

# Analiza občutljivosti linearnega programa

## 1 Opis občutljivosti linearnega programa

Pri analizi občutljivosti želimo ugotoviti, kaj se zgodi z optimalno rešitvijo, če spremenimo kakšen koeficient v linearnem programu. Zanima nas za koliko lahko spremenimo koeficiente ciljne funkcije ali desno-stranske koeficiente pri pogojnih funkcijah, da naša rešitev ostane razmeroma nespremenjena. Lahko pa opazujemo spremembo, če problemu dodamo novo omejeitev.

Če v nekem primeru majhna sprememba koeficienta povzroči večjo spremembo v naši optimalni rešitvi problema, potem pravimo, da je problem občutljiv, sicer pa je neobčutljiv.

## 2 Način reševanja

Za analiziranje občutljivosti linearnih programov sva uporabili program R Studio. Obravnavali sva dva primera in s pomočjo grafov prikazali spremembe rešitev in optimalne vrednosti glede na spreminjanje koeficientov. Spreminjali sva koeficiente ciljne funkcije in desno-stranske koeficiente pogojnih funkcij (pri vsakem koraku sva spremenili le po en koeficient), pri prvem primeru pa sva na kratko tudi pokazali kako vpliva dodajanje novega pogoja na končno rešitev.

V R Studiu sva definirali funkcijo, ki je sprejela linearni program in s pomočjo simpleksne metode (ki jo R Studio že vsebuje) vrnila rešitev. S tem sva fiksirali vse koeficiente, nato pa sva po enega spreminjali in opazovali spremembe.

## 3 Primer kmeta

Kmet ima 8 hektarjev zemlje, ki jo želi nasaditi s pšenico in ječmenom. Za vsak posejan hektar zemlje s pšenico dobi 5000\$ dobička, za vsak hektar zemlje, posejane z ječmenom, pa 3000\$. Za vseh 8 hektarjev zemlje ima na voljo 10 litrov pesticidov. Za vsak hektar, posejan s pšenico, porabi 2 litra pesticidov, za hektar, posejan z ječmenom, pa 1 liter. Kakšen je njegov maksimalni dobiček?

Napišimo ta problem kot linearni program:

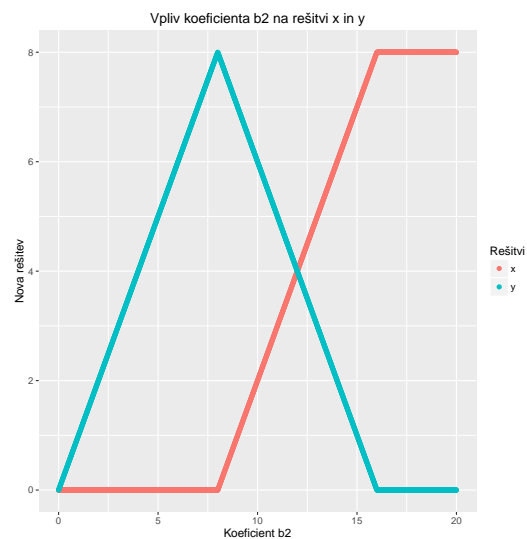
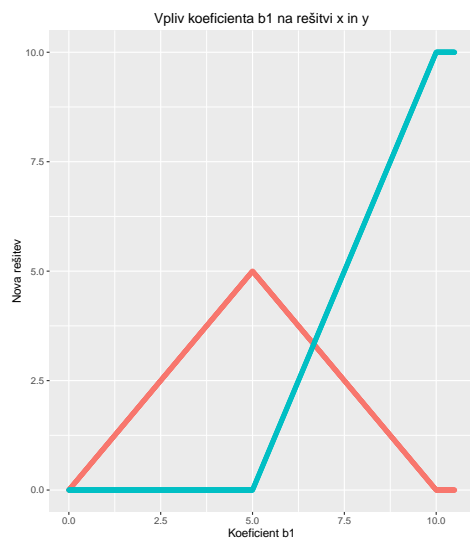
$$\begin{aligned} \max \quad & p = 5000x + 3000y \\ \text{p.p.} \quad & x + y \leq 8 \\ & 2x + y \leq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Rešitev tega problema je  $x = 2, y = 6, p = 28000$ .

