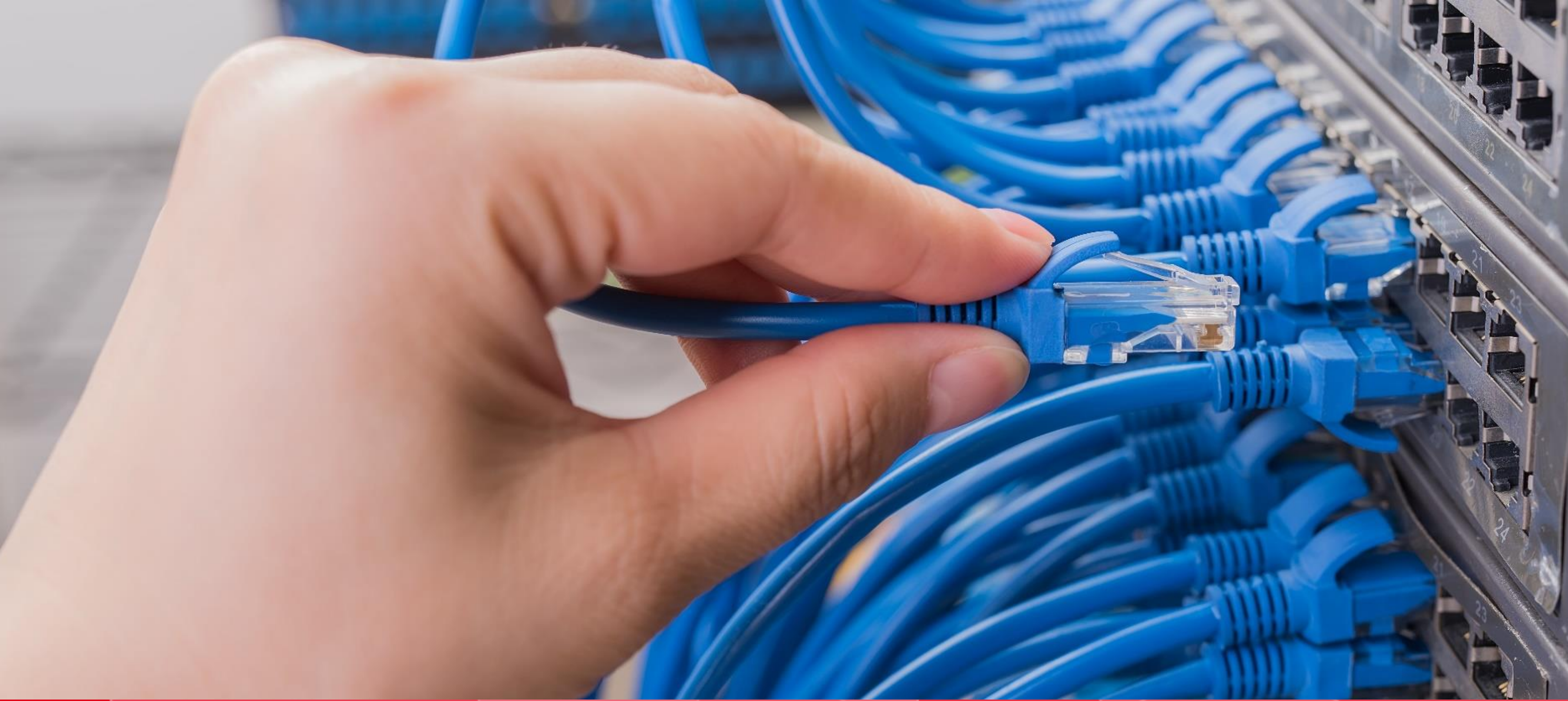


MATEMÁTICA APLICADA

INTRODUCTORIO

UNIDAD I: SUCESIONES

Índice

Introducción

El presente documento tiene como finalidad que comprendas los elementos correspondientes al concepto de sucesiones y a su operatoria. Para ello, revisaremos las características y significancia del concepto de sucesión; la teoría de conjuntos, enfocada a los elementos de pertenencia (conjuntos y subconjuntos); elementos de monotonía, correspondiente al crecimiento y decrecimiento; elementos de convergencia de sucesiones; y, por último, se observarán los elementos de progresiones aritméticas, geométricas y sus términos generales.

En este contexto, tendrás la posibilidad de profundizar y observar la aplicabilidad de las sucesiones a través de ejemplos de cada uno de los conceptos trabajados.

Te invitamos a leer los materiales y actividades propuestas en esta unidad, con el propósito de generar conocimientos teóricos y prácticos en torno a las sucesiones y sus elementos, por cuanto ayudan a reconocer comportamientos numéricos.

¡Éxito en este desafío!

Tema 1. Conjuntos y sistemas numéricos

Los conjuntos y sistemas numéricos son los elementos con los cuales vamos a trabajar en este primer tema. Recurrimos a estos elementos matemáticos para introducir el tema de las sucesiones, ya que estos operan con distintos sistemas numéricos y subconjuntos de los mismos.

1.1. Álgebra de conjuntos

Un conjunto corresponde a una agrupación o colección de elementos que comparten una característica en común. ¿Qué significa esto? Fundamentalmente, que todos los elementos que conforman un conjunto se podrán diferenciar de otros elementos a través de esta característica, pudiendo existir más de un conjunto relacionado entre sí.

