परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ (Proofs in Mathematics)

❖*Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry. Mathematical works do consist of proofs just as poems do consist of characters*
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा IX, X तथा XI में हम कथन, संयुक्त कथन, कथन के निषेधन, विलोम तथा प्रतिधनात्मक स्वरूप और अभिगृहीत, अनुमानित कथन, साध्य तथा निगमनात्मक विवेचन की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं।

यहाँ हम गणितीय साध्यों को सिद्ध (प्रमाणित) करने की विभिन्न विधियों पर विचार करेंगे।

A.1.2 उपपत्ति क्या है? (What is a Proof?)

किसी गणितीय कथन की उपपत्ति में कथनों का एक अनुक्रम अंतर्विष्ट होता है, जिसके प्रत्येक कथन के औचित्य को किसी परिभाषित पद या किसी अभिगृहीत या किसी ऐसी साध्य द्वारा प्रमाणित करते हैं, जिसे निगमनिक विधि तथा कुछ अपरिभाषित पदों द्वारा केवल स्वीकार्य तार्किक नियमों का प्रयोग करके पूर्व प्रतिपादित किया जा चुका हो।

इस प्रकार प्रत्येक उपपत्ति निगमनिक तर्कों की एक शृंखला होती है, जिनमें से प्रत्येक की अपनी परिकल्पनाएँ तथा निष्कर्ष होते हैं। अधिकतर हम किसी साध्य को उसमें दिए हुए तथ्यों से प्रत्यक्ष रीति द्वारा सिद्ध करते हैं। परंतु कभी-कभी साध्य को सीधे सिद्ध करने की अपेक्षा उसके समतुल्य साध्य को सिद्ध करना आसान होता है। इस प्रकार किसी साध्य को सिद्ध करने की दो विधियाँ प्रदर्शित होती हैं, नामतः प्रत्यक्ष उपपत्ति अथवा अप्रत्यक्ष उपपत्ति तथा इसके अतिरिक्त प्रत्येक विधि में तीन भिन्न-भिन्न तरीके होते हैं, जिनकी चर्चा नीचे की गई है।

प्रत्यक्ष उपपत्ति यह साध्य की वह उपपत्ति है, जिसे हम सीधे रुप में प्रदत्त तथ्यों से प्रारंभ कर साध्य की उपपत्ति स्थापित करते हैं।

(i) **सीधा-सीधा उपगमन (Approach)** यह तर्कों की एक शृंखला है, जो प्रदत्त अथवा कल्पित तथ्यों से सीधे प्रारंभ करके, अभिगृहीतों, परिभाषित पदों तथा पूर्व प्रमाणित साध्यों की सहायता से तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा, सिद्ध किए जाने वाले निष्कर्ष को प्रमाणित करती है।

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$ तो $x = 3$ या $x = 2$ है।

हल $x^2 - 5x + 6 = 0$ (दिया है)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (एक व्यंजक को तुल्य व्यंजक से बदलने पर)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$ (पूर्वप्रमाणित साध्य $ab = 0$ तब $a = 0$ या $b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ या $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से उसकी प्रकृति परिवर्तित नहीं होती है।)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ या $x + 0 = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक(Identity) गुण के प्रयोग द्वारा)

$\Rightarrow$ $x = 3$ या $x = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक गुण के प्रयोग द्वारा।)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ या $x = 2$

यहाँ p प्रदत्त कथन "$x^2 - 5x + 6 = 0$" है और q निष्कर्ष कथन "$x = 3$ या $x = 2$" है।

कथन p के व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ को, इसके तुल्य एक अन्य व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ से प्रतिस्थापित कर के हम एक व्यंजक r: "$(x - 3)(x - 2) = 0$" प्राप्त करते हैं

यहाँ दो प्रश्न उठते हैं:

(i) व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ किस प्रकार व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ के समान (तुल्य) है ?

(ii) किसी व्यंजक को उसके समान एक अन्य व्यंजक से हम कैसे प्रतिस्थापित कर सकते हैं ? इनमें से प्रथम को हम पिछली कक्षाओं में गुणनखंड द्वारा सिद्ध कर चुके हैं अर्थात्

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$$

द्वितीय प्रश्न तर्क के वैध रूप (तर्क के नियमों) द्वारा संभव होता है।

इसके उपरांत r पूर्वकथन (Premise) या प्रदत्त कथन हो जाता है, जिससे कथन s: "$x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$" प्राप्त होता है। प्रत्येक चरण (steps) का औचित्य कोष्ठक (brackets) में दिया है।

यह प्रक्रिया निरंतर तब तक चलती रहती है जब तक हम अंतिम निष्कर्ष पर नहीं पहुँच जाते हैं।

तर्क की प्रतीकात्मक समतुल्यता निगमन द्वारा यह प्रमाणित करने में है कि $p \Rightarrow q$ सत्य है।

p से प्रारंभ करके निगमन द्वारा $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ को प्रमाणित कीजिए। अत: "$p \Rightarrow q$" सत्य है।

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिए की फलन $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ जो $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी (one-one) फलन है

उपपत्ति ध्यान दीजिए कि फलन f एकैकी होगा यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(एकैकी फलन की परिभाषा)

अब मान लीजिए कि $f(x_1) = f(x_2)$ अर्थात् $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से)

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2$ (वास्तविक संख्याओं में योज्य तत्समक का गुण)

$\Rightarrow \quad \frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$ (दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से विभाजित करने से)

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

अत: फलन एकैकी है।

(ii) गणितीय आगमन

गणितीय आगमन, साध्यों को सिद्ध करने की एक ऐसी विधि है, जिसका स्वरूप निगमनिक होता है। इस विधि में उपपत्ति पूर्णरूपेण निम्नलिखित अभिगृहीत पर आधारित होती हैं।

N के एक प्रदत्त उपसमुच्चय S में, यदि

(i) प्राकृत संख्या $1 \in \mathrm{S}$ तथा

(ii) प्राकृत संख्या $k + 1 \in \mathrm{S}$ जब कभी $k \in \mathrm{S}$, तो $\mathrm{S} = \mathbf{N}$

गणितीय आगमन का सिद्धांत यह है कि यदि एक कथन "S(n), $n = 1$ के लिए सत्य है" (अथवा किसी अन्य प्रारंभिक संख्या j के लिए सत्य है) और यदि कथन $n = k$ के लिए सत्य होने में यह अंतर्निहित है कि वह $n = k + 1$ के लिए अनिवार्यत: सत्य है (जब कभी धन पूर्णांक $k \geq j$), तो प्रदत्त कथन किसी भी धन पूर्णांक n, जहाँ $n \geq j$ के लिए सत्य होता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 यदि $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हल मान लिया कि
$$\mathrm{P}(n) : \mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

अत: P(1) सत्य है।

अब मान लिया कि P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

तो हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \text{ सत्य है}$$

पुनः $$A^{k+1} = A^k . A$$

चूँकि P(k) सत्य है, इसलिए

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & \cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta \\ -\sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(आव्यूह गुणन द्वारा)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

अत: P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है।

अतएव P(n), n के सभी मानों (धन पूर्णांक) के लिए सत्य है।

(iii) विभिन्न स्थितियों में विखंडन द्वारा अथवा नि:शेषण द्वारा उपपत्ति

कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने की यह विधि केवल तभी संभव है, जब p को अनेक कथनों r, s, t (मान लिया) में विखंडित किया जा सकता हो जैसा कि $p = r \vee s \vee t$ (जहाँ "$\vee$" प्रतीक है "या" के लिए)

यदि सप्रतिबंध कथनों $r \Rightarrow q$;

$s \Rightarrow q$;

तथा $t \Rightarrow q$

को प्रमाणित किया जाए, तो $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, सिद्ध हो जाता है और इस प्रकार $p \Rightarrow q$ प्रमाणित होता है।

इस विधि में परिकल्पना की प्रत्येक संभव दशा को जाँचा जाता है। यह विधि व्यावहारिक रूप से केवल तभी सुविधाजनक है जब विखण्डन द्वारा प्राप्त कथनों की संख्या कम हो।

उदाहरण 4 किसी त्रिभुज ABC, में सिद्ध कीजिए कि

$$a = b \cos C + c \cos B$$

हल मान लीजिए कि p कथन "ABC एक त्रिभुज है" तथा q कथन

"$a = b \cos C + c \cos B$" है

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। शीर्ष A से BC (आवश्यकतानुसार बढ़ाई गई) पर लंब AD खींचिए।

हमें ज्ञात है कि एक त्रिभुज या तो न्यूनकोण त्रिभुज या अधिककोण त्रिभुज या समकोण त्रिभुज होता है, इसलिए हम p को r, s तथा t में विखण्डित कर सकते हैं, जहाँ

r : ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ न्यूनकोण है।

s : ABC एक अधिककोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ अधिककोण है।

t : ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ समकोण है।

अतः हम साध्य को उपर्युक्त तीनों संभावनाओं के लिए अलग-अलग सिद्ध करते हैं।

दशा (i) जब $\angle A, \angle B$, तथा $\angle C$ तीनों ही न्यूनकोण हैं (आकृति A1.1)

समकोण त्रिभुज ADB, द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

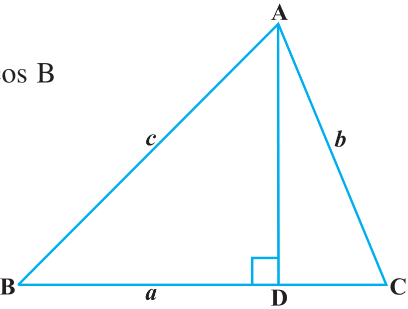
अर्थात् $BD = AB \cos B = c \cos B$

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

अर्थात् $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$



आकृति A1.1

अब $a = BD + CD$

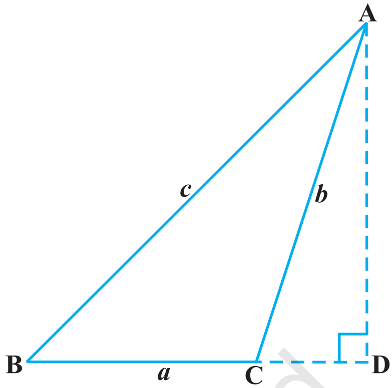
$= c \cos B + b \cos C$ ... (1)

दशा (ii) जब $\angle C$ अधिककोण है (आकृति A1.2)

समकोण त्रिभुज ADB द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

अर्थात् $$BD = AB \cos B$$
$$= c \cos B$$



आकृति A1.2

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$
$$= \cos (180 - C)$$
$$= - \cos C$$

अर्थात् $$CD = - AC \cos C$$
$$= - b \cos C$$

अब $$a = BC = BD - CD$$

अर्थात् $$a = c \cos B - (- b \cos C)$$
$$a = c \cos B + b \cos C \qquad \text{... (2)}$$

दशा (iii) जब $\angle C$ समकोण है (आकृति A1.3)

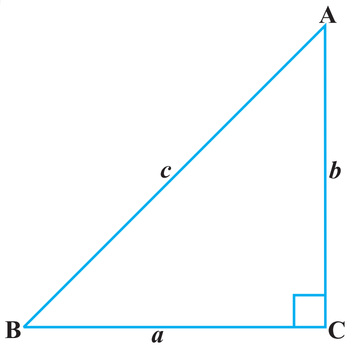
त्रिभुज ACB, द्वारा

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

अर्थात् $$BC = AB \cos B$$

तथा $$a = c \cos B,$$
$$b \cos C = b \cos 90^0 = 0$$

अत: हम लिख सकते हैं $$a = 0 + c \cos B$$
$$= b \cos C + c \cos B \qquad \text{... (3)}$$



आकृति A1.3

समीकरण (1), (2) तथा (3) से हम पाते हैं, कि किसी त्रिभुज ABC में

$$a = b \cos C + c \cos B$$

दशा (i) से $r \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

दशा (ii) से $s \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

तथा **दशा (iii)** से $t \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

अत: $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ प्रमाणित है अर्थात् $p \Rightarrow q$ प्रमाणित है,

अप्रत्यक्ष उपपत्ति: दिए गए साध्य को सीधे प्रमाणित करने के एवज में, हम उसके समतुल्य किसी साध्य को सिद्ध करके, प्रदत्त साध्य को प्रमाणित करते हैं

(i) विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (*Reductio Ad Absurdum*):
यहाँ हम इस मान्यता से प्रारंभ करते हैं कि परिकल्पना सत्य है तथा निष्कर्ष असत्य है। तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि एक ज्ञात सत्य कथन, असत्य है, जो एक विरोधोक्ति है। अत: प्रदत्त कथन सत्य है इस विधि को एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 5 सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित (Infinite) होता है।

हल मान लीजिए कि समस्त अभाज्य संख्याओं (Prime Numbers) का समुच्चय P है जो अपरिमित है। हम इस कथन के निषेध (Negation) को, अर्थात समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित नहीं है, सत्य मान लेते हैं, अर्थात् समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है। इसलिए हम समस्त अभाज्य संख्याओं को सूचीबद्ध कर सकते हैं। मान लीजिए कि $P_1, P_2, P_3, ..., P_k$ समस्त अभाज्य संख्याओं की सूची है। अब मान लीजिए

$$N = (P_1 P_2 P_3 \ldots P_k) + 1 \qquad \ldots (1)$$

स्पष्ट है कि N अभाज्य संख्याओं की सूची में नहीं है, क्योंकि यह सूची की किसी भी संख्या से अधिक है।

N या तो अभाज्य संख्या है या संयुक्त संख्या है।

यदि N अभाज्य संख्या है तो (1) से स्पष्ट होता है कि एक ऐसी अभाज्य संख्या का अस्तित्व है, जो सूची में नहीं है।

दूसरी ओर, यदि N एक संयुक्त संख्या है, तो इसका कम से कम एक अभाज्य भाजक (Divisor) होना चाहिए। परंतु सूची की कोई भी संख्या N को विभाजित (पूर्णरूप से) नहीं कर सकती है, क्योंकि उनमें से किसी के द्वारा N को विभाजित करने पर शेषफल सदैव 1 बचता है। अत: N का अभाज्य भाजक सूची के अतिरिक्त कोई अन्य संख्या है।

किंतु यह, इस कथन का कि हमने सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना ली है, विरोधोक्ति है।

इस प्रकार हमारी पूर्वधारणा कि सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है, असत्य है।

अत: सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित होता है।

टिप्पणी (ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उपपत्ति में विभिन्न दशाओं में विखण्डन द्वारा उपपत्ति की विधि का उपयोग भी है)

(ii) प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक (contrapositive) कथन के प्रयोग द्वारा उपपत्ति:
यहाँ सप्रतिबंध कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के स्थान पर हम उसके समतुल्य कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध करते हैं। (विद्यार्थी समतुल्यता को सत्यापित कर सकते हैं)।

किसी दिए हुए सप्रतिबंध कथन के निष्कर्ष तथा परिकल्पना का विनिमय करके उनमें से प्रत्येक का निषेधन करने से प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन बनता है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एकैकी फलन है।

हल फलन एकैकी होता है, यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

इसका प्रयोग करके हमें प्रमाणित करना है कि "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$" यह $p \Rightarrow q$, के रूप का है, जहाँ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ कथन p है तथा $x_1 = x_2$ कथन q है। इस बात को हम उदाहरण 2 में "प्रत्यक्ष विधि" द्वारा सिद्ध कर चुके हैं।

हम इसे प्रदत्त कथन के प्रतिधनात्मक कथन के प्रयोग द्वारा भी प्रमाणित कर सकते हैं। दिए गए कथन का प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ है, अर्थात् "यदि $f(x_1) = f(x_2)$ तो $x_1 = x_2$" का प्रतिधनात्मक है "यदि $x_1 \neq x_2$ तो $f(x_1) \neq f(x_2)$"

अब $$x_1 \neq x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 \neq 2x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$$

$\Rightarrow$ $$f(x_1) \neq f(x_2).$$

क्योंकि "$\sim q \Rightarrow \sim p$", और "$p \Rightarrow q$" समतुल्य है, इस प्रकार उपपत्ति पूर्ण है।

उदाहरण 7 प्रमाणित कीजिए कि "यदि आव्यूह A, Invertible है, तो A, Non-singular है"

हल उपर्युक्त कथन को प्रतीकात्मक रूप में लिखने पर $p \Rightarrow q$ जहाँ p कथन "आव्यूह A, invertible है" तथा q कथन "A, non-singular है।"

प्रदत्त कथन को प्रमाणित करने के एवज में हम इसके प्रतिधनात्मक कथन को प्रमाणित करते हैं, अर्थात् यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है, तो आव्यूह A invertible नहीं है।

यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो इसका अर्थ हुआ $|A| = 0$ है।

अब $$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $|A| = 0$

अत: A, Invertible नहीं है।

इस प्रकार हमने यह प्रमाणित कर दिया कि यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो A, invertible नहीं है। अर्थात् $\sim q \Rightarrow \sim p$.

