

Analiza občutljivosti linearnega programa

Žaklina Jelušić, Anja Zavrl

24. 2. 2017

1 Opis občutljivosti linearnega programa

Pri analizi občutljivosti želimo ugotoviti, kaj se zgodi z optimalno rešitvijo, če spremenimo kakšen koeficient v linearnem programu. Zanima nas za koliko lahko spremenimo koeficiente ciljne funkcije ali desno-stranske koeficiente pri pogojnih funkcijah, da naša rešitev ostane razmeroma nespremenjena. Lahko pa opazujemo spremembo, če problemu dodamo novo omejeitev.

Če v nekem primeru majhna sprememba koeficienta povzroči večjo spremembo v naši optimalni rešitvi problema, potem pravimo, da je problem občutljiv, sicer pa je neobčutljiv.

2 Način reševanja

Za analiziranje občutljivosti linearnih programov sva uporabili program R Studio. Obravnavali sva dva primera in s pomočjo grafov prikazali spremembe rešitev in optimalne vrednosti glede na spreminjanje koeficientov. Spreminjali sva koeficiente ciljne funkcije in desno-stranske koeficiente pogojnih funkcij (pri vsakem koraku sva spremenili le po en koeficient), pri prvem primeru pa sva na kratko tudi pokazali kako vpliva dodajanje novega pogoja na končno rešitev.

V R Studiu sva definirali funkcijo, ki je sprejela linearni program in s pomočjo simpleksne metode (ki jo R Studio že vsebuje) vrnila rešitev. S tem sva fiksirali vse koeficiente, nato pa sva po enega spreminjali in opazovali spremembe.

3 Primer kmeta

Kmet ima 8 hektarjev zemlje, ki jo želi nasaditi s pšenico in ječmenom. Za vsak posejan hektar zemlje s pšenico dobi 5000\$ dobička, za vsak hektar zemlje, posejane z ječmenom, pa 3000\$. Za vseh 8 hektarjev zemlje ima na voljo 10 litrov pesticidov. Za vsak hektar, posejan s pšenico, porabi 2 litra pesticidov, za hektar, posejan z ječmenom, pa 1 liter. Kakšen je njegov maksimalni dobiček?

Napišimo ta problem kot linearni program:

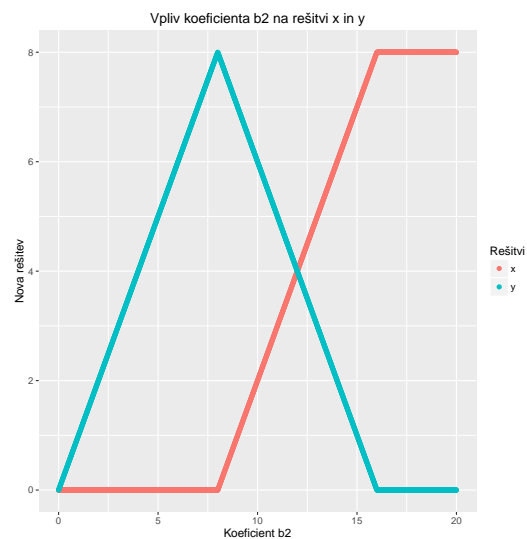
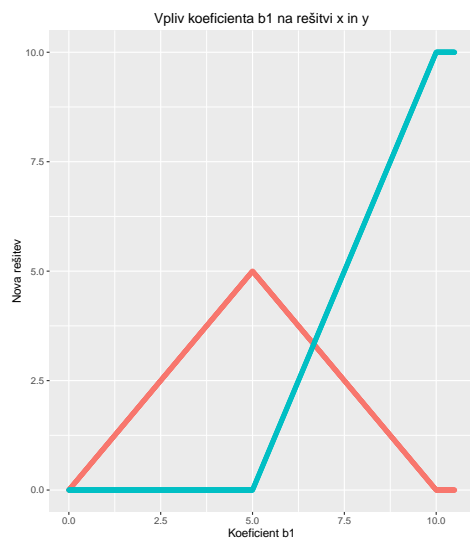
$$\begin{aligned} \max \quad & p = 5000x + 3000y \\ \text{p.p.} \quad & x + y \leq 8 \\ & 2x + y \leq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Rešitev tega problema je $x = 2, y = 6, p = 28000$.

