梯度, 散度, 旋度, 拉普拉斯算子与Hessian

这部分我们会明白这些东西分别是什么, 它们之间的联系是什么
为了表达的简洁, 下面的假设都在低维空间进行, 也可以扩展到 n 维空间

梯度 (Gradient)

- 某一点处的梯度是一个『向量』, 描述在标量场中, 该标量上升最快的方向
- 它是一个算子, 作用于一个标量(场), 输出一个向量(场)

梯度

三维中, 对于标量场 $f(x,y,z)$, 梯度定义为:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- 如果一点处的梯度为 0, 说明达到了极值, 如果梯度不为 0, 说明还能够沿着梯度方向 (或者差不多的方向) 上升
- 注意, 相比散度, 梯度缺少一个点乘 $\cdot$

另一种视角, 我们可以把 ∇ 符号看作一个向量:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

这种视角下, 很自然地有:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

散度 (Divergence)

- 某一点处的散度是一个『标量』, 描述在向量场中, 向量的发散或汇合的程度
- 它是一个算子, 作用于一个向量 (场), 输出一个标量 (场)

散度

三维中, 对于向量场 $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 散度定义为:

$$div(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- 如果一点处散度为正, 说明在该点处, 向量的流入大于向量的流出, 反之, 向量的流出大于向量的流入
- 散度的大小衡量了该点处向外发射向量的程度的大小, 散度越大, 该点向外发射的向量相比吸收的向量越多, 如果散度 < 0, 说明该点吸收的向量比发射的向量多

参考上面的视角, 把 ∇ 符号看作一个向量:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

很自然有:

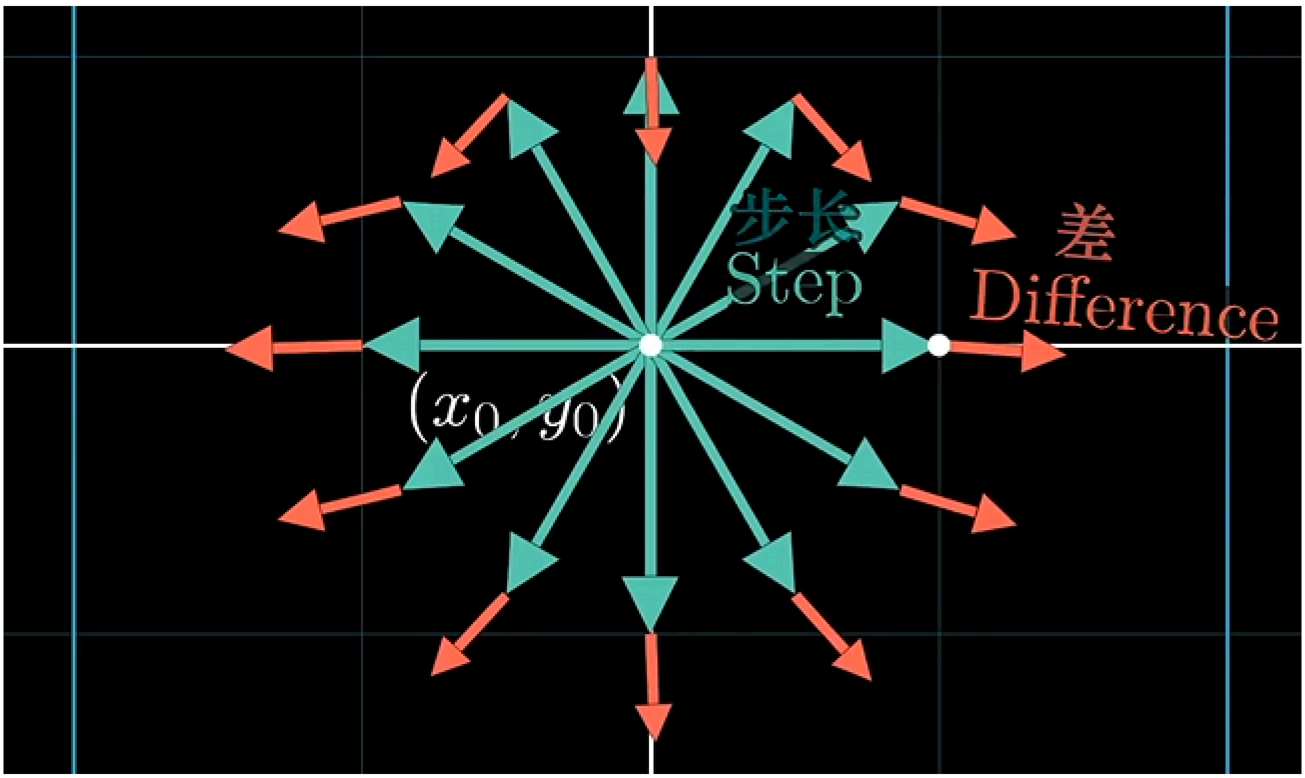
$$div(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

