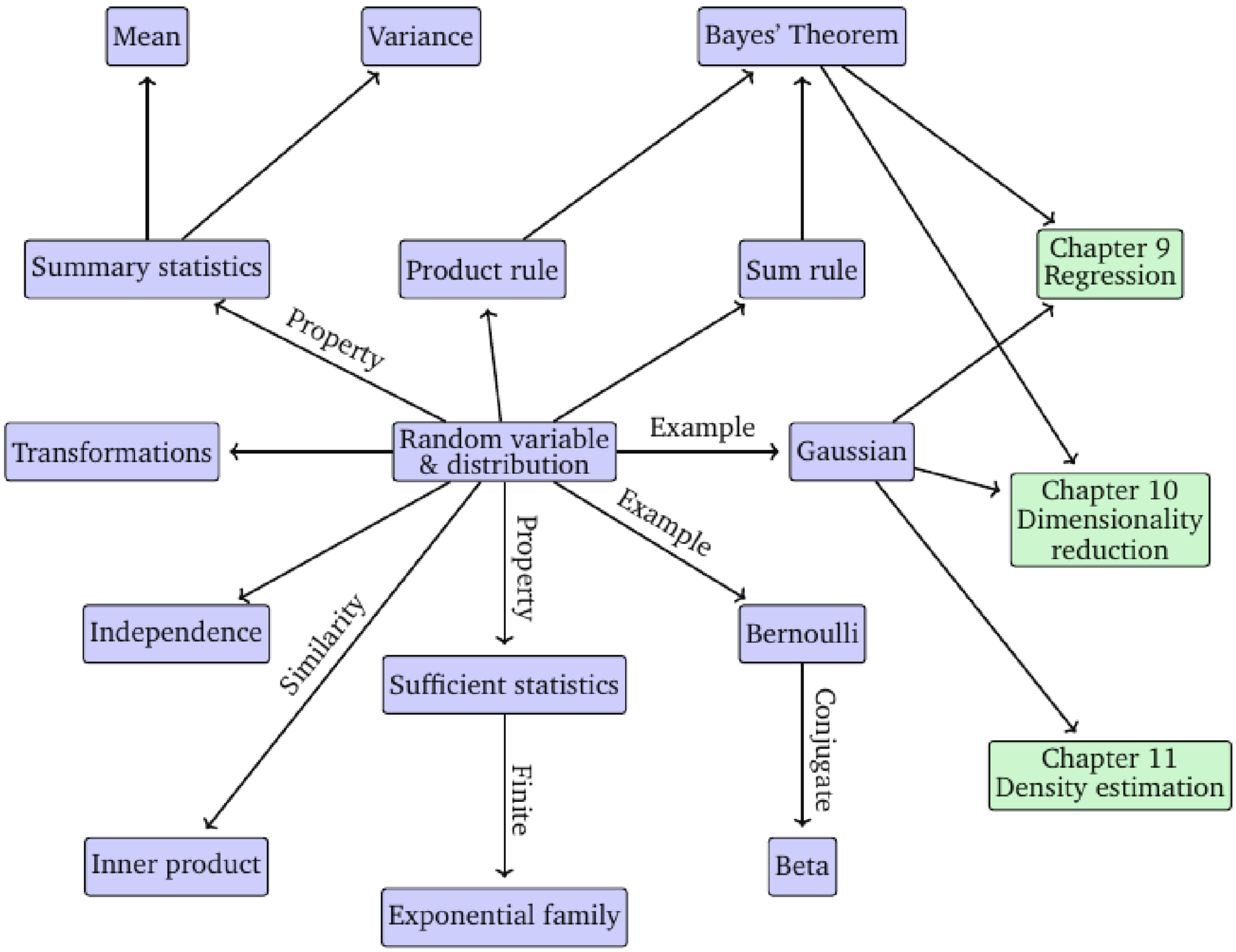
Part 6 - Probability & Distributions



6.1 Construction of a Probability Space

6.1.1 Probabilitas dan Peubah Acak

Sebuah ruang probabilitas (*probability space*) adalah tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dengan:

1. Sample space Ω: himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan acak.
   - Contoh: pada pelemparan koin, $\Omega = \{\text{Head}, \text{Tail}\}$.
2. Event space $(\mathcal{A})$

   Disebut juga *ruang kejadian*. Sebuah subset $A \subseteq \Omega$ dikatakan elemen dari $\mathcal{A}$ apabila setelah percobaan dilakukan, kita dapat *mengamati* apakah hasil $\omega \in \Omega$ tersebut termasuk ke dalam A atau tidak.