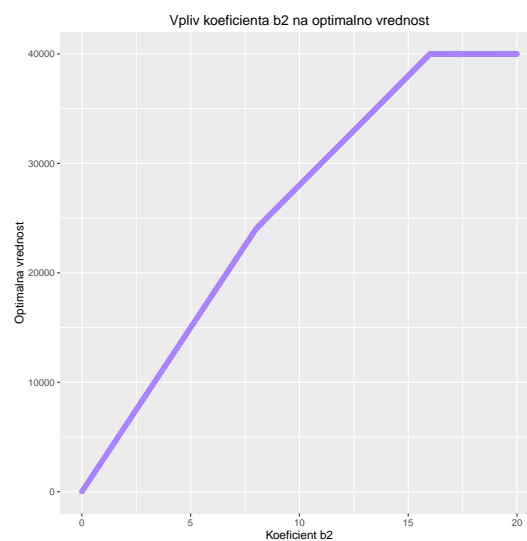
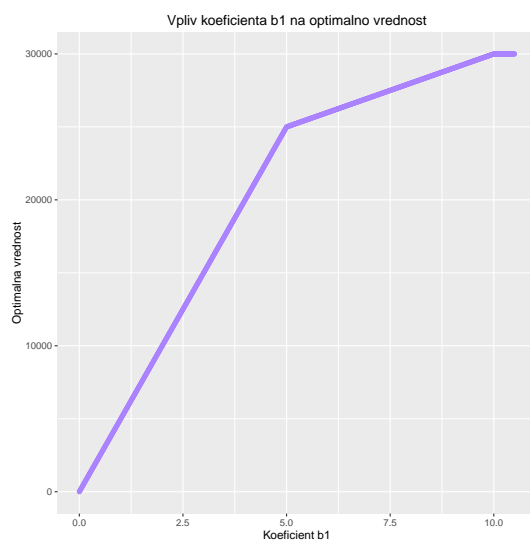
Čeprav so rešitve celoštevilske, sva pri analizi občutljivosti tega primera predpostavili, da lahko za rešitev dobimo katerokoli pozitivno realno število.

Najprej sva pogledali kaj se zgodi pri spremembi **desno-stranskih koeficientov pri pogojnih funkcijah**. Koeficient b_1 , ki ima vrednost 8, sva spreminjali na intervalu $[0, 10.5]$ s korakom 0.01. Intervale sva izbirali tako, da so spremembe na grafu čim bolj vidne. Korake sva vmes spreminjali in opazovali, kaj se dogaja. Opazili sva, da sprememba koeficienta b_1 povzroči naraščanje y , ki je od neke točke naprej konstanta. Za spremembo rešitve x pa velja, da vrednost najprej narašča, potem začne padati, ko pa sprememba koeficienta b_1 doseže vrednost 10, je x konstantno enak 0.

