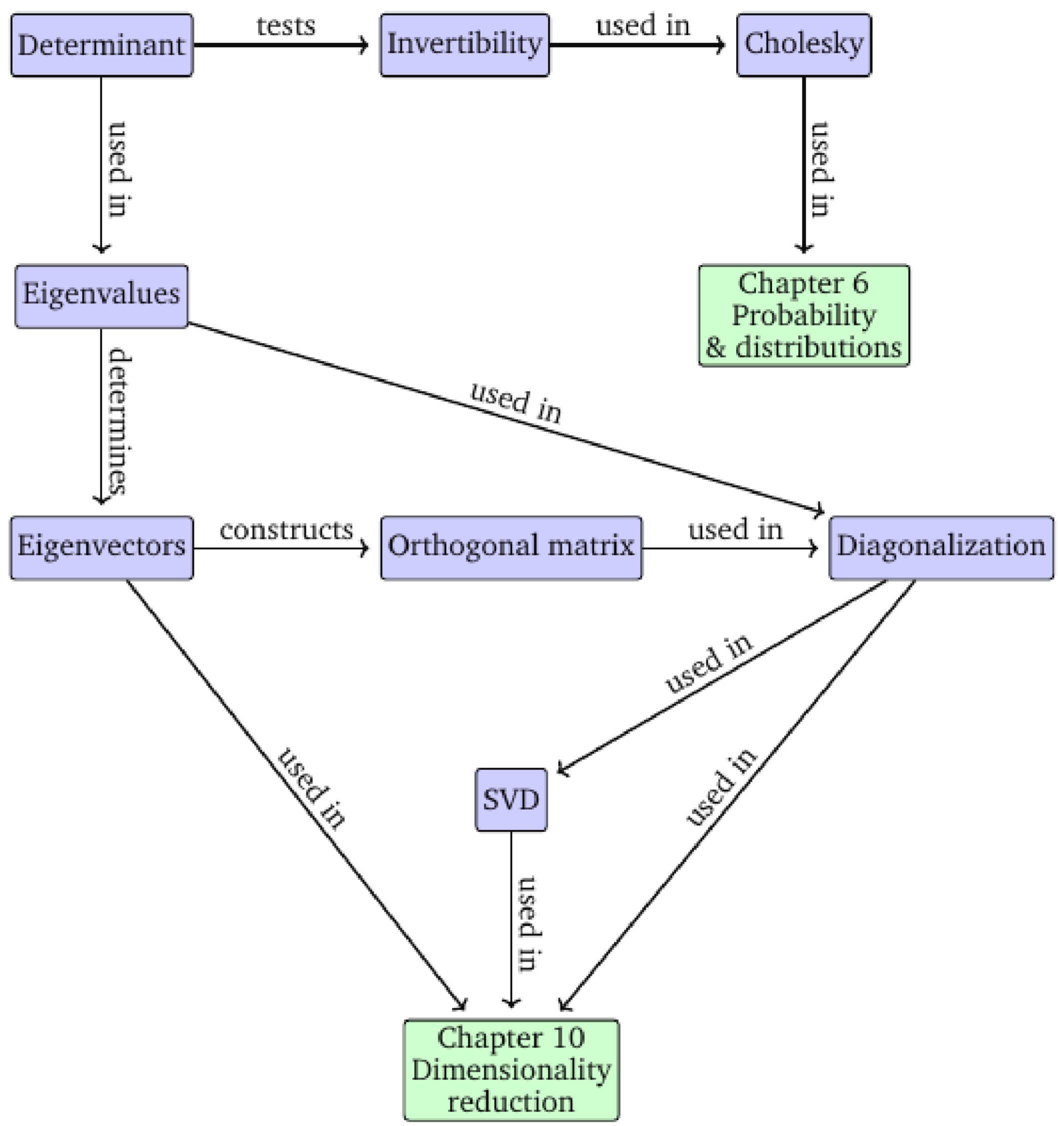
Part 4 - Matrix Decomposition



4.1 Determinant & Trace

Determinan

Determinan dari matrik $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah fungsi yang memetakan A ke bilangan Real. Dinotasikan dengan $\det(A)$.