   Dengan kata lain: suatu subset masuk ke event space hanya jika ia teramati/terdefinisi secara jelas dalam eksperimen.

- Untuk distribusi diskret, $\mathcal{A}$ seringkali diambil sebagai power set dari Ω, yaitu semua subset yang mungkin.
- Untuk distribusi kontinu, $\mathcal{A}$ biasanya berupa himpunan Borel, karena tidak semua subset dari $\mathbb{R}$ bisa dijadikan event yang "terukur".

3. Probability measure (PP)
   Adalah fungsi yang memberikan probabilitas pada setiap event $A \in \mathcal{A}$, dengan sifat:
   - $P(A) \in [0, 1]$ untuk semua $A \in \mathcal{A}$,
   - $P(\Omega) = 1$,
   - Jika $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ adalah himpunan event yang saling lepas, maka

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Contoh 1: Permainan Funfair dengan Koin

Eksperimen:

- Kita punya sebuah kantong berisi koin USA ($) dan koin UK (£).
- Kita melakukan dua kali pengambilan koin dengan pengembalian (*with replacement*).
- Probabilitas mengambil koin USA ()*dalamsatukaliundianadalah*$0.3.
- Probabilitas mengambil koin UK ($\pounds$) adalah 0.7.

$$\mathit{\Omega} = (\$, \$), (\$, \pounds), (\pounds, \$), (\pounds, \pounds)$$

Misal kita definisikan X sebagai peubah acak yang menotasikan seberapa banyak munculnya $ pada percobaan, maka:

$$\begin{aligned} X((\$, \$)) &= 2 \\ X((\$, \pounds)) &= 1 \\ X((\pounds, \$)) &= 1 \\ X((\pounds, \pounds)) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P((\$,\$)) \\
&= P(\$).\,P(\$) \\
&= (0.3)(0.3) = 0.09 \\
P(X=1) &= P((\$,\pounds) \cup (\pounds,\$)) \\
&= P((\$,\pounds)) + P((\pounds,\$)) \\
&= (0.3)(1-0.3) + (1-0.3)(0.3) = 0.42 \\
P(x=0) &= P((\pounds,\pounds)) \\
&= (1-0.3)(1-0.3) = 0.49
\end{aligned}$$

6.2 Discrete and Continuous Probabilities

Jika *target space* T bersifat diskret (misalnya $\{0,1\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$), maka yang kita tanyakan adalah probabilitas bahwa variabel acak X sama dengan suatu nilai tertentu:

$$P(X=x), \quad x \in T$$

Fungsi $p(x) = P(X=x)$ ini disebut probability mass function (pmf).

Jika *target space* T bersifat kontinu (misalnya $\mathbb{R}$), maka lebih alami berbicara tentang probabilitas bahwa X jatuh dalam suatu interval:

$$P(a \le X \le b), \quad a < b$$

Untuk memudahkan, konvensi yang umum dipakai adalah mendefinisikan cumulative distribution function (cdf):

$$F(x) = P(X \le x)$$

6.2.1 Discrete Probabilities

Contoh 2: Pelemparan Dadu

Untuk variabel acak $X =$ asil lemparan dadu, dan $T = \{1,2,3,4,5,6\}$, maka:

$$p(x) = \frac{1}{6}, \quad \forall x \in T$$

Dalam kasus multivariat, jika kita punya beberapa variabel acak diskret misal $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, maka distribusi gabungan didefinisikan sebagai joint pmf:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

dan memenuhi:

$$\sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} p(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

