Präsenzübungen

Mit unseren Werkzeugen aus der Analytischen Geometrie sind wir nun in der Lage, Parallelprojektionen zu berechnen. Was das im Einzelnen heißen soll, wird nun erklärt:

- Zur Spezifikation einer Parallelprojektion wird zunächst eine **Bildebene** B festgelegt, z.B. durch eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \;=\; 0.$
- Zweitens wird ein Richtungsvektor $\vec{r}$ festgelegt, der die Projektionsrichtung(en)‡ spezifiziert.
- Wenn A ein Punkt im Raum mit Ortsvektor $\vec{a}$ ist, so erhält man dessen Projektionsbild A', in der Bildebene indem man den Schnittpunkt derjenigen (Projektions-)Geraden g_A, die durch A verläuft und $\vec{r}$ als Richtungsvektor hat, mit der Bildebene bestimmt: $A' \;=\; g_A \cap B.$
- Für jeden Raumpunkt A müssen wir eine eigene Parametergleichung $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{r}$ für die entsprechende Projektionsgerade g_A aufstellen.
- Um nun zu einem gegebenen Raumpunkt A den Bildpunkt A' zu berechnen, setzt man den Ausdruck $\vec{a} + t\,\vec{r}$ anstelle von $\vec{x}$ in die HNG $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \;=\; 0$ der Bildebene B ein. Die sich ergebende Gleichung
$$\vec{n} \cdot (\vec{a} + t\,\vec{r} - \vec{p}) \;=\; 0$$
löst man nach t auf, den so gefundenen Wert t^* setzt man in die Parametergleichung der Geraden ein und erhält
$$\vec{a}' \;=\; \vec{a} + t^*\,\vec{r}.$$

Aufgabe P 12. *Berechnung einer Parallelprojektion – Schrägprojektion*

Im Folgenden wollen wir die Kavalier- oder Kabinettprojektion betrachten, die sich ergibt, wenn man als Bildebene die x_2-x_3-Koordinatenebene und als Richtungsvektor für die Projektionsgeraden den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwendet.

(a) **Bestimmen Sie** eine Hesse'sche Normalengleichung für die x_2-x_3-Koordinatenebene. Diese enthält u.a. den Koordinatenurspung $O = (0,0,0)$ sowie die Punkte $E_2 = (0,1,0)$ und $E_3 = (0,0,1)$.

(b) **Berechnen Sie** die Projektionsbilder O', E_1', E_2' und E_3' der Punkte O, $E_1 = (1,0,0)$, E_2 und E_3.

(c) **Zeichnen Sie** die Punkte O', E_1', E_2' und E_3'.

(d) **Bestimmen Sie** die axonometrischen Angaben $s_1 = \left\|\overrightarrow{O'E_1'}\right\|$, $s_2 = \left\|\overrightarrow{O'E_2'}\right\|$, $s_3 = \left\|\overrightarrow{O'E_3'}\right\|$ sowie $\alpha = \angle\left(\overrightarrow{O'E_1'}, \overrightarrow{O'E_3'}\right)$ und $\beta = \angle\left(\overrightarrow{O'E_2'}, \overrightarrow{O'E_3'}\right)$ für diese Parallelprojektion.

(e) **Berechnen Sie** die Projektionsbilder der Punkte $A = (1,1,0)$, $B = (1,0,1)$, $C = (0,1,1)$ und $D = (1,1,1)$.

(f) Ergänzen Sie Ihre Skizze aus Teilaufgabe **(c)** um die Punkte A', B', c' und D'. Vervollständigen Sie das Projektionsbild des Einheitswürfels mit den noch fehlenden Kanten.

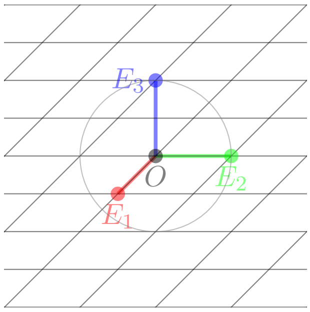
‡ Die tatsächlich verwendete Projektionsrichung ist entweder gleich der Richtung von $\vec{r}$ oder von $-\vec{r}$. Wenn man ganz präzise formulieren möchte, müsste man sagen, dass der Richtungsvektor $\vec{r}$ die **Parallelklasse** festlegt, der alle Projektionsgeraden angehören.

Hausübungen

Aufgabe H 17. *Ergänzungen zur Aufgabe P 12*

(a) Diskutieren Sie, was sich gegenüber der vorigen Aufgabe verändert, wenn Sie als Bildebene nicht die x_2-x_3-Koordinatenebene, sondern die hierzu parallele Ebene mit der Gleichung $x_1 = -2$ verwenden.

(b) Die Parallelprojektion der vorigen Aufgabe hat u.a. den Nachteil, dass das Projektionsbild des Einheitswürfels für unser Auge eher wie ein Quader wirkt. Welchen Richtungsvektor für die Projektionsgeraden müssen Sie wählen, damit sich bei gleichbleibendem Winkel $\alpha = 45°$ der Skalierungsfaktor $s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt



Aufgabe H 18. *Orthogonale isometrische Parallelprojektion*

Wir betrachten nun die Parallelprojektion auf die Bildebene B, welche die Punkte $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$ und $E_3 = (0,0,1)$ enthält. Als Richtungsvektor für die Projektionsgeraden wählen wir $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) **Bestimmen Sie** einen Normalenvektor $\vec{n}$ für die Bildebene. Falls Sie einen solchen nicht direkt „erraten" können, setzen Sie $\vec{u} := \overrightarrow{E_2E_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} := \overrightarrow{E_2E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und berechnen Sie das Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

(b) **Bestimmen Sie** die Projektionsbilder der Punkte $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$ und $E_3 = (0,0,1)$ und **berechnen Sie** das Projektionsbild des Punktes O.

(c) **Berechnen Sie** die Längen der Strecken $\overline{O'E_1'}$, $\overline{O'E_2'}$ und $\overline{O'E_3}$.

Hinweis: Damit haben Sie die Skalierungsfaktoren s_1, s_2 und s_3 bestimmt.