Invers dari matrik 2×2 dapat ditulis sebagai:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

di mana

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Teorema. Untuk semua matriks persegi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, maka A mempunyai inverse jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Upper Triangular & Lower Triangular

Sebuah matriks disebut *upper triangular* jika semua nilai di bawah diagonal utama adalah 0, dan sebuah matriks disebut *lower triangular* jika semua nilai di atas diagonal utama adalah 0.

Teorema. misal T adalah matrik triangular. Maka

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} T_{ii}$$

Contoh 1

Untuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = 1(5)(9) = 45$

Teorema. Ambil sebuah matrik $A \in R^{n \times n}$. Maka untuk semua $j = 1, \ldots, n$:

1. Ekspansi sepanjang kolom j:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{k,j})$$

2. Ekspansi sepanjang baris j:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{jk} \det(A_{j,k})$$

   Di sini, $A_{k,j} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ adalah submatriks yang diperoleh jika kita menghapus baris k dan kolom j.

Untuk $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, determinannya memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $\det A = \det A^\top$
3. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
4. Matriks-matriks yang sama memiliki determinan yang sama
5. Menambahkan kelipatan kolom/baris ke yang lainnya tidak mengubah determinan
6. Perkalian kolom/baris dengan skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ menskala $\det(A)$ sebesar λ. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
7. Menukar dua kolom/baris mengubah tanda determinan.

Teorema. Matriks persegi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ memiliki $\det(A) \neq 0$ jika dan hanya jika $rk(A) = n$. Artinya, matriks A invertible jika dan hanya jika dia full rank.

Trace

Trace dari matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ didefinisikan sebagai:

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

, adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal A.

Trace memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, untuk $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
3. $tr(I_n) = n$
4. $tr(AB) = tr(BA)$, untuk $A \in \mathbb{R}^{n \times k}, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

Caracteristic Polynomial

For $\lambda \in \mathbb{R}$ dan matriks persegi $A \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(A - \lambda I) \\ &= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ + c_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n \end{aligned}$$

$c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ adalah *characteristic polynomial* dari A. Secara khusus,

$$c_0 = \det(A)$$
$$c_{n-1} = (-1)^n - 1tr(A)$$

4.2 Eigenvalues & Eigenvectors

Eigenvalues & Eigenvectors

Bayangkan matriks **A** sebagai mesin transformasi (rotasi, skala, geser, dll).
Biasanya, ketika kita masukkan sebuah vektor **x**, arah vektor itu akan berubah.
Namun: ada beberapa arah spesial yang **tidak berubah arah**, hanya panjangnya yang berubah.

- **Eigenvector** $\longrightarrow$ arah yang tetap
- **Eigenvalue** $\longrightarrow$ faktor perubahan panjangnya

4.2.1 Persamaan Dasar

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

- v = eigenvector (tidak nol)
- λ = eigenvalue (skalar)
- Artinya: ketika **v** dilewatkan ke **A**, hasilnya hanya skala dari **v** itu sendiri.

4.2.2 Cara Mencari Eigenvalues & Eigenvectors

1. Mulai dari persamaan:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

2. Pindahkan semua ke satu sisi:

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

3. Syarat solusi non-trivial:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$\longrightarrow$ ini disebut **persamaan karakteristik**

4. Selesaikan polinomial karakteristik untuk menemukan **λ**
5. Substitusikan λ ke $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ untuk menemukan **v**

Contoh 2

Misal $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$:

1. **Bentuk** $A - \lambda I$:

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$$

2. $\det(A) = 0$:

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)(3 - \lambda) - (2)(1) = 0 \\ \lambda^2 - \lambda + 10 = 0 \\ (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

