Part 2 - Linear Algebra

> **Vektor**
>
> Secara umum vektor adalah sebuah objek yang bisa saling ditambahkan dan bisa dikalikan dengan sebuah skalar sedemikiran sehingga menghasilkan objek lain yang sejenis

Jenis-jenis vektor diantaranya:

1. Vektor geometri $(\vec{x}, \vec{y})$.
2. Polinomial juga merupakan vektor, karena

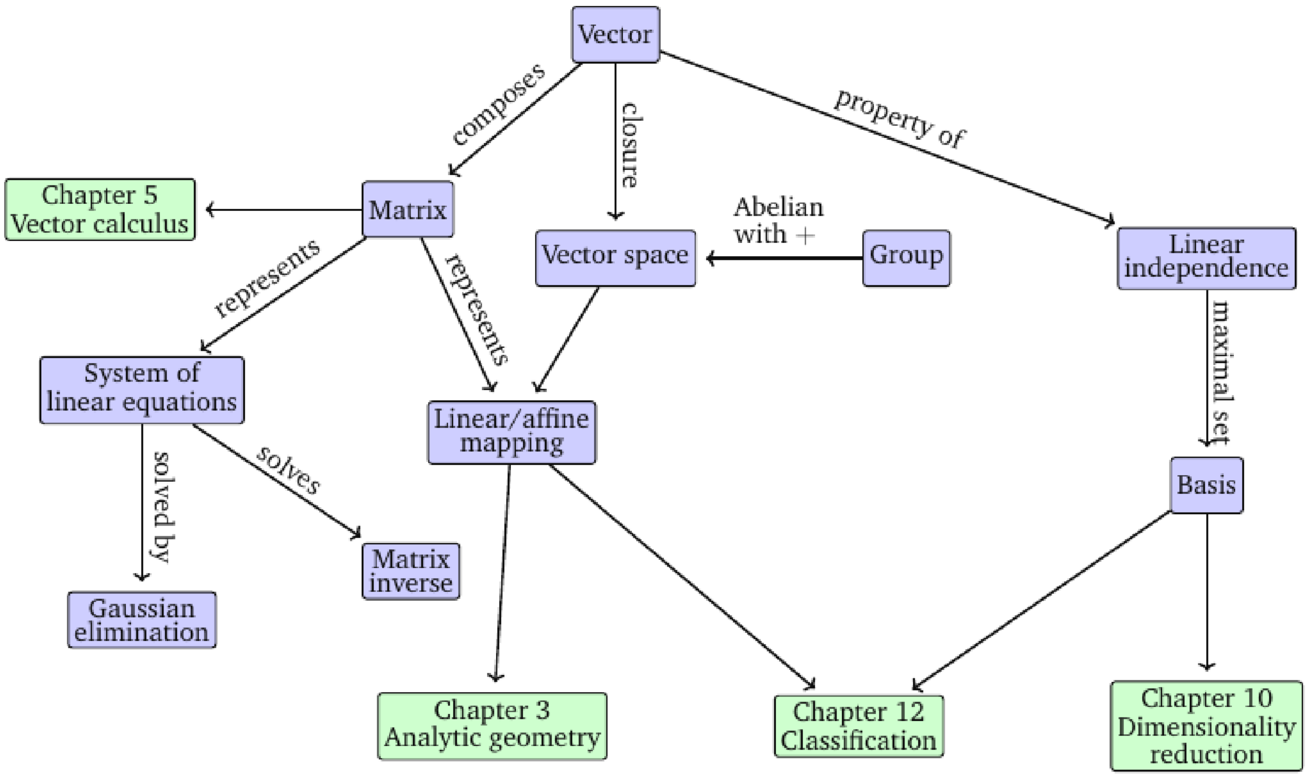
   $$\forall y_1, y_2 \in P^n : y_1 + y_2 = y_3 \implies y_3 \in P^n$$

   dan

   $$\forall y \in P^n, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x(y) \in P^n$$

3. Signal audio juga merupakan vektor.
4. Element $\mathbb{R}^n$ (tupel dari n bilangan Real) juga merupakan vektor.

> satu hal yang besar dalam matematika adalah konsep "closure". Apa himpunan vektor yang bisa dihasilkan dari himpunan-himpunan yang lebih kecil dan menjumlahkannya satu sama lain dan menskalanya?



