3 a) $f(x) = e^x + x^2 - x - 4 \qquad x \in [1,2]$

f er kontinuerlig for hele intervallet og deriverbar på $x \in (1,2)$

$\underline{f(1) = e - 4 < 0} \qquad f(2) = \underline{e^2 - 2 > 0}$

Ved skjæringssetningen vet vi at f har minimum 1 nullpunkt på $[1,2]$.

$f'(x) = \underline{e^x + 2x - 1} \qquad \underline{f(1) = e + 1}$

f' er positiv for alle $x \in (1,2)$, altså er f monotont økende og den har kun ett nullpunkt på ~~...~~ $[1,2]$.

Plottet av f er gjort i jupyter.

$f(x) = 0$ for ca $\underline{x = 1,3}$ etter plottet å dømme.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x_0 = 1,3$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 1,28875$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1,28868$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx \underline{1,28868}$$

$\boxed{\text{newton}}$ i jupyter-noteboken ga $\underline{\approx 1,28868}$ som svar

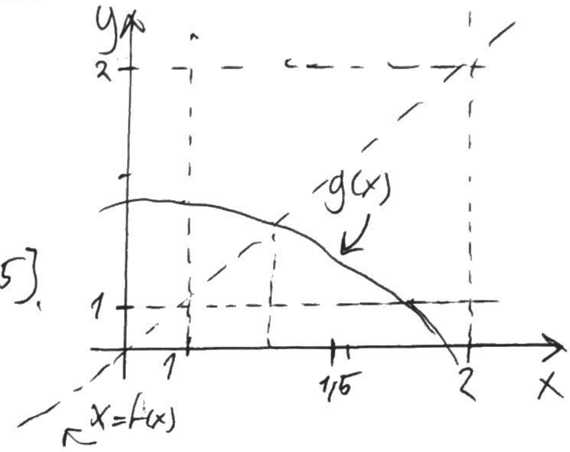
$\rightarrow$ ~~det~~ det samme som over!

$\boxed{3}$

c) Fixpunktteoremet:

Hvis det finnes et intervall $[a,b]$ s.a. $g \in C^1[a,b]$, $g([a,b]) \subset (a,b)$ og det finnes en konstant $L < 1$ s.a. $|g'(x)| \leq L < 1$ for alle $x \in [a,b]$, så har g et unikt fikspunkt på $[a,b]$.

$g_1(x) = \ln(4+x-x^2)$ $\qquad g_1'(x) = \dfrac{1-2x}{4+x-x^2}$



$a = 1 \quad b = 1,5$

g ligger innfor $y = 1$ og $y = 1,5$ for $x \in [1, 1,5]$.

$|g_1'(1)| = |-\frac{1}{4}| < 1$

$|g'(x)|$ er også monotont avtagende på $[1, 1.5]$, hvilket betyr at $|g_1'(x)| < 1$ for alle $x \in [1, 1.5]$ og g har en $x = r$ s.a. $r = g(r)$ på $[1, 1.5]$. Det støttes også av den numeriske løsningen i jupyter.

$g_2(x) = \sqrt{-e^x + x + 4}$ $\qquad g_2'(x) = \dfrac{1-e^x}{2\sqrt{-e^x+x+4}}$

Vet at løsning $f(x) = 0$ gir en x som ligger mellom $x = 1,28$ og $x = 1,29$. $|g_2'(1,28)|$ +1| og $|g_2'(1,29)| \approx |-1,022|$.

$|g'(r)| > 1$ i løsningen r, altså vil den aldri konvergere.

$g_3(x) = e^x + x^2 - 4$ $\qquad g_3'(x) = e^x + 2x$

$|g_3'(x)|$ er åpenbart større enn 1 for $x \in [1, 2]$, altså vil ikke løsningen kunne konvergere.

$\boxed{4}$ a) Hvis r er et fiksert punkt for $g(x)$ så

$\underline{g(r) = r}$

Egenskap ved den inverse: $\underline{g(g^{-1}(x)) = x = g^{-1}(g(x))}$

$g^{-1}(g(x)) = x$, setter $x = r$

$g^{-1}(g(r)) = r$, $g(r) = r$ på grunn av fiksert punkt

$g^{-1}(r) = r$, altså er r et fiksert punkt for

$\underline{g^{-1} \text{ også}}$

b) $r \in (a,b)$ s.a. $r = g(r) = g^{-1}(r)$

$\underline{(r = f(r) = f^{-1}(r))}$

$X = f(f^{-1}(x))$

$x' = (f(f^{-1}(x)))' \Leftrightarrow 1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ Setter $x = r$

$f^{-1}(r) = r$
$\Rightarrow \underline{(f^{-1})'(r) = \dfrac{1}{f'(r)}}$

Altså vil $(f^{-1})'(r)$ ~~være~~ < 1 når $f'(r) > 1$ og vica versa.

$\boxed{5}$ a) $\mathbb{f}(\mathbb{X}) = \begin{bmatrix} x^2+y^2-4 \\ xy-1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$J[\mathbb{f}](\mathbb{X}) = \begin{bmatrix} 2x+y^2 & x^2+2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Newtons: for $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\underline{J(\mathbb{X}_k)\Delta_k = -f(\mathbb{X}_k)}$$

$$\underline{\mathbb{X}_{k+1} = \mathbb{X}_k + \Delta k}$$

1. $\mathbb{X}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad J(\mathbb{X}_0)\Delta_k = -\mathbb{f}(\mathbb{X}_0)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2(2)+0^2 & 2^2+2(0) \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Delta_k = -\begin{bmatrix} 2^2+0-4 \\ 2\cdot 0-1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}} \to \Delta k = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

2. $\mathbb{X}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\mathbb{X}_2 = \begin{bmatrix} \frac{101}{52} \\ \frac{25}{52} \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2(3/2)+(1/2)^2 & (3/2)^2+2(1/2) & (3/2)^2+(1/2)^2-4 \\ 1/2 & 3/2 & 3/2\cdot 1/2-1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 13/4 & 13/4 & -3/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 13/2 & 13/2 & -3 \\ 1 & 3 & -1/2 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 13/2 & 13/2 & -3 \\ 0 & 2 & -1/26 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6/13 \\ 0 & 1 & -1/52 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & +23/52 \\ 0 & 1 & -1/52 \end{bmatrix} \to \Delta k = \begin{bmatrix} +23/52 \\ -1/52 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{X}_2 = \begin{bmatrix} \frac{101}{52} \\ \frac{25}{52} \end{bmatrix}$$