   Jadi eigenvalues $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$

3. **Eigenvector untuk λ_1 = 5**:
   - $(A - 5I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
   - Persamaan: $-x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$
   - Pilih $y = 1 \Rightarrow x = 2$
   - Eigenvector: $\mathbf{v}_1$ = [2, 1]
4. **Eigenvector untuk λ_2 = 2**:
   - $(A - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   - Persamaan: $2x + 2y = 0 \Rightarrow x = -y$
   - Pilih $y = 1 \Rightarrow x = -1$
   - Eigenvector: $\mathbf{v}_2$ = [-1, 1]

4.2.3 Hubungan dengan Determinant & Trace

- **Trace**: $\mathrm{tr}(A) = \sum \lambda_i$
  → 4 + 3 = 7 ✅ sama dengan 5 + 2
- **Determinant**: $\det(A) = \ \lambda_i$
  → 10 ✅ sama dengan 5 × 2

4.2.4 Eigenspace

Definisi:
Untuk setiap eigenvalue λ, eigenspace adalah himpunan semua eigenvectors yang berhubungan dengan λ, ditambah vektor nol. Secara formal:

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0\}$$

Eigenspace adalah **ruang vektor** karena:

- Jika dan $\mathbf{v}$ ada di E_λ, maka $u + v \in E_\lambda$.
- Jika $\mathbf{v}$ ada di E_λ dan c adalah skalar, maka $c\mathbf{v}$ juga ada di E_λ.

Contoh dari matriks di atas:

- Untuk $\lambda_1 = 5$, eigenspace E_5 dibentuk oleh semua kelipatan dari $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Untuk $\lambda_2 = 2$, eigenspace E_2 dibentuk oleh semua kelipatan dari $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.2.5 Aplikasi di Machine Learning

- **PCA (Principal Component Analysis)** → memilih eigenvectors dari matriks kovarians untuk menemukan arah data terbesar.
- **Markov Chains** → steady state = eigenvector dengan λ = 1
- **Graph Analysis** → centrality dihitung dari eigenvectors
- **Differential Equations** → solusi sistem linier berbasis eigen-decomposition

4.3 Cholesky Decomposition

Cholesky Decomposition adalah teknik memecah matriks **simetris** dan **positif definit** menjadi hasil perkalian matriks segitiga bawah dan transpose-nya.

$$A = L \cdot L^\top$$

di mana:

- L= matriks segitiga bawah (lower triangular) dengan elemen diagonal positif.
- $L^\top$ = transpose dari L (segitiga atas).

4.3.1 Syarat Cholesky Decomposition

Agar bisa dilakukan, matriks A harus:

1. **Simetris** $\rightarrow A = A^\top$
2. **Positif definit** $\rightarrow$ untuk semua vektor tak nol x,

   $$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0$$

   atau semua **eigenvalues**-nya positif.

4.3.2 Rumus Elemen L

Untuk $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. Elemen diagonal:

   $$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$$

2. Elemen di bawah diagonal:

   $$L_{ji} = \frac{A_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}L_{jk}}{L_{ii}}, \quad \text{untuk } j > i$$

4.3.3 Aplikasi di Machine Learning & Data Science

- **Optimisasi**: Solusi cepat untuk sistem persamaan $A\mathbf{x} =$ ketika A adalah matriks kovarians (positif definit).
- **Gaussian Processes**: Invers kovarians untuk prediksi.
- **Monte Carlo Simulation**: Membuat korelasi antar variabel acak.
- **Kalman Filter**: Perhitungan kovarians dalam pelacakan objek.

4.4 Eigendecomposition & DIaglonalization

Diagonalizable

Suatu matriks persegi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dikatakan *diagonalizable* jika ia mirip dengan matriks diagonal, artinya ada matriks inversibel $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sehingga $D = P^{-1}AP$

Teorema. Eigendecomposition menyatakan bahwa setiap matriks persegi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dapat dipecah menjadi

$$A = PDP^{-1}$$

Di mana $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dan D adalah matriks diagonal yang nilai setiap diagonalnya adalah *eigenvalues* dari A, jika dan hanya jika *eigenvektor* dari A membentuk basis R^n.