2.1. Sistem Persamaan Linear

Contoh 1:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 3 && (1)\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 && (2)\\
2x_1 + 3x_3 &= 5 && (3)
\end{aligned}
$$

Meskipun terdapat 3 persamaan, sesuai dengan jumlah variabel dalam sistem persamaan ini, bisa dilihat bahwa jika kita menjumlahkan (1) dengan (2) akan menghasilkan (3) sehingga persamaan (3) sebenarnya bersifat *redundant*. Dengan kondisi ini, maka persamaan ini akan terdapat banyak kemungkinan solusi yang memenuhi persamaan. Kita akan menganggap salah satu variabel sebagai variabel bebas asalkan 2 variabel yang lain tetaplah memenuhi persamaan.

Dari persamaan (3) didapat:

$$2x_1 = 5 - 3x_3 \implies x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 \tag{4}$$

Lalu dengan mengurangi (1) dengan (2) didapat:

$$2x_2 = 1 + x_3 \implies x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \tag{5}$$

Lalu berdasarkan (4) dan (5), dengan menganggap bahwa $x_3 = a \in \mathbb{R}$ adalah variabel bebas. Kita dapatkan solusi persamaan yaitu:

$$(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a, a), a \in \mathbb{R}$$

Note

Pada umumnya, untuk sistem persamaan linear dalam ruang bilangan real, kita dapati: **tidak ada**, **satu**, atau **tak hingga** solusi.

2.2 Matriks

Definisi:
Dengan $m, n \in$ sebuah matriks A bernilai (m, n) adalah m n-tupel dari elemen $a_{i,j}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, yang diurutkan berdasarkan skema rectangular yang mengandung m baris dan n kolom:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}, \; a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^{m \times n}$ adalah himpunan semua *real-valued* matriks (m, n)

Invers Matrik

Untuk sebuah matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Asumsikan ada sebuah matriks $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ yang memenuhi $A \;\; B = I_n = B \;\; A$. B dinamakan invers dari matriks A dan dinotasikan sebagai A^{-1}.

Jika sebuah matriks memiliki invers, maka matriks tersebut disebut *regular/inversible/nonsingular*, sebaliknya disebut *singular/noninversible*.

Transpose Matrik

Untuk sebuah matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matriks $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ di mana $b_{ij} = a_{ji}$ adalah transpose dari matriks A, dan dinotasikan sebagai $A^{\top}$.

2.2 Solusi Sistem Persamaan Linear

Contoh 2:

Temukan solusi untuk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ \ \end{bmatrix}$$

Karena jumlah variabel lebih banyak dari jumlah persamaan yang diberikan, kita bisa harapkan sejumlah tak hingga solusi.

Jika kita asumsikan $x_3 = 0$ dan $x_4 = 0$, maka dari persamaan 1 dan persamaan 2 didapat $x_1 = 42$ dan $x_2 = 4$, sehingga solusinya adalah $[42 \quad\quad 0 \quad 0 \ ]^\top$, kita sebut ini adalah solusi khusus.

Untuk mencari solusi umum, kita bisa menambahkan solusi khusus dengan persamaan apapun yang memenuhi $Ax = 0$, sebab hasilnya akan tetap memenuhi solusi khusus.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anggap $x_3 = s$ dan $x_4 = t$ variabel bebas.

- Dari persamaan 1 didapat:

$$x_1 = -s + 4t$$

- Dari persamaan 2 didapat:

$$x_2 = -2s - 12t$$

Sehingga semua solusi yang memenuhi $Ax = 0$ adalah:

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = s \begin{matrix} - \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} + t \begin{matrix} 4 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \ s, t \in \mathbb{R}$$

Oleh karena itu solusi umum persamaan awal menjadi:

$$x \in \mathbb{R}^4 : x = \begin{matrix} 42 \\ \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + s \begin{matrix} - \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} + t \begin{matrix} 4 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \; s, t \in \mathbb{R}$$

Contoh 3:

Untuk $a \in \mathbb{R}$, cari semua solusi yang memenuhi:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 &= -3 & (1) \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 &= 2 & (2) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 & (3) \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 &= a & (4) \end{aligned}$$

Dalam bentuk augmented matriks $Ax = b$ adalah sebagai berikut

$$\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & - & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & a \end{array}$$

Lakukan Operasi Baris Elementer(OBE) sebagai berikut:

- Menukar 2 baris
- Perkalian suatu baris dengan skalar $\lambda \in \mathbb{R}\ \{0\}$
- Menambahkan dengan kelipatan baris lain

Lakukan OBE hingga mendapati `eselon-baris` sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}$$

Bentuk Eselon-Baris (REF)

Bentuk di atas disebut bentuk $sn - Baris\ (R)$. Sebuah augmented matriks dikatakan Eselon-Baris jika memenuhi syarat-syarat berikut:

- Setiap baris non-nol dimulai dari pivot 0,dan posisi pivot di sebelah kanan dari pivot baris sebelumnya.
- Baris nol (jika ada) diletakkan di bawah.
- Semua elemen di bawah pivot = 0.

Sehingga sistem bisa diselesaikan jika $a = -1$, asumsikan $x_2 = x_5 = 0$ maka didapat solusi khusus $[2 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0]^\top$
Lalu dengan mengasumsikan $x_2 = s, x_5 = t, s, t \in \mathbb{R}$, akan didapatkan solusi umum:

$$x \in \mathbb{R}^5 : x = \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} + s \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} + t \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix},\ s, t \in \mathbb{R}$$

Bentuk Eselon-Baris Tereduksi (RREF)

Selain bentuk tersebut, terdapat juga lebih ringkasnya yakni bentuk $sn - Baris\ Trduksi\ (RR)$. Sebuah augmented matriks dikatakan Eselon-Baris Tereduksi jika memenuhi syarat-syarat berikut:

- sudah berbentuk Eselon-Baris;
- setiap pivot bernilai 1; dan

- setiap pivot adalah satu-satunya bilangan tak nol di kolom tersebut.

Minus 1 Trick

dalam mencari solusi $Ax = 0, A \in \mathbb{R}^{k \times n}, x \in \mathbb{R}$, bisa memakai minus 1 trick, yakni membuat matrik $\tilde{A}, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dengan menyelipkan sejumlah $n - k$ baris sedemikian sehingga setiap nilai diagonal augmented matrik $\tilde{A}$ adalah -1 atau 1.
Misalnya matriks REF berikut:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{array}
$$

Dapat diubah menjadi:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}
$$

sehingga solusi x untuk $Ax = 0$ adalah:

$$
x \in \mathbb{R}^5 : x = s \begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} + t \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ \\ -4 \\ -1 \end{array}, \; s, t \in \mathbb{R}
$$

Mencari Inverse Matrik

Kita juga bisa mencari inverse matrik menggunakan cara yang sama yakni Gaussian Elimination. Seperti contoh berikut:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

2.4 Ruang Vektor

2.4.1 Group

Group

Anggap suatu himpunan dan operasi $\ : \ \times \ \to \ $ terdefinisi di , maka (,) disebut *grup* jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $Csur, \forall x, y \in \ : x \ \ y \in \ ;$
2. $Assiatif, \forall x, y, z \in \ : (x \ \ y) \ \ z = x \ \ (y \ \ z);$
3. $mn\ Ntra, \forall x \in \ \ \in \ : x \ \ = x$ dan $\ \ x = x$; dan
4. $mn\ Invrs, \forall x \in \ \ y \in \ : x \ \ y = y \ \ x = \ $ dengan adalah elemen netral. Kita bisa tulis x^{-1} untuk menunjukkan invers dari x.

Selanjutnya,
Jika suatu grup $\ = (,)$ terpenuhi $\forall x, y \in \ : x \ \ y = y \ \ x$ (bersifat komutatif) maka group ini bisa disebut *rup Abian*.

General Linear Group

Himpunan matriks reguler (invertible) $A \in R^{n\times n}$ adalah grup terhadap operasi perkalian matriks dan disebut $nra\ Linar\ rup\ L(n, \mathbb{R})$. Namun sebab perkalian matriks tidak bersifat komutatif, maka ini bukan grup abelian.

