsgeraden mit der Bildebene. Bei den hier untersuchten Parallelprojektionen ergibt sich stets $\alpha = 45°$, der Skalierungsfaktor s_1 variiert je nachdem, wie flach oder steil die Projektionsrichtung gewählt wird.

(a) Die Projektionsrichtung sei um $45°$ zur x_2-x_3-Ebene geneigt. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$.

(b) Die Projektionsgerade habe die Steigung $m_2 = \frac{2}{1}$. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$ sowie den Neigungswinkel δ_2 der Projektionsgeraden zur x_2-x_3-Ebene.

(c) Die Projektionsgerade habe die Steigung $m_3 = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Länge der Strecke $s_1 = \overline{OE_1'}$ sowie den Neigungswinkel δ_3 der Projektionsgeraden zur x_2-x_3-Ebene.

(d) In der Schule haben Sie zur Darstellung räumlicher Objekte möglicherweise immer wieder eine Axonometrie verwendet, bei der $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\alpha = 45°$ galt. Welchen Neigungswinkel δ muss die Projektionsgerade zur x_2-x_3-Ebene haben, damit sich $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ergibt?

Aufgabe P 6. *Fortsetzung der Analyse – Projektion auf verschiedene Ebenen*

(a) Die Bildebene werden nun so „tiefergelegt“, dass sie **parallel zur** x_2-x_3-Ebene ist und den Punkt $(-1, 0, 0)$ enthält. Untersuchen Sie, wie die Punkte O, E_1, E_2 und E_3 projiziert werden, wenn die Projektionsrichtung so ist wie in der ersten Teilaufgabe von P 5. Sind die Skaliserungsfaktoren s_1, s_2 und s_3 gegenüber P 5 verändert?

(b) Was verändert sich, wenn Sie die Bildebene π um eine weitere Längeneinheit „tieferlegen“, so dass sie den Punkt $(-2, 0, 0)$ enthält.

(c) Wiederholen Sie diese Analyse für die Projektionsrichtungen, die in den übrigen Teilaufgaben von P 5 angegeben sind.

(d) Versuchen Sie einen Ergebnissatz zu formulieren, der die von Ihnen beobachteten Sachverhalte bei Parallelprojektionen zusammenfasst:

Wenn man bei gegebenem räumlichen Dreibein $\big(O;\, E_1, E_2, E_3\big)$ *und gegebener Projektionsrichtung unterschiedliche zueinander parallel liegende Bildebenen wählt, so verändert sich zwar die Lage . . . , die . . . bleiben jedoch unverändert.*

Aufgabe P 7. *Kuboktaeder*

Die Einheitslänge in dieser Aufgabe sei $10\,\mathrm{cm}$. Zeichnen Sie einen Würfel mit Einheitskantenlänge $10\,\mathrm{cm}$ in einer Kavalierprojektion. Um Überdeckungen hinten liegender Kanten durch vordere Kanten möglichst zu vermeiden, können Sie zum Beispiel $\overrightarrow{OE_1} = \left(\begin{smallmatrix} 2\,\mathrm{cm} \\ 4\,\mathrm{cm} \end{smallmatrix}\right)$ oder auch $\overrightarrow{OE_1} = \left(\begin{smallmatrix} 4\,\mathrm{cm} \\ 2\,\mathrm{cm} \end{smallmatrix}\right)$ wählen.

(a) Wie groß ist dann der Skalierungsfaktor s_1?

(b) **„Schneiden Sie"** die acht Ecken des Würfels durch Ebenen „ab", welche die von den Ecken ausgehenden Kanten halbieren. Wieviele Flächen, Ecken und Kanten besitzt der so entstehende Kuboktaeder?

(c) Bestimmen Sie die Anzahl e der Ecken, die Anzahl f der Flächen und die Anzahl k der Kanten **für den Würfel**.

