1 Rotation um Projektionszentrum

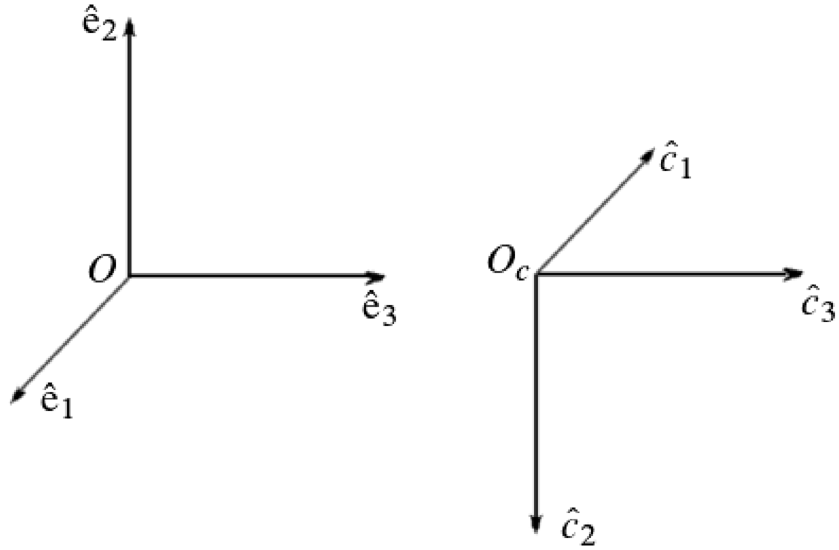

Abbildung 1: Weltkoordinatensystem $K = (O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ und Kamerakoordinatensystem $K_c = (O_c, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3)$.

Zur Übersichtlichkeit wurden die Koordinatenssysteme in Abbildung 1 verschoben voneinander dargestellt. In Wirklichkeit sind die Ursprünge O und O_c deckungsgleich. Die Koordinatensysteme unterscheiden sich durch eine Drehung um 180° um die $\hat{e}_3$-Achse. Zwei Bilder der selben Szene werden aufgenommen mit derselben Kamera, jedoch unterschiedlich um das Projektionszentrum gedreht. Nach Einführen eines sensorfesten 2-dimensionalen Koordinatensystems lassen sich die Koordinaten der Bildpunkte durch eine Homographie

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ineinander überführen.

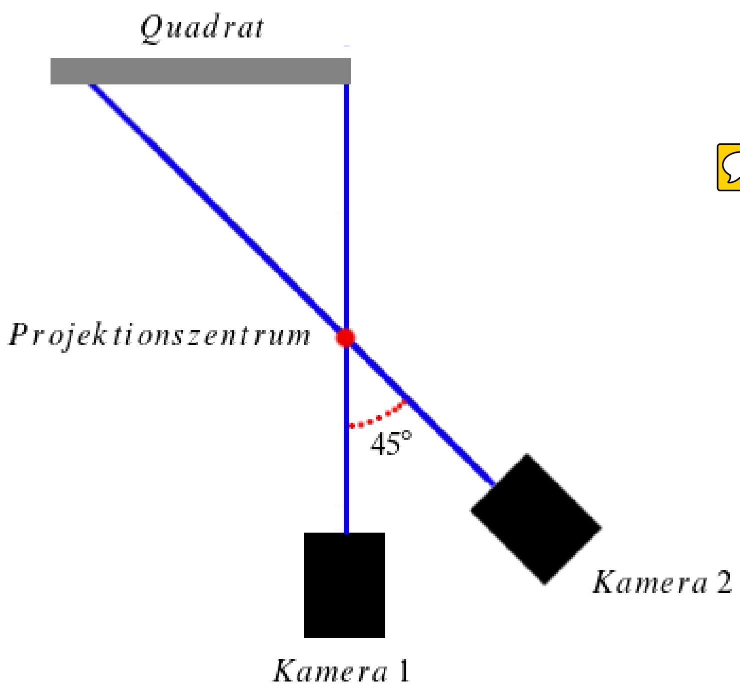

Abbildung 2: Kameras mit Projektionszentrum von oben

Bemerkung:

Beim Standardverfahren für Kamerakalibrierung wird nicht um das Projektionszentrum gedreht.

Bsp: Spezialfall $O_c = O$:

Wenn Bildebene und Projektionszentrum festgelegt sind, ist $\hat{c}_3$ definiert (Lotgerade vom Sender zum Projektionszentrum). Wähle $\hat{c}_1$ in Sensorebene von $\hat{c}_2 = \hat{c}_3 \times \hat{c}_1$.

Abbildungsmatrix in homogenen Koordinaten:

Vorraussetzung: $\zeta \neq 0$

$$_{K_c}\left[\pi\right]_{K_c} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}_{K_c}\left[\pi\right]_{K_c} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta X \\ \zeta Y \\ \zeta Z \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{Z} X \\ \frac{\zeta}{Z} Y \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Es sei gegeben vier Punkte A_K, B_K, C_K, D_K der Szene mit Weltkoordinatentupel. Des Weiteren sei $\zeta = -1$.

$$(A)_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, (B)_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, (C)_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (D)_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Die Szene beinhaltet zwei Kameraeinstellungen, die eine Zeigt die Punkte Frontal, bei der zweiten wurde die Kamera um 45° um das Projektionszentrum gedreht. Zuerst müssen die Punkte in den jeweiligen Kamerakoordinatensystemen angegeben werden. Hierzu werden zwei Matrizen T_1 und T_2 benötigt. T_1 bewirkt die Drehung der Punkte um 180° um die $\hat{e}_3$-Achse. Um T_2 zu erhalten wird die Kamera für die zweite Einstellung um 45° gedreht und danach noch mit T_1 verrechnet. Die so erhaltenen Matrizen T_1 und T_2 können nun dazu verwendet werden, die Punkte Bezüglich des Weltkoordinatensystems in Punkte bezüglich der jeweiligen Kamerakoordinatensysteme zu transformieren.

