

---

# **Lösungen zu den Übungen der Mathematik-Lehrveranstaltungen für DM-Zweitsemester**

---

Erarbeitet von Tutorinnen und Tutoren  
im Rahmen der Lehrveranstaltung

**Fachdidaktisches Praktikum:  
Mathematik der Digitalen Medien**

Betreut von  
Prof. Dr. Thomas Schneider und Prof. Dr. Ruxandra Lasowski

---

Hochschule Furtwangen University  
Fakultät Digitale Medien  
Sommersemester 2017

---

**Hinweis:**

Dass Lösungen zu den Übungsblättern ausgearbeitet und Studierenden zur Verfügung gestellt werden, versteht sich als zusätzliches und freiwilliges *Service*-Angebot. Trotz größtmöglicher Sorgfalt beim Erstellen und bei der Korrektur der Lösungen kann keine Gewähr für Fehlerfreiheit übernommen werden. In Zweifelsfällen sind Studierende gehalten, unmittelbar Verbindung mit dem/den Dozenten der Lehrveranstaltungen *Mathematik und Simulation*, *Mathematische Grundlagen von Computergrafik und Gestaltung* bzw. *Geometrische und statistische Modellierung* aufzunehmen.

Die Musterlösungen sind nur für die Hörerinnen und Hörer dieser Lehrveranstaltungen bestimmt. Sie dürfen weder ganz noch auszugsweise veröffentlicht oder an Dritte weitergegeben werden. Dies betrifft insbesondere die Veröffentlichung auf sozialen Netzwerken oder Plattformen (FELIX, fuugle, etc.) sowie die Weitergabe des Dokuments in gedruckter oder digitaler Form (über Cloud-Dienste, Messenger oder sonstige Systeme). Das Recht zur Veröffentlichung liegt bei den Dozenten Prof. Dr. Ruxandra Lasowski und Prof. Dr. Thomas Schneider.

# Inhaltsverzeichnis

## I MKB – Mathematische Grundlagen von Computergrafik und Gestaltung 1

### Übungseinheit 3 3

P5	Analyse einiger Kavalierprojektionen . . . . .	11
P6	Fortsetzung der Analyse – Projektion auf verschiedene Ebenen . . . . .	11
P7	Kuboktaeder . . . . .	11
H3	Castellum . . . . .	13
H4	Dynamische veränderbare Darstellungen mit Geogebra . . . . .	14
T1	Parallelprojektionen in die Aufrissebene . . . . .	14
T2	Parallelprojektionen in die Aufrissebene . . . . .	17
T3	Parallelprojektionen in die Aufrissebene . . . . .	18
T4	Parallelprojektionen in die Aufrissebene . . . . .	20

### Übungseinheit 7 23

P12	Berechnung einer Parallelprojektion- Schrägprojektion . . . . .	26
H17	Ergänzung zur Aufgabe P12 . . . . .	35
H18	Orthogonale isometrische Parallelprojektion . . . . .	35



## **Teil I**

# **MKB – Mathematische Grundlagen von Computergrafik und Gestaltung**



## Übungseinheit 3

## Präsenzübungen

### Aufgabe P 5. Analyse einiger Kavalierprojektionen

**Untersuchen Sie** einige spezielle Kavalierprojektionen (siehe Tafel). Die Bildebene ist jeweils die  $x_2$ - $x_3$ -Ebene. Die Projektionsrichtung liegt immer in derjenigen Ebene, welche die  $x_1$ -Achse enthält und den Winkel zwischen der  $x_2$ -Achse und der  $x_3$ -Achse halbiert. Diese Ebene ist durch die Gleichung  $x_2 = x_3$  gegeben. Im Folgenden bezeichne  $E'_1$  stets den Schnittpunkt der durch  $E_1$  verlaufenden Projektionsgeraden mit der Bildebene. Bei den hier untersuchten Parallelprojektionen ergibt sich stets  $\alpha = 45^\circ$ , der Skalierungsfaktor  $s_1$  variiert je nachdem, wie flach oder steil die Projektionsrichtung gewählt wird.

- (a) Die Projektionsrichtung sei um  $45^\circ$  zur  $x_2$ - $x_3$ -Ebene geneigt. Bestimmen Sie die Länge der Strecke  $s_1 = \overline{OE'_1}$ .
- (b) Die Projektionsgerade habe die Steigung  $m_2 = \frac{2}{1}$ . Bestimmen Sie die Länge der Strecke  $s_1 = \overline{OE'_1}$  sowie den Neigungswinkel  $\delta_2$  der Projektionsgeraden zur  $x_2$ - $x_3$ -Ebene.
- (c) Die Projektionsgerade habe die Steigung  $m_3 = \frac{1}{2}$ . Bestimmen Sie die Länge der Strecke  $s_1 = \overline{OE'_1}$  sowie den Neigungswinkel  $\delta_3$  der Projektionsgeraden zur  $x_2$ - $x_3$ -Ebene.
- (d) In der Schule haben Sie zur Darstellung räumlicher Objekte möglicherweise immer wieder eine Axonometrie verwendet, bei der  $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  und  $\alpha = 45^\circ$  galt. Welchen Neigungswinkel  $\delta$  muss die Projektionsgerade zur  $x_2$ - $x_3$ -Ebene haben, damit sich  $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ergibt?

### Aufgabe P 6. Fortsetzung der Analyse – Projektion auf verschiedene Ebenen

- (a) Die Bildebene werden nun so „tiefergelegt“, dass sie **parallel zur**  $x_2$ - $x_3$ -Ebene ist und den Punkt  $(-1, 0, 0)$  enthält. Untersuchen Sie, wie die Punkte  $O$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  projiziert werden, wenn die Projektionsrichtung so ist wie in der ersten Teilaufgabe von P 5. Sind die Skalierungsfaktoren  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$  gegenüber P 5 verändert?
- (b) Was verändert sich, wenn Sie die Bildebene  $\pi$  um eine weitere Längeneinheit „tieferlegen“, so dass sie den Punkt  $(-2, 0, 0)$  enthält.
- (c) Wiederholen Sie diese Analyse für die Projektionsrichtungen, die in den übrigen Teilaufgaben von P 5 angegeben sind.
- (d) Versuchen Sie einen Ergebnissatz zu formulieren, der die von Ihnen beobachteten Sachverhalte bei Parallelprojektionen zusammenfasst:

*Wenn man bei gegebenem räumlichen Dreibein  $(O; E_1, E_2, E_3)$  und gegebener Projektionsrichtung unterschiedliche zueinander parallel liegende Bildebenen wählt, so verändert sich zwar die Lage ..., die ... bleiben jedoch unverändert.*



**Aufgabe P 7. Kuboktaeder**

Die Einheitslänge in dieser Aufgabe sei 10 cm. Zeichnen Sie einen Würfel mit Einheitskantenlänge 10 cm in einer Kavalierprojektion. Um Überdeckungen hinten liegender Kanten durch vordere Kanten möglichst zu vermeiden, können Sie zum Beispiel  $\overrightarrow{OE_1} = \begin{pmatrix} 2 \text{ cm} \\ 4 \text{ cm} \end{pmatrix}$  oder auch  $\overrightarrow{OE_1} = \begin{pmatrix} 4 \text{ cm} \\ 2 \text{ cm} \end{pmatrix}$  wählen.