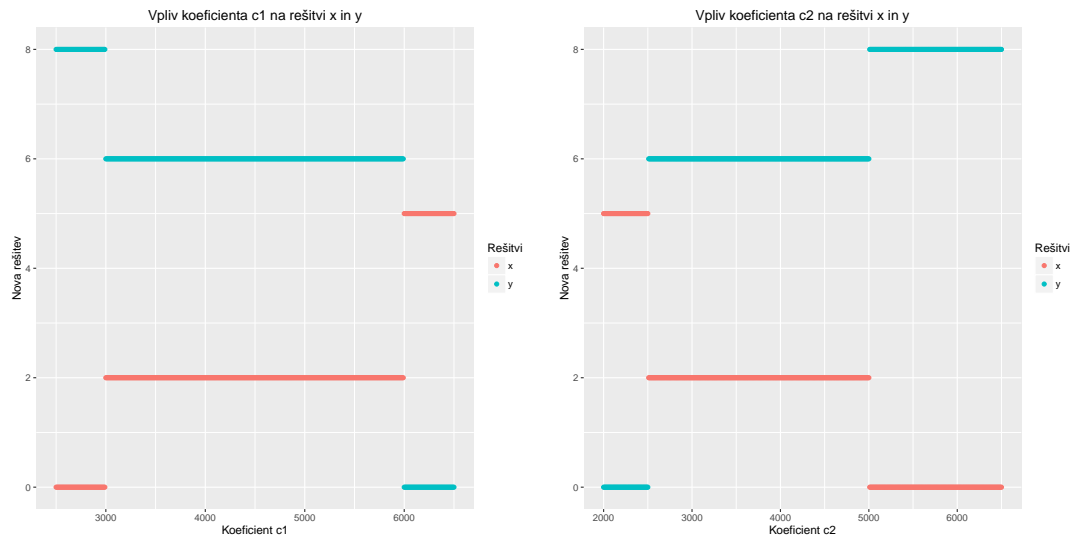
Koeficient b_2 , ki ima vrednost 10, sva spreminjali na intervalu $[0, 20]$ prav tako s korakom 0.01. Iz grafa je lepo razvidno, da sta v tem primeru rešitvi obratni tisti, pri spremembi koeficienta b_1 ; v smislu, da je sedaj rešitev x do neke točke konstantno enaka 0, potem začne naraščati, nato pa ponovno postane konstantna, rešitev y pa najprej narašča, nato začne padati do vrednosti 0, pri večjih spremembah pa je enaka 0. Vsi lomi grafov, tako pri spremembi koeficientov b_1 , kot pri spremembi b_2 , se zgodijo pri isti točki. In sicer za spremembo koeficienta b_1 sta to števili 5 in 10, pri spremembi b_2 pa 8 in 16.



Naša optimalna rešitev te naloge je 28000\$. Tako za spremembo koeficienta b_1 kot b_2 je optimalna vrednost nižja, če koeficienta znižamo od prvotnega, in višja, če tega povišamo.



Nato pa sva pogledali še spremembo **koeficientov ciljne funkcije**. Koeficient $c_1 = 5000$ sva spreminjali na intervalu $[2500, 6000]$, s korakom 10. V našem primeru c_1 predstavlja dobiček za vsak posejan hektar zemlje s pšenico. Vrednosti x , torej hektarji zemlje posejani s pšenico, naraščajo, medtem ko število hektarjev zemlje, posejane z ječmenom, pada. Vmes so skoki pri $c_1 = 3000$ in $c_1 = 6000$.



Nasprotno velja za spremembo koeficienta c_2 , torej za dobiček posejanih hektarjev zemlje z ječmenom. Tukaj vrednosti x padajo ter vrednosti y naračajo. Skoki so tokrat pri vrednostih $c_2 = 2500$ in 5000 .