अत: यदि एक आव्यूह A invertible है, तो A non-singular है।

(iii) प्रत्युदाहरण (counter example) द्वारा उपपत्ति:

गणित के इतिहास में ऐसे अवसर भी आते हैं, जब किसी परिकल्पित व्यापकीकरण की वैध उपपत्ति ज्ञात करने के सभी प्रयास असफल हो जाते हैं और व्यापकीकरण के सत्यमान की अनिश्चितता अनिर्णीत बनी रहती है।

ऐसी स्थिति में यह लाभप्रद है कि, कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए, हम एक उदाहरण ढूँढ़ सकें। किसी कथन को अमान्य करने वाला उदाहरण प्रत्युदाहरण कहलाता है।

क्योंकि साध्य $p \Rightarrow q$ का खंडन, साध्य $\sim (p \Rightarrow q)$ की केवल मात्र एक उपपत्ति होता है। अतः यह भी उपपत्ति की एक विधि है।

उदाहरण 8 कथन: प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $(2^{2^n} + 1)$ एक अभाज्य संख्या है।

यह कथन निम्नलिखित प्रेक्षणों के आधार पर एक समय सत्य समझा गया था:

$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ जो कि एक अभाज्य संख्या है।

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ जो कि अभाज्य संख्या है।

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ जो कि एक अभाज्य है।

यद्यपि, प्रथम दृष्टि में यह व्यापकीकरण सही प्रतीत होता है। अंततोगत्वा यह प्रतिपादित किया गया कि $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ एक अभाज्य संख्या नहीं है क्योंकि $4294967297 = 641 \times 6700417$ है। जो दो संख्याओं का गुणनफल है (1 तथा स्वंय के अतिरिक्त) इस प्रकार यह व्यापकीकरण कि "प्रत्येक n के लिए $2^{2^n} + 1$ एक अभाज्य संख्या है $\forall n \in \mathbf{N}^+$" असत्य है।

मात्र केवल यह एक उदाहरण कि $2^{2^5} + 1$ अभाज्य नहीं है, का उदाहरण व्यापकीकरण को खंडित करने के लिए पर्याप्त है।

अतः हमने सिद्ध कर दिया कि कथन "प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $2^{2^n} + 1$ एक अभाज्य संख्या है" सत्य नहीं है।

उदाहरण 9 कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है।" पर विचार कीजिए।

उपपत्तिः हम निम्नलिखित फलनों पर विचार करते हैं:

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

ये सभी फलन x के सभी मानों के लिए संतत हैं। यदि हम अवकलनीयता पर विचार करें तो ये x के सभी मानों के लिए अवकलनीय हैं। यह हमें इस विश्वास के लिए प्रेरित करता है कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" सत्य है। किंतु यदि हम फलन "$\phi(x) = |x|$" की अवकलनीयता की जाँच करें, जो कि संतत है, तो हम देखते हैं कि यह $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" असत्य है। फलन "$\phi(x) = |x|$" का केवल यह एक उदाहरण, व्यापकीकरण का खंडन करने के लिए पर्याप्त है। अतः फलन "$\phi(x) = |x|$" को दिए गए कथन अर्थात्, "प्रत्येक सतत फलन अवकलनीय होता है।" के खंडन का प्रत्युदाहरण कहते हैं।

परिशिष्ट 2

गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling)

A.2.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI में हम गणितीय निदर्शन को वास्तविक जीवन की समस्याओं के कुछ अंश का गणितीय भाषा में अध्ययन के एक प्रयास के रूप में जान चुके हैं, अर्थात्, उपयुक्त प्रतिबंधों का प्रयोग करके किसी भौतिक स्थिति का गणितीय रूपांतरण ही गणितीय निदर्शन है। मोटे तौर पर गणितीय निदर्शन एक प्रक्रिया है, जिसमें हम अपनी रुचि के साधनों या वस्तुओं के व्यवहार का वर्णन करने हेतु निदर्शों (Models) की रचना, विविध प्रकार से शब्दों, आरेखों या रेखाचित्रों, कंप्यूटर प्रोग्रामों, गणितीय सूत्रों आदि के प्रयोग द्वारा करते हैं।

पिछली कक्षाओं में हमने देखा है कि, विविध गणितीय संकल्पनाओं के प्रयोग से संबंधित अधिकांश प्रश्नों के हल के लिए एक प्रकार से गणितीय निदर्शन की आवश्यकता पड़ती है। अतः यह महत्वपूर्ण है कि गणितीय निदर्शन का अध्ययन एक पृथक् विषय के रूप में किया जाना चाहिए।

इस अध्याय (परिशिष्ट) में हम पुनः गणितीय निदर्शन का अध्ययन वास्तविक जीवन की कुछ ऐसी समस्याओं के लिए करेंगे, जिनमें आव्यूह, कलन तथा रैखिक प्रोग्रामन की प्राविधिओं का प्रयोग किया जाता है।

A.2.2 गणितीय निदर्शन क्यों? (Why Mathematical Modelling?)

विद्यार्थियों को अंकगणित, बीजगणित, त्रिकोणमिति तथा रैखिक प्रोग्रामन आदि के शाब्दिक प्रश्नों को हल करने का ज्ञान है। कभी-कभी हम परिस्थितिजन्य प्रश्नों को भौतिक रूप से उनकी गहराई में गए बिना ही सरल करते हैं। परिस्थितिजन्य प्रश्नों को हल करने के लिए भौतिक रूप से उनकी गहराई में जाने की आवश्यकता पड़ती है, अर्थात् भौतिक नियमों तथा कुछ प्रतीकों के प्रयोग की आवश्यकता जिससे प्राप्त गणितीय परिणामों का संगत प्रायोगिक मानों से तुलना की जा सके। अनेक प्रस्तुत प्रश्नों को सरल करने के लिए हमें एक कौशल की आवश्यकता पड़ती है जिसे **गणितीय निदर्शन** कहते हैं। आइए हम निम्नलिखित समस्याओं पर विचार करें:

(i) किसी नदी की चौड़ाई ज्ञात करना (विशेष रूप से जब नदी को पार करना कठिन हो)।

(ii) किसी गोले के फेंकने हेतु महत्तम कोण ज्ञात करना (गोला फेंकने वाले की ऊँचाई, माध्यम का प्रतिरोध, गुरूत्वाकर्षण g आदि प्राचलों पर विचार करते हुए)।

(iii) किसी मीनार की ऊँचाई ज्ञात करना (विशेषरूप से जब मीनार का शीर्ष अगम्य हो)।

(iv) सूर्य की सतह का तापमान ज्ञात करना।

(v) ज्ञात करना कि हृदय रोगियों को लिफ्ट के प्रयोग का निषेध क्यों है (बिना मानव शरीर क्रिया विज्ञान जाने)।

(vi) पृथ्वी का द्रव्यमान ज्ञात करना।

(vii) खड़ी फसल से भारत में दालों की पैदावार का अनुमान लगाना (जब किसी को फसल के काटने की अनुमति नहीं है)।

(viii) किसी व्यक्ति के शरीर में रक्त का आयतन ज्ञात करना (व्यक्ति का रक्त निकालने की अनुमति नहीं है)।

(ix) सन् 2009 ई. में भारत की जनसंख्या का अनुमान लगाना (जब कि सन् 2009 ई. तक प्रतीक्षा करने की अनुमति नहीं है)।

उपर्युक्त सभी समस्याओं को गणितीय निदर्शन के प्रयोग द्वारा सरल किया जा सकता है और वास्तव में सरल किया जा चुका है। वस्तुतः इनमें से कुछ समस्याओं को सरल करने की विधियों का अध्ययन आप इसी पाठ्यपुस्तक में करेंगे। तथापि यह शिक्षाप्रद होगा यदि आप इनको स्वयं सरल करने का प्रयास करें वह भी बिना गणित के प्रयोग किए। तब आप गणित की क्षमता तथा गणितीय निदर्शन की आवश्यकता के महत्त्व को समझ सकेंगे।

A.2.3 गणितीय निदर्शन के सिद्धांत (Principles of Mathematical Modelling)

गणितीय निदर्शन एक सिद्धांतयुक्त क्रिया है अतः इससे संबंधित कुछ सिद्धांत हैं। इन सिद्धांतों का स्वरूप लगभग दार्शनिक हैं। गणितीय निदर्शन के कुछ मूल सिद्धांतों को अनुदेशात्मक रूप में नीचे सूचीबद्ध किया गया है:

(i) निदर्श की आवश्यकता को पहचानिए (हम मॉडल क्यों खोज रहे हैं)।

(ii) मॉडल के लिए प्राचलों/चरों को सूचीबद्ध कीजिए (हम क्या ज्ञात करना चाहते हैं)।

(iii) उपलब्ध प्रासंगिक आँकड़ों को पहचानिए (क्या दिया हुआ है)।

(iv) प्रयोग योग्य परिस्थितियों को पहचानिए (पूर्वधारणा, कल्पना)।

(v) नियंत्रक भौतिक नियमों को पहचानिए।

(vi) पहचानिए:

(a) प्रयुक्त होने वाले समीकरण।

(b) की जाने वाली गणना।

(c) परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाला हल।

(vii) उन परीक्षणों को पहचानिए जिनसे निम्नलिखित जाँच की जा सके:

(a) मॉडल तथा उससे संबंधित नियमों एवं कल्पनाओं का संगत होना।

(b) मॉडल की उपयोगिता।

(viii) उन प्राचलों को पहचानिए जो मॉडल को सुधार सकें।

निदर्शन के उपर्युक्त सिद्धांतों के आधार पर हमें गणितीय निदर्शन के निम्नलिखित चरण प्राप्त होते हैं:

चरण 1: भौतिक स्थिति को पहचानिए।

चरण 2: प्राचलों / चरों के चयन और ज्ञात भौतिक नियमों तथा प्रतीकों के प्रयोग द्वारा भौतिक स्थिति को गणितीय मॉडल में परिवर्तित कीजिए।

चरण 3: गणितीय प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए।

चरण 4: प्राप्त परिणाम की मूल प्रश्न (समस्या) के संदर्भ में व्याख्या कीजिए और उसकी (परिणाम) प्रेक्षणों अथवा प्रयोगों से तुलना कीजिए।

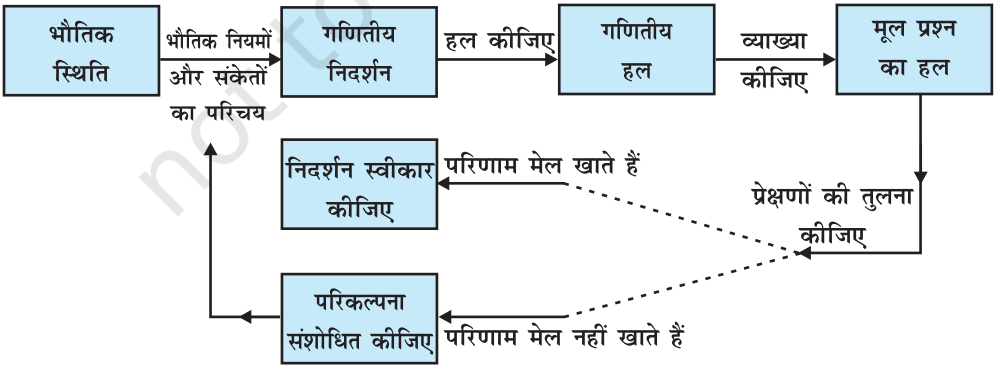
चरण 5: यदि परिणाम लगभग मेल खाते हैं, तो मॉडल को स्वीकार कीजिए अन्यथा भौतिक स्थिति की परिकल्पना / कल्पना को संशोधित कीजिए और चरण 2 पर जाइए।

उपर्युक्त चरणों को नीचे दर्शाए आरेख में देखा जा सकता है:

उदाहरण 1 गणितीय निर्दशन के प्रयोग द्वारा एक दी गई मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल चरण 1 "एक दी गई मीनार की ऊँचाई ज्ञात करना" प्रदत्त भौतिक स्थिति है।

चरण 2 मान लीजिए कि AB दी गई मीनार है (आकृति A.2.2)। मान लीजिए PQ मीनार की ऊँचाई नापने वाला एक प्रेक्षक है, जिसकी आँख बिंदु P पर है। मान लीजिए कि $PQ = h$ तथा मीनार की ऊँचाई H है। पुन: मान लीजिए कि प्रेक्षक की आँख से मीनार के शिखर (शीर्ष) का उन्नयन-कोण α है तथा $l = QB = PC$



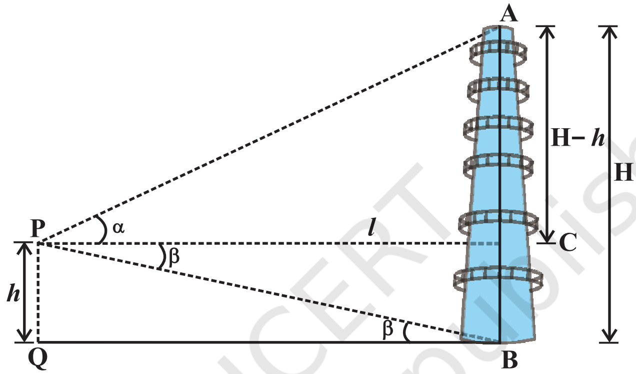
आकृति A.2.1

अब
$$\tan \alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

या
$$H = h + l \tan \alpha \qquad \text{... (1)}$$

चरण 3 ध्यान दीजिए कि प्राचल h, l तथा α के मान प्रेक्षक को ज्ञात हैं अतः परिणाम (1) से समस्या का हल प्राप्त होता है।

चरण 4 उस दशा में जब मीनार का आधार अगम्य हो, अर्थात् जब प्रेक्षक को l का मान ज्ञात नहीं हो, तब मान लीजिए कि मीनार के आधार B का बिंदु P से अवनमन–कोण β है। अतः Δ PQB से हमें



आकृति A.2.2

प्राप्त होता है कि

$$\tan \beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ या } l = h \cot \beta$$

चरण 5 इस स्थिति में इस चरण की आवश्यकता नहीं है क्योंकि h, l, α तथा β प्राचलों के सही मान ज्ञात हैं।

उदाहरण 2 मान लीजिए कि एक व्यावसायिक फर्म तीन प्रकार के उत्पाद P_1, P_2 और P_3 का उत्पादन करती है, जिनमें तीन प्रकार के कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3 का प्रयोग होता है। मान लीजिए कि फर्म से दो ग्राहक F_1 और F_2 खरीद की माँग करते हैं। यह मानते हुए कि फर्म के पास R_1, R_2 तथा R_3 की सीमित मात्रा है, एक मॉडल बनाइए, जो माँग को पूरा करने के लिए कच्चे माल R_1, R_2 और R_3 की मात्राओं को सुनिश्चित करे।

हल चरण 1 इस समस्या में भौतिक स्थिति की पहचान भलीभाँति है।

चरण 2 मान लीजिए कि A एक आव्यूह है, जो ग्राहकों F_1 तथा F_2 की आवश्यकता को निरूपित करता है। तब A का रूप ऐसा होगा,

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

मान लीजिए कि B एक आव्यूह है, जो उत्पाद P_1, P_2 तथा P_3 की प्रत्येक इकाई के उत्पादन हेतु कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3, की आवश्यक मात्राओं को निरूपित करता है। तब B नीचे दिए गए प्रकार का होगा,

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

चरण 3 ध्यान दीजिए कि A तथा B आव्यूहों का गुणनफल (जो इस स्थिति में सुपरिभाषित है) निम्नलिखित आव्यूह द्वारा प्राप्त होता है।

$$AB = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

जिससे वास्तव में ग्राहकों F_1 तथा F_2 के फरमाइशों को पूरा करने हेतु कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3 की वांछित मात्राएँ ज्ञात होती हैं।

उदाहरण 3 उदाहरण 2 के मॉडल की व्याख्या कीजिए, जब कि

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

तथा कच्चे माल की उपलब्ध मात्राएँ R_1 की 330 इकाईयाँ, R_2 की 455 इकाईयाँ और R_3 की 140 इकाईयाँ हैं।

हल नोट कीजिए कि

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

यह स्पष्टतया दर्शाता है कि F_1 और F_2 की माँग को पूरा करने के लिए कच्चे माल R_1 की 335 इकाई,

R_2 की 467 इकाई तथा R_3 की 147 इकाई की आवश्यकता है जो कि कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं से अधिक है। क्योंकि तीनों उत्पादों की प्रत्येक इकाई के निर्माण हेतु कच्चे माल के अपेक्षित मात्राएँ निश्चित हैं, इसलिए हम या तो कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं के बढ़ाने की माँग कर सकते हैं अथवा हम ग्राहकों से उनकी माँगों को कम करने का निवेदन कर सकते हैं।

टिप्पणी यदि हम उदाहरण 3 में A को A_1 से बदल दें, जहाँ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

अर्थात्, यदि ग्राहक लोग अपनी माँगों को कम करने के लिए मान जाते हैं, तो

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

यहाँ R_1 की 311, R_2 की 436 तथा R_3 की 138 इकाइयाँ आपेक्षित हैं जो कि कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं अर्थात् R_1 की 330, R_2 की 455 तथा R_3 की 140 इकाइयों से कम हैं।

टिप्पणी हम A को पुनः इस प्रकार संशोधित कर सकते हैं जिससे उपलब्ध कच्चे माल का पूर्णतया उपयोग हो जाए।

इस प्रकार यदि ग्राहकों की माँग को पूरा करने के लिए A_1 के द्वारा क्रय-आदेश दिए जाते हैं, तो फर्म दोनों ग्राहकों के क्रय-आदेशों को सरलता से पूरा कर सकता है।

पूछताछ प्रदत्त B तथा उपलब्ध कच्चे माल की निर्धारित मात्राओं के लिए क्या हम, फर्म के मालिक की सहायतार्थ, एक ऐसा गणितीय मॉडल बना सकते है, जिससे वह ग्राहकों से अनुरोध कर सके कि वे अपनी माँगों को इस प्रकार संशोधित करें कि उपलब्ध कच्चा माल पूर्णतया उपयोग में आ जाए।

इस पूछताछ का उत्तर निम्नलिखित उदाहरण में दिया गया है:

उदाहरण 4 मान लिजिए कि P_1, P_2, P_3 तथा R_1, R_2, R_3 उसी प्रकार है जैसा उदाहरण 2 में दिया है। मान लीजिए कि फर्म के पास R_1 की 330, R_2 की 455 और R_3 की 140 इकाइयाँ उपलब्ध हैं और मान लीजिए कि तीनों उत्पाद की प्रत्येक इकाई के निर्माण के लिए कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3, की मात्राएँ निम्नलिखित आव्यूह से प्राप्त होतीं हैं

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

प्रत्येक उत्पाद की कितनी इकाइयाँ बनाइ जाएँ कि उपलब्ध कच्चे माल का उपयोग पूर्णतया हो जाए?