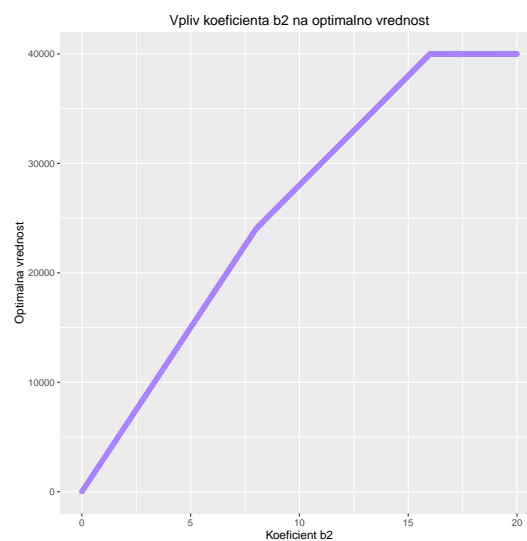
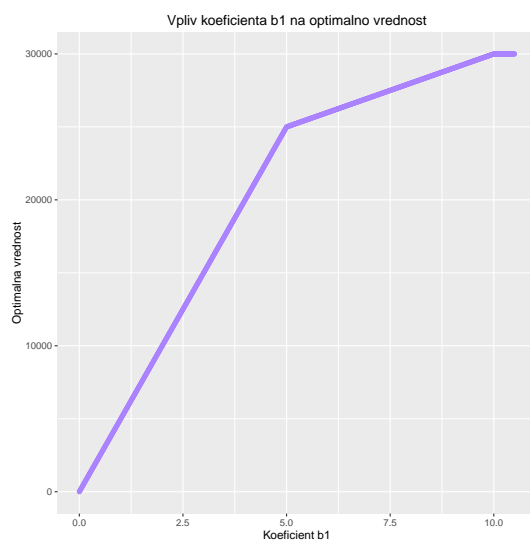
Čeprav so rešitve celoštevilske, sva pri analizi občutljivosti tega primera predpostavili, da lahko za rešitev dobimo katerokoli pozitivno realno število.

Najprej sva pogledali kaj se zgodi pri spremembi **desno-stranskih koeficientov pri pogojnih funkcijah**. Koeficient  $b_1$ , ki ima vrednost 8, sva spreminjali na intervalu  $[0, 10.5]$  s korakom 0.01. Intervale sva izbirali tako, da so spremembe na grafu čim bolj vidne. Korake sva vmes spreminjali in opazovali, kaj se dogaja. Opazili sva, da sprememba koeficienta  $b_1$  povzroči naraščanje  $y$ , ki je od neke točke naprej konstanta. Za spremembo rešitve  $x$  pa velja, da vrednost najprej narašča, potem začne padati, ko pa sprememba koeficienta  $b_1$  doseže vrednost 10, je  $x$  konstantno enak 0.

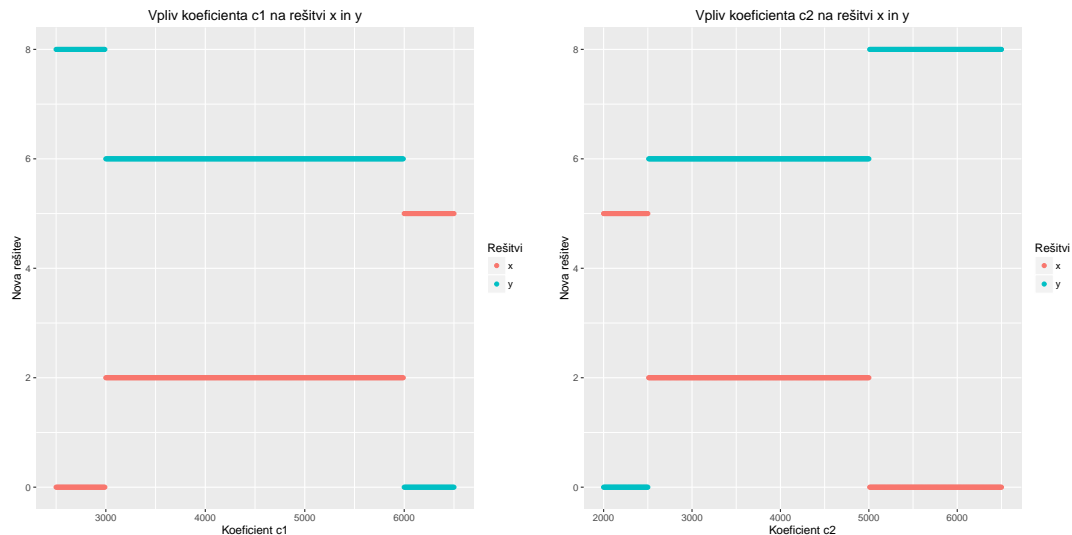
Koeficient  $b_2$ , ki ima vrednost 10, sva spreminjali na intervalu  $[0, 20]$  prav tako s korakom 0.01. Iz grafa je lepo razvidno, da sta v tem primeru rešitvi obratni tisti, pri spremembi koeficienta  $b_1$ ; v smislu, da je sedaj rešitev  $x$  do neke točke konstantno enaka 0, potem začne naraščati, nato pa ponovno postane konstantna, rešitev  $y$  pa najprej narašča, nato začne padati do vrednosti 0, pri večjih spremembah pa je enaka 0. Vsi lomi grafov, tako pri spremembi koeficientov  $b_1$ , kot pri spremembi  $b_2$ , se zgodijo pri isti točki. In sicer za spremembo koeficienta  $b_1$  sta to števili 5 in 10, pri spremembi  $b_2$  pa 8 in 16.