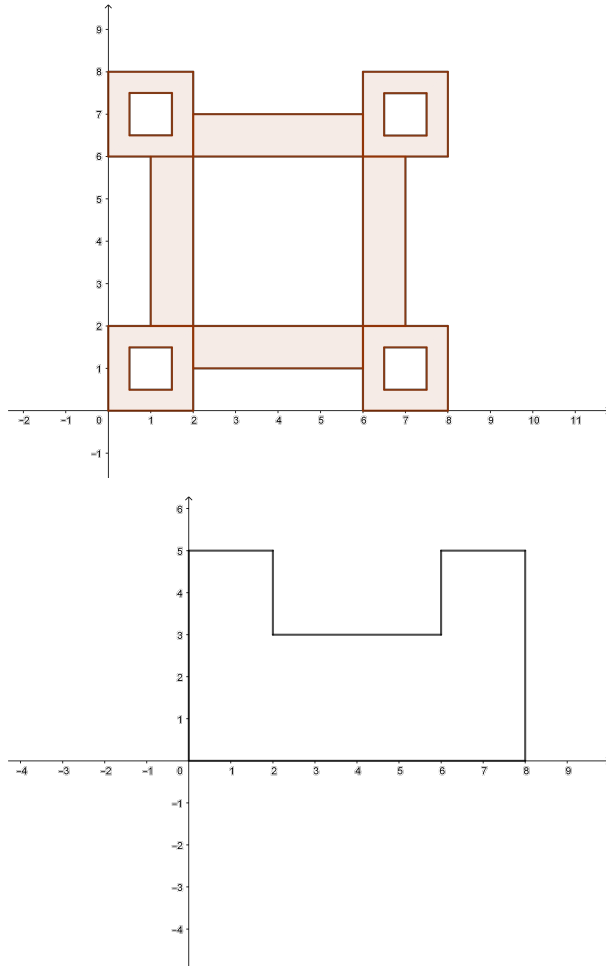
- (a) Wie groß ist dann der Skalierungsfaktor  $s_1$ ?
- (b) „**Schneiden Sie**“ die acht Ecken des Würfels durch Ebenen „ab“, welche die von den Ecken ausgehenden Kanten halbieren. Wieviele Flächen, Ecken und Kanten besitzt der so entstehende Kuboktaeder?
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl  $e$  der Ecken, die Anzahl  $f$  der Flächen und die Anzahl  $k$  der Kanten **für den Würfel**.
- (d) Überprüfen Sie, ob die Anzahl  $e$  der Ecken, die Anzahl  $f$  der Flächen und die Anzahl  $k$  der Kanten **für den Kuboktaeder** die Eulersche Polyederformel erfüllt:

$$e - k + f = 2.$$

## Hausübungen

### Aufgabe H 3. *Castellum*

Im Folgenden sind der Grundriss sowie der Aufriss eines Castells gegeben. Fertigen Sie hieraus eine parallelperspektivische Darstellung in Militärperspektive an.



### Aufgabe H 4. *Dynamische veränderbare Darstellungen mit Geogebra*

Versuchen Sie mit Geogebra eine Datei zur parallelperspektivischen Darstellung des Kuboktaeders von Aufgabe P 7 zu erstellen, die es Ihnen ermöglicht, die axonometrischen Angaben interaktiv zu verändern. Sie können sich der „Schieberegler“ bedienen, die Geogebra zur Verfügung stellt.

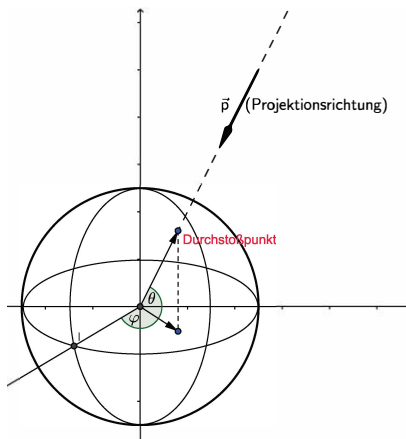
## Tutoriumsübungen

### Aufgabe T 1. Parallelprojektionen in die Aufrissebene

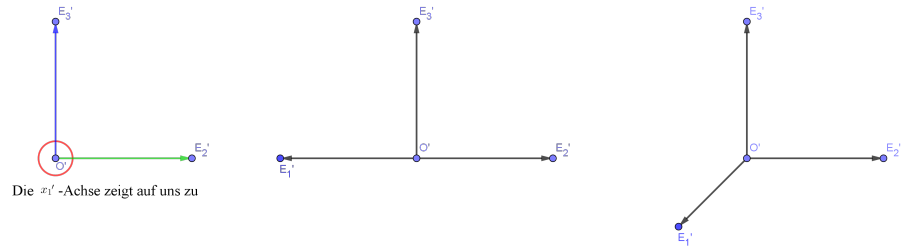
- (a) Zeichnen Sie einen Pyramidenstumpf mit quadratischem Grundriss (die Kantenlänge dürfen Sie wählen), dessen Spitze im Punkte  $S = (0, 0, 5)$  liegt. Der Boden des Pyramidenstumpfs liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene, der Deckel 3 Einheiten darüber. Verwenden Sie hierzu
- die Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben  $\alpha = 135^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $s_2 = 1$  und  $s_3 = 1$ .
  - die Militärprojektion mit den Angaben  $\alpha = 135^\circ$ ,  $\beta = 135^\circ$ ,  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 1$  und  $s_3 = \frac{1}{2}$ .
- (b) Zeichnen Sie separat einen Grundriss des Pyramidenstumpfbodens. Fügen Sie zum Grundrissquadrat einen Inkreis hinzu. Markieren Sie die Punkte, an denen der Kreis das Quadrat berührt.
- (c) Fügen Sie nun zu Ihren zuvor angefertigten parallelperspektivischen Darstellungen die Projektionsbilder des o.g. Kreises hinzu. *Hinweis: Dieser Kreis erscheint als Ellipse, die Berührungspunkte mit dem Bild des Grundrissquadrats werden „richtig“ übertragen.*
- (d) Zeichnen Sie nun in einer Ihrer zuvor angefertigten Darstellungen einen Kegelstumpf ein, der nach oben bzw. unten vom Deckel bzw. vom Boden des Pyramidenstumpfes begrenzt wird.

### Aufgabe T 2. Parallelprojektionen in die Aufrissebene

Wir wollen ebene Dreibeine  $(O', E'_1, E'_2, E'_3)$  untersuchen, die durch Projektion eines kartesischen räumlichen Dreibeins  $(O, E_1, E_2, E_3)$  auf die  $x_2$ - $x_3$ -Ebene entstehen. Im projizierten Bild zeigt die  $x'_2$ -Achse jeweils nach rechts, die  $x'_3$ -Achse nach oben. Um die Projektionsrichtung im Raum anzugeben, verwenden wir „geographische Koordinaten“, d.h. den Längengrad  $\varphi$  und den Breitengrad  $\theta$  des Durchstoßpunktes der Projektionsgeraden durch die im Ursprung zentrierte Einheitskugel (vgl. die Skizze).



- (a) Beschreiben Sie, welche Parallelprojektionen das räumliche Dreibein jeweils auf die folgenden ebenen Dreibeine abbilden.



**Aufgabe T 3.** *Günstige und weniger günstige Parallelperspektiven*

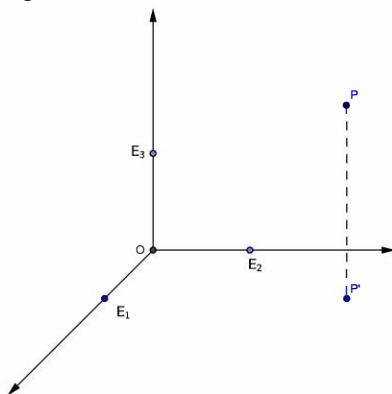
- (a) Skizzieren Sie einen achsenparallelen Quader mit Breite 2, Höhe 1 und Tiefe 3, dessen linke hintere untere Ecke am Punkt  $(0, 2, 0)$  liegt. Verwenden Sie hierzu die Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben

$$\alpha = 135^\circ, \beta = 90^\circ, s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, s_2 = 1, s_3 = 1.$$

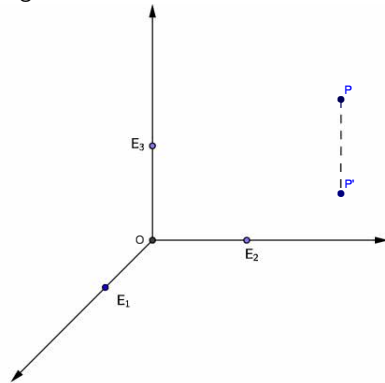
- (b) Skizzieren Sie den Quader nun in Kavalierprojektion mit den axonometrischen Angaben  $\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 1$ . Ist dies in punkte Anschaulichkeit eine günstige Projektion?

**Aufgabe T 4.** *Koordinatenquader – Koordinatenbestimmung*

Übertragen Sie die folgende Figur auf Ihr Papier, zeichnen Sie den Koordinatenquader von P und lesen Sie die Koordinaten des Punktes P ab. Der eingezeichnete Punkt P' soll in der Grundrissebene liegen.



Übertragen Sie die folgende Figur auf Ihr Papier, zeichnen Sie den Koordinatenquader von P und lesen Sie die Koordinaten des Punktes P ab. Der eingezeichnete Punkt P' soll in der Grundrissebene liegen.