这就是为什么散度相比梯度多了一个内积符号

为什么散度表示向量的汇合和发散程度

考虑向量场 $\vec{F}$ 在某一点 P 附近的微小变化

其中步长代表微小位移, 差代表这个微小位移引起的向量变化:



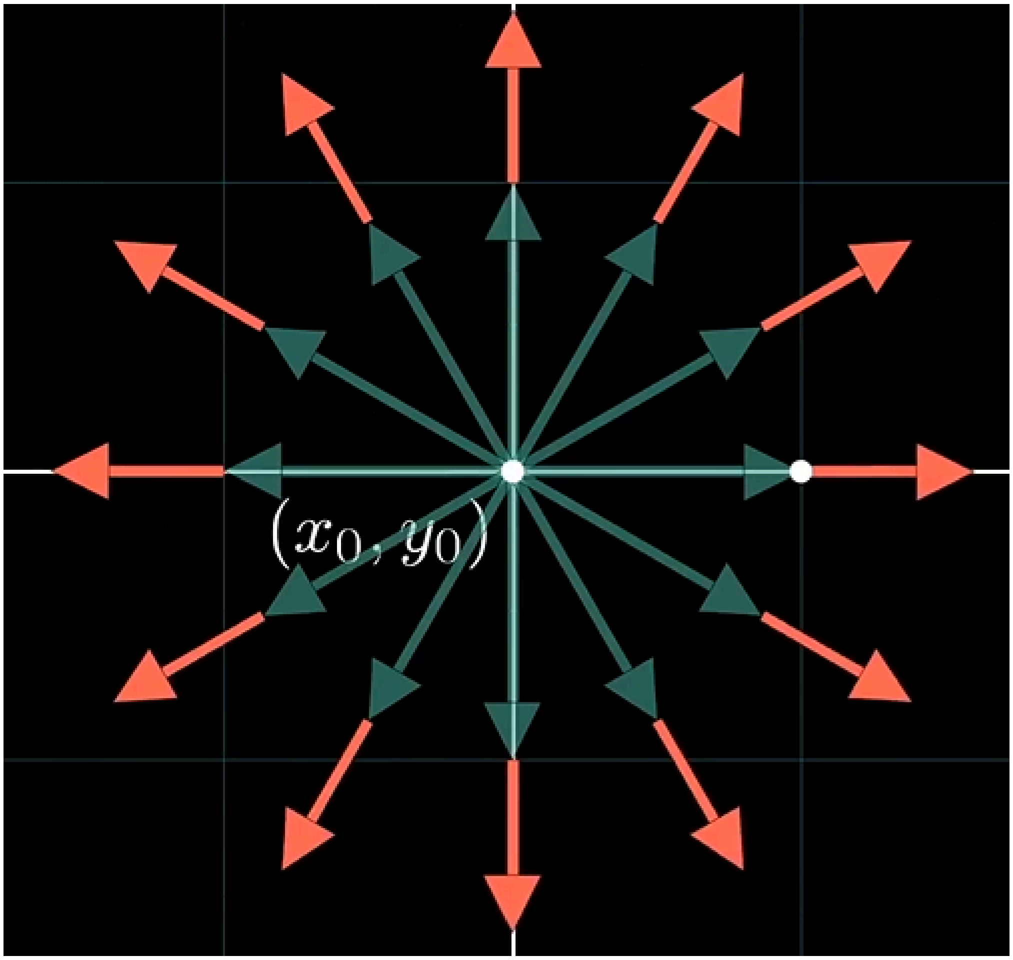
对这个点发散出的所有微小位移点乘微小位移导致的差进行积分, 就能得到散度
可以这样想:

- 内积衡量了两个向量的共线性
- 内积越大, 两个向量的方向越相同, 反之则越相反
- 内积为正时, 两个向量的夹角小于 90°

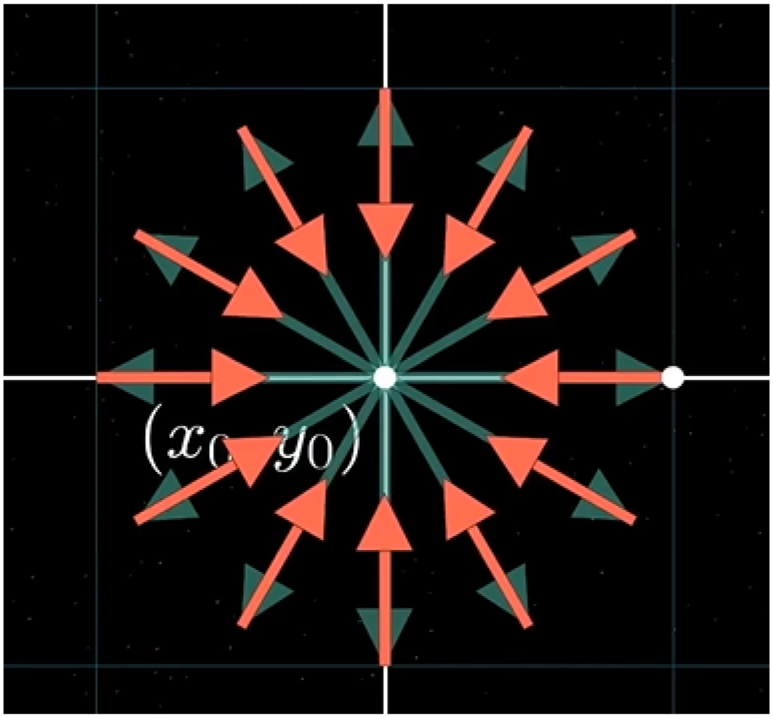
可以发现这里出现的内积和上面的另一种视角不谋而合了

如果散度 >0, 代表了这些内积的积分 >0, 也就是说:
平均意义上, 从某个方向移动微小位移, 所造成的向量场中向量的改变和微小位移的改变趋势相同

例如, 这种情况下, 微小位移和造成的改变同向, 说明这个点处发散出向量:



反之, 这个点处汇合向量:



旋度 (Curl)

- 某一点出的旋度是一个『向量(三维) 或标量(二维)』, 描述在向量场中, 向量旋转的程度和方向
- 它是一个算子, 作用于一个向量 (场), 输出一个向量 (三维) 或标量 (二维) (场)
- 不同于梯度和散度，旋度不能简单的推广到其他维度

旋度 (三维)

三维中, 对于向量场 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 旋度定义为:

$$\operatorname{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \Big(\frac{\partial}{\partial}$$

- 旋度的物理意义是向量场在某一点的旋转强度和旋转轴的方向
- 如果旋度为零，表示向量场在该点没有旋转；如果旋度非零，表示向量场在该点有旋转

- 旋度向量的方向是旋转轴的方向，旋度向量的大小是旋转强度

在三维中我们有找到旋转轴这个需要, 但是在二维中, 由于不存在 z 坐标, 我们默认使用垂直于平面的轴作为旋转轴, 于是旋度退化为一个『标量』:

旋度 (二维)

二维中, 对于向量场 $\overrightarrow{F}=(F_x,F_y)$, 旋度定义为:

$$\operatorname{curl}(\overrightarrow{F})=\nabla\times\overrightarrow{F}=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

这个定义可以从三维旋度中推导, 代入 $\overrightarrow{F}=(F_x,F_y,0)$, 即可得到:

$$\operatorname{curl}(\overrightarrow{F})=\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

由于在二维空间中没有 z 轴, 我们只关心这个 z 分量的大小, 即:

$$\operatorname{curl}(\overrightarrow{F})=\nabla\times\overrightarrow{F}=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

- 这个标量旋度的正负号表示了向量场在某一点的旋转方向
- 如果旋度为正，表示向量场在该点有逆时针旋转；如果旋度为负，表示向量场在该点有顺时针旋转

参考上面的视角, 把 ∇ 符号看作一个向量:

$$\nabla=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}$$

自然地, 也有:

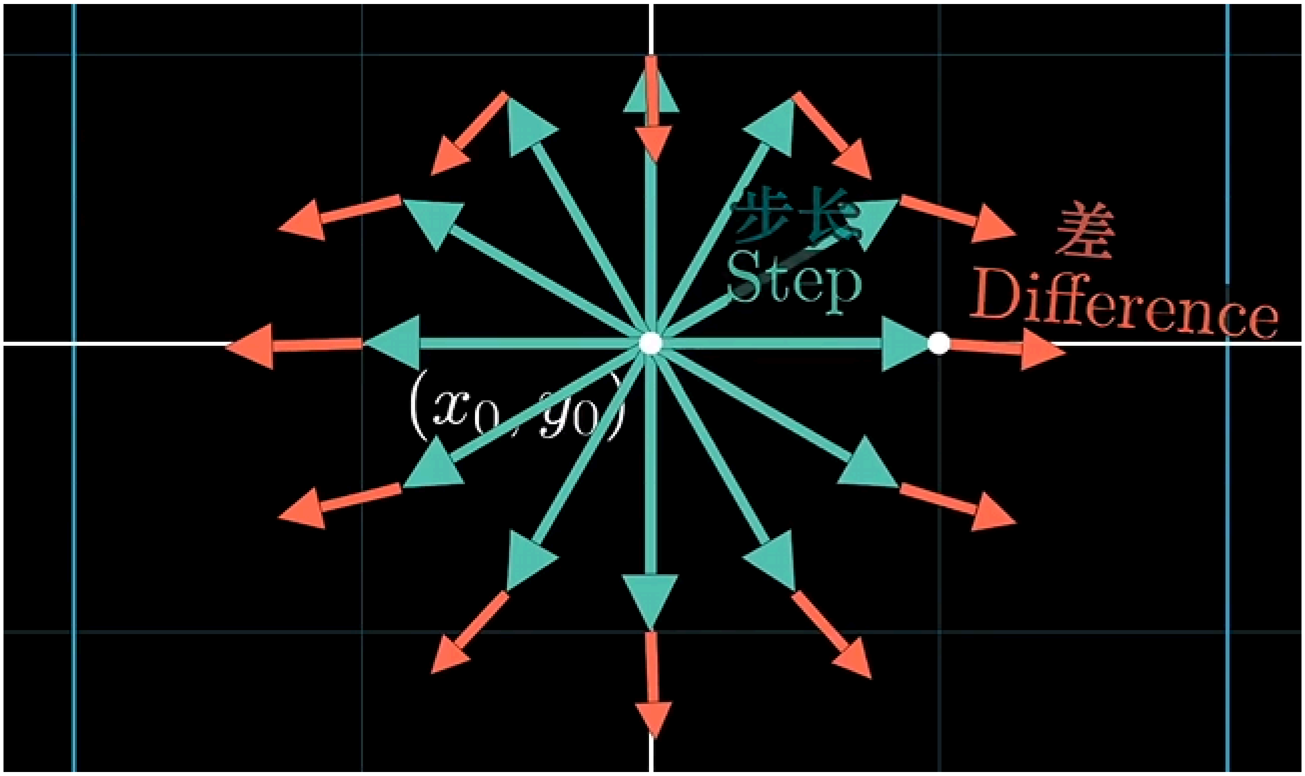
$$\operatorname{curl}(\overrightarrow{F})=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\times\overrightarrow{F}=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

三维情况是一样的

为什么旋度能够表示向量的旋转强度和旋转轴的方向

考虑向量场 $\vec{F}$ 在某一点 P 附近的微小变化

其中步长代表微小位移, 差代表这个微小位移引起的向量变化:



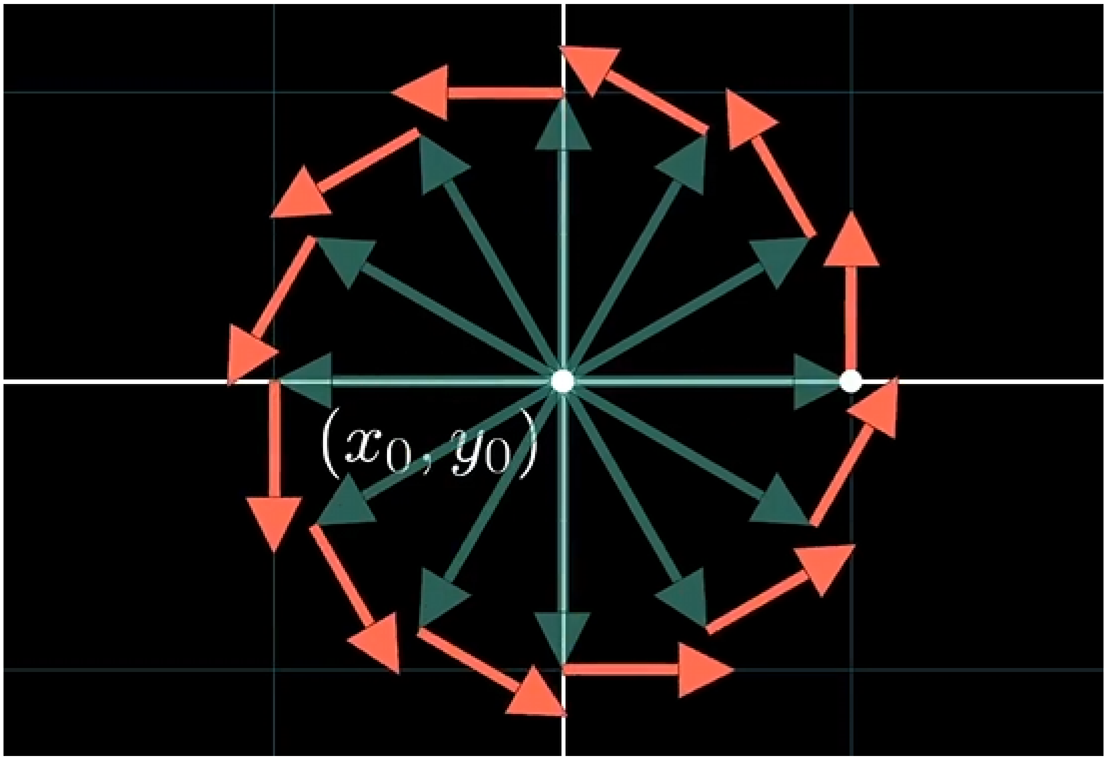
对这个点发散出的所有微小位移叉乘微小位移导致的差进行积分, 就能得到旋度
可以这样想:

- 外积衡量了两个向量的垂直性
- 外积越大, 两个向量的方向越垂直, 反之则越相反
- 当外积为 0 时, 两个向量平行

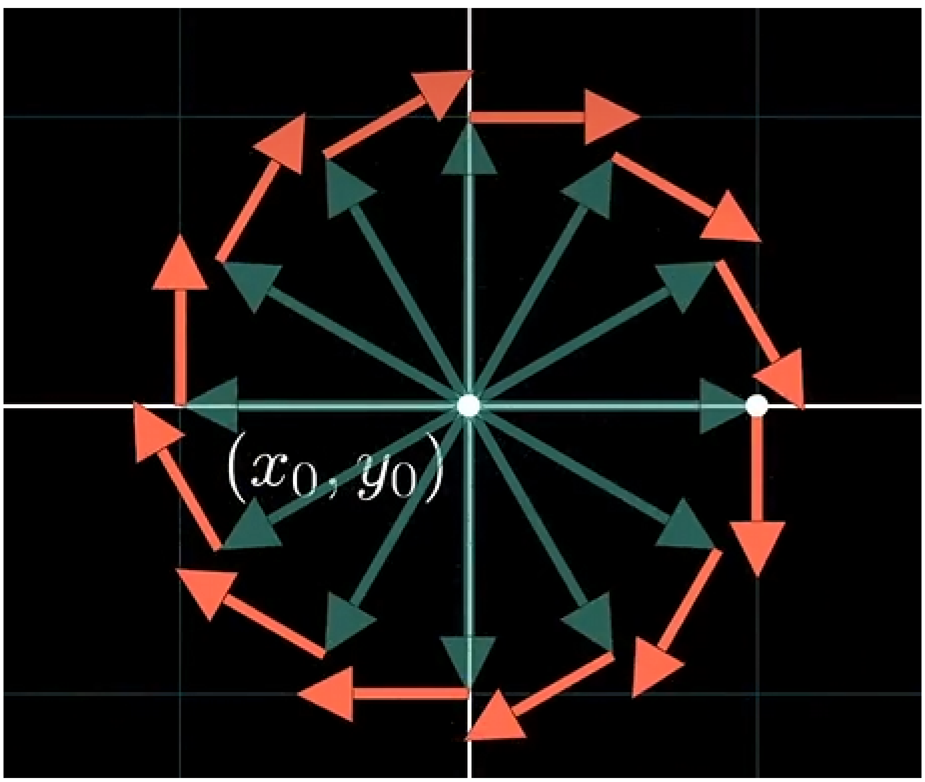
可以发现这里出现的外积和上面的另一种视角不谋而合了

如果旋度 $\neq 0$, 代表了这些外积的积分 $\neq 0$, 也就是说:
平均意义上, 从某个方向移动微小位移, 所造成的向量场中向量的改变和微小位移的方向不为 $\vec{0}$, 一定有一个主导的旋转方向