El álgebra de conjuntos corresponde a operaciones que se pueden realizar entre los distintos conjuntos numéricos. Dentro de estas, podemos encontrar la intersección, la unión, el complemento, entre otros.

Para representar los conjuntos utilizaremos las letras mayúsculas del abecedario (A, B, C, etc.) y sus entes o elementos los representaremos con letras minúsculas (a, b, c, etc.).

La operación a realizar entre conjuntos que utilizaremos para esta sección corresponde a la pertenencia y subconjuntos:

Ejemplo N°1

Para determinar que un elemento está contenido en un conjunto se utilizará el símbolo ∈. ¡Veamos!

$$x \in A$$

Como puedes observar, en el ejemplo se específica que el “*x*” está contenido en el conjunto “*A*”. Este ejemplo también se puede leer “*x* pertenece a *A*”.

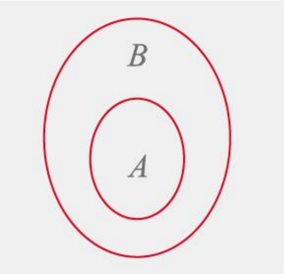
Ejemplo N° 2

En cambio, para determinar que un elemento “no pertenece” o “no está contenido en” un conjunto se utilizará el símbolo ∉. ¡Veamos!

$$x \notin A$$

1.1.1 Subconjuntos

¿Qué son los subconjuntos? En términos concretos, se denominan subconjuntos a los conjuntos de elementos que se encuentran dentro de un conjunto más grande. Esto, según Kolman, Busby y Ross (1997), se puede determinar de la siguiente forma: "si cada elemento de A es también un elemento de B, es decir, si siempre que $x \in A$ ocurre que $x \in B$, se dice que A es un subconjunto de B o que A está contenido en B" (p.22). ¡Veamos!



En este ejemplo, el conjunto "A" está dentro del conjunto "B", que es lo mismo que decir que "A es subconjunto de B".

En escritura matemática, el diagrama (Figura 1) se debe definir de la siguiente forma:

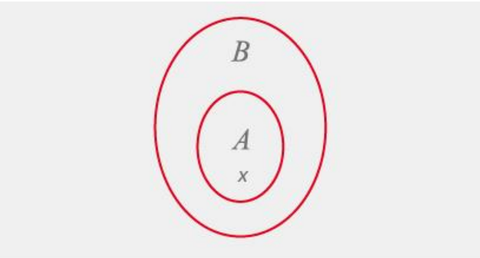
$A \subseteq B$ o $B \supseteq A$.

Símbolo clave:

El símbolo ⊆ significa subconjunto de un conjunto. Por ejemplo: $A \subseteq B$, el cual se lee "A" subconjunto de "B".

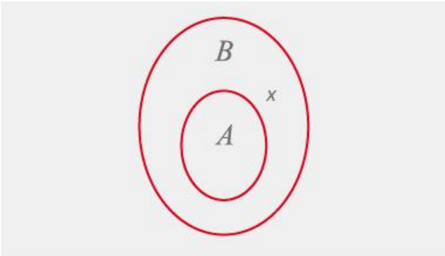
>FIGURA 1. Diagrama de subconjunto. Fuente: Elaboración propia.

En este sentido, es posible determinar que todo elemento que pertenezca conjunto "A", también pertenece al conjunto "B". Sin embargo, tal como se observa en la figura 3, no todo elemento de "B" pertenece a "A". A continuación se presentan dos diagramas que grafican estos subconjuntos:



>FIGURA 2. Elemento que pertenece a ambos conjuntos. Fuente: Elaboración propia

En este diagrama es posible comprobar que el elemento "x" pertenece a ambos conjuntos, expresándose como "$x \in A$" y "$x \in B$"



>FIGURA 3: Elemento que solo pertenece a "B". Fuente: Elaboración propia.

En este diagrama, en cambio, es posible determinar que el "x" solo pertenece al conjunto B, expresándose como "$x \notin A$" y "$x \in B$".

1.2 Sistemas numéricos

Existen diferencias entre las propiedades universales de los números y las leyes que rigen los distintos sistemas de numeración, entendidos estos como diferentes conjuntos de representaciones y relaciones entre los elementos representados. Los sistemas de numeración son el resultado de largos procesos históricos, derivando en representaciones arbitrarias y socialmente aceptadas.

En términos concretos, los sistemas numéricos hacen referencia al conjunto de elementos y de relaciones existentes entre los distintos elementos que conforman un conjunto, los que se van formando o ampliando a medida que las operaciones se desarrollan en cada una de ellas.

Desde esta perspectiva, la particularidad de todo conjunto numérico es su capacidad de realizar operaciones con cada uno de sus elementos. En este sentido, cuando una de las operaciones no se puede realizar en un conjunto numérico, se debe ampliar el conjunto a uno en donde las operaciones puedan llevarse a cabo.