Naša optimalna rešitev te naloge je 28000\$. Tako za spremembo koeficienta  $b_1$  kot  $b_2$  je optimalna vrednost nižja, če koeficienta znižamo od prvotnega, in višja, če tega povišamo.



Nato pa sva pogledali še spremembo **koeficientov ciljne funkcije**. Koeficient  $c_1 = 5000$  sva spreminjali na intervalu  $[2500, 6000]$ , s korakom 10. V našem primeru  $c_1$  predstavlja dobiček za vsak posejan hektar zemlje s pšenico. Vrednosti  $x$ , torej hektarji zemlje posejani s pšenico, naraščajo, medtem ko število hektarjev zemlje, posejane z ječmenom, pada. Vmes so skoki pri  $c_1 = 3000$  in  $c_1 = 6000$ .



Nasprotno velja za spremembo koeficienta  $c_2$ , torej za dobiček posejanih hektarjev zemlje z ječmenom. Tukaj vrednosti  $x$  padajo ter vrednosti  $y$  naračajo. Skoki so tokrat pri vrednostih  $c_2 = 2500$  in  $5000$ .

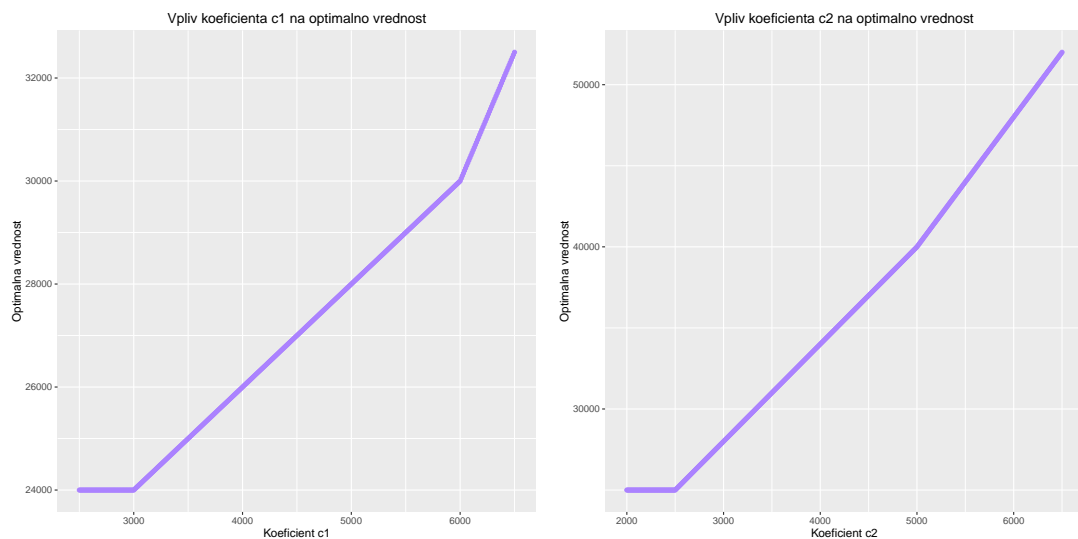
Kako pa sprememba vpliva na optimalno vrednost?

Tudi v tem primeru sprememba dobička pšenice in ječmena vpliva na skupni dobiček. Sprva je konstanta, pri spremembi  $c_1$  do vrednosti 3000, pri spremembi  $c_2$  pa do vrednosti 2500. Od teh vrednosti dalje pa optimalna vrednost narašča (kasneje začne pri vrednosti  $c_1 = 6000$  oziroma  $c_2 = 5000$  še bolj strmo naraščati).