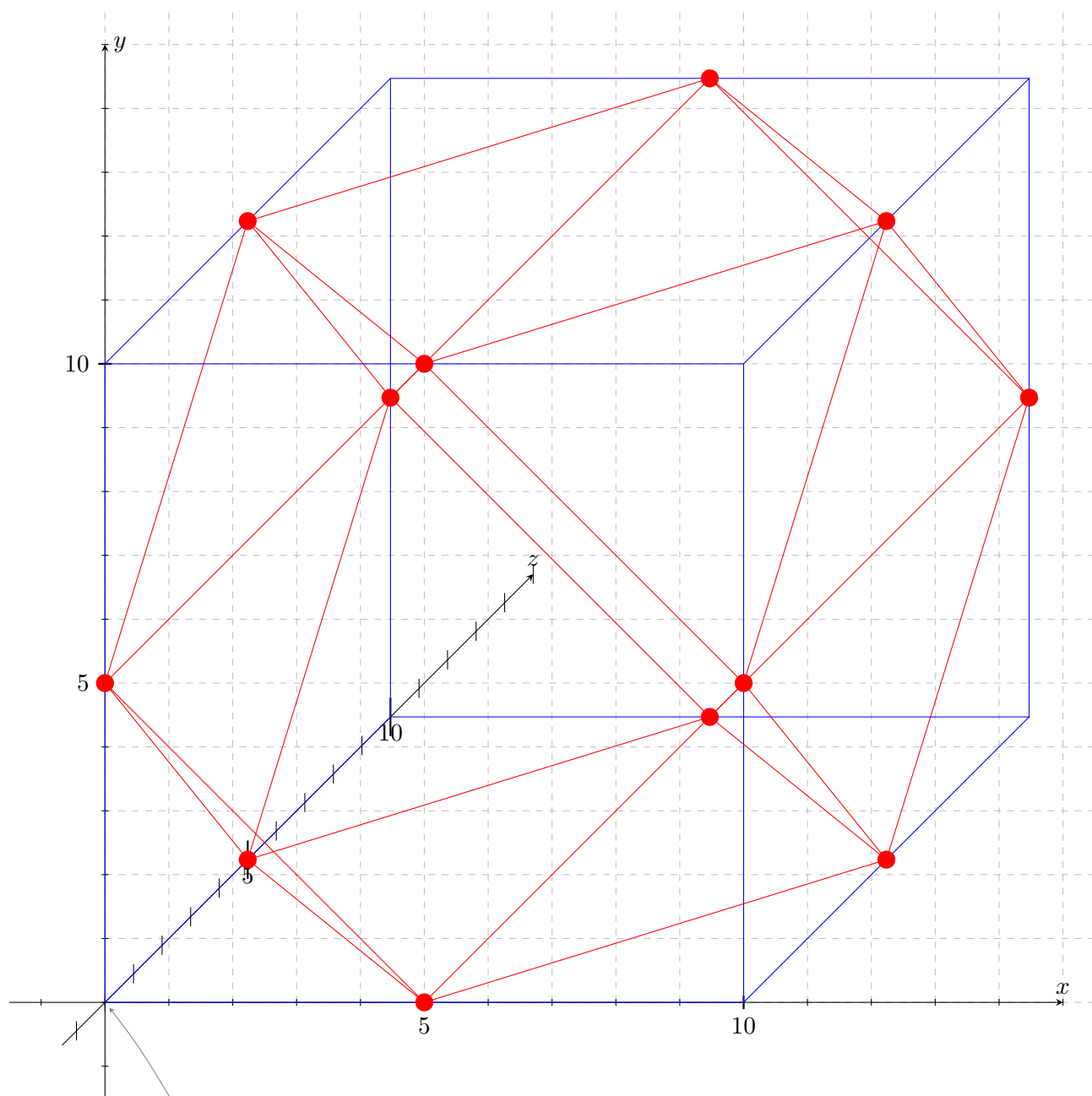


---

## P5 Analyse einiger Kavalierprojektionen

## P6 Fortsetzung der Analyse – Projektion auf verschiedene Ebenen

## P7 Kuboktaeder



---

**Kuboktaeder:**

Ecken( $e$ ): 12

Kanten( $k$ ): 24

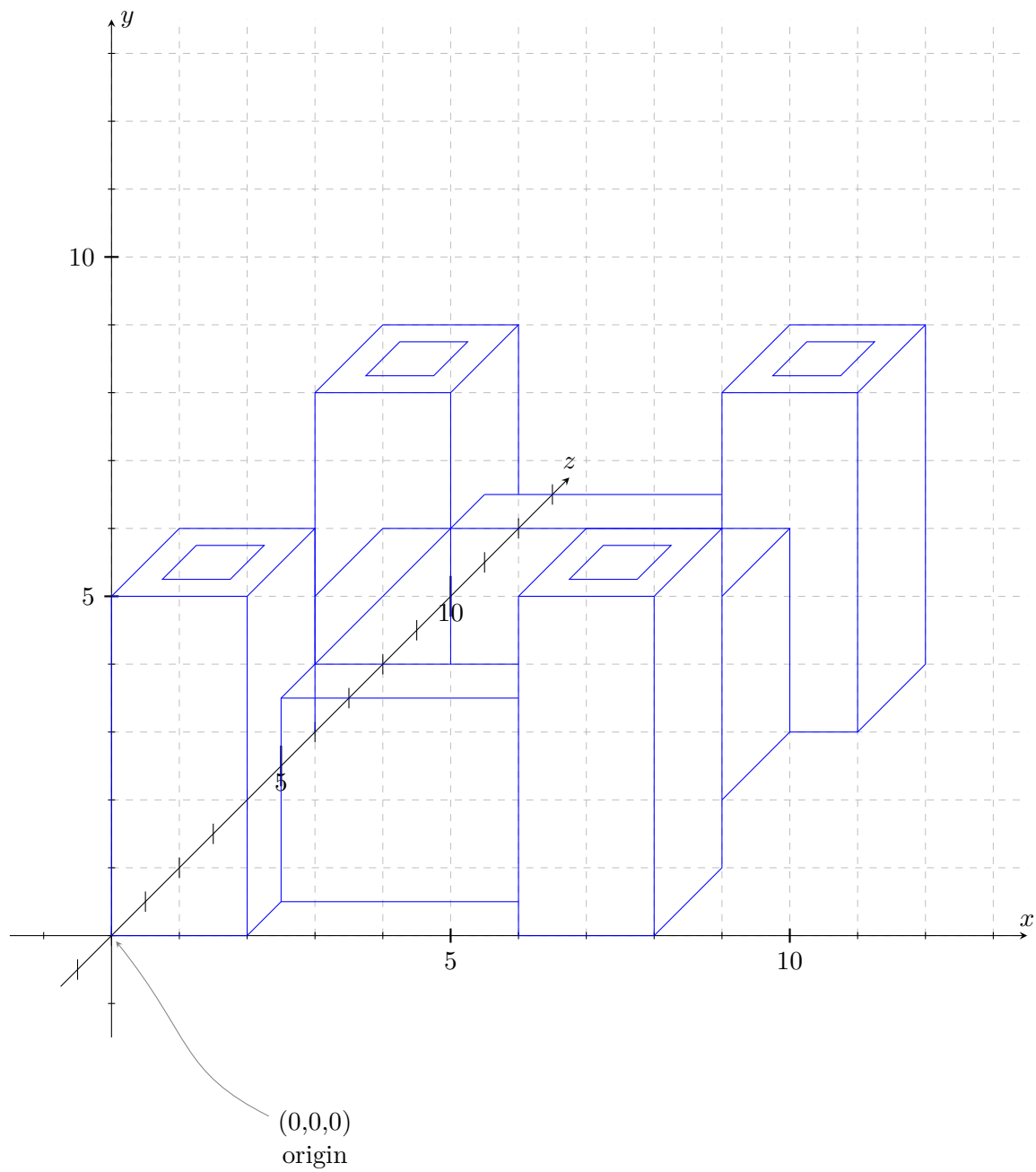
Flächen( $f$ ): 14

Die eulersche Polyederformel lautet:  $e - k + f = 2$ . Wenn man die Werte für die Ecken, Kanten und Flächen des Kuboktaeder einsetzt bekommt man:  $12 - 24 + 14 = 2$ . Daraus erschließt sich, dass die eulersche Polyederformel erfüllt ist.