Teorema. Matriks simetris selalu bisa didagonalisasikan.

4.5 Singular Value Decomposition (SVD)

Sebuah matriks rectangular dapat merubah suatu vektor ke dimensi yang lain. Sebuah matriks berukuran $m \times n$ bisa merubah vektor berdimensi n ke vektor berdimensi m.

Contoh 3

matriks $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ bisa merubah vektor $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ sebagai berikut:

$$Rv = v'$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

v berdimensi 3 sedangkan v' berdimensi 2.

Lalu matriks $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ bisa merubah $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sebagai berikut:

$$Uw = w'$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

w berdimensi 2 sedangkan w' berdimensi 3.

Jika kita ambil sembarang matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dan mengalikannya dengan $A^\top$ maka akan menghasilkan matriks persegi yang simetris:

- $AA^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$, disebut (S_L) memiliki m buah eigenvector tegak lurus, disebut sebagai $Left\ Singular\ Vector$.
- $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, disebut (S_R) memiliki n buah eigenvector tegak lurus, disebut sebagai $Right\ Singular\ Vector$.

Teorema. SVD menyatakan bahwa sebarang matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dapat dipecah menjadi perkalian matriks

$$A = U \Sigma V^\top$$

Dimana:

- U: Matriks ortogonal berukuran $m \times m$. Kolom-kolomnya adalah Left singular vector.
- Σ: Matriks diagonal berukuran $m \times n$. Nilai-nilai pada diagonalnya disebut **Nilai Singular (Singular Values)**.
- $V^\top$: Transpose dari matriks ortogonal V yang berukuran $n \times n$. Kolom-kolomnya adalah Right Singular Vectors.

Contoh 4

cari dekomposisi dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Langkah 1: Cari Matriks V dan Nilai Singular (Σ)
Kita akan menggunakan matriks simetris $A^\top A$ untuk menemukan V dan Σ.

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+16 & 0+20 \\ 0+20 & 0+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$$

Sekarang, cari *eigenvalue* (λ) dan *eigenvector* dari $A^\top A$.

- Eigenvalue dari $A^\top A$ adalah $\lambda_1 = 45$ dan $\lambda_2 = 5$.
- Nilai Singular (σ): Adalah akar kuadrat dari eigenvalue. Kita urutkan dari yang terbesar.
  - $\sigma_1 = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
  - $\sigma_2 = \sqrt{5}$
- Diperoleh $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$
- **Vektor Singular Kanan (V)**: Adalah eigenvector dari $A^\top A$ yang sudah dinormalisasi.
  - Untuk $\lambda_1 = \sqrt{45}$, eigenvectornya adalah $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
  - Untuk $\lambda_2 = \sqrt{5}$, eigenvectornya adalah $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
  - Diperoleh:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
$$V^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Cari Matriks U

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$
$$u_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Aplikasi SVD

- **Kompresi Gambar (Aproksimasi Peringkat Rendah)**: Sebuah gambar dapat direpresentasikan sebagai matriks piksel. Nilai singular yang besar di matriks Σ menunjukkan komponen "paling penting" dari gambar. Dengan hanya menyimpan beberapa nilai singular terbesar (dan vektor U, V yang bersesuaian) dan mengabaikan yang kecil, kita bisa merekonstruksi gambar yang sangat mirip dengan aslinya tetapi dengan ukuran file yang jauh lebih kecil.
- **Principal Component Analysis (PCA)**: SVD adalah mesin utama di balik PCA, sebuah teknik untuk mengurangi dimensi data dengan tetap mempertahankan informasi sebanyak mungkin.
- **Sistem Rekomendasi**: Digunakan untuk memprediksi preferensi pengguna (misalnya, di Netflix atau Spotify) dengan menemukan pola tersembunyi dalam data interaksi pengguna-item.
- **Menghilangkan Noise**: Dalam data sinyal atau gambar, komponen dengan nilai singular kecil sering kali berhubungan dengan *noise*. Dengan menghilangkannya, kita bisa "membersihkan" data tersebut.