Peluang marginal: Peluang dari suatu variabel acak tanpa memperhatikan nilai variabel acak yang lain
Peluang kondisional: Peluang dari suatu variabel acak dengan memperhatikan nilai variabel acak yang lain sebagai syarat (misal $P(X|)$)

6.2.2 Continuous Probabilities

Fungsi Kepekatan Peluang/Probability Density Function (pdf)

Suatu fungsi $f : \mathbb{R}^D \to R$ disebut pdf jika memenuhi:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^D : f(x) \geq 0$
2. integralnya ada dan

$$\int_{\mathbb{R}^D} f(x) dx = 1$$

Intuisi: Dalam kasus diskret, integral digantikan dengan sum.
Peluang suatu variabel acak kontinu X berada di interval $[a, b]$ diberikan oleh:

$$\int_a^b f(x) dx$$

yang artinya adalah luas daerah di bawah kurva di antara a dan b. Akibatnya, untuk kasus kontinu nilai peluang di suatu titik $P(X = x) = 0$ karena mengambil $a = b$.

Cumulative Distribution Function (CDF)

fungsi *cdf* dari suatu variabel acak multivariat X dengan $x \in \mathbb{R}^D$ diberikan sebagai:

$$F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_D \leq x_D)$$

di mana $X = [X_1, \ldots, X_D]^T$ dan $x = [x_1, \ldots, x_D]^T$. Juga bisa ditulis sebagai integral dari pdf:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_D} f(z_1, \ldots, z_D) dz_1 \ldots dz_D$$

Yang artinya adalah total area di bawah kurva dari $-\infty$ ke x.

6.3 Sum Rule, Product Rule, and Bayes' Theorem

Sum rule: Jika kita punya dua variabel acak dan , maka probabilitas marjinal dari X bisa diperoleh dengan menjumlahkan (untuk diskrit) atau mengintegralkan (untuk kontinu) probabilitas gabungan

$$p(x) = \begin{cases} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y), & \text{ika diskret} \\ {}_{\mathcal{Y}} p(x, y) dy, & \text{ika kontinu} \end{cases}$$

intuisi: Misal kita melempar koin dan dadu sekaligus, jika kita ingin menghitung total peluang dadu di angka 3 maka kita jumlahkan peluang dadu di angka 3 dengan kepala dan peluang dadu di angka 3 dengan ekor.

Product Rule:

$$P(X,) = P(|X)P(X)$$

intuisi: Misal kita punya 3 kelereng merah (R) dan 5 kelereng biru (B), jika kita ambil satu kelereng, lalu tanpa pengembalian kita ambil lagi 1 kelereng yang lain, berapa peluang $P(R, B)$. Pertama peluang terambil R di pengambilan pertama adalah $P(R) = \frac{3}{8}$, lalu peluang terambil B di pengambilan kedua adalah $P(B|R) = \frac{5}{7}$ sehingga $P(R, B) = P(R) \times P(B|R) = P(B|R) \times P(R) = \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{56}$.

Teorema Bayes:

$$\underbrace{P(X|)}_{posterior} = \frac{\overset{likelihood}{P(|X)} \; \overset{prior}{P(X)}}{\underbrace{P()}_{evidence}}$$

dengan

- $P(X)$: prior $\longrightarrow$ keyakinan awal tentang X.

- $P(\;X)$: likelihood $\rightarrow$ seberapa mungkin kita mengamati jika X benar.
- $P(X\;)$: posterior $\rightarrow$ keyakinan baru tentang X setelah melihat data .
- $P()$: evidence $\rightarrow$ faktor normalisasi supaya hasilnya tetap jadi probabilitas valid.

Contoh 3: Kantong Permen

Misalkan ada dua kantong permen:

- Kantong A: 70% merah 🍬, 30% hijau 🍬.
- Kantong B: 30% merah 🍬, 70% hijau 🍬.
  Kita pilih satu kantong secara acak (probabilitas 50%-50%), lalu ambil satu permen.
  Jika ternyata permennya merah. *Seberapa besar peluang kita memilih dari Kantong A?*
  Definisikan:
- H_A: Peluang terpilih kantong A.
- H_B: Peluang terpilih kantong B.
- E: Peluang terambil permen merah.
  Kita memiliki informasi awal yakni:
- Prior: $H_A = H_B = 0.5$.
- Likelihood: $P(E\;\;H_A) = 0.7, \quad P(E\;\;H_B) = 0.3$.