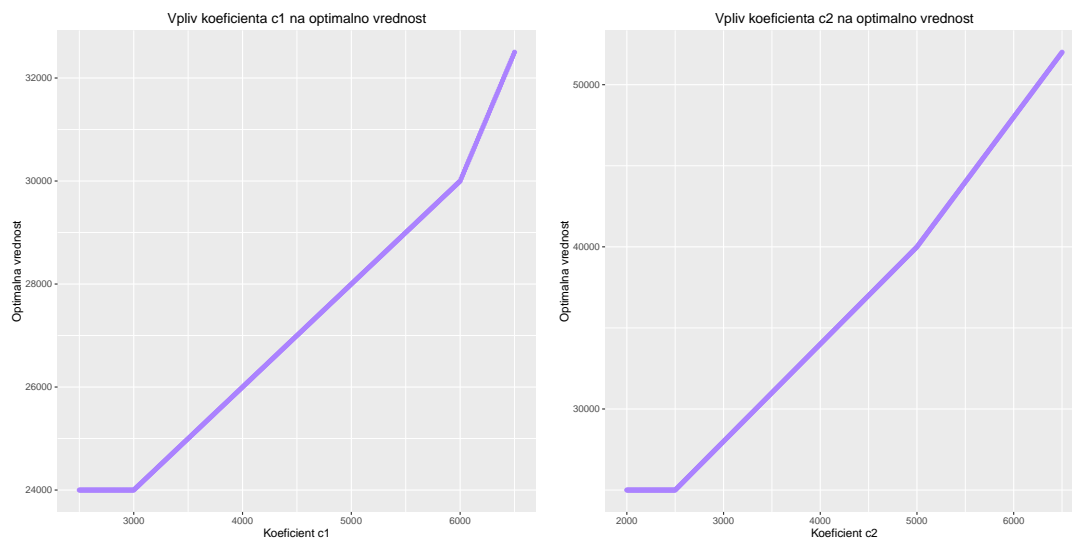
Kako pa sprememba vpliva na optimalno vrednost?

Tudi v tem primeru povečanje dobička pšenice in ječmena vpliva na skupni dobiček tako, da se tudi ta poveča, in obratno, če koeficiente znižamo. Graf je sprva konstanten, pri spremembi c_1 do vrednosti 3000, pri spremembi c_2 pa do vrednosti 2500. Od teh vrednosti dalje pa optimalna vrednost narašča (kasneje začne pri vrednosti $c_1 = 6000$ oziroma $c_2 = 5000$ še bolj strmo naraščati).

3.1 Dodajanje novega pogoja

Recimo, da ima kmet za zalivanje poljščin na voljo le 20 hektolitrov vode. Za vsak hektar zemlje, posejanje s pšenico, porabi 5 hektolitrov vode, za vsak hektar, posejan z ječmenom, pa 3 hektolitrov vode. To zapišemo kot $5x + 3y \leq 20$.

Pogoj sicer zadošča problemu, vendar se optimalna vrednost zmanjša. Rešitev problema je sedaj enaka $p = 20000, x = 4, y = 0$.



Če bi imel na voljo 40 hektolitrov vode (torej $5x + 3y \leq 20$), se rešitev ne bi spremenila. Če pa bi za pogoj vzeli, da mora kmet porabiti vsaj 30 hektolitrov vode, da bi pšenica in ječmen sploh zrastle (torej $5x + 3y \geq 30$), pa bi problem postal nerešljiv.