4.6 Matrix Approximation

Melalui konsep SVD, suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dengan rank r bisa ditulis sebagai penjumlahan matriks-matriks rank-1 A_i sehingga:

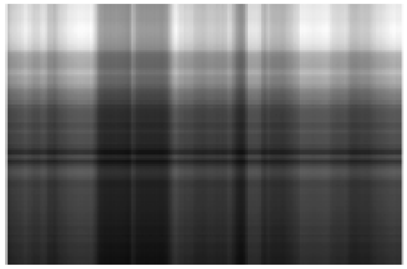
$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i A_i$$

Lalu kita bisa menyederhanakan penjumlahan ini dengan tidak menyertakan keseluruhan $i = 1, \dots, r$. Kita ambil suatu nilai $k < r$ untuk mendapatkan *rank-k approximation*:

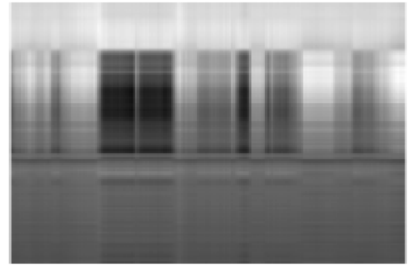
$$\hat{A}(k) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\top = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i$$

Contoh penerapan *matrix approximation* pada citra:

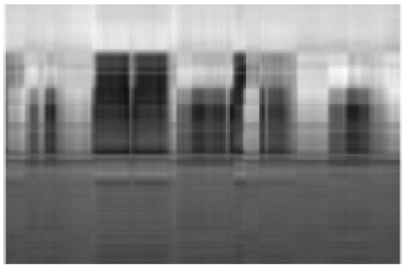
(a) Original image $\boldsymbol{A}$.



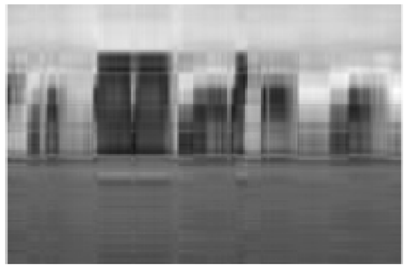
(b) Rank-1 approximation $\widehat{\boldsymbol{A}}(1)$.



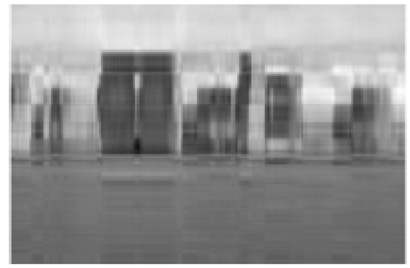
(c) Rank-2 approximation $\widehat{\boldsymbol{A}}(2)$.



(d) Rank-3 approximation $\widehat{\boldsymbol{A}}(3)$.