Teorema Bayes:

$$P(H_A\;\;E) = \frac{P(E\;\;H_A)\,P(H_A)}{P(E)}$$

Dengan:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E\;\;H_A)P(H_A) + P(E\;\;H_B)P(H_B) \\ &= (0.7)(0.5) + (0.3)(0.5) = 0.35 + 0.15 = 0.5 \end{aligned}$$

Sehingga:
$P(H_A\;\;E) = \frac{0.7 \times 0.5}{0.5} = 0.7$

Artinya, setelah melihat permen merah, peluang bahwa kantong yang dipilih adalah Kantong A naik dari 50% $\rightarrow$ 70%.

6.4 Summary Statistics and Independence

6.4.1 Means and Covariances

🖉 Mean

Mean (Nilai ekspektasi) dari suatu variabel acak X dengan $x \in \mathbb{R}^D$ adalah rerata dan didefinisikan sebagai:

$$E_X[x] = \begin{bmatrix} E_{X_1}[x_1] \\ \vdots \\ E_{X_D}[x_D] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

di mana

$$E_{X_d}[x_d] = \begin{cases} \int_{\mathcal{X}} x_d p(x_d) dx_d, \text{ika kontinu} \\ \sum_{x_i \in \mathcal{X}} x_i p(x_d = x_i), \text{ika diskret} \end{cases}, \quad d = 1, \dots, D$$

Misal kita punya data sebagai berikut:

	probability	X	Y
State 1: Panas	0.5	Rp9jt	Rp8jt
State 2: Biasa	0.3	Rp5jt	Rp6jt
State 3: Dingin	0.2	Rp3jt	Rp4jt

(Tabel 1: pengaruh hawa cuaca terhadap penjualan produk X dan)
Maka nilai harapan untuk X dan adalah

$$\begin{aligned} E[X] &= (0.5)(9jt) + (0.3)(5jt) + (0.2)(3jt) \\ &= 6.6jt \\ E[] &= (0.5)(8jt) + (0.3)(6jt) + (0.2)(4jt) \\ &= 6.6jt \end{aligned}$$

Note: kadangkala mean juga ditulis sebagai μ.

🖉 Kovarians Univariat

Kovarians untuk variabel acak univariat X dan adalah ekspektasi dari perkalian antara selisih (deviasi) nilai dengan ekspektasinya keduanya:

$$Cov_{X,}[x, y] = E_{X,}[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[X] - E[X]E[]$$

Note: Kovarian antara suatu variabel dengan dirinya sendiri ($Cov[x, x]$) disebut *varians* ($V_X(x)$), dan akar dari varians disebut *standar deviasi* (σ_x).

Kovarians Multivariat

untuk variabel acak multivariat X dan dengan $x \in \mathbb{R}^D$ dan $y \in \mathbb{R}^E$ maka:

$$Cov[x, y] = E[xy^T] - E[x]E[y]^T = Cov[y, x]^T \in \mathbb{R}^{D \times E}$$

Korelasi

$$corr[x, y] = \frac{Cov[x, y]}{\sigma_x \sigma_y} \in [-1, 1]$$

Korelasi menunjukkan hubungan antara dua variabel, jika nilai korelasi mendekati 1 maka kedua variabel mempunyai *korelasi positif* (jika x meningkat y meningkat dan sebaliknya), jika nilai korelasi mendekati -1 maka kedua variabel mempunyai *korelasi negatif* (jika x meningkat y menurun dan sebaliknya), jika korelasi bernilai 0 maka kedua variabel tidak saling berhubungan.