हल चरण 1 स्थिति सरलता से पहचान योग्य है।

चरण 2 मान लीजिए कि फर्म P_1 की x इकाइयों , P_2 की y तथा P_3 की z इकाइयों का उत्पादन करती है। क्योंकि उत्पाद P_1 के लिए R_1 की 3, P_2 के लिए R_1 की 7 तथा P_3 के लिए R_1 की 5 इकाइयों की आवश्यकता पड़ती है (आव्यूह B देखिए) और R_1 की कुल 330 इकाइयाँ उपलब्ध हैं, अतः

$$3x + 7y + 5z = 330 \text{ (कच्चे माल } R_1 \text{ के लिए)}$$

इसी प्रकार
$$4x + 9y + 12z = 455 \text{ (कच्चे माल } R_2 \text{ के लिए)}$$

और
$$3y + 7z = 140 \text{ (कच्चे माल } R_3 \text{ के लिए)}$$

इस (उपर्युक्त) समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

चरण 3 प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया द्वारा, हमें प्राप्त होता है;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

इससे $x = 20$, $y = 35$ तथा $z = 5$ मिलता है। अतएव फर्म P_1 की 20, P_2 की 35 तथा P_3 की 5 इकाइयाँ उत्पन्न कर सकती है।

टिप्पणी कोई भी देख सकता है कि यदि निर्माता ग्राहकों F_1 और F_2 की माँगों (जैसा उदाहरण 3 में है) पर विचार किए बिना ही केवल उपलब्ध कच्चे माल के अनुसार उत्पादन करने का निर्णय लेता है, तो वह उनकी माँगों को पूरा नहीं कर सकता है, क्योंकि F_1 ने P_3 की 6 इकाइयाँ माँगी है जब कि निर्माता उसकी केवल 5 इकाइयाँ ही बना सकता है।

उदाहरण 5 एक दवा-निर्माता M_1 और M_2 दवाइयों की उत्पादन-योजना बनाता है। M_1 की 20,000 तथा M_2 की 40,000 बोतलों के लिए दवा बनाने हेतु यथेष्ट कच्चा-माल उपलब्ध है, किंतु उसके पास केवल 45,000 बोतलें हैं, जिनमें वह दोनों में से कोई भी दवा भर सकता है। M_1 की 1,000 बोतलें भरने के लिए पर्याप्त माल तैयार करनें में 3 घंटे और M_2 की 1000 बोतलें भरने के लिए पर्याप्त माल तैयार करनें में 1 घंटा लगते हैं तथा इस प्रक्रिया के लिए केवल 66 घंटे उपलब्ध हैं। M_1 की प्रत्येक बोतल पर Rs 8 तथा M_2 की प्रत्येक बोतल पर Rs 7 लाभ होता है। दवा-निर्माता, महत्तम लाभ अर्जित करने हेतु, अपनी उत्पादन-योजना किस प्रकार बनाए?

हल चरण 1 प्रदत्त परिकल्पना के अंतर्गत, महत्तम लाभ अर्जित करने हेतु, दवाओं M_1 तथा M_2 की बोतलों की संख्या ज्ञात करना।

चरण 2 मान लीजिए कि दवा M_1 की x और दवा M_2 की y बोतलें हैं। क्योंकि M_1 की प्रत्येक बोतल पर लाभ Rs 8 तथा M_2 की प्रत्येक बोतल पर लाभ Rs 7 होता है, अतः उद्देश्य-फलन (objective function), जिसे अधिकतम करना है नीचे लिखे समीकरण से दिया गया है।

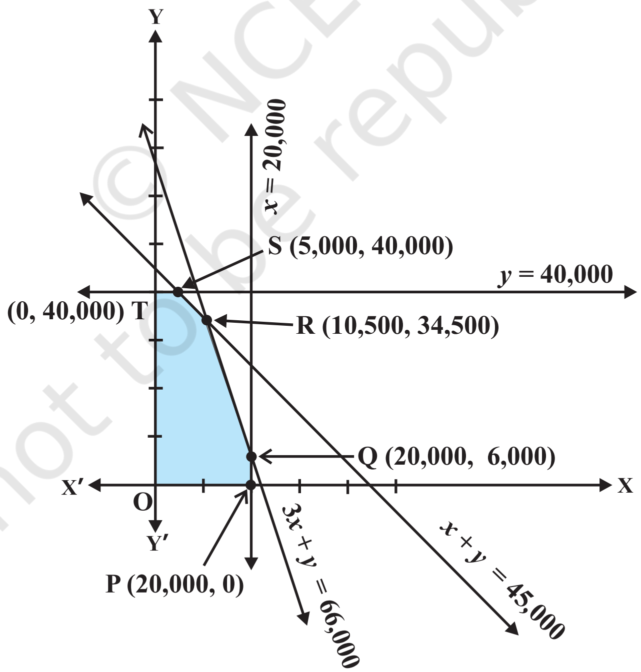
$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

इस उद्देश्य-फलन का निम्नलिखित प्रतिबंधों (व्यवरोधों) के अंतर्गत अधिकतम करना है (रैखिक प्रोग्रामन के अध्याय 12 पर ध्यान दीजिए)।

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 20000 \\ y \leq 40000 \\ x + y \leq 45000 \\ 3x + y \leq 66000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

चरण 3 प्रदत्त व्यवरोधों (constraints) (1) के अंतर्गत छायांकित क्षेत्र OPQRST सुसंगत-क्षेत्र है (आकृति A.2.3) बिंदुओं O, P, Q, R, S तथा T कोंनीय के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) तथा (0, 40000) हैं।

नोट कीजिए कि



आकृति A.2.3

$$P\ (0, 0) \text{ पर } Z = 0$$

$$P\ (20000, 0) \text{ पर } Z = 8 \times 20000 = 160000$$

$$Q\ (20000, 6000) \text{ पर } Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$$

$$R\ (10500, 34500) \text{ पर } Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$$

$$S = (5000, 40000) \text{ पर } Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$$

$$T = (0, 40000) \text{ पर } Z = 7 \times 40000 = 280000$$

ध्यान दीजिए कि $x = 10500$ और $y = 34500$ पर महत्तम लाभ अर्जित होता है, जो कि Rs 325500 है। अतः निर्माता (उत्पादक) को Rs 325500 का महत्तम लाभ अर्जित करने के लिए M_1 की 10500 तथा M_2 की 34500 बोतलें उत्पन्न करनी चाहिए।

उदाहरण 6 मान लीजिए कि एक कंपनी कोई नया उत्पाद बनाना चाहती है, जिस पर कुछ लागत (स्थिर और चर लागत) आती है और मान लीजिए कि कंपनी उस उत्पाद को एक स्थिर मूल्य पर विक्रय करने की योजना बनाती है। इस स्थिति में लाभ-हानि के परीक्षण हेतु एक गणितीय मॉडल बनाइए।

हल चरण 1 यहाँ स्थिति स्पष्टतया पहचान योग्य है।

चरण 2 **सूत्रण** से हमें ज्ञात है की लागत दो प्रकार की होती है, स्थिर तथा चर। स्थिर लागत उत्पाद की संख्या से स्वतंत्र होती है (जैसे किराया, शुल्क आदि), जब कि चर लागत उत्पाद की संख्या बढ़ने से बढ़ती है (जैसे सामग्री, पैकिंग इत्यादि)। प्रारंभ में हम मान लेते हैं कि चर लागत उत्पाद की संख्या की अनुक्रमानुपाती है - इससे हमारा मॉडल सरल हो जाता है। कंपनी को कुछ धन राशि विक्रय द्वारा प्राप्त होती है, और वह (कंपनी) यह सुनिश्चित करना चाहती है कि यह प्राप्त धन महत्तम है। सुविधा के लिए, हम यह मान लेते हैं कि प्रत्येक उत्पादित इकाई तत्काल बेच दी जाती है।

गणितीय मॉडल

मान लीजिए कि उत्पादित तथा विक्रय की गई इकाइयों की संख्या x है,

C = उत्पादन की कुल लागत है (रुपयों में)

I = विक्रय से होने वाली कुल आय है (रुपयों में)

P = कुल लाभ है (रुपयों में)

हमारी I उपर्युक्त मान्यता (assumption) के अनुसार C दो भागों से मिल कर बनता है:

स्थिर लागत = a (रुपयों में),

चर लागत = b (रुपए प्रति इकाई).

अतएव $\quad C = a + bx \quad \ldots (1)$

साथ ही आय I विक्रय मूल्य s (रुपए प्रति इकाई) पर निर्भर है,

अत: $$I = sx \qquad ... (2)$$

लाभ P आय और लागत के अंतर के बराबर होता है, इस प्रकार

$$\begin{aligned} P &= I - C \\ &= sx - (a + bx) \\ &= (s - b)\, x - a \qquad ... (3) \end{aligned}$$

इस प्रकार अब हमें चर राशिओं x, C, I, P, a, b, तथा s के बीच (1), (2) तथा (3) में दर्शाए पारस्परिक संबंधों का एक गणितीय मॉडल प्राप्त होता है। इन चर राशिओं का वर्गीकरण इस प्रकार है,

स्वतंत्र x

आश्रित (परतंत्र) C, I, P

प्राचल a, b, s

उत्पादक को x, a, b, s, की जानकारी है और वह P ज्ञात कर सकता है।

चरण 3 संबंध (3) द्वारा हम देखते हैं कि सम विच्छेदन बिंदु (न कोई लाभ और न कोई हानि) के लिए P = 0, अर्थात्, $x = \dfrac{a}{s-b}$ इकाइयाँ।

चरण 4 तथा 5 सम विच्छेदन बिंदु के विचार से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि कंपनी कुछ इकाइयाँ ही उत्पादित करती है, अर्थात् $x=\dfrac{a}{s-b}$ इकाइयों से कम हो तो उसे हानि होगी और यदि वह अधिक इकाइयाँ उत्पादित करती है, अर्थात् $\dfrac{a}{s-b}$ इकाइयों से अधिक तो उसे लाभ होगा। इसके अतिरिक्त, यदि सम विच्छेदन बिंदु अवास्तविक सिद्ध होता है, तब कोई अन्य मॉडल प्रयुक्त किया जा सकता है अथवा धन प्रवाह से संबंधित अभिधारणाओं में संशोधन किया जा सकता है।

टिप्पणी संबंध (3) से, हमें यह भी मिलता है कि,

$$\frac{dP}{dx} = s - b$$

अर्थात्, x के सापेक्ष P के परिवर्तन की दर, राशि $s - b$ पर निर्भर करती है जो कि उत्पाद के विक्रय मूल्य तथा उसके चर लागत के अंतर के बराबर है। अत: लाभ अर्जित करने के लिए इस राशि को धनात्मक होना चाहिए और प्रचुर मात्रा में लाभ अर्जित करने के लिए हमें बहुत अधिक मात्रा उत्पादित करनी चाहिए साथ ही साथ चर लागत को कम करने का प्रयास भी करना चाहिए।

उदाहरण 7 मान लीजिए कि एक टैंक में 1000 लिटर लवण-जल है जिसमें प्रति लिटर 250 g लवण है। 200 g/L लवण वाला लवण-जल, 25 L/min की दर से टैंक में आ रहा है तथा इस प्रकार प्राप्त मिश्रण समान दर से टैंक से बाहर निकल रहा है। किसी क्षण t पर टैंक में लवण की मात्रा क्या है?

हल चरण 1 यहाँ स्थिति सरलता से पहचान करने के योग्य है।

चरण 2 मान लीजिए कि $y = y(t)$ द्वारा अंतर्वाह-बहिर्वाह प्रारंभ होने के बाद, किसी समय t (मिनट में) पर, टैंक में उपस्थित लवण की मात्रा (किलो ग्राम में) सूचित (प्रकट) होती है। जब $t = 0$, अर्थात् अंतर्वाह-बहिर्वाह प्रारंभ होने से पूर्व $y = 250 \text{ g} \times 1000 = 250 \text{ kg}$

ध्यान दीजिए कि y में परिवर्तन, मिश्रण में अंतर्वाह-बहिर्वाह के कारण होता है

अब टैंक में लवण-जल का अंतर्वाह, 5 kg/min (क्योंकि $25 \times 200 \text{ g} = 5 \text{ kg}$) की दर से लवण लाता है तथा लवण-जल का बहिर्वाह $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ kg/min (क्योंकि t समय पर टैंक में लवण की मात्रा $\frac{y}{1000}$ kg है)

अत: t के सापेक्ष टैंक में लवण की मात्रा में परिवर्तन की दर निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होती है,

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \qquad \text{(क्यों?)}$$

या
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5 \qquad \ldots (1)$$

यह परिणाम प्रदत्त समस्या का एक गणितीय मॉडल देता है।

चरण 3 परिणाम (1) एक रैखिक समीकरण है, जिसे आसानी से सरल किया जा सकता है। समीकरण (1) का हल नीचे दिया है

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + \text{C} \quad \text{या} \quad y(t) = 200 + \text{C}\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (2)$$

जहाँ C समाकलन का अचर है।

ध्यान दीजिए कि ज्ञात है कि जब $t = 0$, $y = 250$. अतएव, $250 = 200 + \text{C}$

अथवा
$$\text{C} = 50$$

तब समीकरण (2) नीचे लिखित रूप में परिवर्तित हो जाता है,

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (3)$$

या
$$\frac{y - 200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

या $$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

अतः $$t = 40\log\left(\frac{50}{y-200}\right) \qquad \dots (4)$$

इस प्रकार समीकरण (4) वह समय t देता है, जब टैंक में लवण की मात्रा y kg है।

चरण 4 समीकरण (3) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि सदैव $y > 200$ क्योंकि $e^{-\frac{t}{40}}$ का मान सर्वदा धनात्मक रहता है

अतः टैंक में लवण की न्यूनतम मात्रा लगभग 200 kg (किंतु ठीक-ठीक 200 kg नहीं) हो सकती है। इसके अतिरिक्त समीकरण (4) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $t > 0$ यदि और केवल यदि $0 < y - 200 < 50$ अर्थात् यदि और केवल यदि $200 < y < 250$ अंतर्गत टैंक के लवण-जल के अंतर्वाह और बहिर्वाह के प्रारंभ होने के बाद लवण की मात्रा 200 kg और 250 kg के मध्य है।