Esta característica denominada "propiedad de clausura", debe regirse en cualquier conjunto dentro del sistema numérico. En el caso de que no se esté cumpliendo, lo que se debe hacer es ampliar el conjunto. Aquello se puede observar en el conjunto de números naturales, en donde existen muchas operaciones que no permiten integrar los elementos resultantes al conjunto de números naturales. Por ejemplo, en una resta en el conjunto de los números naturales. ¡Veamos!

La propiedad de clausura en sistemas numéricos indica que si dos elementos de un conjunto son realizados con alguna función (operación), su resultado debe pertenecer al mismo conjunto.

Ejemplo N°3

En la operación $1 - 2 = -1$, si bien el 1 y 2 pertenecen al conjunto de los naturales, su resultado, en este caso -1, no pertenece al mismo conjunto.

En este contexto, al no cumplirse la propiedad de clausura se debe ampliar el conjunto.

Como es posible observar, dependiendo del tipo de operaciones, se forman distintos sistemas numéricos, se agregan nuevos elementos a los conjuntos y se generan nuevos conjuntos. Es así como dentro de los conjuntos numéricos encontramos los *Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales, Reales y Complejos*.

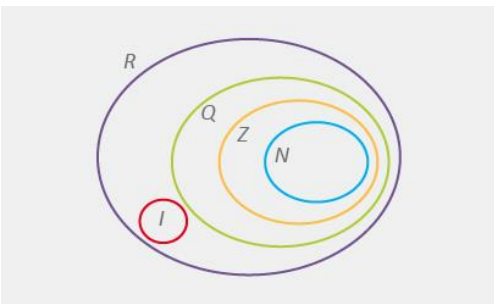
Recuerda que…

Un conjunto es lo mismo que un sistema numérico.

Conjuntos numéricos

$\mathbb{N}\ (naturales)$: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots \dots \dots$
$\mathbb{Z}(enteros)$: $\dots \dots \dots . -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots.$
$\mathbb{Q}(racionales)$: $\dots \dots \dots -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots 0 \dots .\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \dots \dots$
$I(irracionales)$: $\pi, e, \varphi, \sqrt{2}, \dots.$
$\mathbb{R}(reales)$: $\mathbb{Q} \cup I$

¿Cómo nacieron estos conjuntos? Cada uno de estos conjuntos se fue construyendo en función de las necesidades de la sociedad y de la disciplina matemática, con el propósito otorgarle mayor funcionalidad. Para que entiendas cómo funcionan desde la teoría de conjuntos, observa la figura 4.

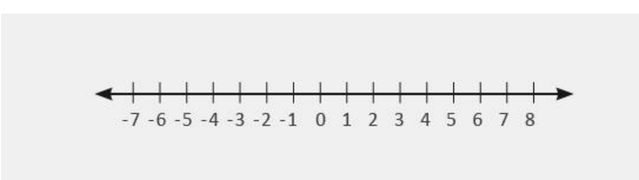


>FIGURA 4: Conjuntos numéricos. Fuente: Elaboración propia

Tal como se visualiza en el diagrama de los conjuntos numéricos, el conjunto más grandes corresponde a los números reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, el cual está formado por varios subconjuntos que se representan de la siguiente forma $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Recta numérica

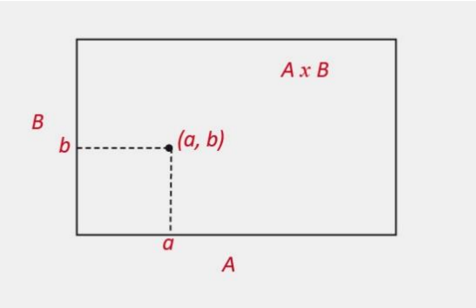
La recta numérica tiene como funcionalidad representar los conjuntos numéricos de forma ordenada (creciente) y distinguir los conjuntos en la recta, tal como se grafica en la figura 5.



>FIGURA 5: Recta numérica. Fuente: Elaboración propia

Producto cartesiano entre los conjuntos A y B

Utilizando estos conjuntos es posible encontrar el producto cartesiano, el cual es el encargado de generar el conjunto de los pares ordenados. En este sentido, se puede definir que si A y B son dos conjuntos no vacíos, entonces el cartesiano AxB de A y B es el conjunto de los pares ordenados (a,b), con $a \in A$ y $b \in B$, tal como se muestra en la figura 6.



> En este ejemplo, podemos encontrar el plano cartesiano como elemento para representar el producto cartesiano entre dos conjuntos.

> *FIGURA 6: Producto cartesiano entre los conjuntos A y B. Fuente: Elaboración propia*

Tema 2. Sucesiones reales

Al observar las distintas relaciones que se pueden generar con los conjuntos numéricos vistos en los parágrafos anteriores, podemos encontrar las funciones y a las sucesiones.

En este apartado trabajaremos con el tema de las sucesiones, las cuales corresponden a relaciones entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los reales. Para analizar esta relación generada por la sucesión, podemos encontrar su expresión algebraica, conjunto de términos y comportamiento en el plano cartesiano, a través de pares ordenados.

Te invitamos a revisar los tópicos que tienen relación a este tema matemático. ¡Mucho éxito!

2.1 Definición

Definiremos como una sucesión de números reales (o sucesión en R) a una función de los números naturales (conjunto N) en el dominio que nos entrega números reales (conjunto R) en el recorrido.