例如, 这种情况下, 微小位移所造成的改变以逆时针方向为主导方向, 旋度 > 0:



反之, 这个点处以顺时针方向为主导方向, 旋度 < 0:



当外积为 0 时, 并不说明该点处微小位移和所导致的改变量处处平行, 也可能出现相互抵消的现象

拉普拉斯算子 (Laplacian operator)

- 某一点处的拉普拉斯算子的值是一个『标量』, 描述在标量场中, 某点的在各个方向上的变化率
- 它是一个算子, 作用于一个标量 (场), 输出一个标量 (场)

拉普拉斯算子

定义与性质

拉普拉斯算子是一个<微分算子>

- 用于描述标量场 (温度场, 压力场等) 在空间中的 『变化程度』(类似于导数的大小 (这里变成梯度))

拉普拉斯算子

三维空间中, 拉普拉斯算子用符号 $\triangle$ 或者 ∇^2 表示, 对标量场 $u(x,y,z)$ 的定义为:

$$\Delta u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

在二维空间中, 简化为:

$$\Delta u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

拉普拉斯算子的性质

- 它衡量一个点的标量值 (如温度) 和周围点的平均值之间的偏离, 如果拉普拉斯算子为正, 说明该点低于周围点的『平均值』, 系统有趋于均匀分布的趋势
- 它描述标量场的凹凸性, 体现场在局部的弯曲性质

性质的解释一

拉普拉斯算子定义为:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- 每一项表示标量场在某个方向的『二阶变化率』
- 它们的和表示标量场在这一点的在各个方向上的变化率

用有限差分的方法, 拉普拉斯算子可以这样逼近:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}]$$

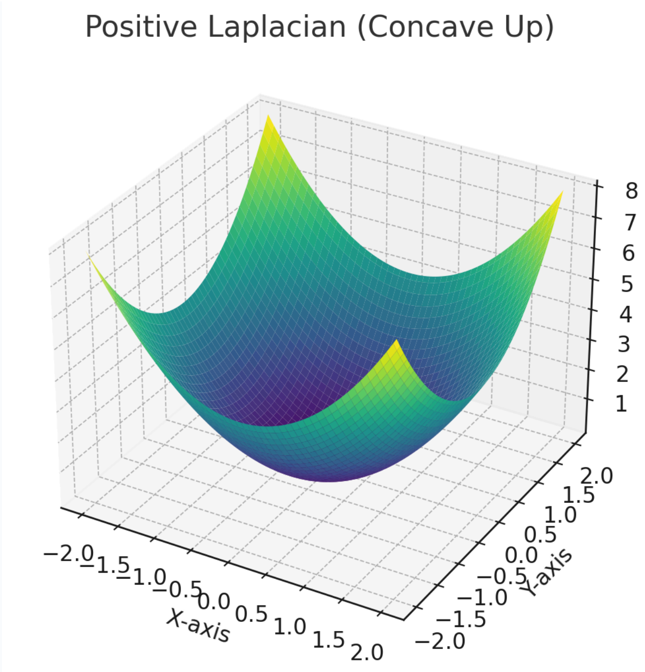
- 其中 h 是网格间隔, 在 x, y 方向上采用相同的步长
- $u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}$ 表示 (i, j) 这一点周围四个点的和
- $u_{i,j}$ 是 (i, j) 这一点的标量值
- 显然这是对 x, y 方向同时做了『中心差分』
- 当拉普拉斯算子 $\Delta u > 0$ 时说明 (i, j) 这点处的值小于周围点的『平均值』