गणितीय निदर्शन की परिसीमाएँ (Limitations)

अभी तक अनेक गणितीय मॉडल विकसित किए गए हैं और उनका अनुप्रयोग (application) अनेकानेक परिस्थितियों को गहनता से समझने में सफलतापूर्वक किया जा चुका है। कुछ विषय जैसे गणितीय भौतिकी, गणितीय अर्थशास्त्र, संक्रिया विज्ञान (operations research), जीव-गणित (Bio-mathematics) आदि, गणितीय निदर्शन के (लगभग) पर्यायवाची/समानार्थी हैं।

परंतु, आज भी कई परिस्थितियाँ ऐसी है, जिनके मॉडल अभी बनने हैं। जिसके पीछे कारण यह है कि या तो वे परिस्थितियाँ बहुत जटिल हैं अथवा विकसित मॉडल गणितानुसार असाध्य हैं।

शक्तिशाली कंप्यूटरों तथा अति-कंप्यूटरों (Super Computers) के विकास ने, परिस्थितियों की एक बहुत बड़ी संख्या के लिए, गणितानुसार मॉडल बनाने में, हमें सक्षम बना दिया है।

त्वरित (fast) तथा उन्नत कंप्यूटर के कारण यह संभव हो सका है कि हम अधिक यथार्थ मॉडलों की रचना कर सकते हैं जिनके द्वारा प्रेक्षण के साथ बेहतर सहमति प्राप्त की जा सकती है।

तथापि हमारे पास, किसी गणितीय मॉडल में प्रयुक्त विभिन्न चरों के चयन तथा इन चरों के मूल्याकंन हेतु अच्छे मार्गदर्शक सिद्धांत नहीं है। वास्तव में हम पाँच या छः चरों का चयन करके किंही भी आँकड़ों के लिए बहुत हद तक यथार्थ (accurate) मॉडलों का निर्माण कर सकते हैं। इनके ठीक-ठीक मूल्यांकन हेतु हमें चरों की संख्या कम से कम रखनी चाहिए।

बृहत् अथवा जटिल परिस्थितियों के गणितीय निदर्शन की अपनी विशेष (विशिष्ट) समस्याएँ होती है। इस प्रकार की परिस्थितियाँ प्रायः पर्यावरण (environment), समुद्र विज्ञान (oceanography), जनसंख्या नियंत्रण (population control) आदि के लोक निदर्शो (world models) के अध्ययन में आती हैं। शिक्षा की सभी शाखाओं-गणित, कंप्यूटर विज्ञान, भौतिकी, अभियंत्रिकी, समाजशास्त्र आदि के गणितीय निदर्शक, इस चुनौती का सामना साहसपूर्वक कर रहे हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(ii) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(iii) स्वतुल्य और संक्रामक परंतु सममित नहीं

(iv) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(v) (a) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(b) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(c) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(d) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और लेकिन संक्रामक

(e) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

3. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

5. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

9. (i) $\{1, 5, 9\}$, (ii) $\{1\}$

12. T_1 और T_3 परस्पर संबधित हैं।

13. सभी त्रिभुजों का समुच्चय

14. सभी रेखाओं $y = 2x + c, c \in \mathbf{R}$ का समुच्चय

15. B

16. C

प्रश्नावली 1.2

1. नहीं

2. (i) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

(ii) न तो एकैकी और न ही आच्छादी

(iii) न तो एकैकी और न ही आच्छादी

(iv) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

(v) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

7. (i) एकैकी और आच्छादक

(ii) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

9. नहीं

10. हाँ

11. D

12. A

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

3. No

4. $n!$

5. हाँ

6. A

7. B

प्रश्नावली 2.1

1. $\frac{-\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{-\pi}{3}$

5. $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $-\frac{\pi}{4}$ **7.** $\frac{\pi}{6}$ **8.** $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3\pi}{4}$ **10.** $\frac{-\pi}{4}$ **11.** $\frac{3\pi}{4}$ **12.** $\frac{2\pi}{3}$

13. B **14.** B

प्रश्नावली 2.2

3. $\frac{1}{2}\tan^{-1} x$ **4.** $\frac{x}{2}$ **5.** $\frac{\pi}{4} - x$ **6.** $\sin^{-1}\frac{x}{a}$

7. $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ **8.** $\frac{\pi}{4}$ **9.** $\frac{x+y}{1-xy}$ **10.** $\frac{\pi}{3}$

11. $\frac{-\pi}{4}$ **12.** $\frac{17}{6}$ **13.** B **14.** D

15. B

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

1. $\frac{\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **11.** $x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in z$ **12.** $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

13. D **14.** C

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) $19, 35, -5, 12, \frac{5}{2}$

2. $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

3. $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ or $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

7. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 9 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}, B-C=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

7. (i) $X=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (ii) $X=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{-12}{5}\\ \frac{-11}{5} & 3\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{13}{5}\\ \frac{14}{5} & -2\end{bmatrix}$

8. $X=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ **9.** $x = 3, y = 3$ **10.** $x = 3, y = 6, z = 9, t = 6$

11. $x = 3, y = -4$ **12.** $x = 2, y = 4, w = 3, z = 1$

15. $\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\ -1 & -1 & -10\\ -5 & 4 & 4\end{bmatrix}$ **17.** $k = 1$

19. (a) Rs 15000, Rs 15000 (b) Rs 5000, Rs 25000

20. Rs 20160 **21.** A **22.** B

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix}5 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{3} & 2\\ 5 & 5 & 3\\ 6 & 6 & -1\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 1 & 6\end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}$

10. (i) $A=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

3. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $x = -1$ **6.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

7. (a) बाजार-I में कुल आय = Rs 46000

बाजार-II में कुल आय = Rs 53000

(b) Rs 15000, Rs 17000

8. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** C **10.** B **11.** C

प्रश्नावली 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1, (ii) $x^3 - x^2 + 2$

5. (i) – 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x = \pm\sqrt{3}$, (ii) $x = 2$ **8.** (B)

प्रश्नावली 4.2

1. (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15

3. (i) 0, 8, (ii) 0, 8 **4.** (i) $y = 2x$, (ii) $x - 3y = 0$ **5.** (D)

प्रश्नावली 4.3

1. (i) $M_{11} = 3, M_{12} = 0, \quad M_{21} = -4, M_{22} = 2, A_{11} = 3, A_{12} = 0, A_{21} = 4, A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d, M_{12} = b, \ M_{21} = c, \quad M_{22} = a$

$A_{11} = d, \ A_{12} = -b, A_{21} = -c, \ A_{22} = a$

2. (i) $M_{11} = 1, M_{12} = 0, M_{13} = 0, \ M_{21} = 0, M_{22} = 1, M_{23} = 0, M_{31} = 0, M_{32} = 0, M_{33} = 1,$

$A_{11} = 1, A_{12} = 0, \ A_{13} = 0, A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = 0, \ A_{31} = 0, \ A_{32} = 0, \ A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11, M_{12} = 6, \ M_{13} = 3, M_{21} = -4, M_{22} = 2, M_{23} = 1, \ M_{31} = -20, M_{32} = -13, M_{33} = 5$

$A_{11} = 11, \ A_{12} = -6, A_{13} = 3, \ A_{21} = 4, \ A_{22} = 2, \ A_{23} = -1, A_{31} = -20, A_{32} = 13, A_{33} = 5$

3. 7 **4.** $(x - y)(y - z)(z - x)$ **5.** (D)

प्रश्नावली 4.4

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = -4, b = 1$ **15.** $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

प्रश्नावली 4.5

1. संगत
2. संगत
3. असंगत
4. संगत
5. असंगत
6. संगत
7. $x = 2, y = -3$
8. $x = \frac{-5}{11}, y = \frac{12}{11}$
9. $x = \frac{-6}{11}, y = \frac{-19}{11}$
10. $x = -1, y = 4$
11. $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{-3}{2}$
12. $x = 2, y = -1, z = 1$
13. $x = 1, y = 2, z = -1$
14. $x = 2, y = 1, z = 3$
15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}, x = 1, y = 2, z = 3$
16. प्याज का मूल्य प्रति kg = Rs 5
गेहूँ का मूल्य प्रति kg = Rs 8
चावल का मूल्य प्रति kg = Rs 8

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

2. 1
3. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
5. $-2(x^3 + y^3)$
6. xy
7. $x = 2, y = 3, z = 5$
8. A
9. D

प्रश्नावली 5.1

2. $f, x = 3$ पर संतत है।
3. (a), (b), (c) और (d) सभी संतत फलन हैं।
5. $f, x = 0$ और $x = 2$ पर संतत है; परंतु $x = 1$ पर संतत नहीं है।
6. $x = 2$ पर असंतत
7. $x = 3$ पर असंतत
8. $x = 0$ पर असंतत
9. असांतत्यत का कोई बिंदु नहीं
10. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं
11. असांतत्यत का कोई बिंदु नहीं

12. $x=1$ पर f असंतत है।

13. $x=1$ पर f संतत नहीं है।

14. $x=1$ और $x=3$ पर f संतत नहीं है।

15. केवल $x=1$ असांतत्यता का बिंदु है।

16. संतत

17. $a=b+\dfrac{2}{3}$

18. λ के किसी भी मान के लिए f, $x=0$ पर संतत है परंतु f, λ के प्रत्येक मान के लिए $x=1$ पर संतत है।

20. $x=\pi$ पर f संतत है।

21. (a), (b) और (c) सभी संतत फलन हैं।

22. प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए cosine फलन संतत है। cosecant फलन $x=n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है। secant फलन $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है। cotangent फलन, $x=n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत हैं।

23. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं है।

24. हाँ, प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए f संतत है।

25. प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए f संतत है।

26. $k=6$

27. $k=\dfrac{3}{4}$

28. $k=\dfrac{-2}{\pi}$

29. $k=\dfrac{9}{5}$

30. $a=2$, $b=1$

34. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं है।

प्रश्नावली 5.2

1. $2x\cos(x^2+5)$

2. $-\cos x \sin(\sin x)$

3. $a\cos(ax+b)$

4. $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. $a\cos(ax+b)\sec(cx+d)+c\sin(ax+b)\tan(cx+d)\sec(cx+d)$

6. $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3 - 3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$

8. $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

प्रश्नावली 5.3

1. $\dfrac{\cos x - 2}{3}$ **2.** $\dfrac{2}{\cos y - 3}$ **3.** $-\dfrac{a}{2by + \sin y}$

4. $\dfrac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$ **5.** $-\dfrac{(2x+y)}{(x+2y)}$ **6.** $-\dfrac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xy + 3y^2)}$

7. $\dfrac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$ **8.** $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$ **9.** $\dfrac{2}{1+x^2}$ **10.** $\dfrac{3}{1+x^2}$

11. $\dfrac{2}{1+x^2}$ **12.** $\dfrac{-2}{1+x^2}$ **13.** $\dfrac{-2}{1+x^2}$ **14.** $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

प्रश्नावली 5.4

1. $\dfrac{e^x (\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}$ **2.** $\dfrac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$

3. $3x^2 e^{x^3}$ **4.** $-\dfrac{e^{-x} \cos(\tan^{-1} e^{-x})}{1 + e^{-2x}}$

5. $-e^x \tan e^x,\ e^x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{N}$ **6.** $e^x + 2x e^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x e^{\sqrt{x}}}}, x > 0$ **8.** $\dfrac{1}{x \log x}, x > 1$

9. $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x (\log x)^2}, x > 0$ **10.** $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right) \sin(\log x + e^x), x > 0$

प्रश्नावली 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\,[\tan x + 2 \tan 2x + 3 \tan 3x]$

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-5}\right]$

3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x\log x}-\sin x\log(\log x)\right]$

4. $x^x(1+\log x)-2^{\sin x}\cos x\log 2$

5. $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3(9x^2+70x+133)$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]+x^{1+\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

7. $(\log x)^{x-1}[1+\log x\,.\,\log(\log x)]+2x^{\log x-1}\,.\,\log x$

8. $(\sin x)^x(x\cot x+\log\sin x)+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]+(\sin x)^{\cos x}[\cos x\cot x-\sin x\log\sin x]$

10. $x^{x\cos x}[\cos x\,.\,(1+\log x)-x\sin x\log x]-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x\cos x)^x[1-x\tan x+\log(x\cos x)]+(x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x\cot x+1-\log(x\sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\dfrac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}$

13. $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

14. $\dfrac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$

15. $\dfrac{y(x-1)}{x(y+1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x^3}{1+x^4}+\dfrac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1)=120$

17. $5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$

प्रश्नावली 5.6

1. t^2

2. $\dfrac{b}{a}$

3. $-4\sin t$

4. $-\dfrac{1}{t^2}$

5. $\dfrac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$

6. $-\cot\dfrac{\theta}{2}$

7. $-\cot 3t$

8. $\tan t$

9. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$

10. $\tan\theta$

प्रश्नावली 5.7

1. 2
2. $380\, x^{18}$
3. $-x \cos x - 2 \sin x$
4. $-\dfrac{1}{x^2}$
5. $x(5 + 6 \log x)$
6. $2e^x (5 \cos 5x - 12 \sin 5x)$
7. $9\, e^{6x} (3 \cos 3x - 4 \sin 3x)$
8. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$
9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x \log x)^2}$
10. $-\dfrac{\sin(\log x) + \cos(\log x)}{x^2}$
12. $-\cot y \operatorname{cosec}^2 y$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. $27\,(3x^2 - 9x + 5)^8\,(2x - 3)$
2. $3\sin x \cos x\,(\sin x - 2\cos^4 x)$
3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x} - 6\sin 2x \log 5x\right]$
4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$
5. $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\,\sqrt{2x+7}} + \dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$
6. $\dfrac{1}{2}$
7. $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{\log(\log x)}{x}\right],\ x > 1$
8. $(a \sin x - b \cos x) \sin(a \cos x + b \sin x)$
9. $(\sin x - \cos x)^{\sin x - \cos x} (\cos x + \sin x)\,(1 + \log(\sin x - \cos x)),\ \sin x > \cos x$
10. $x^x (1 + \log x) + a x^{a-1} + a^x \log a$
11. $x^{x^2-3}\left[\dfrac{x^2-3}{x} + 2x \log x\right] + (x-3)^{x^2}\left[\dfrac{x^2}{x-3} + 2x\log(x-3)\right]$
12. $\dfrac{6}{5}\cot\dfrac{t}{2}$
13. 0
17. $\dfrac{\sec^3 t}{at},\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$

प्रश्नावली 6.1

1. (a) $6\pi\ \text{cm}^2/\text{cm}$ (b) $8\pi\ \text{cm}^2/\text{cm}$
2. $\dfrac{8}{3}\ \text{cm}^2/\text{s}$
3. $60\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$
4. $900\ \text{cm}^3/\text{s}$

5. 80π cm²/s **6.** 1.4π cm/s

7. (a) -2 cm/min (b) 2 cm²/min

8. $\frac{1}{\pi}$ cm/s **9.** 400π cm³/cm **10.** $\frac{8}{3}$ cm/s

11. (4, 11) and $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ **12.** 2π cm³/s

13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ cm/s **15.** Rs 20.967

16. Rs 208 **17.** B **18.** D

प्रश्नावली 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

5. (a) $(-\infty, -2)$ and $(3, \infty)$ (b) $(-2, 3)$

6. (a) $x < -1$ के लिए ह्रासमान और $x > -1$ के लिए वर्धमान

(b) $x > -\frac{3}{2}$ के लिए ह्रासमान और $x < -\frac{3}{2}$ के लिए वर्धमान

(c) $-2 < x < -1$ के लिए वर्धमान और $x < -2$ और $x > -1$ के लिए ह्रासमान

(d) $x < -\frac{9}{2}$ के लिए वर्धमान और $x > -\frac{9}{2}$ के लिए ह्रासमान

(e) $(1, 3)$ और $(3, \infty)$, में वर्धमान तथा $(-\infty, -1)$ और $(-1, 1)$ में ह्रासमान

8. $0 < x < 1$ और $x > 2$ **12.** A, B

13. D **14.** $a = -2$ **19.** D

प्रश्नावली 6.3

1. (i) निम्नतम मान $= 3$ (ii) निम्नतम मान $= -2$

(iii) उच्चतम मान $= 10$ (iv) न तो निम्नतम और न तो उच्चतम मान

2. (i) निम्नतम मान $= -1$; उच्चतम मान का अस्तित्व नहीं

(ii) उच्चतम मान $= 3$; निम्नतम मान का अस्तित्व नहीं

(iii) निम्नतम मान $= 4$; उच्चतम मान $= 6$

(iv) निम्नतम मान $= 2$; उच्चतम मान $= 4$

(v) न तो निम्नतम मान और न तो उच्चतम मान

3. (i) $x = 0$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 0$

(ii) $x = 1$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= -2$

$x = -1$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= 2$

(iii) $x = \dfrac{\pi}{4}$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

(iv) $x = \dfrac{3\pi}{4}$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

$x = \dfrac{7\pi}{4}$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= -\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= 19$

$x = 3$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 15$

(vi) $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 2$

(vii) $x = 0$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \dfrac{1}{2}$

(viii) $x = \dfrac{2}{3}$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -8$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 8$

(ii) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -1$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

(iii) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -10$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 8$

(iv) निरपेक्ष निम्नतम मान $= 3$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 19$

6. अधिकतम लाभ $= 113$ इकाई

7. $x = 2$ पर निम्नतम, निम्नतम मान $= -39$, $x = 0$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 25$.