---

### H3 Castellum



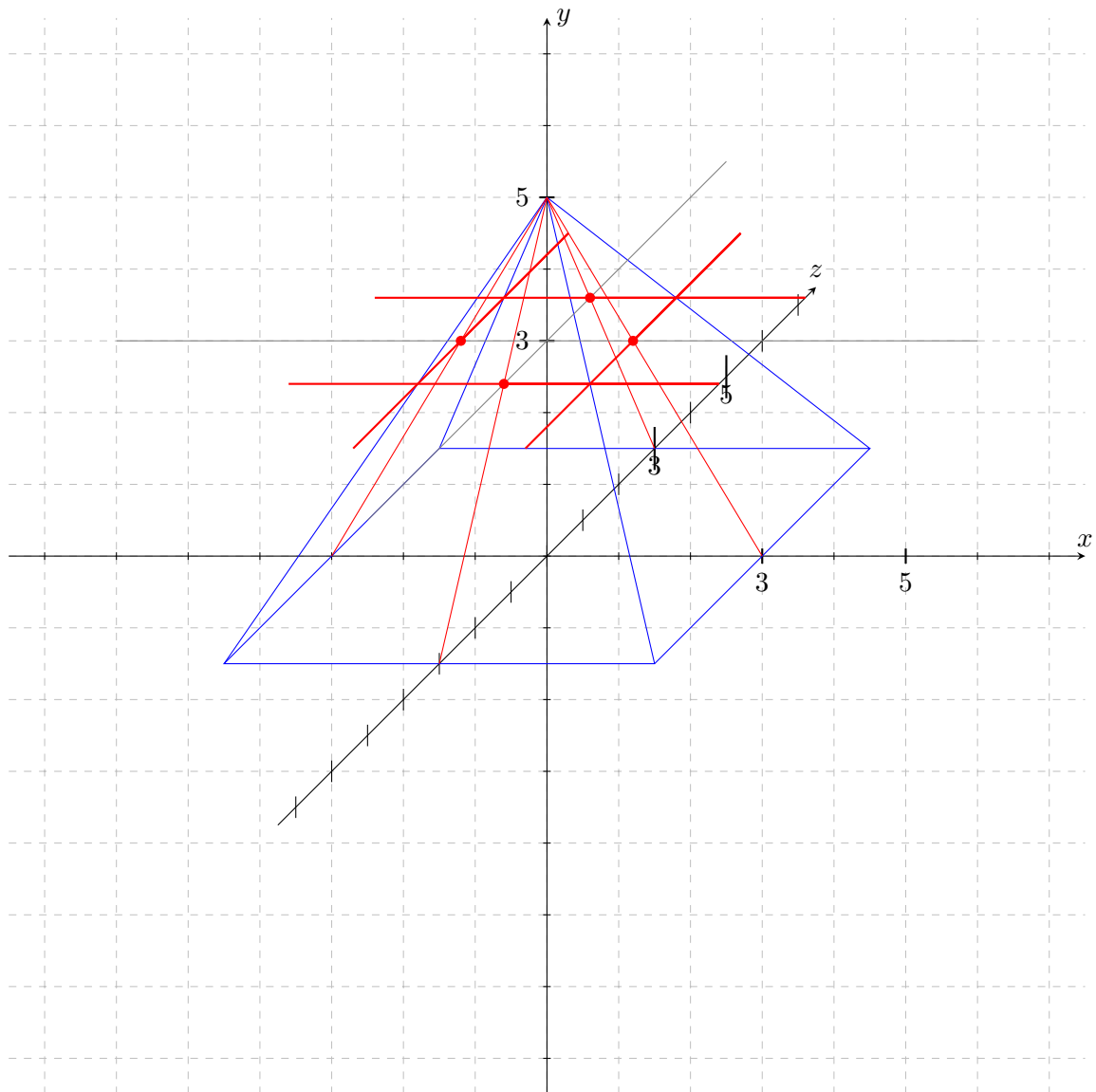
---

## H4 Dynamische veränderbare Darstellungen mit Geogebra

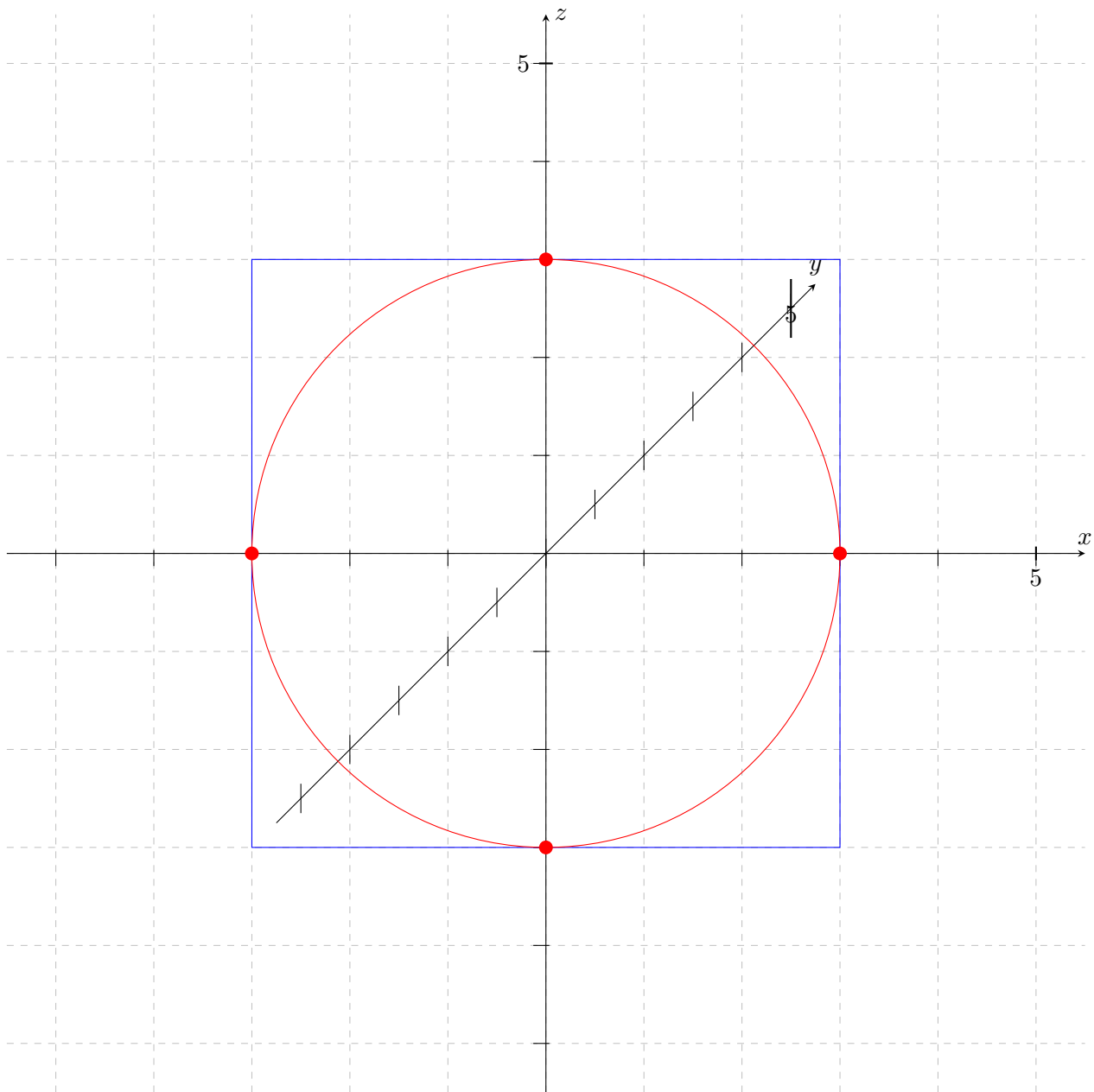
aiohsogihaoihroighaeorhg

### T1 Parallelprojektionen in die Aufrissebene

a)