### 3.1 Dodajanje novega pogoja

Recimo, da ima kmet za zalivanje poljščin na voljo le 20 litrov vode. Za vsak hektar zemlje, posejanje s pšenico, porabi 5 litrov vode, za vsak hektar, posejan z ječmenom, pa 3 litre vode. Pogoj zapišemo kot  $5x + 3y \leq 20$ .

Pogoj sicer zadošča problemu, vendar se optimalna vrednost zmanjša. Rešitev problema je sedaj enaka  $p = 20000, x = 4, y = 0$ .



## 4 Primer 2

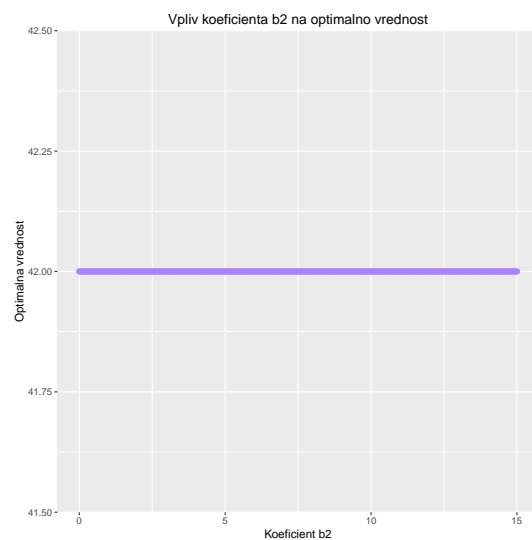
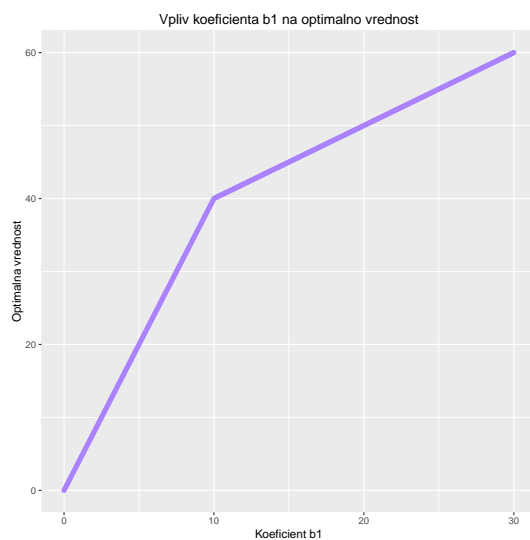
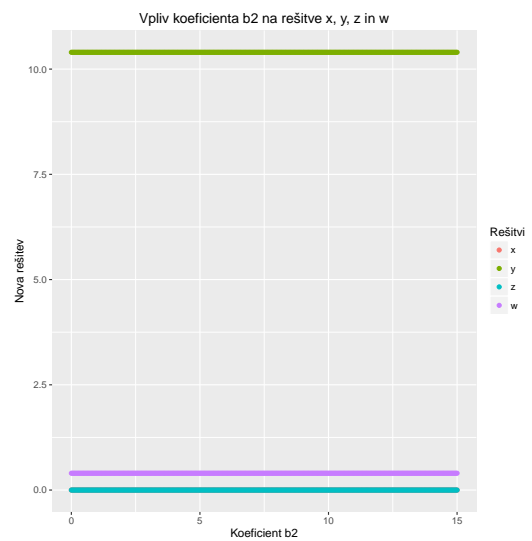
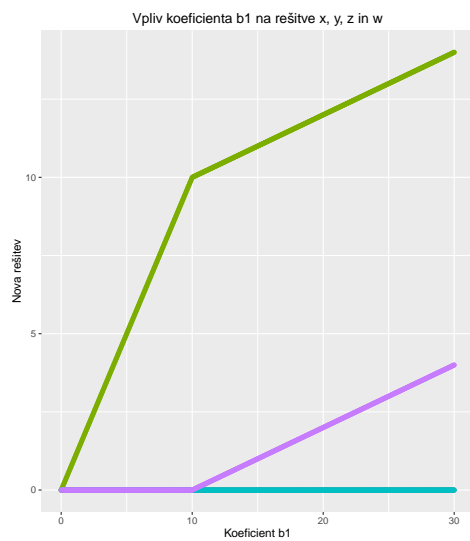
$$\begin{aligned}
 \max \quad & p = 2x + 4y + 3w + z \\
 \text{p.p.} \quad & 3x + y + w + 4z \leq 12 \\
 & x - 3y + 2w + 3z \leq 7 \\
 & 2x + y + 3w - z \leq 10 \\
 & x, y, w, z \geq 0
 \end{aligned}$$

Rešitev problema je:  $p = 42, x = 0, y = 10.4, w = 0, z = 0.4$ .