8. $x = \dfrac{\pi}{4}$ और $\dfrac{5\pi}{4}$ पर

9. उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

10. $x = 3$ पर उच्चतम, उच्चतम मान 89; $x = -2$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 139$

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 2\pi$; $x = 0$ पर निम्नतम, निम्नतम मान $= 0$

13. 12, 12

14. 45, 15

15. 25, 10

16. 8, 8

17. 3 cm

18. $x = 5$ cm

21. त्रिज्या $= \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm और ऊँचाई $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm

22. $\frac{112}{\pi+4}$ cm, $\frac{28\pi}{\pi+4}$ cm **27.** A **28.** D **29.** C

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

2. $b\sqrt{3}$ cm^2/s

3. (i) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

4. (i) $x < -1$ और $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

5. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ **6.** Rs 1000

8. लंबाई $= \frac{20}{\pi+4}$ m, चौड़ाई $= \frac{10}{\pi+4}$ m

10. (i) $x = \frac{2}{7}$ पर स्थानीय उच्चतम (ii) $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम

(iii) $x = -1$ पर नत परिवर्तन बिंदु

11. निरपेक्ष उच्चतम मान $= \frac{5}{4}$, निरपेक्ष निम्नतम मान $= 1$

14. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ **16.** A

पूरक पाठ्य सामग्री

अध्याय 5

प्रमेय 5 (पृष्ठ 190 पर शीर्षक 'प्रमेय 5' के अंतर्गत है।)

(i) चरघातांकीय फलन $f(x) = e^x$ का अवकलज

यदि $f(x) = e^x$ है, तो

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 \quad [\text{क्योंकि } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1]$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ है।

(ii) लघुगणकीय फलन $f(x) = \log_e x$ का अवकलज

यदि $f(x) = \log_e x$ है, तो

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e (x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e \; 1 + \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e \; 1 + \frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \quad [\text{क्योंकि } \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=1\,]$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$ है।

टिप्पणी

गणित

भाग – I

कक्षा 12 के लिए पाठ्यपुस्तक

12081

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

12081 – गणित (भाग 1)
कक्षा 12 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-668-3

प्रथम संस्करण
फरवरी 2007 फाल्गुन 1928

पुनर्मुद्रण
अक्तूबर 2007, जनवरी 2009, नवंबर 2009, दिसंबर 2010, जनवरी 2012, मार्च 2013, फरवरी 2014, दिसंबर 2015, दिसंबर 2016, जनवरी 2018, जनवरी 2019, जनवरी 2020, जनवरी 2021, नवंबर 2021

संशोधित संस्करण
नवंबर 2022 अग्रहायण 1944

पुनर्मुद्रण
मार्च 2024, चैत्र 1946
दिसंबर 2024, अग्रहायण 1946

PD 13T BS

₹ 110.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा पुष्पक प्रेस प्राइवेट लिमिटेड, 203-204, डी.एस.आई.डी.सी. कॉम्प्लेक्स, ओखला, इंडस्ट्रियल एरिया, फेज-1, नई दिल्ली-110020 द्वारा मुद्रित।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फ़ोन : 011-26562708

108ए 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलुरु 560 085 फ़ोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फ़ोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फ़ोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगाँव
गुवाहाटी 781 021 फ़ोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	:	*एम.वी. श्रीनिवासन*
मुख्य संपादक	:	*बिज्ञान सुतार*
मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी)	:	*जहान लाल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*अमिताभ कुमार*
संपादक	:	*रेखा अग्रवाल*
सहायक उत्पादन अधिकारी	:	*दीपक कुमार*

चित्रांकन सज्जा एवं आवरण
अरविंदर चावला

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन कर सकते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक के सलाहकार प्रोफ़ेसर पवन कुमार जैन की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए

हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम, विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रो. मृणाल मिरी और प्रो. जी.पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित, राष्ट्रीय मानीटरिंग समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नयी दिल्ली
20 नवंबर 2006

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन

कोविड-19 महामारी को देखते हुए, विद्यार्थियों के ऊपर से पाठ्य सामग्री का बोझ कम करना अनिवार्य है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 2020* में भी विद्यार्थियों के लिए पाठ्य सामग्री का बोझ कम करने और रचनात्मक नज़रिए से अनुभवात्मक अधिगम के अवसर प्रदान करने पर ज़ोर दिया गया है। इस पृष्ठभूमि में, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने सभी कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित करने की शुरुआत की है। इस प्रक्रिया में रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पहले से ही विकसित कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखा गया है।

पाठ्य सामग्रियों के पुनर्संयोजन में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखा गया है—

- एक ही कक्षा में अलग-अलग विषयों के अंतर्गत समान पाठ्य सामग्री का होना;
- एक कक्षा के किसी विषय में उससे निचली कक्षा या ऊपर की कक्षा में समान पाठ्य सामग्री का होना;
- कठिनाई स्तर;
- विद्यार्थियों के लिए सहज रूप से सुलभ पाठ्य सामग्री का होना, जिसे शिक्षकों के अधिक हस्तक्षेप के बिना, वे खुद से या सहपाठियों के साथ पारस्परिक रूप से सीख सकते हों;
- वर्तमान संदर्भ में अप्रासंगिक सामग्री का होना।

वर्तमान संस्करण, ऊपर दिए गए परिवर्तनों को शामिल करते हुए तैयार किया गया पुनर्संयोजित संस्करण है।

प्रस्तावना

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद ने विद्यालयी शिक्षा से संबंधित विभिन्न विषयों के अध्ययन के लिए, राष्ट्रीय पाठ्य चर्या रूपरेखा की समीक्षा हेतु विद्यालयी शिक्षा-2000 (एन.सी.एफ. एस.ई-2000) के अंतर्गत आविर्भाव चुनौतियों और विषय वस्तु के रूपांतरण, जो शिक्षा शास्त्र के क्षेत्र में अंतर्निहित हैं, उन्हें राष्ट्रीय एवं अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर विद्यालयी शिक्षा के लिए 21 फोकस समूहों का गठन किया है। इस फोकस समूह ने विद्यालयी शिक्षा क्षेत्र के विभिन्न पहलुओं पर अपनी व्यापक और विशेष टिप्पणियाँ की हैं। इसी के फलस्वरूप, इन समूहों द्वारा अपनी रिपोर्टों के आधार पर राष्ट्रीय पाठ्य चर्या रूपरेखा-2005 को विकसित किया गया।

नए दिशा-निर्देशों के अंतर्गत ही राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद ने कक्षा XI और XII की गणित विषय का पाठ्यक्रम तैयार किया तथा पाठ्यपुस्तकें तैयार करने के लिए एक टीम का गठन किया। कक्षा XI की पाठ्य-पुस्तक पहले से ही प्रयोग में है जो 2005 में प्रकाशित की जा चुकी है।

पुस्तक का प्रथम प्रारूप (कक्षा XII) एन.सी.ई.आर.टी. संकाय, विशेषज्ञ और कार्यरत् अध्यापकों की टीम द्वारा तैयार कर लिया गया। तत्पश्चात् विकासशील टीम ने विभिन्न बैठकें आयोजित कर इस प्रारूप को परिष्कृत किया था।

पुस्तक के इस प्रारूप को देश के विभिन्न भागों में उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित के अध्यापन से संबद्ध अध्यापनरत् शिक्षकों की एक टीम के समक्ष प्रस्तुत किया था। पुन: प्रारुप की एनसीईआरटी द्वारा आयोजित कार्यशाला में समीक्षा की गई। सहभागियों द्वारा दिए गए सुझावों एवं टिप्पणियों को प्रारूप पाठ्यपुस्तक में समायोजित कर लिया गया। विकासशील टीम में से ही गठित एक संपादकीय मंडल ने पाठ्य-पुस्तक के इस प्रारूप को अंतिम रूप दे दिया। अंतत:, विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह तथा मानव संसाधन मंत्रालय, भारत सरकार द्वारा गठित निगरानी समिति (Monitoring Committee) ने इस पाठ्यपुस्तक प्रारूप को अनुमोदित कर दिया।

विषय की प्रमाणिकता की दृष्टि से पुस्तक को प्रभावित करने वाले कुछ आवश्यक तत्वों का उल्लेख करते हैं। ये विशिष्टताएँ लगभग इस पुस्तक के सभी पाठों में परिलक्षित हैं। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक में 13 मुख्य अध्याय और दो परिशिष्ट शामिल हैं। प्रत्येक अध्याय निम्नलिखित बिंदु समाहित करता है:

- भूमिका : विषय के महत्वपूर्ण बिंदुओं पर बल; पूर्व में पढ़ाए गए विषय-वस्तुओं का परस्पर संबंध; अध्याय में लगभग नयी अवधारणाओं का सार-रूप में विवेचना।
- अध्याय में खंडो को शमिल करते हुए धारणाओं और अवधारणाओं का संगठन।
- धारणाओं / अवधारणाओं की जानकारी को प्रेरणादायक बनाते हुए, जहाँ भी संभव हो सका दृष्टांत उपलब्ध कराए गए हैं।

- उपपत्ति/समस्या के हल सिद्धांत और अनुप्रयोग दोनों पक्षों पर बल देते हुए या तार्किक, बहुविध साधन, जहाँ भी इन्हें अपनाने की आवश्यकता पड़ी, अपनाया है।
- ज्यामितिय दृष्टिकोण/संकल्पनाओं का प्रस्तुतीकरण आवश्यक होने पर दिया गया है।
- गणितीय अवधारणाओं और इसके सह-विषयों जैसे: विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान से भी जोड़ा गया है।
- विषय के प्रत्येक खंड में पर्याप्त और विविध उदाहरण/अभ्यास दिए गए हैं।
- समस्याओं को हल करने की क्षमता या कौशल एवं अनुप्रयोग करने की समझ को केंद्रीत एवं मजबूत करने हेतु अध्याय के अंत में दो या दो से अधिक संकल्पनाओं को समावेशित करने वाले उदाहरणों तथा अभ्यास-प्रश्नों का समायोजन किया गया है, जैसा कि राष्ट्रीय पाठ्य-चर्या रूप रेखा 2005 में कहा गया है, इसी के अनुरूप मेधावी छात्रों के लिए भी पाठ्य-पुस्तक में चुनौतीपूर्ण समस्याओं को शामिल किया गया है।
- विषय को और अधिक प्रेरणादायक बनाने के उद्देश्य से विषय की संक्षिप्त ऐतिहासिक पृष्ठभूमि पाठ के अंत में दी गई है और प्रत्येक पाठ के प्रारंभ में संबंधित कथन एवं सुप्रसिद्ध गणितज्ञों के चित्र दिये गए हैं जिन्होंने विशेषतया विषय-वस्तु को विकसित और सुबोध बनाने के लिए अपना योगदान दिया।
- अंतत: विषय की संकल्नाओं के सूत्र एवं परिणाम के प्रत्यक्ष सार-कथन के लिए पाठ का संक्षिप्त सारांश भी प्रस्तुत किया गया है।

मैं विशेष रूप से राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक प्रो. कृष्ण कुमार का आभारी हूँ जिन्होंने मुझे निमंत्रित कर गणित शिक्षा के राष्ट्रीय प्रयास की कड़ी से जोड़ा है। उन्होंने हमें इस हेतु बौद्धिक परिप्रेक्ष्य तथा स्वस्थ्य वातावरण प्रदान किया। इस पुस्तक को तैयार करने का कार्य अत्यन्त सुखद एवं प्रशंसनीय रहा। मैं, विज्ञान एवं गणित की सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रो.जे.वी. नारलीकर का कृतज्ञ हूँ जिन्होंने समय-समय पर इस पुस्तक के लिए अपने विशेष सुझाव एवं सहयोग देकर पुस्तक के सुधार में कार्य किया। मैं परिषद् के संयुक्त निदेशक प्रो.जी.रवीन्द्रा को भी धन्यवाद देता हूँ जिन्होने समय-समय पर पाठ्य-पुस्तक से संबंधित क्रिया-विधि को संचालित करने में योगदान किया।

मैं प्रो. हुकुम सिंह, मुख्य संयोजक एवं अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित, डॉ.वी.पी.सिंह, संयोजक तथा प्रो. एस.के.सिंह गौतम के प्रति सहृदय धन्यवाद व्यक्त करता हूँ जिन्होंने इस परियोजना को सफल बनाने हेतु शैक्षिक और प्रशासनिक रूप से संलग्न रहे। मैं इस नेक कार्य से संबद्ध सभी टीम के सदस्यों और शिक्षकों की प्रशंसा करता हूँ तथा उन्हें धन्यवाद देता हूँ जो इस कार्य में किसी भी रूप में योगदान किया हो।

पवन के. जैन
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक संवर्धन समिति

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

विज्ञान एवं गणित सलाहकार समूह के अध्यक्ष

जयंत विष्णु नारलीकर *इमीरिटस प्रोफ़ेसर*, अध्यक्ष, आई.यू.सी.ए., पूना विश्वविद्यालय, पूना।

मुख्य सलाहकार

पी.के. जैन, *प्रोफ़ेसर* गणित विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर* एवं विभागाध्यक्ष, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

सदस्य

अरुण पाल सिंह, सीनियर प्रवक्ता, गणित विभाग, दयाल सिंह कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।
ए.के.राजपूत, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल।
प्रोफ़ेसर, बी.एस.पी. राजू, क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर, कर्नाटक।
सी.आर.प्रदीप, सहायक *प्रोफ़ेसर*, गणित विभाग, भारतीय विज्ञान संस्थान, बंगलौर, कर्नाटक।
आर.डी. शर्मा, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, मुंगेशपुर, दिल्ली।
राम अवतार, *प्रोफ़ेसर* (अवकाश प्राप्त) एवं सलाहकार, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।
आर.पी.मौर्य, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।
एस.एस.खेर, *प्रोफ़ेसर*, सम उप कुलपति, एन.ई.एस.यू., तुरा कैंपस मेघालय।
एस.के.एस. गौतम, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।
एस.के.कौशिक, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, गणित विभाग, किरोड़ीमल कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।
संगीता अरोड़ा, *पी.जी.टी.*, एपीजे स्कूल, साकेत, नयी दिल्ली।
शैलजा तिवारी, *पी.जी.टी.*, केंद्रीय विद्यालय, बरकाकाना, हजारीबाग, झारखंड।
विनायक बुजाडे, *लेक्चरर*, विर्दभ बुनियादी जूनियर कॉलेज, सक्करदारा चौक, नागपुर, महाराष्ट्र।
सुनिल बजाज, *सीनियर स्पेशलिस्ट*, एस.सी.ई.आर.टी., गुड़गाँव, हरियाणा।

सदस्य समन्वयक

वी.पी.सिंह, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

हिंदी रूपांतरणकर्ता

डी.आर.शर्मा, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, मुंगेशपुर, दिल्ली।

पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (अ.प्रा.) केंद्रीय विद्यालय संगठन।

एस.बी.त्रिपाठी, *लेक्चरर*, (गणित) राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, दिल्ली।

ए.के. राजपूत, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, (गणित), क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल, मध्य प्रदेश।

वी.पी.सिंह, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, (गणित), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