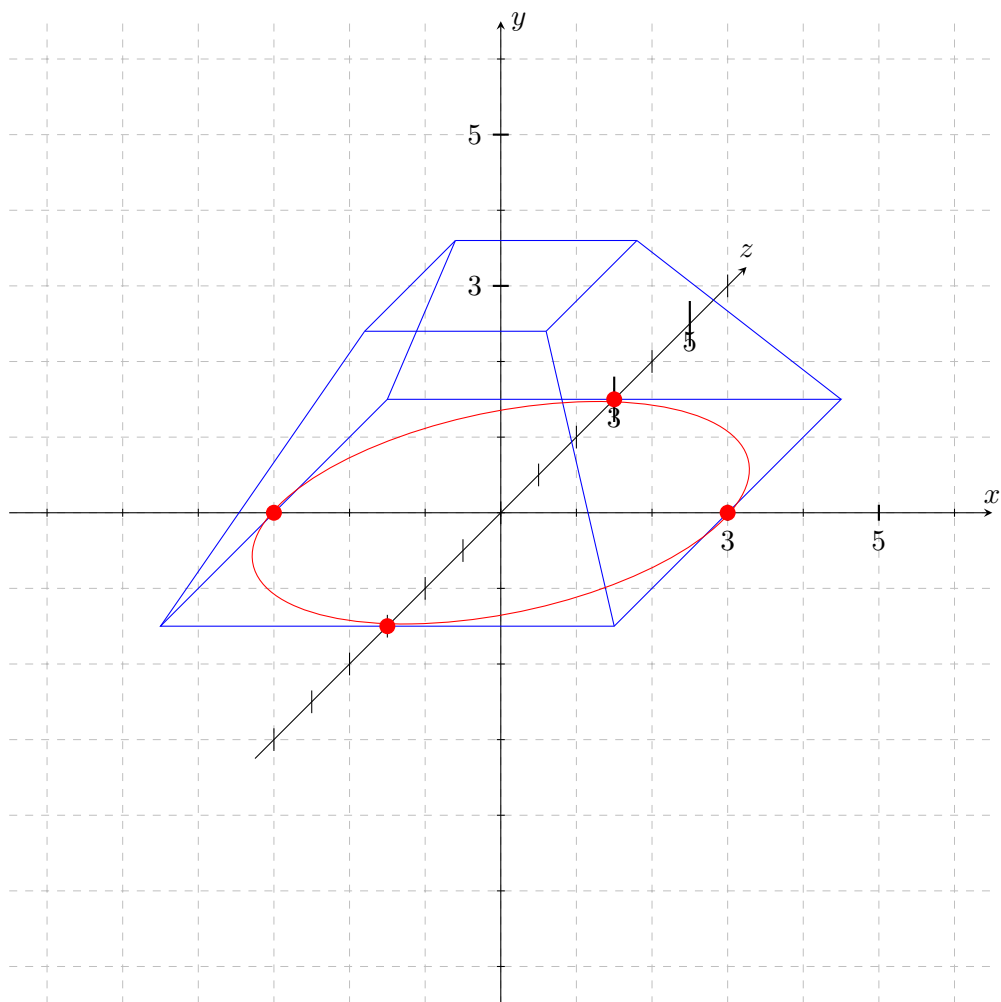


b)

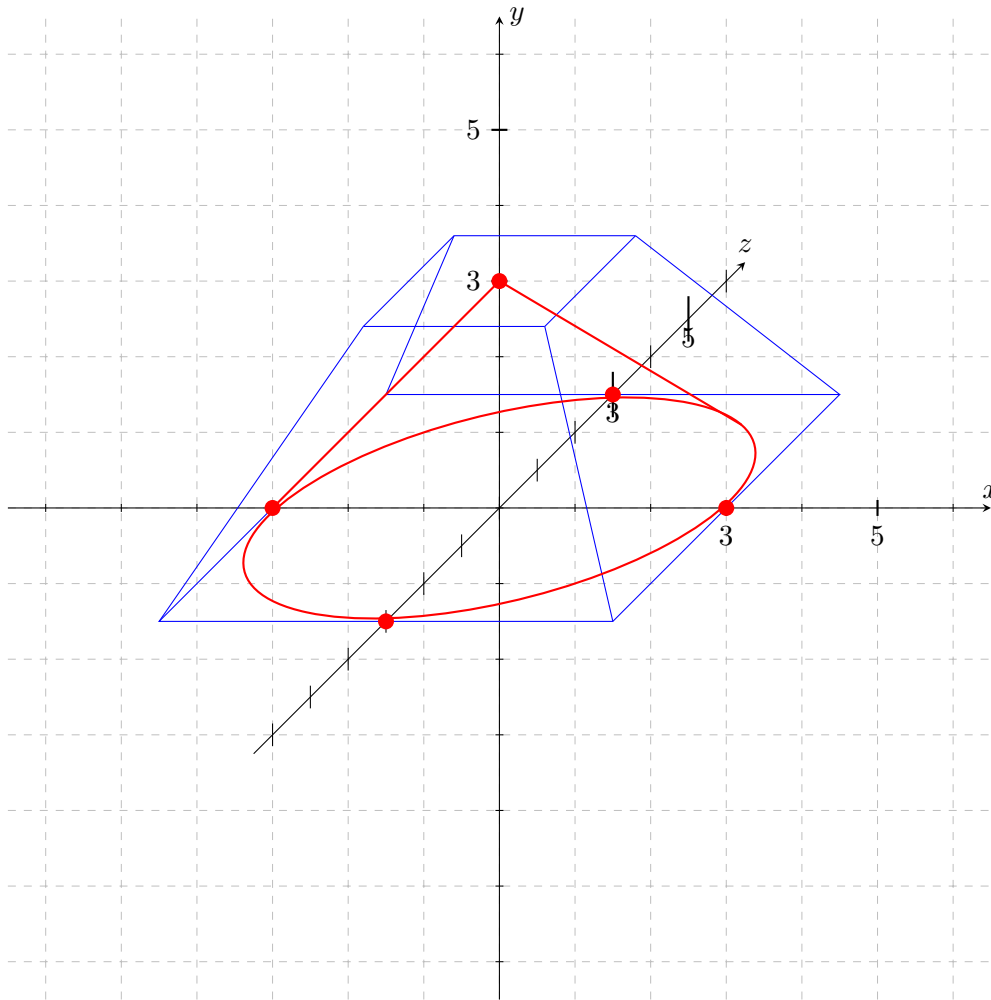


---

c)



d)



## T2 Parallelprojektionen in die Aufrissebene

a)

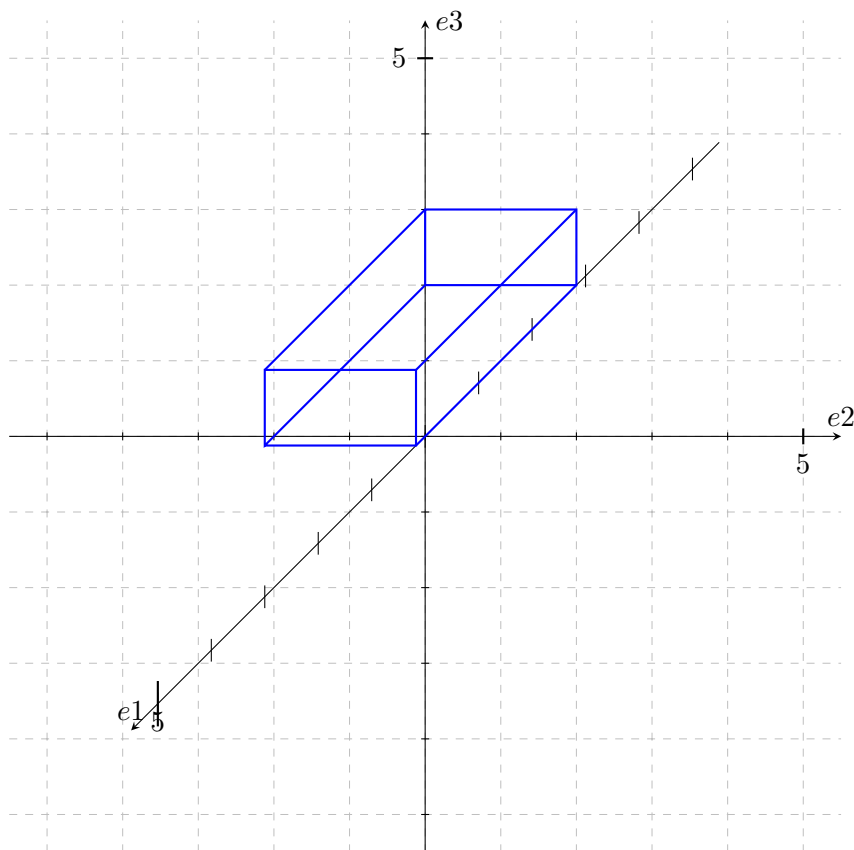
Bild 1:  $\theta = 0^\circ$   $\phi = 0^\circ$