6.4.2 Empirical Means and Covariances

Dalam praktik, kita jarang tahu data distribusi populasi/penuh, melainkan data sampel/empiris.
Dalam kasus ini, maka mean adalah:

$$x := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

di mana $x_n \in \mathbb{R}^D$, dan korelasinya adalah:

$$\Sigma := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n - x)(x_n - x)^T \in \mathbb{R}^{D \times D}$$

6.4.3 Three Expressions for the Variance

- $\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
- $\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

- $\mathrm{ar}[X] = \mathrm{o}[X, X]$

6.4.4 Sums and Transformations of Random Variables

- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

6.4.5 Statistical Independence

Dua variabel acak $X,$ disebut independen secara statistik jika dan hanya jika:

$$p(x, y) = p(x)p(y)$$

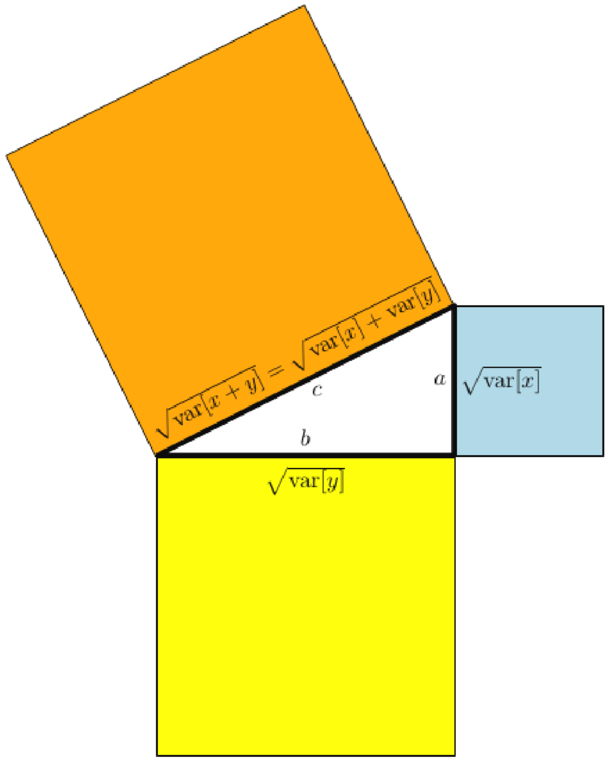
Jika $X,$ independen, maka:

- $p(y|x) = p(y)$
- $p(x|y) = p(x)$
- $V_{X,}[x + y] = V_X[x] + V[y]$
- $Cov_{X,}[x, y] = 0$
  Note: poin terakhir tidak berlaku sebaliknya.

6.4.6 Inner Products of Random Variables

Kita tahu bahwa untuk dua variabel acak yang tidak berkorelasi maka:

$$V[X +] = V[X] + V[]$$



$$
\begin{aligned}
\langle X, \rangle &:= Cov[x, y] \\
\|X\| &= \sqrt{Cov[x, x]} = \sqrt{V[x]} = \sigma_x \\
\cos\theta &= \frac{\langle X, \rangle}{\|X\|\|\|} = \frac{Cov[x, y]}{\sigma_x \sigma_y}
\end{aligned}
$$

6.5 Gaussian Distribution (Normal Distribution)

Distribusi Gaussian Univariat

Suatu variabel acak kontinu $X \in \mathbb{R}$ dikatakan mengikuti *distribusi Gaussian* dengan mean μ dan varians σ^2 dinotasikan $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ jika pdf-nya berbentuk:

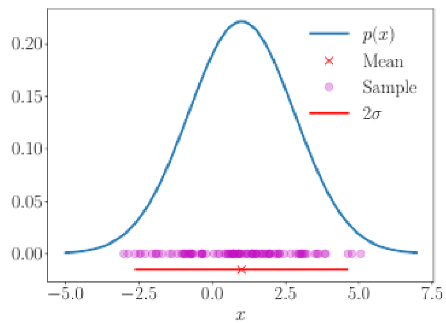
$$
p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
$$

Distribusi Gaussian Multivariat

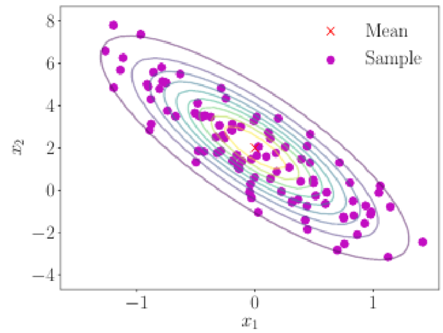
Untuk vektor acak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$, distribusi gaussian didefiniskan dengan mean vektor μ dan matriks kovarians Σ dinotasikan $x \sim \mathcal{N}(\mu,)$ jika pdf-nya:

$$
p(x) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)
$$

Grafik dari distribusi gaussian membentuk lonceng dengan sebaran data simetris terhadap μ.