Recuerda que…

Una función es una herramienta que toma elementos del dominio y los transforma en elementos del recorrido. Ejemplo: $f(x) = 2x + 5$; si tomamos el x=-3 del dominio, obtenemos como resultado: $f(-3) = 2 * -3 + 5 = -1$. Por tanto el recorrido de x=-3 es y=-1. No olvides que *f(x) = y*.

En términos matemáticos, una sucesión se denota por $\{a_n\}$, donde *n* determina el lugar que ocupa el término de la sucesión. Como el dominio de una sucesión $\{a_n\}$ es el conjunto de los números naturales, $n = 1, 2, 3$ …, la sucesión asigna a cada número natural del dominio un número real que corresponde a los elementos de la sucesión.

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3 \ldots \ldots \ldots \ldots a_n$$

La sucesión $\{a_n\}$ corresponde al término general de la sucesión, la cual genera todos los resultados de esta. A continuación te mostramos algunos ejemplos.

Ejemplos:

1. $a_n = n$

   $a_n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \ldots$

2. $b_n = \frac{1}{n}$

   $b_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \ldots$

3. $c_n = (-1)^n$

   $c_n = -1, 1, -1, 1 - 1, \ldots \ldots$

2.2 Operatoria de las sucesiones

Debido a que las sucesiones son conjuntos de pares ordenados, es posible realizar operaciones algebraicas entre dos o más sucesiones. En este sentido, ¿qué sucesiones reales se utilizarán para las siguientes propiedades? Si definimos a $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde X es una sucesión $\{X_n\} = x_{1,} x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots \ldots$, y a $Y: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, con $\{Y_n\} = y_{1,} y_2, y_3, y_4, y_5, \ldots \ldots$ como dos sucesiones de números reales, podemos definir las sucesiones de la adición, sustracción, multiplicación, cociente y multiplicación por un escalar.

2.2.1 Adición de sucesiones:

Cuando las sucesiones sean X e Y, definiremos la adición de sucesiones como: $X + Y: \{x_n + y_n: n \in \mathbb{N}\}$, la cual se desarrollará de la siguiente forma:

$$X_n + Y_n = x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots \ldots,$$

Ejemplo:

Cuando las sucesiones sean $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $Y: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $\{X_n\} = 2n$ e $\{Y_n\} = \frac{1}{n}$, los términos de la nueva sucesión definida por la suma serán:

$$\{X_n + Y_n\} = 2n + \frac{1}{n}$$
$$\{X_n + Y_n\} = 2 + 1, 4 + \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{3}, \ldots \ldots$$
$$\{X_n + Y_n\} = 3, \frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \ldots \ldots$$

2.2.2 Sustracción de sucesiones

Cuando las sucesiones sean X e Y, se definirá la adición de sucesiones como:

$X - Y: \{x_n - y_n: n \in \mathbb{N}\}$, la que se desarrollará de la siguiente forma:

$X_n - Y_n = x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots \dots,$

Ejemplo

Cuando las sucesiones sean $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $Y: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $\{X_n\} = n$ e $\{Y_n\} = \frac{n}{2}$, los términos de la nueva sucesión definida por la resta serán:

$$\{X_n - Y_n\} = n - \frac{n}{2}$$
$$\{X_n - Y_n\} = 1 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{2}{2}, 3 - \frac{3}{2}, \dots \dots$$
$$\{X_n - Y_n\} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \dots$$

2.2.3 Multiplicación de sucesiones

Cuando las sucesiones sean X e Y, definiremos la multiplicación de sucesiones como: $X * Y: \{x_n * y_n: n \in \mathbb{N}\}$, la cual se desarrollará de la siguiente forma:

$X_n * Y_n = x_1 * y_1, x_2 * y_2, x_3 * y_3, \dots \dots,$

Ejemplo

Cuando las sucesiones sean $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $Y: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $\{X_n\} = n^2$ e $\{Y_n\} = \frac{1}{n}$, los términos de la nueva sucesión definida por la multiplicación serán:

$$\{X_n * Y_n\} = n^2 * \frac{1}{n}$$
$$\{X_n * Y_n\} = 1 * \frac{1}{1}, 4 * \frac{1}{2}, 9 * \frac{1}{3}, \dots \dots$$
$$\{X_n * Y_n\} = 1, 2, 3, \dots \dots$$

2.2.4 Cociente de sucesiones

Sean las sucesiones X e Y, definiremos el cociente entre sucesiones como:

$X/Y: \{x_n/y_n: n \in \mathbb{N}, con\ Y \neq 0\}$, la cual se desarrollará de la siguiente forma:

$X_n/Y_n = x_1/y_1,\ x_2/y_2,\ x_3/y_3, \dots \dots,$

Ejemplo

Cuando las sucesiones sean $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $Y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\{X_n\} = n$ e $\{Y_n\} = 2n - 1$, los términos de la nueva sucesión definida por la multiplicación serán:

$$\{X_n/Y_n\} = n/2n + 1$$
$$\{X_n/Y_n\} = 1 * \frac{1}{1}, 4 * \frac{1}{2}, 9 * \frac{1}{3}, \dots \dots$$
$$\{X_n/Y_n\} = 1, 2, 3, \dots \dots$$