性质的解释二

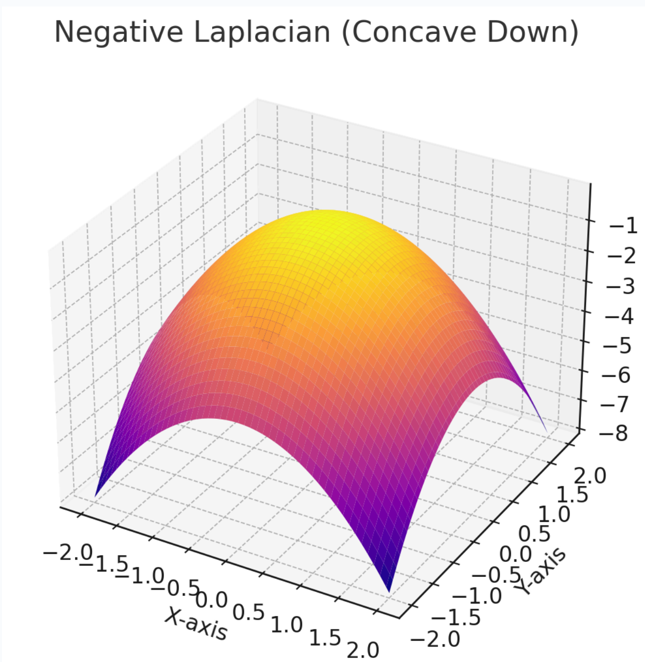
一维中，函数的二阶导数 $\frac{d^2u}{dx^2}$ 描述了函数的『凹凸性』

- 若 $\frac{d^2u}{dx^2} > 0$，曲线是凹向上的（如碗状）
- 若 $\frac{d^2u}{dx^2} < 0$，曲线是凹向下的（如山状）
  在多维空间中，拉普拉斯算子 Δu 综合了标量场在不同方向上的二阶导数，表示标量场在局部的总体弯曲趋势
- 如果 $\Delta u > 0$，说明该点的值低于周围值的平均值，几何上对应“碗状”凹陷
- 如果 $\Delta u < 0$，说明该点的值高于周围值的平均值，几何上对应“山状”凸起

拉普拉斯算子大于 0 的图像:



拉普拉斯算子小于 0 的图像:



梯度与旋度的关系-梯度的旋度

- 梯度的旋度总是 0
- 这意味着梯度场是无旋的

- 直观地理解, 我们不可能在二维地图上, 绕一个圆圈一直走就能使得自己的高度下降

证明

我们直接计算梯度的旋度:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

计算这个行列式, 有:

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k}$$

由于标量场 f 的二阶偏导数满足克莱罗定理（Clairaut's Theorem），即混合偏导数的顺序可以交换，我们有：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

因此，梯度的旋度的每个分量都为 0，即：

$$\nabla \times (\nabla f) = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

所以，梯度的旋度总是 0
这个性质表明，梯度场是无旋的，即梯度场中没有旋转

散度与旋度的关系-旋度的散度

- 旋度的散度总是 0
- 这意味着旋度场是无散的

- 直观地理解, 假设有一个螺旋滑梯, 人在上面滑行时, 考虑人的 (x, y) 地理坐标, 就会产生一个旋度, 刻画了人的旋转的方向和旋转强度, 而我们知道人在上面旋转时, 往一个方向移动, 只会沿一个旋转轴旋转, 而不会同时沿着两个旋转轴旋转, 这意味着我们的旋度的散度一定为 0

证明

我们直接计算旋度的散度:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

展开得到:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y}$$

由于向量场 $\overrightarrow{F}$ 的二阶偏导数满足克莱罗定理（Clairaut's Theorem），即混合偏导数的顺序可以交换，我们有：

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y}$$

因此，旋度的散度的每个项都相互抵消，即：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) = 0$$

所以，旋度的散度总是 0
这个性质表明，旋度场是无散的，即旋度场中没有源或汇

拉普拉斯算子与梯度, 散度的关系

我们可以注意到梯度算子长这样: ∇
而拉普拉斯算子长这样: ∇^2
它们没关系你信吗?