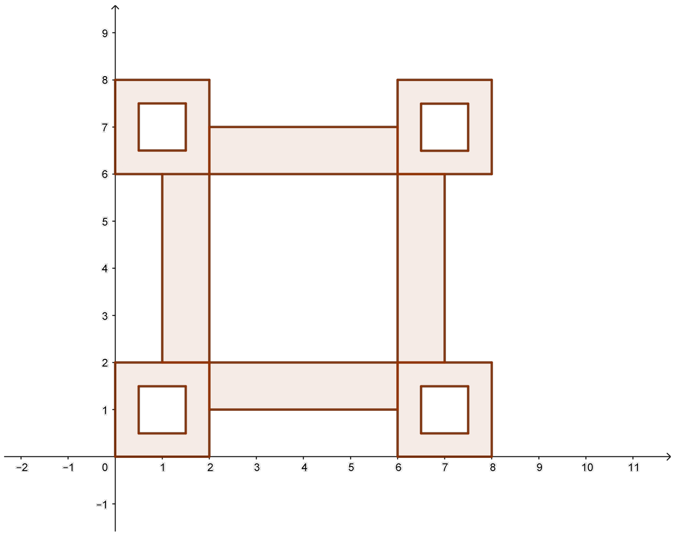
(d) Überprüfen Sie, ob die Anzahl e der Ecken, die Anzahl f der Flächen und die Anzahl k der Kanten **für den Kuboktaeder** die Eulersche Polyederformel erfüllt:

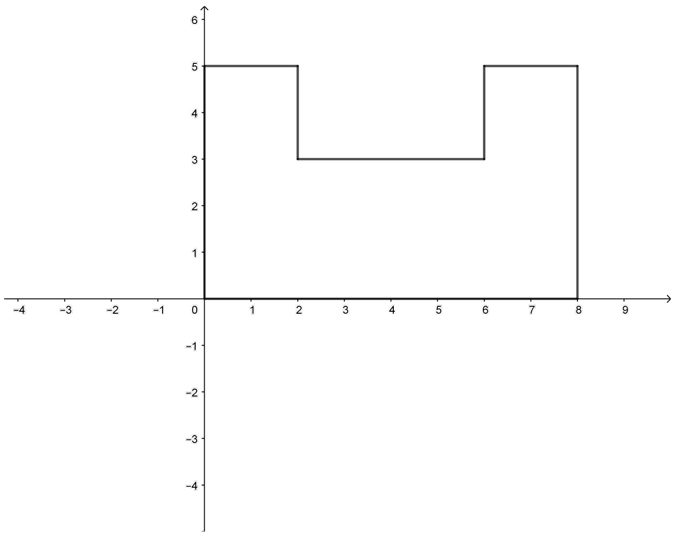
$$e - k + f = 2.$$

Hausübungen

Aufgabe H 3. *Castellum*

Im Folgenden sind der Grundriss sowie der Aufriss eines Castells gegeben. Fertigen Sie hieraus eine parallelperspektivische Darstellung in Militärperspektive an.





Aufgabe H 4. *Dynamische veränderbare Darstellungen mit Geogebra*

Versuchen Sie mit Geogebra eine Datei zur parallelperspektivischen Darstellung des Kuboktaeders von Aufgabe P 7 zu erstellen, die es Ihnen ermöglicht, die axonometrischen Angaben interaktiv zu verändern. Sie können sich der „Schieberegler“bedienen, die Geogegebra zur Verfügung stellt.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 1. *Parallelprojektionen in die Aufrissebene*

(a) Zeichnen Sie einen Pyramidenstumpf mit quadratischem Grundriss (die Kantenlänge dürfen Sie wählen), dessen Spitze im Punkte $S = (0, 0, 5)$ liegt. Der Boden des Pyramidenstumpfs liegt in der x_1-x_2-Ebene, der Deckel 3 Einheiten darüber. Verwenden Sie hierzu

- die Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben $\alpha = 135°, \beta = 90°, s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, s_2 = 1$ und $s_3 = 1$.
- die Militärprojektion mit den Angaben $\alpha = 135°, \beta = 135°, s_1 = 1, s_2 = 1$ und $s_3 = \frac{1}{2}$.

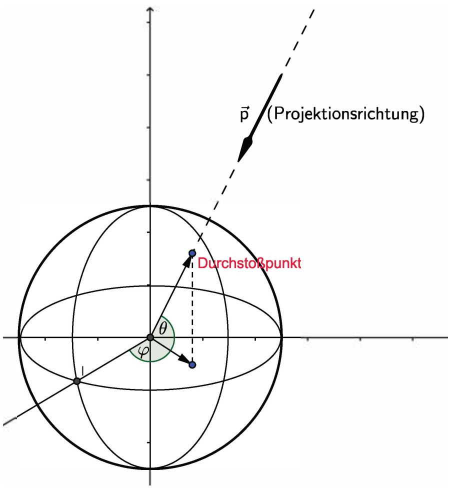
(b) Zeichnen Sie separat einen Grundriss des Pyramidenstumpfbodens. Fügen Sie zum Grundrissquadrat einen Inkreis hinzu. Markieren Sie die Punkte, an denen der Kreis das Quadrat berührt.