2.2.5 Multiplicación por escalar

Cuando la sucesión sea $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, se definirá la multiplicación de una sucesión por un escalar como $k * X: \{k * x_n : n \in \mathbb{N}\}$, la que se desarrollarán de la siguiente forma:

$$k * X_n = k * y_1, k * x_2, k * x_3, \dots \dots,$$

Ejemplo

Cuando las sucesiones sean $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, tal que $\{X_n\} = \frac{2}{3}n$ y $k = -2$, los términos de la nueva sucesión definidos por la multiplicación serán:

$$k * \{X_n\} = -2 * \frac{2}{3} n$$
$$k * \{X_n\} = -2 * \frac{2}{3} * 1, -2 * \frac{2}{3} * 2, -2 * \frac{2}{3} * 3, \dots \dots$$
$$k * \{X_n\} = -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{3}, \dots\dots$$

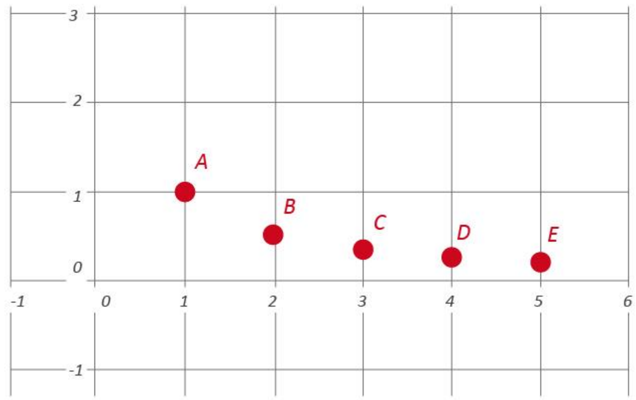
2.3 Gráfica de una sucesión

La denotación de la sucesión $\{a_n\}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, indica que $\{a_n\}$ es una sucesión con dominio en los naturales y recorrido en los reales. Por lo tanto, la representación en el plano de la sucesión corresponderá a puntos aislados y no a un trazo continuo.

Ejemplo

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}$$

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$



> En este caso, como el dominio de la sucesión es el conjunto de los números naturales, no existen puntos entre cada número natural.

Tema 3. Análisis de sucesiones

Las nuevas características que emergen de las sucesiones, se deben en gran medida, a los constantes análisis realizados en torno a esta temática. Entre ellos, encontramos los análisis generados sobre "monotonía", en donde se discute, entre otras cosas, si las sucesiones son crecientes o decrecientes. Asimismo, es posible encontrar análisis sobre convergencia y divergencia, en donde se realizan discusiones en torno al comportamiento de la sucesión, estableciéndose, por ejemplo, que existen sucesiones con números demasiado grandes.

En este sentido y con el propósito que entiendas estas dinámicas, abordaremos el resultado que se ha generado a nivel matemático a partir del análisis realizado sobre sucesiones, principalmente, en relación a la monotonía y los límites de una sucesión. ¡Adelante!

3.1 Monotonía

La monotonía de una sucesión corresponde a los análisis de crecimiento de una sucesión. ¿A qué nos referimos con esto? Principalmente a que los modelamientos de las sucesiones pueden ser crecientes, decrecientes u oscilantes. ¡Veamos!

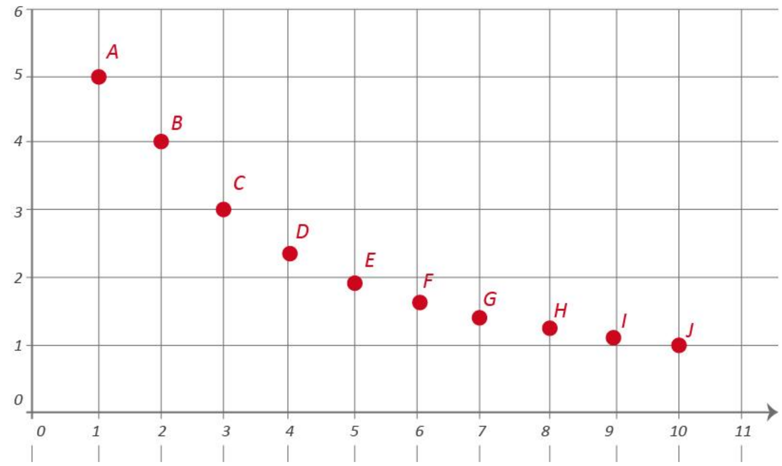
3.1.1 Sucesiones decrecientes

Determinaremos que una sucesión es decreciente, si cada término de la sucesión es cada vez más pequeño. En otras palabras, si un término $a_n < a_{n-1}$.