Za primer 2 sva vzeli uvodni primer iz kratke predstavitve, ker niso vse rešitve celoštevilske, poleg tega pa sta vrednosti  $x$  in  $w$  enaki 0.

Podobno kot pri prvem primeru, sva najprej pogledali spremembe pri **desno-stranskih koeficientih pri pogojnih funkcij**. Koeficient  $b_1$  je v tem primeru enak 12. Spreminjali sva ga na intervalu  $[0, 20]$  s korakom 0.05. Pri spremembi  $b_1$  vrednosti  $y$  naraščajo od samega začetka. Vrednosti  $w$  so do vrednosti koeficienta  $b_1 = 10$  konstantne, kjer je lom tudi za spremembo vrednosti  $y$ , od tod naprej pa naraščajo. Medtem pa so vrednosti  $x$  in  $z$  konstantno enake 0.

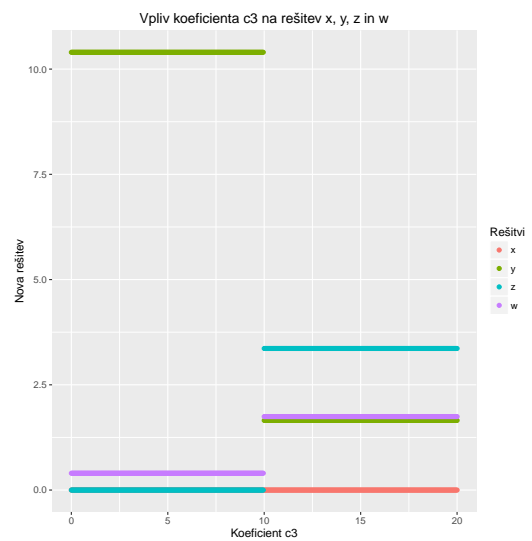
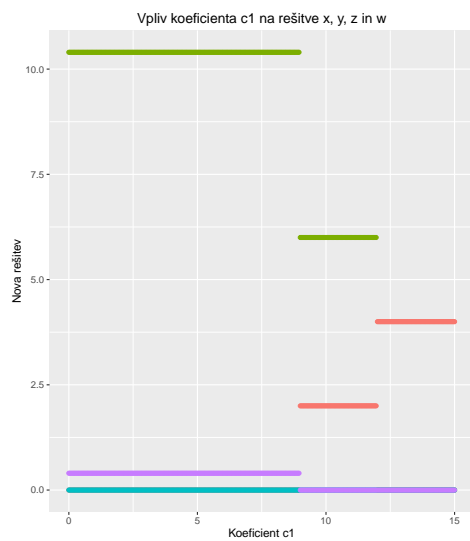
Pri spremembi  $b_2$ , ki je enak 7, je zanimivo to, da so vse rešitve enake naši splošni rešitvi. Tukaj sva se osredotočili na interval  $[0, 15]$  s korakom 0.05. V tem primeru je potem tudi optimalna rešitev enaka, torej 42, ne glede na spremembo koeficienta  $b_2$ . Torej sprememba tega koeficienta ne vpliva na naš problem. Medtem pa optimalna rešitev pri spremembi  $b_1$  narašča in ima prelom pri  $b_1 = 10$ , tako kot za ostale rešitve  $x, y, z$  in  $w$ .



Pri ciljni funkciji sva najprej spreminjali koeficient  $c_1 = 2$ . Vzeli sva interval  $[0, 15]$  s korakom 0.05. Rešitev za  $x$  je naraščajoča, s skoki. Sprva je enaka 0, nato pa ji sledita dva skoka. Rešitvi  $y$  in  $w$  padata, ravno tako v dveh skokih,  $z$  pa je konstantno enak 0.

Na intervalu  $[0, 20]$  s korakom 0.05 sva opazovali spremembo koeficienta  $c_3$ . Rešitve za  $y$  padajo s skoki, medtem pa  $z$  in  $w$  naraščata, ravno tako s skoki. Rešitev za  $x$  je konstantno enaka 0.

Vse spremembe na optimalno vrednost naraščajo. Pri spremembi  $c_1$  in



$c_3$  so te najprej konstantno enake 0 nato začnejo naraščati. Medtem pa pri spremembi  $c_2$  in  $c_4$  rešitve naraščajo od začetka.