हिंदी समन्वयक

एस.के.सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

आभार

परिषद् इस पाठ्यपुस्तक समीक्षा कार्याशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों के बहुमूल्य सहयोग के लिए अपना हार्दिक आभार व्यक्त करती है: जगदीश सरन, *प्रोफ़ेसर*, सांख्यिकीय विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय; कुद्दूस खान, *लेक्चरर*, शिबली नेशनल पी.जी. कॉलेज आजमगढ, (उ.प्र.); पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (अ.प्रा.), केंद्रीय विद्यालय संगठन; एस.बी. त्रिपाठी, *लेक्चरर*, आर.पी.बी. वि. सूरजमल विहार, दिल्ली; ओ.एन. सिंह, *रीडर*, आर.आई.ई. भुवनेश्वर, उड़ीसा; कुमारी सरोज, *लेक्चरर*, गवर्नमेंट गर्ल्स सीनियर सेकेंडरी स्कूल, न. 1, रूपनगर, दिल्ली; पी.भास्कर कुमार, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, लेपाक्षी, अनंतपुर, (आंध्र प्रदेश); श्रीमती कल्पागम्, *पी.जी.टी*, के.वी. नाल कैंपस, बैंगलोर; राहुल सोफत, *लेक्चरर*, एअर फोर्स गोल्डन जुबली इंस्टिट्यूट, सुब्रतो पार्क, नयी दिल्ली; वंदिता कालरा, सर्वोदय कन्या विद्यालय, विकासपुरी जनपद केंद्र, नयी दिल्ली; जनार्दन त्रिपाठी, *लेक्चरर*, गवर्नमेंट आर.एच.एस.एस. ऐजाव्ल, मिजोरम और सुश्री सुषमा जयरथ, *रीडर*, डी. डब्लयू.एस., एन.सी.ई.आर.टी, नयी दिल्ली।

परिषद् एन.सी.ई.आर.टी. में हिंदी रूपातंरण के पुनरावलोकन हेतु कार्यशाला में निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है; जी.डी.ढल, अवकाश प्राप्त *रीडर*, एन.सी.ई. आर.टी., नयी दिल्ली; जी.एस.राठौर, *असिस्टैंट प्रोफ़ेसर*, गणित एवं सांख्यिकी विभाग, एम.एल. सुखाड़िया विश्वविद्यालय, उदयपुर, राजस्थान; मनोज कुमार ठाकुर, डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, राजेन्द्र नगर, साहिबाबाद, गाजियाबाद (उ.प्र.); रामेश्वर दयाल शर्मा, राजकीय इंटर कॉलेज, मथुरा (उ.प्र.); डॉ.आर.पी.गिहारे, ब्लॉक रिर्सोस कोआर्डिनेटर, जनपद शिक्षा केंद्र, चिचौली, बेतुल (म.प्र.); सुनील बजाज, एस.सी.ई.आर.टी., गुड़गाँव, हरियाणा; श्रीमती वीना धींगरा, सर लक्ष्मी बालिका सीनियर सेकेंडरी स्कूल, खारी बावली, दिल्ली; ए.के.वझलवार, *रीडर*, एन.सी.ई.आर.टी, नयी दिल्ली।

परिषद् चित्रांकन अरविंदर चावला, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी* दीपक कपूर; राकेश कुमार एवं सज्जाद हैदर अंसारी, नरगिस इस्लाम, *डी.टी.पी. ऑपरेटर*; के.पी.एस.यादव, मनोज मोहन, *कॉपी एडिटर* और रूबी कुमारी तथा रणधीर ठाकुर, *प्रूफ़ रीडर*, द्वारा किए गए प्रयासों के प्रति अपना आभार प्रकट करती है। ए.पी.सी. ऑफिस, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग एवं प्रकाशन विभाग भी अपने सहयोग के लिए आभार के पात्र हैं।

परिषद् इस संस्करण के पुनर्संयोजन के लिए, पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक और विषय सामग्री के विश्लेषण हेतु दिए गए महत्वपूर्ण सहयोग के लिए एन.सी.ई.आर.टी. के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के सदस्यों— आशुतोष वझलवार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; टी.पी. शर्मा, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; और राहुल सोफट, *पी.जी.टी.,* एयर फोर्स गोल्डन जूबली स्कूल, सुब्रतो पार्क, नयी दिल्ली; गुरप्रीत भटनागर, *रिसोर्स पर्सन*, सी.बी.एस.ई. के प्रति आभार व्यक्त करती है।

Reprint 2025-26

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1]**[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य]** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2]**[राष्ट्र की एकता और अखंडता]** सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

विषय-सूची

भाग - I

उत्तरमाला

प्रश्नावली 7.1

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$ **2.** $\frac{1}{3}\sin 3x$ **3.** $\frac{1}{2}e^{2x}$

4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$ **5.** $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{4}{3}e^{3x}$ **6.** $\frac{4}{3}e^{3x}+x+C$

7. $\frac{x^3}{3}-x+C$ **8.** $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$ **9.** $\frac{2}{3}x^3+e^x+C$

10. $\frac{x^2}{2}+\log|x|-2x+C$ **11.** $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$

12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$ **13.** $\frac{x^3}{3}+x+C$

14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$ **15.** $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$

16. $x^2-3\sin x+e^x+C$ **17.** $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

18. $\tan x + \sec x + C$ **19.** $\tan x - x + C$

20. $2\tan x - 3\sec x + C$ **21.** C

22. A

प्रश्नावली 7.2

1. $\log(1+x^2)+C$ **2.** $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$ **3.** $\log|1+\log x|+C$

4. $\cos(\cos x)+C$ **5.** $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b)+C$

6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$ **7.** $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ **9.** $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+C$ **10.** $2\log\left|\sqrt{x}-1\right|+C$

11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8)+C$

12. $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}}+C$ **13.** $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2}+C$

14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$ **15.** $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|+C$ **16.** $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

17. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$ **18.** $e^{\tan^{-1}x}+C$ **19.** $\log(e^x+e^{-x})+C$

20. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$ **21.** $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$ **23.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+C$

24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$ **25.** $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

26. $2\sin\sqrt{x}+C$ **27.** $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$ **28.** $2\sqrt{1+\sin x}+C$

29. $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$ **30.** $-\log|1+\cos x|+C$ **31.** $\frac{1}{1+\cos x}+C$

32. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$ **33.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

34. $2\sqrt{\tan x}+C$ **35.** $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+C$ **36.** $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

37. $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4)+C$ **38.** D

39. B

प्रश्नावली 7.3

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$ **2.** $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$

5. $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$

8. $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

9. $x-\tan\frac{x}{2}+C$

10. $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$

12. $x - \sin x + C$

13. $2(\sin x + x\cos\alpha) + C$

14. $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x-\frac{1}{2}\sec 2x+C$

16. $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

17. $\sec x - \operatorname{cosec} x + C$

18. $\tan x + C$

19. $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

20. $\log|\cos x+\sin x|+C$

21. $\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

22. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

23. A

24. B

प्रश्नावली 7.4

1. $\tan^{-1} x^3 + C$

2. $\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+C$

3. $\log\left|\frac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}}\right|+C$

4. $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3}+C$

5. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2+C$

6. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

7. $\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

8. $\frac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right|+C$

9. $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right|+C$

10. $\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

11. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\ \frac{3x+1}{2}\ +C$

12. $\sin^{-1}\ \frac{x+3}{4}\ +C$

13. $\log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

14. $\sin^{-1}\ \frac{2x-3}{\sqrt{41}}\ +C$

15. $\log\left|x-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right|+C$

16. $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

17. $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

18. $\frac{5}{6}\log\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\ \frac{3x+1}{\sqrt{2}}\ +C$

19. $6\sqrt{x^2-9x+20}+34\log\left|x-\frac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C$

20. $-\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\ \frac{x-2}{2}\ +C$

21. $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

22. $\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

23. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

24. B

25. B

प्रश्नावली 7.5

1. $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$

2. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

3. $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

4. $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

5. $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$

6. $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

7. $\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

8. $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$

9. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

10. $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

11. $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

13. $-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}x+C$

14. $3\log|x+2|-\frac{5}{x-2}+C$

15. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

16. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

17. $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

18. $x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+3}+C$

20. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

21. $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$

22. B

23. A

प्रश्नावली 7.6

1. $-x\cos x+\sin x+C$

2. $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

3. $e^x(x^2-2x+2)+C$

4. $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

5. $\frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{x^2}{4} + C$

6. $\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C$

7. $\frac{1}{4}(2x^2 - 1)\sin^{-1}x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$

8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

9. $(2x^2 - 1)\frac{\cos^{-1}x}{4} - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$

10. $\left(\sin^{-1}x\right)^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x - 2x + C$

11. $-\left[\sqrt{1-x^2}\,\cos^{-1}x + x\right] + C$

12. $x\tan x + \log|\cos x| + C$

13. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

14. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + C$

15. $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log x - \frac{x^3}{9} - x + C$

16. $e^x \sin x + C$

17. $\frac{e^x}{1+x} + C$

18. $e^x \tan\frac{x}{2} + C$

19. $\frac{e^x}{x} + C$

20. $\frac{e^x}{(x-1)^2} + C$

21. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C$

22. $2x\tan^{-1}x - \log(1 + x^2) + C$

23. A

24. B

प्रश्नावली 7.7

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + C$

2. $\frac{1}{4}\sin^{-1}2x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6} + \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1} - \frac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + C$

5. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + C$

6. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5}-\frac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C$

7. $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x}-\frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$

9. $\frac{x}{6}\sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

10. A

11. D

प्रश्नावली 7.8

1. 2
2. $\log\frac{3}{2}$
3. $\frac{64}{3}$
4. $\frac{1}{2}$
5. 0
6. $e^4(e-1)$
7. $\frac{1}{2}\log 2$
8. $\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$
9. $\frac{\pi}{2}$
10. $\frac{\pi}{4}$
11. $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$
12. $\frac{\pi}{4}$
13. $\frac{1}{2}\log 2$
14. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$
15. $\frac{1}{2}(e-1)$
16. $5-\frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4}-\log\frac{3}{2}\right)$
17. $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$
18. 0
19. $3\log 2+\frac{3\pi}{8}$
20. $1+\frac{4}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$
21. D
22. C

प्रश्नावली 7.9

1. $\frac{1}{2}\log 2$
2. $\frac{64}{231}$
3. $\frac{\pi}{2}-\log 2$
4. $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$
5. $\frac{\pi}{4}$
6. $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$
7. $\frac{\pi}{8}$
8. $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$
9. D
10. B

प्रश्नावली 7.10

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{4}$
5. 29
6. 9
7. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
8. $\frac{\pi}{8}\log 2$
9. $\frac{16\sqrt{2}}{15}$
10. $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$
11. $\frac{\pi}{2}$
12. π
13. 0
14. 0
15. 0
16. $-\pi\log 2$
17. $\frac{a}{2}$
18. 5
20. C
21. C

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|+C$
2. $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$
3. $-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a-x)}{x}}+C$
4. $-\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$
5. $2\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\log(1+x^{\frac{1}{6}})+C$
6. $-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+9)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C$
7. $\sin a\log|\sin(x-a)|+x\cos a+C$
8. $\frac{x^3}{3}+C$

9. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$

10. $-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

11. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$

12. $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C$

13. $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right)+C$

14. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

15. $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

16. $\frac{1}{4}\log(x^4+1)+C$

17. $\frac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)}+C$

18. $\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+C$

19. $-2\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}+C$

20. $e^x\tan x+C$

21. $-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+3\log|x+2|+C$

22. $\frac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+C$

23. $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{3}\right]+C$

24. $e^{\frac{\pi}{2}}$

25. $\frac{\pi}{8}$

26. $\frac{\pi}{6}$

27. $2\sin^{-1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

28. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

29. $\frac{1}{40}\log 9$

30. $\frac{\pi}{2}-1$

31. $\frac{19}{2}$

32. A

33. B

34. D

प्रश्नावली 8.1

1. 12π **2.** 6π **3.** A **4.** B

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) $\frac{7}{3}$ (ii) 624.8

2. 9 **3.** 4 **4.** D **5.** C

प्रश्नावली 9.1

1. कोटि 4; घात परिभाषित नहीं
2. कोटि 1; घात 1
3. कोटि 2; घात 1
4. कोटि 2; घात परिभाषित नहीं
5. कोटि 2; घात 1
6. कोटि 3; घात 2
7. कोटि 3; घात 1
8. कोटि 1; घात 1
9. कोटि 2; घात 1
10. कोटि 2; घात 1
11. D
12. A

प्रश्नावली 9.2

11. D
12. D

प्रश्नावली 9.3

1. $y = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$
2. $y = 2\sin(x + C)$
3. $y = 1 + Ae^{-x}$
4. $\tan x \tan y = C$
5. $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$
6. $\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$
7. $y = e^{cx}$
8. $x^{-4} + y^{-4} = C$
9. $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$
10. $\tan y = C(1 - e^x)$
11. $y = \frac{1}{4}\log\left[(x+1)^2(x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$
12. $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$
13. $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$
14. $y = \sec x$
15. $2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$
16. $y - x + 2 = \log(x^2(y+2)^2)$
17. $y^2 - x^2 = 4$

18. $(x+4)^2 = y+3$

19. $(63t+27)^{\frac{1}{3}}$

20. 6.93%

21. Rs 1648

22. $\dfrac{2\log 2}{\log\left(\dfrac{11}{10}\right)}$

23. A

प्रश्नावली 9.4

1. $(x-y)^2 = Cx\, e^{\frac{-y}{x}}$

2. $y = x\log|x| + Cx$

3. $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)+C$

4. $x^2 + y^2 = Cx$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x| + C$

6. $y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

7. $xy\cos\left|\dfrac{y}{x}\right| = C$

8. $x\left[1-\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right] = C\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

9. $cy = \log\dfrac{y}{x} - 1$

10. $ye^{\frac{x}{y}} + x = C$

11. $\log(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2} + \log 2$

12. $y + 2x = 3x^2 y$

13. $\cot\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|ex|$

14. $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|ex|$

15. $y = \dfrac{2x}{1-\log|x|}\ (x\neq 0,\ x\neq e)$

16. C

17. D

प्रश्नावली 9.5

1. $y = \dfrac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C\, e^{-2x}$

2. $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$

3. $xy = \dfrac{x^4}{4} + C$

4. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$

5. $y = (\tan x - 1) + C\, e^{-\tan x}$

6. $y = \dfrac{x^2}{16}(4\log|x| - 1) + Cx^{-2}$

7. $y\log x = \dfrac{-2}{x}(1+\log|x|) + C$

8. $y = (1+x^2)^{-1}\ \log|\sin x| + C(1+x^2)^{-1}$

9. $y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{C}{x \sin x}$

10. $(x + y + 1) = C\, e^y$

11. $x = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}$

12. $x = 3y^2 + Cy$

13. $y = \cos x - 2\cos^2 x$

14. $y\,(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

15. $y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$

16. $x + y + 1 = e^x$

17. $y = 4 - x - 2\,e^x$

18. C

19. D

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) कोटि 2; घात 1 (ii) कोटि 1; घात 3

(iii) कोटि 4; घात परिभाषित नहीं

4. $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = C$

6. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

7. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$

8. $e^{\frac{x}{y}} = y + C$

9. $\log |x - y| = x + y + 1$

10. $y\,e^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + C)$

11. $y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}\ (\sin x \neq 0)$

12. $y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x \neq -1$

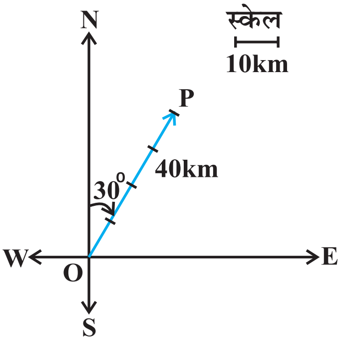
13. C

14. C

15. C

प्रश्नावली 10.1

1. संलग्न आकृति में, सदिश $\overrightarrow{OP}$ वांछित विस्थापन को निरूपित करता है।



2. (i) अदिश (ii) सदिश (iii) अदिश (iv) अदिश (v) अदिश (vi) सदिश

3. (i) अदिश (ii) अदिश (iii) सदिश (iv) सदिश (v) अदिश

4. (i) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सह-आदिम हैं।

(ii) सदिश $\vec{b}$ और $\vec{d}$ समान है।

(iii) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{c}$ संरेख है परंतु समान नहीं हैं।

5. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

प्रश्नावली 10.2

1. $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{62}, |\vec{c}|=1$

2. संभावित उत्तरों की संख्या अनंत है।

3. संभावित उत्तरों की संख्या अनंत है।

4. $x = 2, y = 3$

5. -7 और 6; $-7\hat{i}$ और $6\hat{j}$

6. $-4\hat{j}-\hat{k}$

7. $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

10. $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$

12. $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$

13. $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$

15. (i) $-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{4}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$ (ii) $-3\hat{i}+3\hat{k}$

16. $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

18. (C)

19. (B), (C), (D)

प्रश्नावली 10.3

1. $\frac{\pi}{4}$

2. $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$

3. 0

4. $\frac{60}{\sqrt{114}}$

6. $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}},\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$

7. $6|\vec{a}|^2+11\vec{a}.\vec{b}-35|\vec{b}|^2$

8. $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1$

9. $\sqrt{13}$

10. 8

12. सदिश $\vec{b}$ कोई भी सदिश हो सकता है।

13. $\dfrac{-3}{2}$

14. कोई भी दो ऋणेतर और परस्पर लंबवत् सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को लीजिए