Ejemplo

Sea la sucesión $\{a_n\} = \frac{10n}{n^2+1}$

$\{a_n\} = 5, 4, 3, \frac{40}{17}, \frac{25}{13}, \frac{60}{37}, \frac{7}{5}, \ldots$



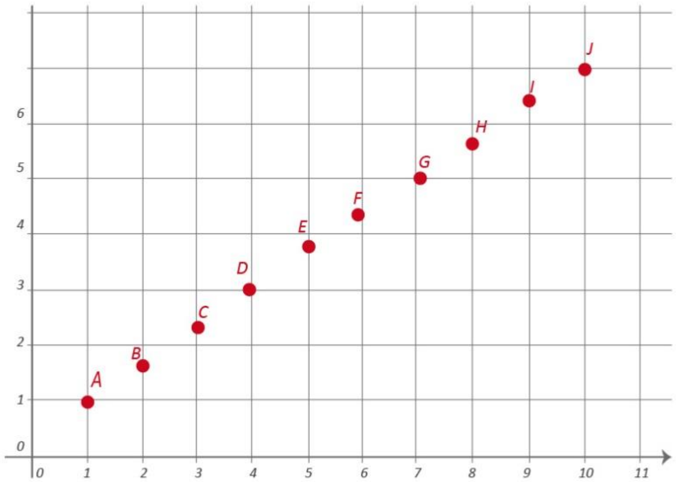
> Como es posible observar en este ejemplo, la sucesión cada vez se va reduciendo más.

3.1.2 Sucesiones crecientes

Determinaremos que una sucesión es creciente, si cada término de la sucesión es cada vez más grande. En otras palabras, si un término $a_n > a_{n-1}$.

Ejemplo: sea la sucesión $\{b_n\} = \frac{2n+1}{3}$

$\{b_n\} = 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \frac{15}{3}, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, \frac{21}{3}, \ldots$



> Como es posible observar en este ejemplo, la sucesión cada vez se va aumentando más.

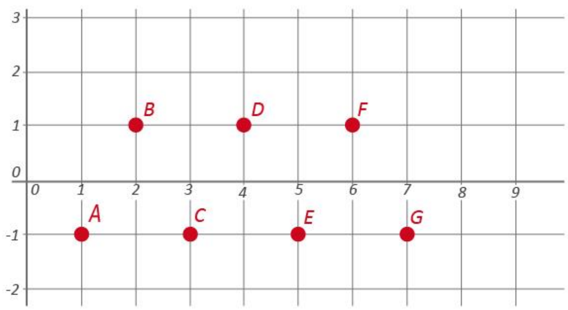
3.1.3 Sucesiones oscilantes

Una sucesión oscilante, es un tipo de sucesión que no es creciente ni decreciente. Sus valores se van repitiendo hasta el infinito.

Ejemplo

Sea la sucesión $\{b_n\} = (-1)^n$

$\{b_n\} = -1,1,-1,1,-1,1,-1,\ldots$



3.2 Límites de una sucesión

Los análisis más comunes en torno a las funciones y sucesiones tienen que ver con el comportamiento de ella en relación a sus elementos, cuando, por ejemplo, se hacen demasiado grandes. A partir de esta observación, los matemáticos han definido catalogar las sucesiones en divergentes y convergentes. ¡Veamos!

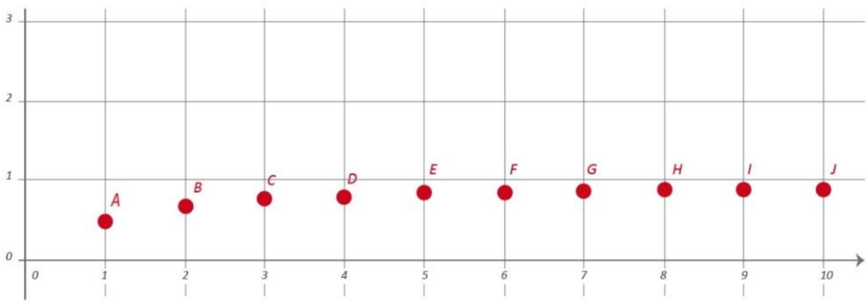
3.2.1 Convergencia

Cuando una sucesión sea $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, se denominará convergente, si sus términos se van acercando cada vez más a un valor específico. Ese valor se llama límite de la sucesión y se dice que la sucesión converge a ese límite.

Ejemplo

Sea la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$

$a_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \ldots$



Como se muestra en el ejemplo, los términos de la sucesión se acercan cada vez más al valor 1, aun cuando jamás lo tocan. ¿Qué conclusiones podemos sacar de este caso? Principalmente que la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ es convergente y su límite o valor de convergencia es 1.

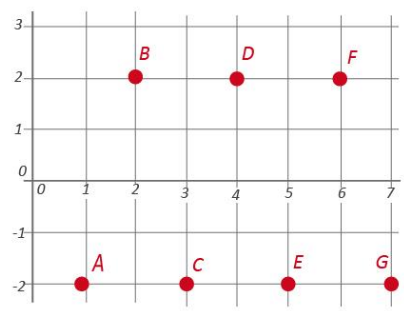
3.2.2 Divergencia

Una sucesión diverge cuando no se puede determinar que converge. En estos casos, podemos observar sucesiones oscilantes en donde sus términos crecen o decrecen sin medida.

Ejemplo

Sea la sucesión $a_n = 2 * (-1)^n$

$a_n = -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2$



> Como es posible observar en este ejemplo, la sucesión $a_n = 2 * (-1)^n$ es oscilante, y por tano, divergente.