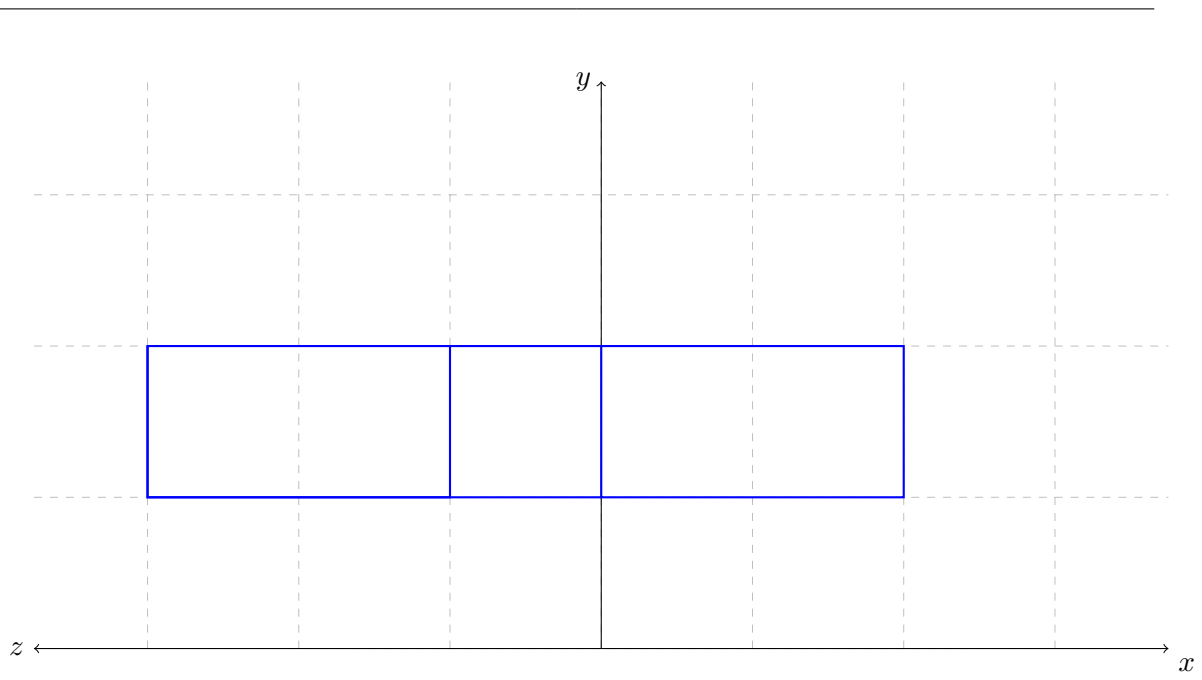
Bild 2:  $\theta = 0^\circ$   $\phi = 90^\circ$

Bild 3:  $\theta = 45^\circ$   $\phi = 90^\circ$

---

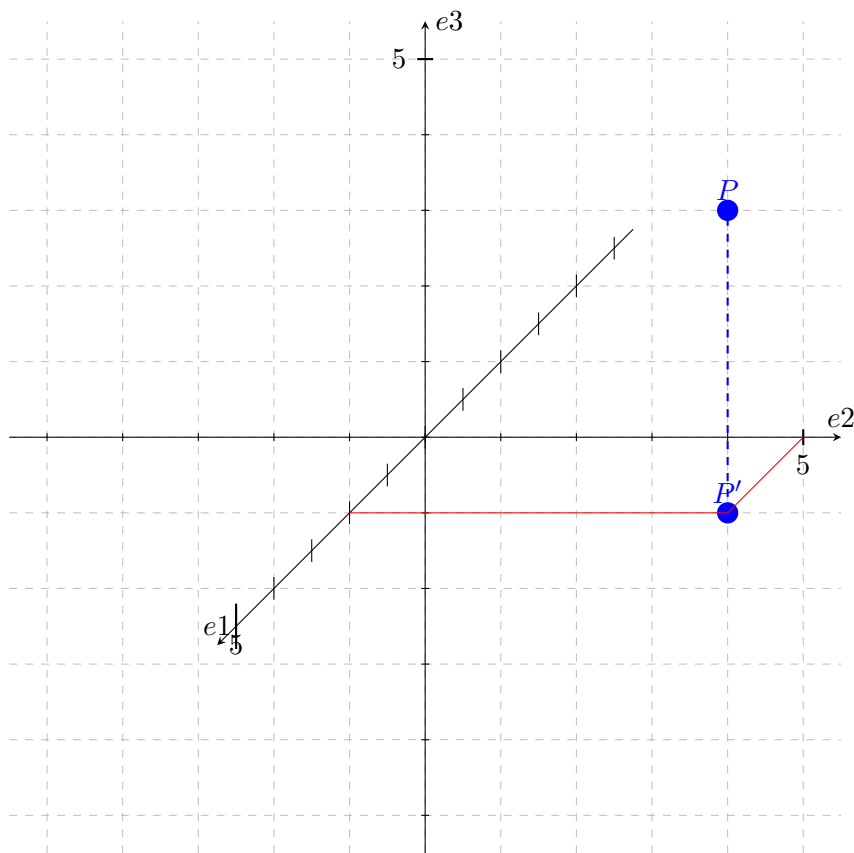
## T3 Parallelprojektionen in die Aufrissebene





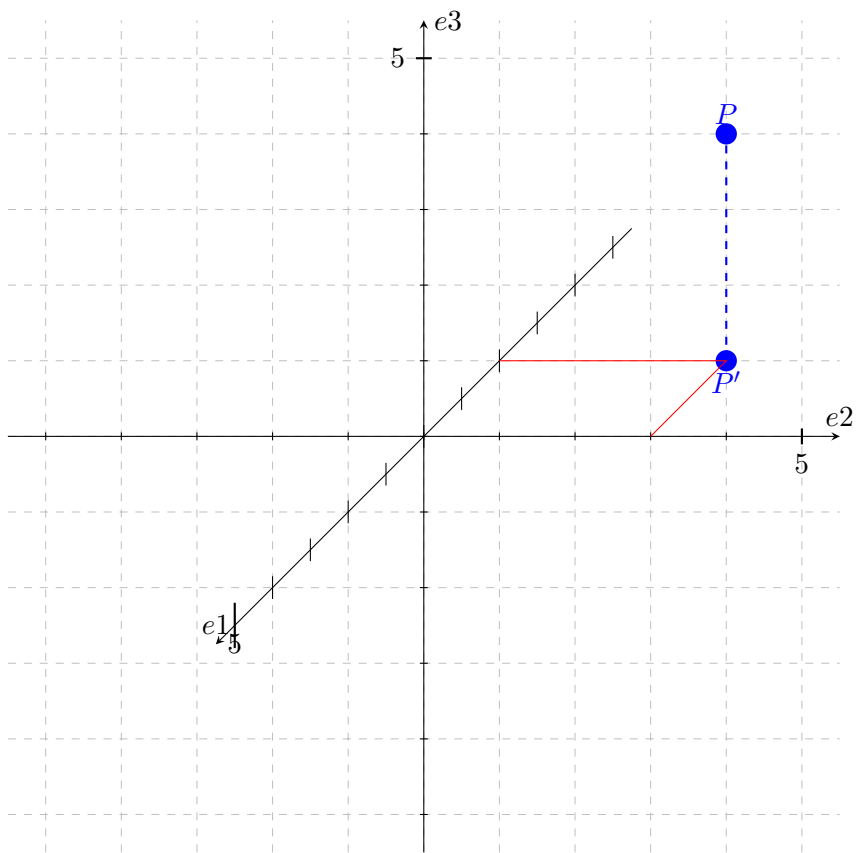
---

## T4 Parallelprojektionen in die Aufrissebene



$$P = (5, 4, 2);$$





$$P = (3, 3, -2)$$



## Übungseinheit 7

## Präsenzübungen

Mit unseren Werkzeugen aus der Analytischen Geometrie sind wir nun in der Lage, Parallelprojektionen zu berechnen. Was das im Einzelnen heißen soll, wird nun erklärt:

- Zur Spezifikation einer Parallelprojektion wird zunächst eine **Bildebene**  $B$  festgelegt, z.B. durch eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) der Form  $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ .
- Zweitens wird ein Richtungsvektor  $\vec{r}$  festgelegt, der die Projektionsrichtung(en)<sup>‡</sup> spezifiziert.
- Wenn  $A$  ein Punkt im Raum mit Ortsvektor  $\vec{a}$  ist, so erhält man dessen Projektionsbild  $A'$ , in der Bildebene indem man den Schnittpunkt derjenigen (Projektions-)Geraden  $g_A$ , die durch  $A$  verläuft und  $\vec{r}$  als Richtungsvektor hat, mit der Bildebene bestimmt:  $A' = g_A \cap B$ .
- Für jeden Raumpunkt  $A$  müssen wir eine eigene Parametergleichung  $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{r}$  für die entsprechende Projektionsgerade  $g_A$  aufstellen.
- Um nun zu einem gegebenen Raumpunkt  $A$  den Bildpunkt  $A'$  zu berechnen, setzt man den Ausdruck  $\vec{a} + t\vec{r}$  anstelle von  $\vec{x}$  in die HNG  $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$  der Bildebene  $B$  ein. Die sich ergebende Gleichung

$$\vec{n} \cdot (\vec{a} + t\vec{r} - \vec{p}) = 0$$

löst man nach  $t$  auf, den so gefundenen Wert  $t^*$  setzt man in die Parametergleichung der Geraden ein und erhält

$$\vec{a}' = \vec{a} + t^*\vec{r}.$$

### Aufgabe P 12. Berechnung einer Parallelprojektion – Schrägprojektion

Im Folgenden wollen wir die Kavalier- oder Kabinettprojektion betrachten, die sich ergibt, wenn man als Bildebene die  $x_2$ - $x_3$ -Koordinatenebene und als Richtungsvektor für die Projektionsgeraden den Vektor  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  verwendet.