15. $\cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{102}}\right)$

18. (D)

प्रश्नावली 10.4

1. $19\sqrt{2}$

2. $\pm\dfrac{2}{3}\hat{i}\mp\dfrac{2}{3}\hat{j}\mp\dfrac{1}{3}\hat{k}$

3. $\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}$

5. $3, \dfrac{27}{2}$

6. या $|\vec{a}|=0$ या $|\vec{b}|=0$

8. नहीं; कोई भी शून्येतर संरेख सदिशों को लीजिए।

9. $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$

10. $15\sqrt{2}$

11. (B)

12. (C)

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\dfrac{1}{2}\hat{j}$

2. $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3. $\dfrac{-5}{2}\hat{i}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

4. नहीं; $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ को त्रिभुज की तीनों भुजाओं को निरूपित करते हुए लीजिए।

5. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

6. $\dfrac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$

7. $\dfrac{3}{\sqrt{22}}\hat{i}-\dfrac{3}{\sqrt{22}}\hat{j}+\dfrac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

8. $2:3$

9. $3\vec{a}+5\vec{b}$

10. $\dfrac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k});\ 11\sqrt{5}$

12. $\dfrac{1}{3}(160\hat{i}-5\hat{j}-70\hat{k})$

13. $\lambda=1$

16. (B)

17. (D)

18. (C)

19. (B)

प्रश्नावली 11.1

1. $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

5. $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17}; \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}; \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

प्रश्नावली 11.2

4. $r = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

5. $r = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ और कार्तीय रूप $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ है।

6. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$

7. $r = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$

8. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$, (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

9. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

10. $p = \frac{70}{11}$ **12.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **13.** $2\sqrt{29}$

14. $\frac{3}{\sqrt{19}}$ **15.** $\frac{8}{\sqrt{29}}$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. $90°$ **2.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$

3. $k = \frac{-10}{7}$ **4.** 9

5. $\bar{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

प्रश्नावली 12.1

1. (0, 4) पर अधिकतम $Z = 16$
2. (4, 0) पर न्यूनतम $Z = -12$
3. $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर अधिकतम $Z = \frac{235}{19}$
4. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ पर न्यूनतम $Z = 7$
5. (4, 3) पर अधिकतम $Z = 18$
6. (6, 0) और (0, 3) को मिलाने वाली रेखा खंड पर स्थित सभी बिंदुओं पर न्यूनतम $Z = 6$.
7. (60, 0) पर न्यूनतम $Z = 300$;

   (120, 0) और (60, 30) को मिलाने वाली रेखा खंड पर स्थित सभी बिंदुओं पर अधिकतम $Z = 600$;
8. (0, 50) और (20, 40) को मिलाने वाली रेखाखंड पर स्थित सभी बिंदुओं पर न्यूनतम $Z = 100$.

   (0, 200) पर अधिकतम $Z = 400$
9. Z का कोई अधिकतम मान नहीं है।
10. चूँकि कोई सुसंगत क्षेत्र नहीं है अतः Z का अधिकतम मान नहीं है।

प्रश्नावली 13.1

1. $P(E|F) = \frac{2}{3}, P(F|E) = \frac{1}{3}$
2. $P(A|B) = \frac{16}{25}$
3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98
4. $\frac{11}{26}$
5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$
6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{6}{7}$
7. (i) 1 (ii) 0

8. $\frac{1}{6}$ 9. 1 10. (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$

11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ 13. $\frac{5}{9}$

14. $\frac{1}{15}$ 15. 0 16. C 17. D

प्रश्नावली 13.2

1. $\frac{3}{25}$ 2. $\frac{25}{102}$ 3. $\frac{44}{91}$

4. A और B परस्पर स्वतंत्र हैं। 5. A और B परस्पर स्वतंत्र नहीं हैं।

6. E और F परस्पर स्वतंत्र नहीं हैं।

7. (i) $p = \frac{1}{10}$ (ii) $p = \frac{1}{5}$

8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4

9. $\frac{3}{8}$ 10. A और B परस्पर स्वतंत्र नहीं हैं।

11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28

12. $\frac{7}{8}$ 13. (i) $\frac{16}{81}$, (ii) $\frac{20}{81}$, (iii) $\frac{40}{81}$

14. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{1}{2}$ 15. (i), (ii) 16. (a) $\frac{1}{5}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$

17. D 18. B

प्रश्नावली 13.3

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{9}{13}$ 4. $\frac{12}{13}$

5. $\frac{22}{133}$ **6.** $\frac{4}{9}$ **7.** $\frac{1}{52}$ **8.** $\frac{1}{4}$

9. $\frac{2}{9}$ **10.** $\frac{8}{11}$ **11.** $\frac{5}{34}$ **12.** $\frac{11}{50}$

13. A **14.** C

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) 1 (ii) 0

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{20}{21}$ **4.** $1-\sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

5. $\frac{2}{7}$ **6.** $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$ **7.** $\frac{14}{29}$

8. $\frac{3}{16}$ **9.** (i) 0.5 (ii) 0.05 **10.** $\frac{16}{31}$

11. A **12.** C **13.** B

गणित

कक्षा 12 के लिए पाठ्यपुस्तक

भाग - II

12082

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Reprint 2025-26

12082 – गणित (भाग 2)
कक्षा 12 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-668-3 (Part-I)
ISBN 81-7450-731-0 (Part-II)

प्रथम संस्करण
अप्रैल 2007 वैशाख 1929

पुनर्मुद्रण
अक्तूबर 2007, नवंबर 2009, दिसंबर 2010, जनवरी 2012, मार्च 2013, फरवरी 2014, जनवरी 2016, दिसंबर 2016, नवंबर 2017, जनवरी 2019, जनवरी 2020, नवंबर 2021

संशोधित संस्करण
नवंबर 2022 अग्रहायण 1944

पुनर्मुद्रण
मार्च 2024 चैत्र 1946
अप्रैल 2025 चैत्र 1947

PD 13T+25T BS

₹ 115.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा चंदू प्रेस, 469, पटपड़गंज इंडस्ट्रियल एस्टेट, दिल्ली-110092 द्वारा मुद्रित।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फ़ोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बैंगलुरु 560 085 फ़ोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फ़ोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फ़ोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगाँव
गुवाहाटी 781 021 फ़ोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	:	*एम.वी. श्रीनिवासन*
मुख्य संपादक	:	*बिज्ञान सुतार*
मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी)	:	*जहान लाल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*अमिताभ कुमार*
संपादक	:	*रेखा अग्रवाल*
उत्पादन अधिकारी	:	*सुनील शर्मा*

आवरण, सज्जा एवं चित्र
अरविन्दर चावला

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन कर सकते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के सलाहकार समूह के अध्यक्ष *प्रोफ़ेसर* जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक के सलाहकार प्रोफ़ेसर पवन कुमार जैन की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं

जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम, विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रो. मृणाल मिरी और *प्रोफ़ेसर* जी.पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित, राष्ट्रीय मानीटरिंग समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नयी दिल्ली
20 नवंबर 2006

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन

कोविड-19 महामारी को देखते हुए, विद्यार्थियों के ऊपर से पाठ्य सामग्री का बोझ कम करना अनिवार्य है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 2020* में भी विद्यार्थियों के लिए पाठ्य सामग्री का बोझ कम करने और रचनात्मक नज़रिए से अनुभवात्मक अधिगम के अवसर प्रदान करने पर ज़ोर दिया गया है। इस पृष्ठभूमि में, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने सभी कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित करने की शुरुआत की है। इस प्रक्रिया में रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पहले से ही विकसित कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखा गया है।

पाठ्य सामग्रियों के पुनर्संयोजन में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखा गया है—

- एक ही कक्षा में अलग-अलग विषयों के अंतर्गत समान पाठ्य सामग्री का होना;
- एक कक्षा के किसी विषय में उससे निचली कक्षा या ऊपर की कक्षा में समान पाठ्य सामग्री का होना;
- कठिनाई स्तर;
- विद्यार्थियों के लिए सहज रूप से सुलभ पाठ्य सामग्री का होना, जिसे शिक्षकों के अधिक हस्तक्षेप के बिना, वे खुद से या सहपाठियों के साथ पारस्परिक रूप से सीख सकते हों;
- वर्तमान संदर्भ में अप्रासंगिक सामग्री का होना।

वर्तमान संस्करण, ऊपर दिए गए परिवर्तनों को शामिल करते हुए तैयार किया गया पुनर्संयोजित संस्करण है।

प्रस्तावना

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद ने विद्यालयी शिक्षा से संबंधित विभिन्न विषयों के अध्ययन के लिए, राष्ट्रीय पाठ्य चर्या रूपरेखा की समीक्षा हेतु विद्यालयी शिक्षा–2000 (एन.सी.एफ. एस.ई–2000) के अंतर्गत आविर्भाव चुनौतियों और विषय वस्तु के रूपांतरण, जो शिक्षा शास्त्र के क्षेत्र में अंतर्निहित हैं, उन्हें राष्ट्रीय एवं अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर विद्यालयी शिक्षा के लिए 21 फोकस समूहों का गठन किया है। इस फोकस समूह ने विद्यालयी शिक्षा क्षेत्र के विभिन्न पहलुओं पर अपनी व्यापक और विशेष टिप्पणियाँ की हैं। इसी के फलस्वरूप, इन समूहों द्वारा अपनी रिपोर्टों के आधार पर राष्ट्रीय पाठ्य चर्या रूपरेखा–2005 को विकसित किया गया।

नए दिशा–निर्देशों के अंतर्गत ही राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद ने कक्षा 11 और 12 की गणित विषय का पाठ्यक्रम तैयार किया तथा पाठ्यपुस्तकें तैयार करने के लिए एक टीम का गठन किया। कक्षा 11 की पाठ्य–पुस्तक पहले से ही प्रयोग में है जो 2005 में प्रकाशित की जा चुकी है।

पुस्तक का प्रथम प्रारूप (कक्षा 12) एन.सी.ई.आर.टी. संकाय, विशेषज्ञ और कार्यरत् अध्यापकों की टीम द्वारा तैयार कर लिया गया। तत्पश्चात् विकासशील टीम ने विभिन्न बैठकें आयोजित कर इस प्रारूप को परिष्कृत किया था।

पुस्तक के इस प्रारूप को देश के विभिन्न भागों में उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित के अध्यापन से संबद्ध अध्यापनरत् शिक्षकों की एक टीम के समक्ष प्रस्तुत किया था। पुनः प्रारूप की एन.सी.ई.आर.टी. द्वारा आयोजित कार्यशाला में समीक्षा की गई। सहभागियों द्वारा दिए गए सुझावों एवं टिप्पणियों को प्रारूप पाठ्यपुस्तक में समायोजित कर लिया गया। विकासशील टीम में से ही गठित एक संपादकीय मंडल ने पाठ्यपुस्तक के इस प्रारूप को अंतिम रूप दे दिया। अंततः, विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह तथा मानव संसाधन मंत्रालय, भारत सरकार द्वारा गठित निगरानी समिति (Monitoring Committee) ने इस पाठ्यपुस्तक प्रारूप को अनुमोदित कर दिया।

विषय की प्रामाणिकता की दृष्टि से पुस्तक को प्रभावित करने वाले कुछ आवश्यक तत्वों का उल्लेख करते हैं। ये विशिष्टताएँ लगभग इस पुस्तक के सभी पाठों में परिलक्षित हैं। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक में 13 मुख्य अध्याय और दो परिशिष्ट शामिल हैं। प्रत्येक अध्याय निम्नलिखित बिंदु समाहित करता है:

- भूमिका : विषय के महत्वपूर्ण बिंदुओं पर बल; पूर्व में पढ़ाए गए विषय–वस्तुओं का परस्पर संबंध; अध्याय में लगभग नयी अवधारणाओं का सार–रूप में विवेचना।
- अध्याय में खंडों को शमिल करते हुए धारणाओं और अवधारणाओं का संगठन।
- धारणाओं / अवधारणाओं की जानकारी को प्रेरणादायक बनाते हुए, जहाँ भी संभव हो सका दृष्टांत उपलब्ध कराए गए हैं।

- उपपत्ति/समस्या के हल सिद्धांत और अनुप्रयोग दोनों पक्षों पर बल देते हुए या तार्किक, बहुविध साधन, जहाँ भी इन्हें अपनाने की आवश्यकता पड़ी, अपनाया है।
- ज्यामितिय दृष्टिकोण/संकल्पनाओं का प्रस्तुतीकरण आवश्यक होने पर दिया गया है।
- गणितीय अवधारणाओं और इसके सह–विषयों जैसे: विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान से भी जोड़ा गया है।
- विषय के प्रत्येक खंड में पर्याप्त और विविध उदाहरण/अभ्यास दिए गए हैं।
- समस्याओं को हल करने की क्षमता या कौशल एवं अनुप्रयोग करने की समझ को केंद्रित एवं मजबूत करने हेतु अध्याय के अंत में दो या दो से अधिक संकल्पनाओं को समावेशित करने वाले उदाहरणों तथा अभ्यास–प्रश्नों का समायोजन किया गया है, जैसा कि राष्ट्रीय पाठ्य–चर्या रूप रेखा 2005 में कहा गया है, इसी के अनुरूप मेधावी छात्रों के लिए भी पाठ्यपुस्तक में चुनौतीपूर्ण समस्याओं को शामिल किया गया है।
- विषय को और अधिक प्रेरणादायक बनाने के उद्देश्य से विषय की संक्षिप्त ऐतिहासिक पृष्ठभूमि पाठ के अंत में दी गई है और प्रत्येक पाठ के प्रारंभ में संबंधित कथन एवं सुप्रसिद्ध गणितज्ञों के चित्र दिए गए हैं जिन्होंने विशेषतया विषय–वस्तु को विकसित और सुबोध बनाने के लिए अपना योगदान दिया।
- अंततः विषय की संकल्पनाओं के सूत्र एवं परिणाम के प्रत्यक्ष सार–कथन के लिए पाठ का संक्षिप्त सारांश भी प्रस्तुत किया गया है।

मैं विशेष रूप से राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक प्रो. कृष्ण कुमार का आभारी हूँ जिन्होंने मुझे निमंत्रित कर गणित शिक्षा के राष्ट्रीय प्रयास की कड़ी से जोड़ा है। उन्होंने हमें इस हेतु बौद्धिक परिप्रेक्ष्य तथा स्वस्थ्य वातावरण प्रदान किया। इस पुस्तक को तैयार करने का कार्य अत्यंत सुखद एवं प्रशंसनीय रहा। मैं, विज्ञान एवं गणित की सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रो. जे.वी. नारलीकर का कृतज्ञ हूँ जिन्होंने समय–समय पर इस पुस्तक के लिए अपने विशेष सुझाव एवं सहयोग देकर पुस्तक के सुधार में कार्य किया। मैं परिषद् के संयुक्त निदेशक प्रो. जी.रवीन्द्रा को भी धन्यवाद देता हूँ जिन्होंने समय–समय पर पाठ्यपुस्तक से संबंधित क्रिया–विधि को संचालित करने में योगदान किया।

मैं प्रो. हुकुम सिंह, मुख्य संयोजक एवं अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित, डॉ. वी.पी.सिंह, संयोजक तथा प्रो. एस.के.सिंह गौतम के प्रति सहृदय धन्यवाद व्यक्त करता हूँ जिन्होंने इस परियोजना को सफल बनाने हेतु शैक्षिक और प्रशासनिक रूप से संलग्न रहे। मैं इस नेक कार्य से संबद्ध सभी टीम के सदस्यों और शिक्षकों की प्रशंसा करता हूँ तथा उन्हें धन्यवाद देता हूँ जो इस कार्य में किसी भी रूप में योगदान किया हो।

पवन के. जैन
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक संवर्धन समिति

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

विज्ञान एवं गणित सलाहकार समूह के अध्यक्ष

जयंत विष्णु नारलीकर *इमीरिटस प्रोफ़ेसर*, अध्यक्ष, आई.यू.सी.ए., पूना विश्वविद्यालय, पूना।

मुख्य सलाहकार

पी.के. जैन, *प्रोफ़ेसर* गणित विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर* एवं *विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