2.4.2 Ruang Vektor

Ruang Vektor

Sebuah ruang vektor $V = (, +,)$ adalah himpunan vektor dengan dua operasi berikut:

$$
\begin{aligned}
+ &: \ + \ \to \\
&: \mathbb{R} \ \ \to
\end{aligned}
$$

Di mana:

1. $(, +)$ adalah grup abelian.
2. Sifat distributif:
    1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \ : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
    2. $\forall \lambda, \ \in \mathbb{R}, x \in \ : (\lambda + \ )x = \lambda x + x$
3. Asosiatif (outer opperation): $\forall \lambda, \ \in \mathbb{R}, x \in \ : \lambda \ (\ x) = (\lambda) \ x$
4. Elemen netral terhadap operasi luar, $\forall x \in \ : 1 \ x = x$

2.4.3 Subruang Vektor

Subruang Vektor

Misal $V = (, +,)$ adalah ruang vektor, dan $\ \subseteq \ , \ $. Maka $U = (, +,)$ adalah subruang vektor dari V (atau subruang linear) jika U adalah ruang vektor dengan operasi $+$ dan terbatas pada $\ \times \ $ dan $\mathbb{R} \times \ $, dinotasikan sebagai $U \subseteq V$.

Subruang vektor adalah ide kunci dari machine learning, misalnya pada *dimensionality reduction.*

2.5 Linear Independency

Kombinasi Linear

Ambil suatu ruang vektor V dan sejumlah terbatas vektor $x_1, \ldots, x_k \in V$. Maka, setiap $v \in V$ dalam bentuk:

$$v = \lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

, adalah $Kmbinasi\ Linar$ dari $x_1, \ldots, x_k$.

Linear (In)dependence

Ambil suatu ruang vektor V dan sejumlah terbatas vektor $x_1, \ldots, x_k \in V$. Jika ada kombinasi linear non-trivial sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ dengan setidaknya ada satu λ_i 0, vektor $x_1, \ldots, x_k$ disebut $inary\ dpndnt$. Sebaliknya jika hanya terdapat kombinasi trivial, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k = 0$, vektor $x_1, \ldots, x_k$ disebut $inary\ indpndnt$

Linear independent adalah konsep terpenting dalam aljabar linear. Sederhananya, himpunan dari vektor-vektor yang linearly independent mengandung vektor-vektor yang tidak *redundant*, artinya jika kita menghapus salah satu vektor kita akan kehilangan informasi penting.
Jika kita membentuk matriks baris elementer hingga kita dapatkan bentuk eselon-baris, maka semua vektor linearly independent jika dan hanya jika semua kolom adalah kolom pivot. Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.6 Basis dan Rank

2.6.1 Generating Set & Basis

Generating Set & Span

Ambil suatu ruang vektor $V = (, +,)$ dan himpunan vektor $\mathcal{A} = \{x_1, \ldots, x_k\} \in V$. Jika untuk setiap $v \in$ dapat diekspresikan dalam kombinasi linear dari $x_1, \ldots, x_k$, maka $\mathcal{A}$ disebut *gnrating st* dari V. Himpunan dari semua kombinasi linear dari $\mathcal{A}$ disebut *span* dari $\mathcal{A}$ ditulis $span[\mathcal{A}]$.

Minimal & Basis

Ambil suatu ruang vektor $V = (, +,)$ dan $\mathcal{A} \subseteq$, generating set $\mathcal{A}$ dari disebut *minima* jika tidak ada $\tilde{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$ yang me-span . Setiap linearly independent generating set dari adalah minimal dan disebut *basis* dari .

Misalnya, basis standar atau disebut *cannnica* dari $\mathbb{R}^3$ adalah:

$$
\begin{matrix} & 1 \; 0 \; 0 \\ = & 0, 1, 0 \\ & 0 \; 0 \; 1 \end{matrix}
$$

2.6.2 Rank

Jumlah dari kolom yang linearly independent dari matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sama dengan jumlah baris yang linearly independent, dan jumlah ini disebut dengan *rank* dan dinotasikan sebagai $rk(A)$.

Misalnya, $rk(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}) = 2$.