(a) Univariate (one-dimensional) Gaussian; The red cross shows the mean and the red line shows the extent of the variance.



(b) Multivariate (two-dimensional) Gaussian, viewed from top. The red cross shows the mean and the colored lines show the contour lines of the density.

6.5.1 Marginal dan Kondisional dari Gaussian juga Gaussian

Misal X dan dalah variabel acak multivariat, kita dapat menulis gaussian dalam bentuk sebagai berikut:

$$p(x,y) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}\mu_x \\ \mu_y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy}\end{bmatrix}\right)$$

distribusi kondisional $p(x|y)$ juga gaussian, dengan:

$$\begin{aligned} p(x|y) &= \mathcal{N}\left(\mu_{x|y}, \Sigma_{x|y}\right), \text{ dengan:} \\ \mu_{x|y} &= \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y-\mu_y) \\ \Sigma_{x|y} &= \Sigma_{xx} + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} \end{aligned}$$

dan distribusi marginal $p(x)$ diberikan:

$$p(x) = \int p(x,y)dy = \mathcal{N}(x|\mu_x, \Sigma_{xx})$$

Contoh 4: Marginal & Kondisional Gaussian

Untuk suatu distribusi Gaussian bivariate

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0 \\ 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.3 & -1 \\ -1 & 5\end{bmatrix}\right), \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

.

Akan dihitung:

(a) Distribusi kondisional $p(x_1 \ \ x_2 = -1)$.

(b) Distribusi marginal $p(x_1)$.

Partisi mean dan kovarians sesuai variabel:

$$= \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.3 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}.$$

dengan $|\Sigma| = 0.3 \cdot 5 - (-1)^2 = 1.5 - 1 = 0.5 > 0$

(a) Kondisional: $p(x_1 \;\; x_2 = -1)$
Kita masukkan $b = -1$.

- Hitung $\Sigma_{22}^{-1} = 1/5 = 0.2$.
- Mean kondisional:

$$\mu_{1|2} = 0 + (-1) \cdot 0.2 \cdot (-1 - 2) = (-0.2) \cdot (-3) = 0.6.$$

- Varians kondisional:

$$\Sigma_{1|2} = 0.3 - (-1) \cdot 0.2 \cdot (-1) = 0.3 - 0.2 = 0.1.$$

  Sehingga

$$\boxed{p(x_1 \;\; x_2 = -1) = \mathcal{N}(x_1 \;\; 0.6,\ 0.1)}$$

  Interpretasi singkat: mengetahui $x_2 = -1$ menggeser mean dari 0 menjadi 0.6 dan mengecilkan varians dari 0.3 menjadi 0.1 — yaitu ketidakpastian mengenai x_1 berkurang dan pusat tebakan bergeser sesuai korelasi negatif di kovarians.

(b) Marginal: $p(x_1)$
Untuk marginal cukup ambil komponen mean dan varians yang sesuai:

$$\boxed{p(x_1) = \mathcal{N}(x_1 \;\; 0,\ 0.3)}$$

Catatan: varians marginal (0.3) lebih besar daripada varians kondisional (0.1) — ini sesuai: informasi tambahan tentang x_2 menurunkan ketidakpastian terhadap x_1.

6.6 Conjugacy and the Exponential Family

6.6.1 Conjugacy

Dalam Bayesian inference:

$$p(\theta|\mathcal{D}) \propto p(\mathcal{D}|\theta)\, p(\theta).$$

Jika prior $p(\theta)$ dan likelihood $p(\mathcal{D}|\theta)$ dipilih dengan tepat, maka posterior $p(\theta|\mathcal{D})$ berada dalam keluarga distribusi yang sama dengan prior. Disebut conjugate prior.