(c) Fügen Sie nun zu Ihren zuvor angefertigten parallelperspektivischen Darstellungen die Projektionsbilder des o.g. Kreises hinzu. *Hinweis: Dieser Kreis erscheint als Ellipse, die Berührpunkte mit dem Bild des Grundrissquadrats werden „richtig“ übertragen.*

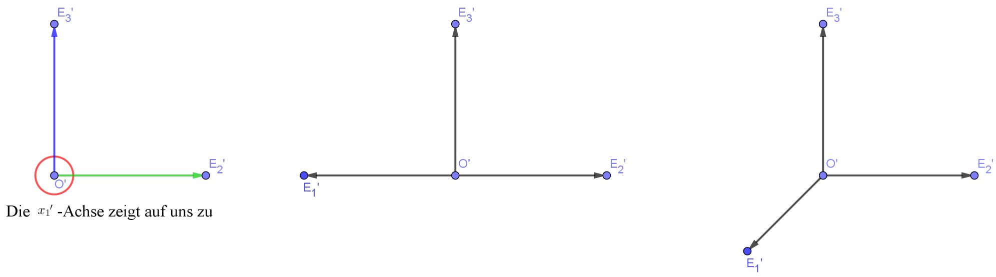
(d) Zeichnen Sie nun in einer Ihrer zuvor angefertigten Darstellungen einen Kegelstumpf ein, der nach oben bzw. unten vom Deckel bzw. vom Boden des Pyramidenstumpfes begrenzt wird.

Aufgabe T 2. *Parallelprojektionen in die Aufrissebene*

Wir wollen ebene Dreibeine (O', E_1', E_2', E_3') untersuchen, die durch Projektion eines kartesischen räumlichen Dreibeins (O, E_1, E_2, E_3) auf die x_2-x_3-Ebene entstehen. Im projizierten Bild zeigt die x_2'-Achse jeweils nach rechts, die x_3'-Achse nach oben. Um die Projektionsrichtung im Raum anzugeben, verwenden wir „geographische Koordinaten“, d.h. den Längengrad φ und den Breitengrad θ des Durchstoßpunktes der Projektionsgeraden durch die im Ursprung zentrierte Einheitskugel (vgl. die Skizze).



(a) Beschreiben Sie, welche Parallelprojektionen das räumliche Dreibein jeweils auf die folgenden ebenen Dreibeine abbilden.



Aufgabe T 3. *Günstige und weniger günstige Parallelperspektiven*

(a) Skizzieren Sie einen achsenparallelen Quader mit Breite 2, Höhe 1 und Tiefe 3, dessen linke hintere untere Ecke am Punkt $(0, 2, 0)$ liegt. Verwenden Sie hierzu die Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben

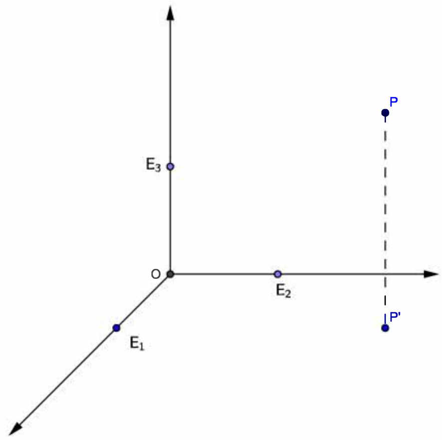
$$\alpha = 135°, \ \beta = 90°, \ s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ s_2 = 1, \ s_3 = 1.$$

.

(b) Skizzieren Sie den Quader nun in Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1$. Ist dies in punkte Anschaulichkeit eine günstige Projektion?

Aufgabe T 4. *Koordinatenquader – Koordinatenbestimmung*

Übertragen Sie die folgende Figur auf Ihr Papier, zeichnen Sie den Koordinatenquader von P und lesen Sie die Koordinaten des Punktes P ab. Der eingezeichnete Punkt P' soll in der Grundrissebene liegen.



Übertragen Sie die folgende Figur auf Ihr Papier, zeichnen Sie den Koordinatenquader von P und lesen Sie die Koordinaten des Punktes P ab. Der eingezeichnete Punkt P' soll in der Grundrissebene liegen.