关于梯度, 可以参考 梯度和方向导数的解释
梳理定义, 为了简化表达, 默认在三维空间中:

- 梯度算子

$$grad(x,y,z) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot j + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot k = (i,j,k)$$

  其中 i,j,k 是三个方向上的单位向量, 可以看到梯度是一个 『向量』

梯度的散度

拉普拉斯算子是一个二阶微分算子, 定义为『梯度』的『 散度 (Divergence) 』
这是很直观的, 且听我一言:
我们的初始场为 f, 是一个标量场, 它可以有很多自变量(例如坐标), 输出一个标量(例如高度)
『梯度』表示一个点处, 上升值最多的方向, 如果我们在这个点处朝梯度方向前进, 我们下一步就能到达『目光所及的极大值点』
使用梯度作用于场 f 后, ∇f 变成了一个向量场, 记为 $\overrightarrow{F}$
我们需要用散度作用于 $\overrightarrow{F}$, 即

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

『散度』表示一个点处, 向量的发散或汇合的程度, 散度越大, 该点处进入的向量比输出的向量便越多
『拉普拉斯算子』表示(标量场中)一个点处的凹凸性

一切都很明朗了--如果一个地方的梯度的散度大于 0, 意味着这个点处出发的梯度平均上要"多于"进来的梯度, 也就是说这个点处梯度向量在该点处的流出量大于流入量, 即该点处的变化趋势是向着变大的, 和拉普拉斯算子的"该点低于周围点的『平均值』"性质相符合, 也意味着该点附近是『凹』的

散度的梯度

散度的梯度是一个不常见的概念，因为通常我们讨论的是梯度的散度，即拉普拉斯算子
然而，散度的梯度在数学上是定义良好的，它表示散度标量场的空间变化率

给定一个向量场 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$，其散度是一个标量场：

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

这个标量场的梯度是一个向量场，表示散度在空间中的变化率：

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\right.\right.$$

这个向量场的每个分量是散度标量场在相应方向上的偏导数
散度的梯度在物理上可以解释为向量场的散度如何随空间位置变化，但它不像梯度的散度（拉普拉斯算子）那样在物理和工程中常见

拉普拉斯算子和 Hessian 矩阵的关系

关于 Hessian 矩阵, 请参考 Hessian矩阵, 它刻画了一点处关于『凹凸』的全部信息
它的形式如下:

$$H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- 它描述了函数在某点的曲率或局部形状

可以发现, 拉普拉斯算子实际上就是 Hessian 矩阵的 『 迹 』, 迹是矩阵对角线元素的和

例如, 对于 Hessian 矩阵:

$$H(f)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{bmatrix}$$

它的迹就等于拉普拉斯算子:

$$\Delta f=\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- 这表明拉普拉斯算子是 Hessian 矩阵的一个特定的标量，它只考虑了函数在各个坐标轴方向上的二阶导数，而忽略了混合偏导数的信息
- 这也说明了, 拉普拉斯算子是粗略的 『凹凸』信息

更多奇怪的东西

由于:
梯度: 标量场 →向量场
散度: 向量场→标量场
旋度: 向量场→向量场

因此这几个概念的各种其他组合并不存在,例如:

- 旋度的梯度 (旋度场作为向量场不能计算梯度)
- 散度的旋度 (散度场作为标量场不能计算旋度)
- 梯度的梯度 (梯度场作为向量场不能计算梯度)
- 散度的散度 (散度场作为标量场不能计算散度)

而旋度的旋度是存在的, 但是由于应用狭窄, 放在最下方

旋度的旋度

旋度的旋度是一个向量场的旋度的旋度，它在数学上是定义良好的

在三维空间中，对于一个向量场 $\overrightarrow{F}=(F_x,F_y,F_z)$，其旋度 $\nabla\times\overrightarrow{F}$ \是另一个向量场
再次对这个旋度结果应用旋度算子，我们得到旋度的旋度

在直角坐标系中，旋度的旋度可以通过以下公式计算：

$$\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{F}) = \nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) - \nabla^2 \overrightarrow{F}$$

其中：

- $\nabla \cdot \overrightarrow{F}$ 是向量场 $\overrightarrow{F}$ 的散度
- $\nabla^2 \overrightarrow{F}$ 是向量场 $\overrightarrow{F}$ 的拉普拉斯算子，它作用于向量场的每个分量
- 这个结果告诉我们，旋度的旋度等于向量场的散度的梯度减去向量场的拉普拉斯算子
- 这个表达式在物理上可以解释为，旋度的旋度描述了向量场的旋转如何随空间变化，以及向量场的局部变化如何影响其旋转特性

旋度的旋度在流体力学和电磁学中有应用，例如在描述流体的涡度变化或电磁场的动态特性时
它提供了一种量化向量场局部旋转变化的方法，并且与向量场的散度和拉普拉斯算子有关，这两个量分别描述了向量场的源/汇特性和局部变化率