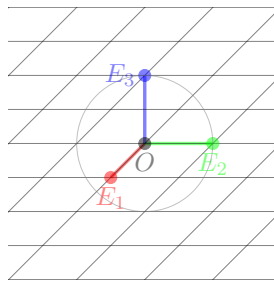
- Bestimmen Sie** eine Hesse'sche Normalengleichung für die  $x_2$ - $x_3$ -Koordinatenebene. Diese enthält u.a. den Koordinatenursprung  $O = (0, 0, 0)$  sowie die Punkte  $E_2 = (0, 1, 0)$  und  $E_3 = (0, 0, 1)$ .
- Berechnen Sie** die Projektionsbilder  $O'$ ,  $E'_1$ ,  $E'_2$  und  $E'_3$  der Punkte  $O$ ,  $E_1 = (1, 0, 0)$ ,  $E_2$  und  $E_3$ .
- Zeichnen Sie** die Punkte  $O'$ ,  $E'_1$ ,  $E'_2$  und  $E'_3$ .
- Bestimmen Sie** die axonometrischen Angaben  $s_1 = \|\overrightarrow{O'E'_1}\|$ ,  $s_2 = \|\overrightarrow{O'E'_2}\|$ ,  $s_3 = \|\overrightarrow{O'E'_3}\|$  sowie  $\alpha = \angle(\overrightarrow{O'E'_1}, \overrightarrow{O'E'_3})$  und  $\beta = \angle(\overrightarrow{O'E'_2}, \overrightarrow{O'E'_3})$  für diese Parallelprojektion.
- Berechnen Sie** die Projektionsbilder der Punkte  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ ,  $C = (0, 1, 1)$  und  $D = (1, 1, 1)$ .
- Ergänzen Sie Ihre Skizze aus Teilaufgabe (c) um die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  und  $D'$ . Vervollständigen Sie das Projektionsbild des Einheitswürfels mit den noch fehlenden Kanten.

<sup>‡</sup> Die tatsächlich verwendete Projektionsrichtung ist entweder gleich der Richtung von  $\vec{r}$  oder von  $-\vec{r}$ . Wenn man ganz präzise formulieren möchte, müsste man sagen, dass der Richtungsvektor  $\vec{r}$  die **Parallelklasse** festlegt, der alle Projektionsgeraden angehören.

## Hausübungen

### Aufgabe H 17. Ergänzungen zur Aufgabe P 12

- (a) Diskutieren Sie, was sich gegenüber der vorigen Aufgabe verändert, wenn Sie als Bildebene nicht die  $x_2$ - $x_3$ -Koordinatenebene, sondern die hierzu parallele Ebene mit der Gleichung  $x_1 = -2$  verwenden.
- (b) Die Parallelprojektion der vorigen Aufgabe hat u.a. den Nachteil, dass das Projektionsbild des Einheitswürfels für unser Auge eher wie ein Quader wirkt. Welchen Richtungsvektor für die Projektionsgeraden müssen Sie wählen, damit sich bei gleichbleibendem Winkel  $\alpha = 45^\circ$  der Skalierungsfaktor  $s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ergibt



### Aufgabe H 18. Orthogonale isometrische Parallelprojektion

Wir betrachten nun die Parallelprojektion auf die Bildebene  $B$ , welche die Punkte  $E_1 = (1, 0, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1, 0)$  und  $E_3 = (0, 0, 1)$  enthält. Als Richtungsvektor für die Projektionsgeraden wählen wir  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) **Bestimmen Sie** einen Normalenvektor  $\vec{n}$  für die Bildebene. Falls Sie einen solchen nicht direkt „erraten“ können, setzen Sie  $\vec{u} := \overrightarrow{E_2 E_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} := \overrightarrow{E_2 E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und berechnen Sie das Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

- (b) **Bestimmen Sie** die Projektionsbilder der Punkte  $E_1 = (1, 0, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1, 0)$  und  $E_3 = (0, 0, 1)$  und **berechnen Sie** das Projektionsbild des Punktes  $O$ .
- (c) **Berechnen Sie** die Längen der Strecken  $\overline{O' E'_1}$ ,  $\overline{O' E'_2}$  und  $\overline{O' E'_3}$ .

*Hinweis: Damit haben Sie die Skalierungsfaktoren  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$  bestimmt.*

---

## P12 Berechnung einer Parallelprojektion- Schrägprojektion

a)

$$O = (0, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1)$$

Berechnung der Richtungsvektoren  $\overline{OE_2}$  und  $\overline{OE_3}$

$$\overline{OE_2} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

$$\overline{OE_3} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

Aufstellen der Hesse'schen Normalengleichung

$$\vec{n}_0 \cdot [\vec{x} - \vec{p}] = 0 \quad (0.3)$$

$$\vec{n}_0 = \overline{OE_2} \times \overline{OE_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.4)$$

$$\vec{n}_0 \cdot [\vec{x} - \vec{p}] = 0 \quad (0.5)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.6)$$

Aufpunkt  $\vec{p}$  kann hierbei sowohl  $E_2 = (0, 1, 0)$  als auch  $E_3 = (0, 0, 1)$  sein.

b) Richtungsvektor der Projektionsgeraden  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_1 = (1, 0, 0)$

Für jeden Punkt  $O, E_1, E_2, E_3$  muss eine Parametergleichung der Form  $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{r}$  aufgestellt werden.

---


$$O := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.7)$$

$$E_1 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.8)$$

$$E_2 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.9)$$

$$E_3 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.10)$$

Diese Parametergleichungen werden nun in der Hesse'schen Normalform der Ebene anstelle von  $\vec{x}$  eingesetzt.

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.11)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.12)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.13)$$

$$0 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.14)$$

$$\leadsto t = 0 \quad (0.15)$$

$t$  einsetzen in  $O := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$O' := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leadsto \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.16)$$

---

Für  $E_1$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.17)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.18)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.19)$$

$$1 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.20)$$

$$\leadsto t = -1 \quad (0.21)$$

$$t \text{ einsetzen in } E_1 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E'_1 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leadsto \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (0.22)$$

Für  $E_2$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.23)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.24)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.25)$$

$$0 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.26)$$

$$\leadsto t = 0 \quad (0.27)$$



---


$$t \text{ einsetzen in } E_2 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E'_2 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.28)$$

Für  $E_3$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.29)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.30)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.31)$$