4 Primer 2

$$\max \quad p = 2x + 4y + 3w + z$$

$$\text{p.p.} \quad 3x + y + w + 4z \leq 12$$

$$x - 3y + 2w + 3z \leq 7$$

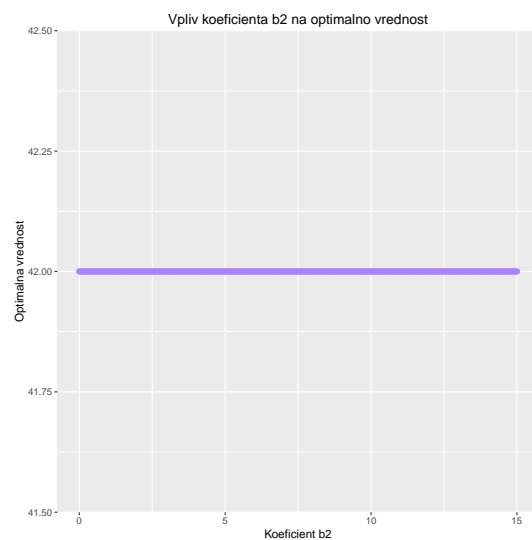
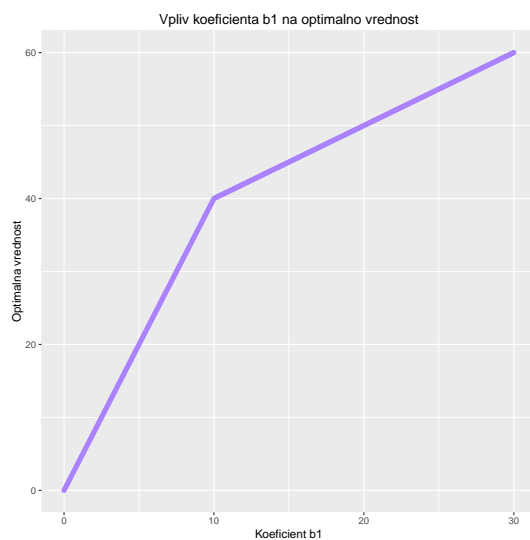
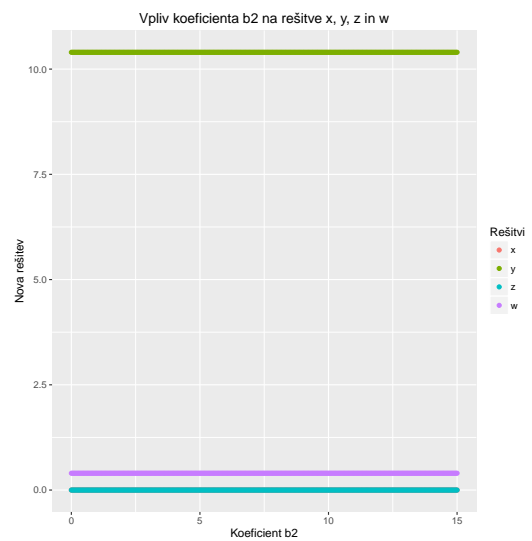
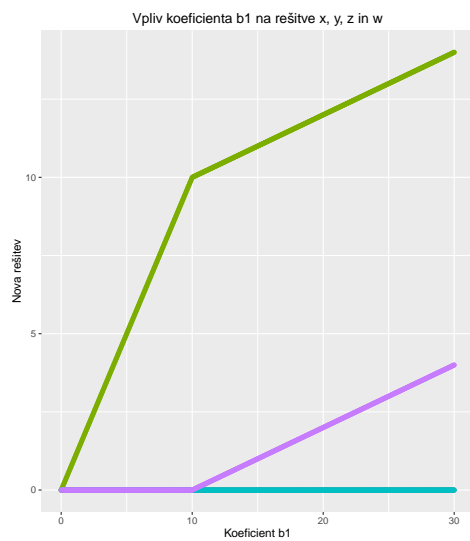
$$2x + y + 3w - z \leq 10$$

$$x, y, w, z \geq 0$$

Rešitev problema je: $p = 42, x = 0, y = 10.4, w = 0, z = 0.4$.

Za primer 2 sva vzeli uvodni primer iz kratke predstavitve, ker niso vse rešitve celoštevilske, poleg tega pa sta vrednosti x in w enaki 0. Pri tem primeru bova grafično predstavili le najbolj zanimive spremembe.

Podobno kot pri prvem primeru, sva najprej pogledali spremembe pri **desno-stranskih koeficientih pri pogojnih funkcij**. Koeficient b_1 je v tem primeru enak 12. Spreminjali sva ga na intervalu $[0, 20]$ s korakom 0.05. Pri spremembi b_1 vrednosti y naraščajo od samega začetka. Vrednosti w so do vrednosti koeficienta $b_1 = 10$ konstantne, kjer je lom tudi za spremembo vrednosti y , od tod naprej pa naraščajo. Medtem pa so vrednosti x in z