Tema 4: Tipos de sucesiones

En este apartado trabajaremos algunos tipos de sucesiones, las cuales tienen algunas connotaciones especiales. Entre ellas, serán abordadas las sucesiones del número "e" y la sucesión del factorial. También observaremos las sucesiones recursivas, en las cuales podemos encontrar la sucesión de Fibonacci.

4.1 Sucesión del número e

Sea la sucesión real $a_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, en donde $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Para obtener los términos de esta sucesión, utilizaremos una tabla que relaciona los números naturales con los términos de la sucesión. Cabe destacar, que nos saltaremos números de la sucesión, ya que necesitamos observar esta sucesión en el infinito.

Esto nos llevará a utilizar números muy grandes, para poder realizar un análisis de convergencia de la sucesión.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	$(1+\frac{1}{1})^1$ $=2$
10	$(1+\frac{1}{10})^{10} = 2.59374246$
100	$(1+\frac{1}{100})^{100} = 2.704813892$
1000	$(1+\frac{1}{1000})^{1000} = 2.716923932$
10000	$(1+\frac{1}{10000})^{10000} = 2.718145927$
100000	$(1+\frac{1}{100000})^{100000} = 2.718268237$

Si continuamos calculando términos de la sucesión utilizando números cada vez más grandes, notaremos que la sucesión deja de crecer rápidamente. ¿Por qué ocurre esto? Fundamentalmente porque los términos de la sucesión irán aumentando cada vez menos. Esto nos dice que la sucesión está acotada por un valor al que no puede superar, el que hemos definido como límite. ¿Qué podemos determinar con esto? Que la sucesión converge y que el número converge esta sucesión será definido como “e”.

4.2 Sucesión con factoriales

La función factorial corresponde a una multiplicación de los números naturales. El factorial está dado por el símbolo “!”, lo que indica el factorial de un valor. A continuación te mostramos algunos ejemplos.

Ejemplo *(factorial)*

1. 4!=4*3*2*1=24; El 4! se lee “4 factorial” o “factorial de 4”
2. 9!=9*8*7*6*5*4*3*2*1=362,880

En este contexto, una sucesión que contenga una factorial, utilizará esta operatoria para poder calcular sus términos:

Ejemplo

$$a_n = \frac{n}{n+1!}$$
$$\{a_1\} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$
$$\{a_2\} = \frac{2}{3!} = \frac{2}{3*2*1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\{a_3\} = \frac{3}{4!} = \frac{3}{4*3*2*1} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$
$$\{a_4\} = \frac{4}{5!} = \frac{4}{5*4*3*2*1} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

4.3 Sucesiones recursivas

Una sucesión recursiva utiliza el término anterior para poder calcular el siguiente término. Esto indica que para poder realizar una sucesión recursiva es necesario tener el primer término de la sucesión y su expresión general, la cual utiliza a este término para poder calcular el término siguiente.

Ejemplo

$$a_1 = 3;\ a_{n+1} = 2a_n + 3$$
$$a_2 = 2a_1 + 3 = 2*3+3 = 9$$

$$a_3 = 2a_2 + 3 = 2*9+3 = 21$$
$$a_4 = 2a_3 + 3 = 2*21+3 = 45$$

Dentro de estas sucesiones podemos encontrar la sucesión de Fibonacci, la cual define los primeros dos términos de la sucesión y, para encontrar el resto de términos, se suman los dos términos anteriores.

Esto nos permite producir una expresión que nos genere los términos de la sucesión. Veamos:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = 1+1 = 2$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2+1 = 3$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 3+2 = 5$$
$$a_6 = a_5 + a_4 = 5+3 = 8$$

Por tanto $\{a_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots \dots$

Tema 5. Progresiones aritméticas y geométricas

Continuando con el tema de las sucesiones y su análisis, trabajaremos con progresiones aritméticas y geométricas, las cuales corresponden a sucesiones que son generadas por expresiones algebraicas específicas.

Dentro de las características que tienen estas sucesiones, que llamaremos progresiones para estos casos, encontramos que una progresión aritmética es generada a través de una suma constante. Para el caso de una progresión geométrica, encontraremos una multiplicación por un valor constante.

La característica principal de estas nuevas sucesiones consiste en que cada nuevo término de esta estará formado por la suma o multiplicación (dependiendo del tipo de progresión) de un término constante con el término anterior de la progresión.

5.1 Progresión aritmética

Una progresión aritmética (P. A.) corresponde a una sucesión de términos que se va generando al sumar un valor constante al término anterior.

En este sentido, definimos una progresión aritmética de la siguiente forma:$a_n = a_1 + (n-1)d$. ¿Qué significan estos símbolos? Veamos:

a_n: Término general (término enésimo) de la progresión aritmética.

a_1: Primer término de la sucesión.

d: Diferencia de la progresión aritmética.

n: Número del término de la progresión aritmética.