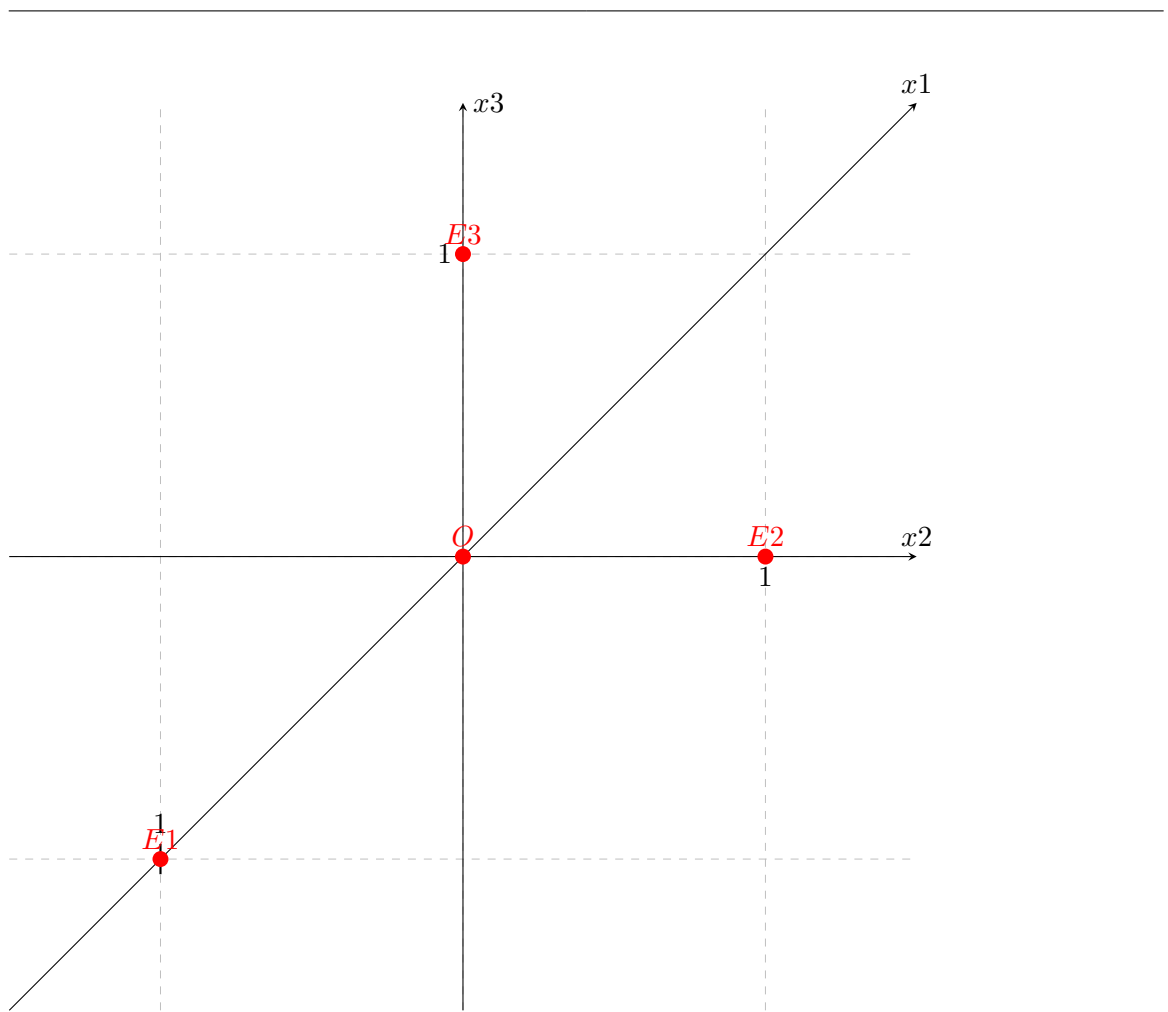
$$0 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.32)$$

$$\rightsquigarrow t = 0 \quad (0.33)$$

$$t \text{ einsetzen in } E_3 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E'_3 := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.34)$$

c)



d)  $s_1 = \|\overrightarrow{OE_1}\|$ ,  $s_2 = \|\overrightarrow{OE_2}\|$ ,  $s_3 = \|\overrightarrow{OE_3}\|$ ,  $\alpha \angle(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_3})$ ,  $\beta \angle(\overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3})$

---


$$s_1 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \rightsquigarrow s_1 = 1 \quad (0.35)$$

$$s_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \rightsquigarrow s_1 = 1 \quad (0.36)$$

$$s_1 = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \rightsquigarrow s_1 = \sqrt{2} \quad (0.37)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OE_1'} \cdot \overrightarrow{OE_3'}}{|\overrightarrow{OE_1'}| \cdot |\overrightarrow{OE_3'}|} \rightsquigarrow \cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot 1} \rightsquigarrow \cos(\alpha) = \frac{0 + 0 - 1}{\sqrt{2}} \quad (0.38)$$

$$\rightsquigarrow \cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ \quad (0.39)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{OE_2'} \cdot \overrightarrow{OE_3'}}{|\overrightarrow{OE_2'}| \cdot |\overrightarrow{OE_3'}|} \rightsquigarrow \cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} \rightsquigarrow \cos(\beta) = \frac{0 + 0 + 0}{1} \quad (0.40)$$

$$\rightsquigarrow \cos^{-1}(0) = 90^\circ \quad (0.41)$$

e)  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ ,  $C = (0, 1, 1)$ ,  $D = (1, 1, 1)$ , Bildebene:  $\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ ,  
 $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , Projektionsrichtung:  $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für jeden Punkt  $A, B, C, D$  muss eine Parametergleichung der Form  $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{r}$  aufgestellt werden.

$$A := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.42)$$

$$B := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.43)$$

$$C := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.44)$$

$$D := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.45)$$

---

Für  $A$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.46)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.47)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.48)$$

$$1 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.49)$$

$$\leadsto t = -1 \quad (0.50)$$

$$t \text{ einsetzen in } A' := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leadsto \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (0.51)$$

Für  $B$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.52)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.53)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.54)$$

$$1 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.55)$$

$$\leadsto t = -1 \quad (0.56)$$

---

$t$  einsetzen in  $B := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$B' := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.57)$$

Für  $C$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.58)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.59)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.60)$$

$$0 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.61)$$

$$\rightsquigarrow t = 0 \quad (0.62)$$

$t$  einsetzen in  $C := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C' := \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.63)$$

---

Für  $D$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{a} + t \cdot \vec{r} - \vec{p}) = 0 \quad (0.64)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (0.65)$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (0.66)$$

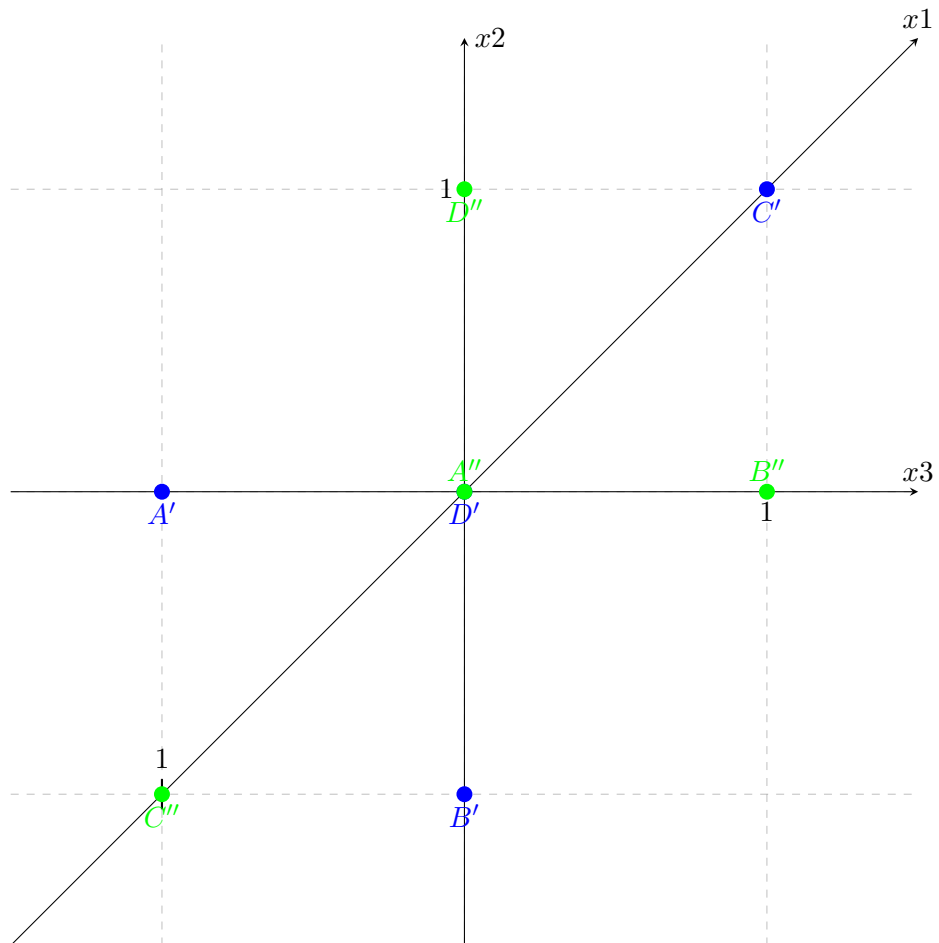
$$1 + 0 + 0 + t + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \quad (0.67)$$

$$\leadsto t = -1 \quad (0.68)$$

$$t \text{ einsetzen in } D := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D' := \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leadsto \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.69)$$

f)



**H17 Ergänzung zur Aufgabe P12**

**H18 Orthogonale isometrische Parallelprojektion**