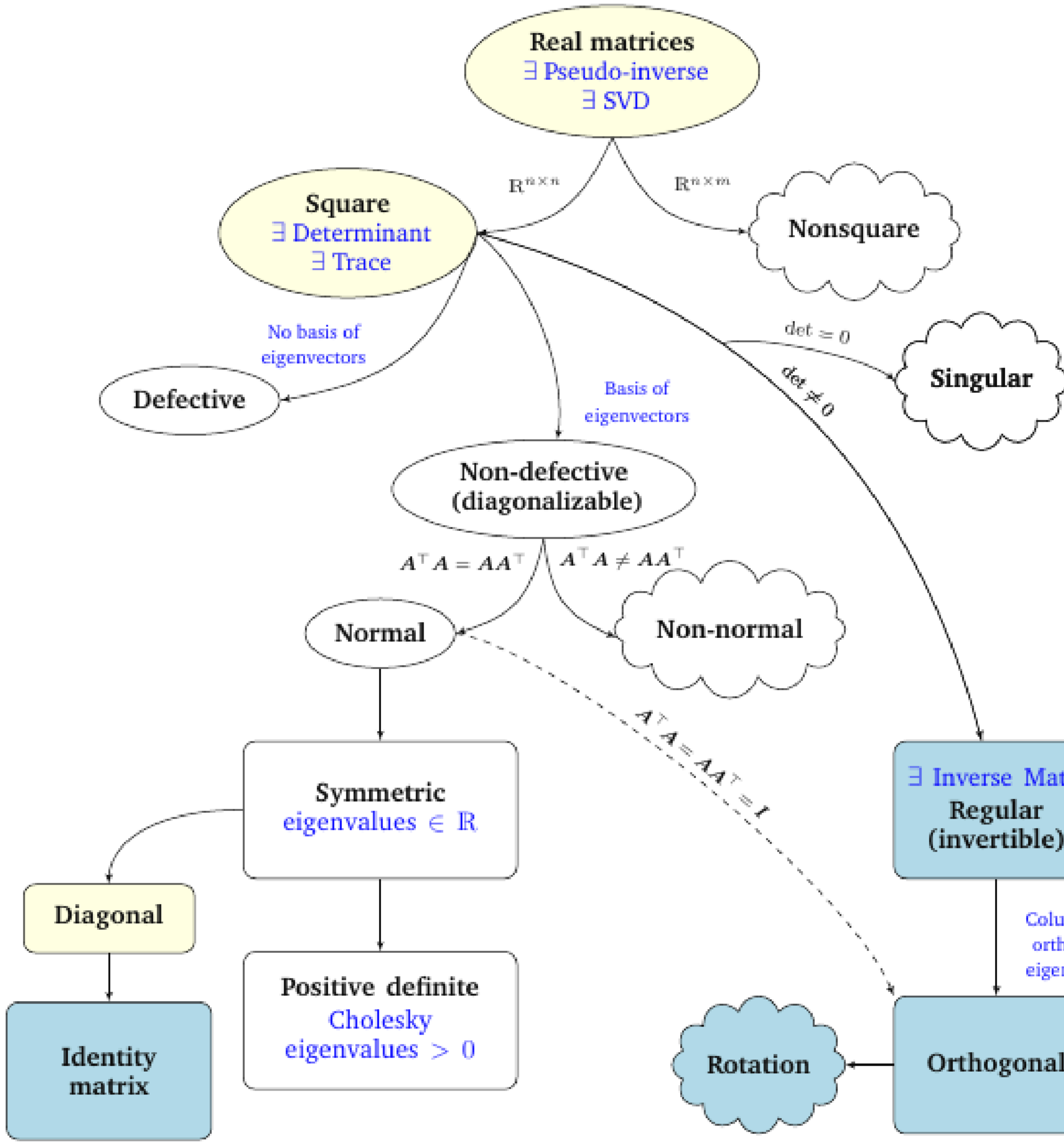


(e) Rank-4 approximation $\widehat{\boldsymbol{A}}(4)$.



(f) Rank-5 approximation $\widehat{\boldsymbol{A}}(5)$.

4.7 Matrix Phylogeny


Real matrices
∃ Pseudo-inverse
∃ SVD
$\mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathbb{R}^{n\times m}$
Square
∃ Determinant
∃ Trace
Nonsquare
No basis of eigenvectors
Defective
Basis of eigenvectors
det = 0
det ≠ 0
Singular
Non-defective (diagonalizable)
$A^\top A = AA^\top$
$A^\top A \neq AA^\top$
Normal
Non-normal
$A^\top A = AA^\top = I$
Symmetric
eigenvalues ∈ ℝ
∃ Inverse Matrix
Regular (invertible)
Diagonal
Columns are orthogonal eigenvectors
Positive definite
Cholesky
eigenvalues > 0
Identity matrix
Rotation
Orthogonal