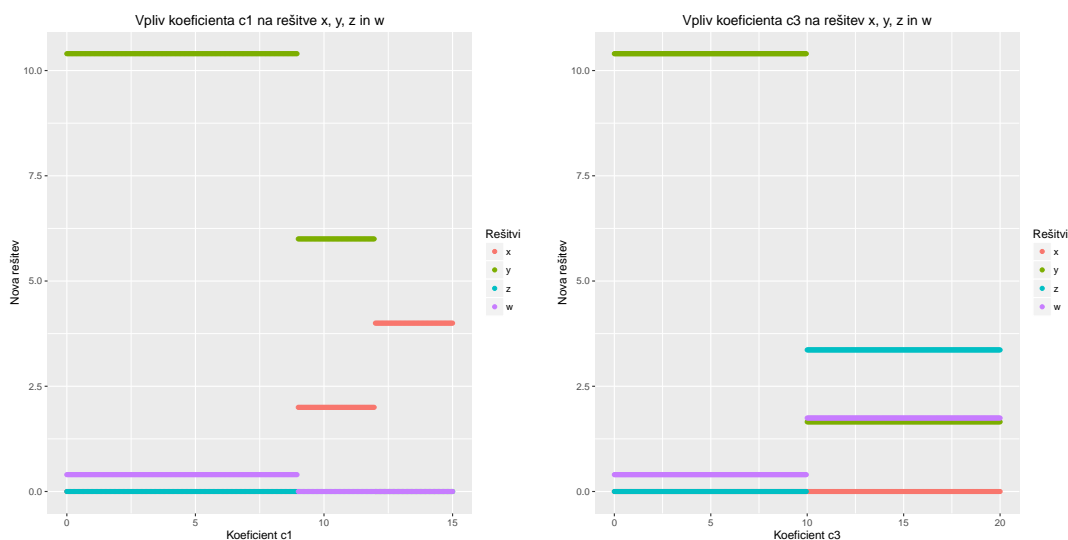
konstantno enake 0.

Pri spremembi b_2 , ki je enak 7, je zanimivo to, da so vse rešitve enake naši splošni rešitvi. Tukaj sva se osredotočili na interval $[0, 15]$ s korakom 0.05. V tem primeru je potem tudi optimalna rešitev enaka 42, ne glede na spremembo koeficienta b_2 . Torej sprememba tega koeficienta ne vpliva na ta problem. Medtem pa optimalna rešitev pri večanju b_1 narašča in ima prelom pri $b_1 = 10$, tako kot za ostale rešitve x, y, z in w .

Pri spremembi pogoja $b_3 = 10$ na intervalu $[7, 15]$ s korakom 0.05 rešitve

za y naraščajo, nasprotno pa rešitve za w padajo. Prelom je pri $b_3 = 12$. Rešitvi x in z pa sta konstantno enaki 0. Prav tako je prelom pri $b_3 = 12$ pri spremembi optimalne vrednosti, kjer ta najprej narašča, nato pa je konstantna in enaka 48.

Pri ciljni funkciji sva najprej spreminjali koeficient $c_1 = 2$. Vzeli sva interval $[0, 15]$ s korakom 0.05. Rešitev za x je naraščajoča, s skoki. Sprva je enaka 0, nato pa ji sledita dva skoka. Rešitvi y in w padata, ravno tako v dveh skokih, z pa je konstantno enak 0.



Pri spremembi koeficienta $c_2 = 5$ na intervalu $[0, 5]$ rešitvi w in z padata, y narašča, x pa je konstantno enak 0.

Na intervalu $[0, 20]$ s korakom 0.05 sva opazovali spremembo koeficienta c_3 . Rešitve za y padajo s skoki, medtem pa z in w naraščata, ravno tako s skoki. Rešitev za x je konstantno enaka 0.

Pri spremembi zadnjega koeficienta pa sta tako rešitvi x kot z konstantno enaki 0. Rešitve za y padajo s skokom, obratno pa rešitve za w s skokom naraščajo.

Spremembe vseh koeficientov ciljne funkcije res vplivajo na optimalno vrednost tako, kot sva zapisali v kratkem poročilu; če koeficient zvišamo, se tudi optimalna vrednost poveča, če pa ga znižamo, se zniža tudi optimalna vrednost. Pri spremembah c_1 in c_3 je graf najprej konstantno enak 0 nato začne naraščati. Medtem pa pri spremembi c_2 in c_4 narašča od začetka.