Para entender cómo funcionan las progresiones aritméticas, revisa el ejemplo que te mostramos a continuación:

Al calcular el término que ocupa el lugar 50 de una progresión aritmética, si el primer término es 5 y la diferencia es 2, ¿qué resultado obtendremos? Reemplacemos los valores en la ecuación:

$a_1 = 5 \quad ; \; d = 2 \quad ; n = 50 \quad ; a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = 5 + (n-1) * 2$
$a_n = 5 + 2(n-1)$

En la operación anterior hayamos el término general de la progresión aritmética. En este contexto, como el término que se desea hallar el término 50, solo debemos calcularlo:

$a_{50} = 5 + 2(50-1)$
$a_{50} = 5 + 2(49)$

$a_{50} = 5 + 98$
$a_{50} = 103$

Al observar la operación en su totalidad, es posible determinar que una progresión aritmética tiene la siguiente característica: si se restan dos términos consecutivos, se obtiene el valor de la constante de la sucesión: $a_{n+1} - a_n = d$.

5.2 Progresión Geométrica

Una progresión geométrica (P.G.) corresponde a una sucesión de términos que se va generando al multiplicar un valor constante al término anterior.

En función de esto, definimos una progresión aritmética de la siguiente forma: $a_n = a_1 r^{n-1}$. ¿Qué significan estos símbolos? Veamos:

a_n: Término general (término enésimo) de la progresión geométrica.

a_1: Primer término de la progresión geométrica.

r: Razón progresión geométrica.

n: Número del término de la progresión aritmética.

Para entender cómo funcionan las progresiones geométricas, revisa el ejemplo que te mostramos a continuación:

Si necesitamos hallar el noveno término de una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y su razón es 3, ¿qué resultado obtendremos? Reemplacemos los valores de la ecuación:

$a_1 = 1 \quad ; \; r = 3 \quad ; n = 9 \quad ; a_n = ?$

$a_n = a_1 r^{n-1}$
$a_n = 1 * 3^{n-1}$

Ya que encontramos el término general de la progresión geométrica, solo debemos calcular el noveno término.

$a_n = 1 * 3^{n-1}$
$a_9 = 1 * 3^{9-1}$
$a_9 = 3^8$
$a_9 = 6561$

Al observar la operación en su totalidad, es posible determinar que una progresión geométrica tiene la característica que si se dividen dos términos consecutivos, se obtiene el valor de la constante de la sucesión: $a_{n+1}/a_n = r$.

Ideas fuerzas

Para recapitular lo aprendido, se hará una revisión de los elementos más característicos del concepto de sucesión y progresión.

- En relación a los conjuntos, se pudo observar el tema de pertenencia, el cual se utiliza para determinar los elementos que un conjunto contiene. Para esto, se utiliza el símbolo matemático de pertenencia; por ejemplo $x \in A$, en el cual se determina que el elemento x está contenido en el conjunto A.

- También se revisó el concepto de subconjunto. Este nos permitió observar la existencia de distintos sistemas numéricos. ¿Por qué? Principalmente porque el conjunto de los números reales, está formado por distintos conjuntos y subconjuntos: $\mathbb{R} = (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}) \cup \mathrm{I}$.

- En relación a las sucesiones, es posible determinar que corresponden a una función de dominio en el conjunto de los naturales y recorrido los reales. Por lo tanto, las sucesiones trabajadas se denominan sucesiones reales: $a_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

- Dentro de los análisis que se aplican a las sucesiones podemos encontrar la monotonía y convergencia. En este contexto, planteamos que la monotonía es el análisis de crecimiento o decrecimiento de las sucesiones, mientras que la convergencia corresponde a la observación del comportamiento de las sucesiones en su límite hacia el infinito.

- También se trabajaron los conceptos de progresiones geométricas y aritméticas. La progresión aritmética tiene la característica de generarse a través de la suma de un valor constante, mientras que una progresión geométrica a través de la multiplicación de una constante.

Te invitamos a seguir conociendo y experimentando el mundo de las matemáticas, realizando las actividades propuestas, leyendo la bibliografía seleccionada y estudiando los materiales de profundización.

Referencias bibliográficas

Bartle, R. y Sherbert, D. (2004). *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* México: Limusa.

Carreño Campos, X. y Cruz Schmidt, X. (2002). *Álgebra.* Santiago, Chile: Arrayán.

Kolman, B. Busby, R. y Ross, Sh. (1997). *Estructuras de matemáticas discretas para la computación*. Recuperado de: https://books.google.cl/books?hl=es&lr=&id=7GJXRsNkglIC&oi=fnd&pg=PR15&dq=subconjuntos+matem%C3%A1tica&ots=_HArCS9z4t&sig=rE-1W5S5P5UHG26JcA6q4kH54Cs#v=onepage&q&f=false

Bibliografía obligatoria

Dugopolski, M. (2005). *Álgebra intermedia*. México: McGraw Hill.

García, I. (2003). *Problemas resueltos de álgebra lineal*. España: Edicions de la Universitat de Lleida.

Gil, O. (2011). *Excursiones por el álgebra lineal y sus aplicaciones*. Santiago, Chile: Juan Carlos Sáez Editor.

Gutiérrez, I. (2012). *Álgebra lineal*. España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Alcalá.

Mesa, F. (2012). *Introducción al álgebra lineal*. México: Ecoe Ediciones.

Lay, D. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson Educación.

Bibliografía sugerida

Bru, R. (2001). *Álgebra lineal*. México: Alfaomega.

Rees, P. (1991). *Álgebra*. México: McGraw Hill Interamericana.