Contohnya jika kita mempunyai distribusi dengan Likelihood: $X \sim \text{ernoulli}(\theta)$, Prior: $\theta \sim \text{eta}(\alpha,)$. Maka Posterior tetap Beta dengan parameter diperbarui:

$$\theta|\mathcal{D} \sim \text{eta}\big(\alpha + \text{umla sukses}, \ + \text{umla gagal}\big).$$

Intuisi: conjugacy membuat update distribusi seperti menambahkan catatan baru ke parameter prior.

6.6.2 Sufficient Statistics

Sufficient Statistics

Fungsi dari data $T(\mathcal{D})$ disebut *sufficient statistic* untuk parameter θ jika:

$$p(\mathcal{D}|\theta) = g(\mathcal{D})\, h(T(\mathcal{D}), \theta),$$

sehingga semua informasi tentang θ dalam data dapat diringkas hanya melalui $T(\mathcal{D})$.

Contoh pada distribusi normal dengan varian diketahui maka sufficient statisticnya adalah rata-rata data. Lalu pada distribusi Bernoulli maka sufficient statisticnya jumlah sukses.

6.6.3 Exponential Family

Banyak distribusi populer bisa ditulis dalam bentuk *Exponential Family*:

$$p(x|\theta) = h(x) \exp\Big((\theta)^\top T(x) - A((\theta))\Big),$$

dengan:

- $h(x)$: base measure
- $T(x)$: sufficient statistics
- (θ): natural parameter
- $A()$: log-partition function (normalizer)

6.7 Change of Variables / Inverse Transform

6.7.1 Distribution Function Technique

Teknik distribution function bertumpu pada sifat cumulative distribution function (CDF). Misalkan X adalah variabel acak dengan distribusi yang diketahui, dan kita definisikan variabel acak baru $= g(X)$ dengan g fungsi monoton. Distribusi dapat diperoleh dengan mendefinisikan CDF dari sebagai

$$F(y) = P(\leq y) = P(g(X) \leq y).$$

Dari bentuk ini, fungsi densitas probabilitas (pdf) $f(y)$ diperoleh dengan diferensiasi terhadap y:

$$f(y) = \frac{d}{dy} F(y).$$

Contoh 5: Distribution Function Technique

Misalkan $X \sim U(0,1)$ dengan pdf $f_X(x) = 1$ untuk $0 \leq x \leq 1$. Definisikan $= X^2$. Untuk memperoleh distribusi , kita gunakan teknik distribution function. Pertama kita hitung CDF:

$$F(y) = P(\leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}).$$

Karena X seragam pada $(0,1)$, maka $F(y) = \sqrt{y}$ untuk $0 \leq y \leq 1$. Diferensiasi terhadap y menghasilkan pdf:

$$f(y) = \frac{d}{dy} F(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

6.7.2 Change of Variables

Pendekatan kedua adalah melalui transformasi langsung pada pdf menggunakan aturan change of variables. Misalkan $= g(X)$ dengan g invertibel dan terdiferensialkan. Maka pdf dari adalah

$$f(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|.$$

Untuk kasus multivariat $\mathbf{Y} = g()$, hasilnya menjadi

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f(g^{-1}(\mathbf{y})) \cdot \left| \det J_{g^{-1}}(\mathbf{y}) \right|,$$

dengan $J_{g^{-1}}$ adalah Jacobian dari fungsi invers g^{-1}.

Contoh 6: Change of Variables

Misalkan $X \sim U(0, 1)$ dengan pdf $f_X(x) = 1$ untuk $0 \leq x \leq 1$. Definisikan $\ = -\ln(X)$. Karena $X = e^{-}$, kita dapatkan

$$\frac{d}{dy} x = \frac{d}{dy} e^{-y} = -e^{-y}.$$

Maka pdf dari adalah

$$f(y) = f_X(e^{-y}) \cdot |-e^{-y}| = 1 \cdot e^{-y} = e^{-y}, \quad y \geq 0.$$

Dengan demikian, berdistribusi eksponensial dengan parameter 1.