Einstellung 1: Frontal

$$\begin{bmatrix} \cos(180) & -\sin(180) & 0 & 0 \\ \sin(180) & \cos(180) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1 \tag{6}$$

Einstellung 2: Um 45° gedreht

$$\cos(45) = \sin(45) = \frac{1}{\sqrt{2}} = a \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, O\right) \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_2 \tag{9}$$

<u>Programm</u>:

Stelle nun nach ermitteln von T_1 und T_2 jeden Punkt A_K, B_K, C_K, D_K also Koordinatentupel bezüglich K_c dar.

Frontal:

$$\begin{pmatrix} (A)_{K_{c1}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} (B)_{K_{c1}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} (C)_{K_{c1}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} (D)_{K_{c1}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Um 45° gedreht

$$\begin{pmatrix} (A)_{K_{c2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} (B)_{K_{c2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3a \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} (C)_{K_{c2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3a \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} (D)_{K_{c2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -1 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Für die Verrechnung mit der Abbildungsmatrix

$${}_{K_{c1}}\left[\pi\right]_{K_{c1}} = {}_{K_{c2}}\left[\pi\right]_{K_{c2}} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

werden die vier Punkte-Tupel hintereinander geschrieben.

Frontal:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Um 45° gedreht:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a & a & 2a \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2a & 3a & 3a & 2a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -a & -a & -2a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2a & -3a & -3a & -2a \\ 2a & 3a & 3a & 2a \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3a} & \frac{1}{2a} \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Probe:

Entstandene Punkte werden in Geogebra eingegeben. Das Programm liefert folgende beide Quadrate

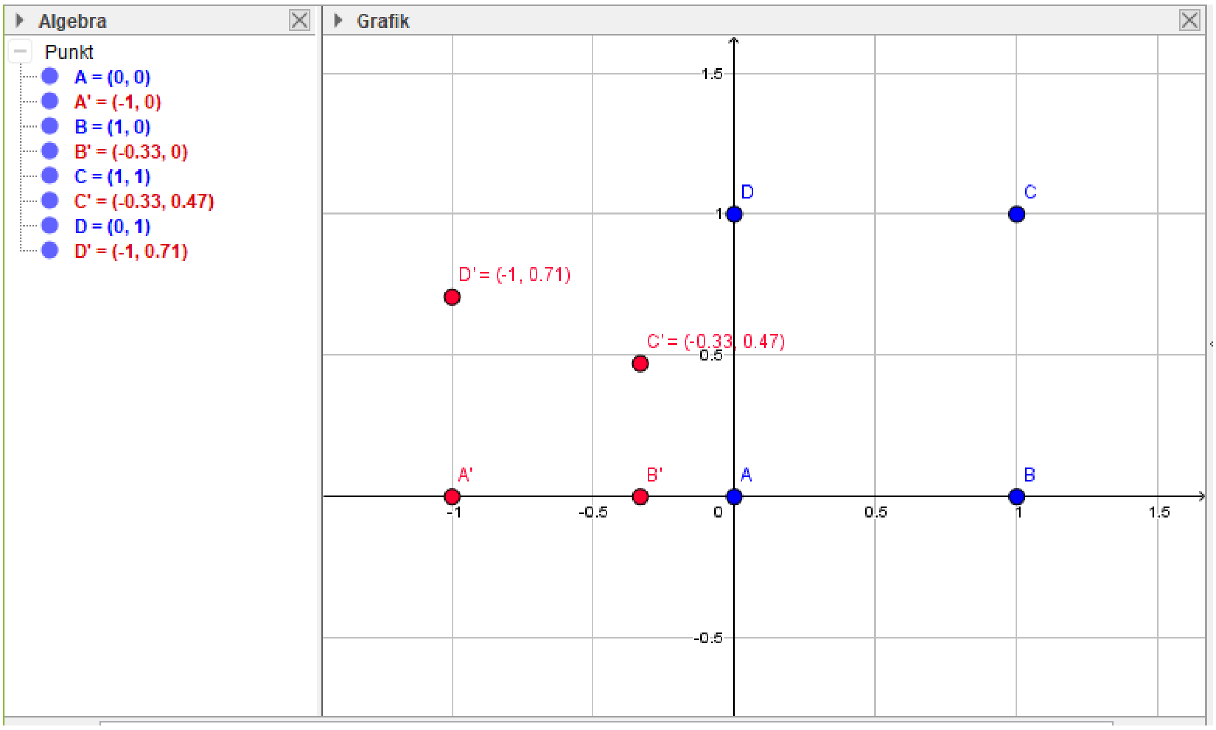

Abbildung 3:

Schlussendlich wird noch ein drittest Koordinatensystem in der Bildebene eingeführt. Für unser Beispiel gilt dann

$$K_B = (O_B = O_c + \zeta \hat{c}_3, b_1 = \hat{c}_1, b_2 = \hat{c}_2) \tag{23}$$

Die Transformationsmatrix von Kamerakoordinaten zu Bildkoordinaten wäre dann, wenn wir davon ausgehen dass der Ursprung des Sensorkoordinatensystems Deckungsgleich mit dem Ursprung des Kamerakoordinatensystems ist:

$$\left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(b_1, b_2, O_b\right) \tag{24}$$

Für die Rücktransformation wird die Pseudoinverse benötigt

$$\left(b_1, b_2, O_b\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, O_c\right) \tag{25}$$