सदस्य

अरुण पाल सिंह, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, गणित विभाग, दयाल सिंह कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।
ए.के. राजपूत, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल।
बी.एस.पी. राजू, *प्रोफ़ेसर* क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर, कर्नाटक।
सी.आर. प्रदीप, *सहायक प्रोफ़ेसर*, गणित विभाग, भारतीय विज्ञान संस्थान, बंगलौर, कर्नाटक।
आर.डी. शर्मा, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, मुंगेशपुर, दिल्ली।
राम अवतार, *प्रोफ़ेसर* (अवकाशप्राप्त) एवं सलाहकार, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।
आर.पी. मौर्य, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।
एस.एस. खेर, *प्रोफ़ेसर* सम उप कुलपति, एन.ई.एस.यू., तुरा कैंपस मेघालय।
एस.के.एस. गौतम, *प्रोफ़ेसर* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।
एस.के. कौशिक, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, गणित विभाग, किरोड़ीमल कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।
संगीता अरोड़ा, *पी.जी.टी.*, ए.पी.जे. स्कूल, साकेत, नयी दिल्ली।
शैलजा तिवारी, *पी.जी.टी.*, केंद्रीय विद्यालय, बरकाकाना, हजारीबाग, झारखंड।
विनायक बुजाडे, *लेक्चरर*, विदर्भ बुनियादी जूनियर कॉलेज, सक्करदारा चौक, नागपुर, महाराष्ट्र।
सुनील बजाज, *सीनियर स्पेशलिस्ट*, एस.सी.ई.आर.टी., गुडगाँव, हरियाणा।

सदस्य समन्वयक

वी.पी. सिंह, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

हिंदी रूपांतरणकर्ता

डी.आर. शर्मा, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, मुंगेशपुर, दिल्ली।

पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (अ.प्रा.) केंद्रीय विद्यालय संगठन।

एस.बी. त्रिपाठी, *लेक्चरर* (गणित) राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, दिल्ली।

ए.के. राजपूत, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर* (गणित), क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल, मध्य प्रदेश।

वी.पी. सिंह, *एसोशिएट प्रोफ़ेसर* (गणित), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

हिंदी समन्वयक

एस.के. सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

आभार

परिषद् इस पाठ्यपुस्तक समीक्षा कार्याशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों के बहुमूल्य सहयोग के लिए अपना हार्दिक आभार व्यक्त करती है: जगदीश सरन, *प्रोफ़ेसर*, सांख्यिकीय विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय; कुद्दूस खान, *लेक्चरर*, शिबली नेशनल पी.जी. कॉलेज आजमगढ़, (उ.प्र.); पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (अ.प्रा.), केंद्रीय विद्यालय संगठन; एस.बी. त्रिपाठी, *लेक्चरर*, आर.पी.बी. वि. सूरजमल विहार, दिल्ली; ओ.एन. सिंह, *रीडर*, आर.आई.ई. भुवनेश्वर, उड़ीसा; कुमारी सरोज, *लेक्चरर*, गवर्नमेंट गर्ल्स सीनियर सेकेंडरी स्कूल, न. 1, रूपनगर, दिल्ली; पी.भास्कर कुमार, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, लेपाक्षी, अनंतपुर, (आंध्र प्रदेश); श्रीमती कल्पागम्, *पी.जी.टी*, के.वी. नाल कैंपस, बैंगलोर; राहुल सोफत, *लेक्चरर*, एअर फोर्स गोल्डन जुबली इंस्टिट्यूट, सुब्रतो पार्क, नयी दिल्ली; वंदिता कालरा, सर्वोदय कन्या विद्यालय, विकासपुरी जनपद केंद्र, नयी दिल्ली; जनार्दन त्रिपाठी, *लेक्चरर*, गवर्नमेंट आर.एच.एस.एस. ऐजाव्ल, मिजोरम और सुश्री सुषमा जयरथ, *रीडर*, डी. डब्लयू.एस., एन.सी.ई.आर.टी, नयी दिल्ली।

परिषद् एन.सी.ई.आर.टी. में हिंदी रूपातंरण के पुनरावलोकन हेतु कार्यशाला में निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है; जी.डी.ढल, अवकाशप्राप्त *रीडर*, एन.सी.ई.आर. टी., नयी दिल्ली; जी.एस.राठौर, *असिस्टेंट प्रोफ़ेसर*, गणित एवं सांख्यिकी विभाग, एम.एल. सुखाड़िया विश्वविद्यालय, उदयपुर, राजस्थान; मनोज कुमार ठाकुर, डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, राजेंद्र नगर, साहिबाबाद, गाजियाबाद (उ.प्र.); रामेश्वर दयाल शर्मा, राजकीय इंटर कॉलेज, मथुरा (उ.प्र.); डॉ. आर.पी. गिहारे, ब्लॉक रिर्सोस कोआर्डिनेटर, जनपद शिक्षा केंद्र, चिचौली, बेतुल (म.प्र.); सुनील बजाज, एस.सी.ई.आर.टी., गुड़गाँव, हरियाणा; श्रीमती वीना धींगरा, सर लक्ष्मी बालिका सीनियर सेकेंडरी स्कूल, खारी बावली, दिल्ली; ए.के. वझलवार, *रीडर*, एन.सी.ई.आर.टी, नयी दिल्ली।

परिषद् चित्रांकन अरविंदर चावला, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी* दीपक कपूर; राकेश कुमार एवं सज्जाद हैदर अंसारी, *डी.टी.पी. ऑपरेटर*; के.पी.एस.यादव, *मनोज मोहन, कॉपी एडिटर* तथा *प्रूफ़ रीडर*, रूबी कुमारी, अभिमन्यु महान्ति तथा रणधीर ठाकुर द्वारा किए गए प्रयासों के प्रति अपना आभार प्रकट करती है। ए.पी.सी. ऑफिस, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग एवं प्रकाशन विभाग भी अपने सहयोग के लिए आभार के पात्र हैं।

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1]**[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य]** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2]**[राष्ट्र की एकता और अखंडता]** सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य" के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "राष्ट्र की एकता" के स्थान पर प्रतिस्थापित।

विषय-सूची

भाग - I

विषय-सूची

भाग - II

अध्याय 1

संबंध एवं फलन (Relations and Functions)

12081CH01

❖ There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it. — G. H. Hardy ❖

1.1 भूमिका (Introduction)

स्मरण कीजिए कि कक्षा XI में, संबंध एवं फलन, प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर आदि की अवधारणाओं का, विभिन्न प्रकार के वास्तविक मानीय फलनों और उनके आलेखों सहित परिचय कराया जा चुका है। गणित में शब्द 'संबंध (Relation)' की सकंल्पना को अंग्रेज़ी भाषा में इस शब्द के अर्थ से लिया गया है, जिसके अनुसार दो वस्तुएँ परस्पर संबंधित होती है, यदि उनके बीच एक अभिज्ञेय (Recognisable) कड़ी हो। मान लीजिए कि A, किसी स्कूल की कक्षा XII के विद्यार्थियों का समुच्चय है तथा B उसी स्कूल की कक्षा XI के विद्यार्थियों का समुच्चय हैं। अब समुच्चय A से समुच्चय B तक के संबंधों के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं

Lejeune Dirichlet (1805-1859)

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b का भाई है$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b की बहन है$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: a की आयु b की आयु से अधिक है$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: पिछली अंतिम परीक्षा में a द्वारा प्राप्त पूर्णांक b द्वारा प्राप्त पूर्णांक से कम है$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: a उसी जगह रहता है जहाँ b रहता है$\}$.

तथापि A से B तक के किसी संबंध R को अमूर्तरूप (Abstracting) से हम गणित में $A \times B$ के एक स्वेच्छ (Arbitrary) उपसमुच्चय की तरह परिभाषित करते हैं।

यदि $(a, b) \in R$, तो हम कहते हैं कि संबंध R के अंतर्गत a, b से संबंधित है और हम इसे $a \, R \, b$ लिखते हैं। सामान्यत:, यदि $(a, b) \in R$, तो हम इस बात की चिंता नहीं करते हैं कि a तथा b के बीच कोई अभिज्ञेय कड़ी है अथवा नहीं है। जैसा कि कक्षा XI में देख चुके हैं, फलन एक विशेष प्रकार के संबंध होता हैं।

इस अध्याय में, हम विभिन्न प्रकार के संबंधों एवं फलनों, फलनों के संयोजन (composition), व्युत्क्रमणीय (Invertible) फलनों और द्विआधारी संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

1.2 संबंधों के प्रकार (Types of Relations)

इस अनुच्छेद में हम विभिन्न प्रकार के संबंधों का अध्ययन करेंगे। हमें ज्ञात है कि किसी समुच्चय A में संबंध, $A \times A$ का एक उपसमुच्चय होता है। अत: रिक्त समुच्चय $\phi \subset A \times A$ तथा $A \times A$ स्वयं, दो अन्त्य संबंध हैं। स्पष्टीकरण हेतु, $R = \{(a, b): a - b = 10\}$ द्वारा प्रदत्त समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर परिभाषित एक संबंध R पर विचार कीजिए। यह एक रिक्त समुच्चय है, क्योंकि ऐसा कोई भी युग्म (pair) नहीं है जो प्रतिबंध $a - b = 10$ को संतुष्ट करता है। इसी प्रकार $R' = \{(a, b) : |a - b| \geq 0\}$, संपूर्ण समुच्चय $A \times A$ के तुल्य है, क्योंकि $A \times A$ के सभी युग्म (a, b), $|a - b| \geq 0$ को संतुष्ट करते हैं। यह दोनों अन्त्य के उदाहरण हमें निम्नलिखित परिभाषाओं के लिए प्रेरित करते हैं।

परिभाषा 1 समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R एक **रिक्त संबंध** कहलाता है, यदि A का कोई भी अवयव A के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, अर्थात् $R = \phi \subset A \times A$.

परिभाषा 2 समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R, एक **सार्वत्रिक (universal) संबंध** कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयवों से संबंधित है, अर्थात् $R = A \times A$.

रिक्त संबंध तथा सार्वत्रिक संबंध को कभी-कभी तुच्छ (trivial) संबंध भी कहते हैं।

उदाहरण 1 मान लीजिए कि A किसी बालकों के स्कूल के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है। दर्शाइए कि $R = \{(a, b) : a, b$ की बहन है $\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक रिक्त संबंध है तथा $R' = \{(a, b) :$ a तथा b की ऊँचाईयों का अंतर 3 मीटर से कम है $\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक सार्वत्रिक संबंध है।

हल प्रश्नानुसार, क्योंकि स्कूल बालकों का है, अतएव स्कूल का कोई भी विद्यार्थी, स्कूल के किसी भी विद्यार्थी की बहन नहीं हो सकता है। अत: $R = \phi$, जिससे प्रदर्शित होता है कि R रिक्त संबंध है। यह भी स्पष्ट है कि किन्हीं भी दो विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का अंतर 3 मीटर से कम होना ही चाहिए। इससे प्रकट होता है कि $R' = A \times A$ सार्वत्रिक संबंध है।

टिप्पणी कक्षा XI में विद्यार्थीगण सीख चुके हैं कि किसी संबंध को दो प्रकार से निरूपित किया जा सकता है, नामत: रोस्टर विधि तथा समुच्चय निर्माण विधि। तथापि बहुत से लेखकों द्वारा समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ को $a \, R \, b$ द्वारा भी निरूपित किया जाता है, यदि और केवल यदि $b = a + 1$ हो। जब कभी सुविधाजनक होगा, हम भी इस संकेतन (notation) का प्रयोग करेंगे।

यदि $(a, b) \in R$, तो हम कहते हैं कि a, b से संबंधित है' और इस बात को हम $a\, R\, b$ द्वारा प्रकट करते हैं।

एक अत्यन्त महत्वपूर्ण संबंध, जिसकी गणित में एक सार्थक (significant) भूमिका है, तुल्यता संबंध (Equivalence Relation) कहलाता है। तुल्यता संबंध का अध्ययन करने के लिए हम पहले तीन प्रकार के संबंधों, नामतः स्वतुल्य (Reflexive), सममित (Symmetric) तथा संक्रामक (Transitive) संबंधों पर विचार करते हैं।

परिभाषा 3 समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R;

(i) स्वतुल्य **(reflexive)** कहलाता है, यदि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a, a) \in R$,

(ii) सममित **(symmetric)** कहलाता है, यदि समस्त $a_1, a_2 \in A$ के लिए $(a_1, a_2) \in R$ से $(a_2, a_1) \in R$ प्राप्त हो।

(iii) संक्रामक **(transitive)** कहलाता है, यदि समस्त, $a_1, a_2, a_3 \in A$ के लिए $(a_1, a_2) \in R$ तथा $(a_2, a_3) \in R$ से $(a_1, a_3) \in R$ प्राप्त हो।

परिभाषा 4 A पर परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध कहलाता है, यदि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

उदाहरण 2 मान लीजिए कि T किसी समतल में स्थित समस्त त्रिभुजों का एक समुच्चय है। समुच्चय T में $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के सर्वांगसम है$\}$ एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

हल संबंध R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के सर्वांगसम होता है। पुनः $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1$, T_2 के सर्वांगसम है $\Rightarrow T_2$, T_1 के सर्वांगसम है $\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$. अतः संबंध R सममित है। इसके अतिरिक्त $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1$, T_2 के सर्वांगसम है तथा T_2, T_3 के सर्वांगसम है $\Rightarrow T_1$, T_3 के सर्वांगसम है $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$. अतः संबंध R संक्रामक है। इस प्रकार R एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 3 मान लीजिए कि L किसी समतल में स्थित समस्त रेखाओं का एक समुच्चय है तथा $R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2$ पर लंब है$\}$ समुच्चय L में परिभाषित एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R सममित है किंतु यह न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

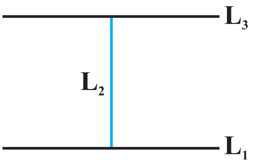
हल R स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि कोई रेखा L_1 अपने आप पर लंब नहीं हो सकती है, अर्थात् $(L_1, L_1) \notin R$. R सममित है, क्योंकि $(L_1, L_2) \in R$

$\Rightarrow$ L_1, L_2 पर लंब है

$\Rightarrow$ L_2, L_1 पर लंब है

$\Rightarrow$ $(L_2, L_1) \in R$

R संक्रामक नहीं है। निश्चय ही, यदि L_1, L_2 पर लंब है तथा L_2, L_3 पर लंब है, तो L_1, L_3 पर कभी भी लंब नहीं हो सकती है। वास्तव में ऐसी दशा में L_1, L_3 के समान्तर होगी। अर्थात्, $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$ परंतु $(L_1, L_3) \notin R$



आकृति 1.1

उदाहरण 4 सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध स्वतुल्य है, परंतु न तो सममित है और न संक्रामक है।

हल R स्वतुल्य है क्योंकि (1, 1), (2, 2) और (3, 3), R के अवयव हैं। R सममित नहीं है, क्योंकि $(1, 2) \in R$ किंतु $(2, 1) \notin R$. इसी प्रकार R संक्रामक नहीं है, क्योंकि $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 3) \in R$ परंतु $(1, 3) \notin R$

उदाहरण 5 सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में $R = \{(a, b)$: संख्या 2, $(a - b)$ को विभाजित करती है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है।

हल R स्वतुल्य है, क्योंकि समस्त $a \in \mathbf{Z}$ के लिए 2, $(a - a)$ को विभाजित करता है। अतः $(a, a) \in R$. पुनः, यदि $(a, b) \in R$, तो 2, $a - b$ को विभाजित करता है । अतएव $b - a$ को भी 2 विभाजित करता है। अतः $(b, a) \in R$, जिससे सिद्ध होता है कि R सममित है। इसी प्रकार, यदि $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$, तो $a - b$ तथा $b - c$ संख्या 2 से भाज्य है। अब, $a - c = (a - b) + (b - c)$ सम (even) है (क्यों?)। अतः $(a - c)$ भी 2 से भाज्य है। इससे सिद्ध होता है कि R संक्रामक है। अतः समुच्चय **Z** में R एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 5 में, नोट कीजिए कि सभी सम पूर्णांक शून्य से संबंधित हैं, क्योंकि $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$, ...आदि R में हैं और कोई भी विषम पूर्णांक 0 से संबंधित नहीं है, क्योंकि $(0, \pm 1)$, $(0, \pm 3)$, ...आदि R में नहीं हैं। इसी प्रकार सभी विषम पूर्णांक 1 से संबंधित हैं और कोई भी सम पूर्णांक 1 से संबंधित नहीं है। अतएव, समस्त सम पूर्णांकों का समुच्चय E तथा समस्त विषम पूर्णांकों का समुच्चय O समुच्चय Z के उप समुच्चय हैं, जो निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

(i) E के समस्त अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं तथा O के समस्त अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं।

(ii) E का कोई भी अवयव O के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है और विलोमतः O का कोई भी अवयव E के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है।

(iii) E तथा O असंयुक्त है और $\mathbf{Z} = E \cup O$ है।

उपसमुच्चय E, शून्य को अंतर्विष्ट (contain) करने वाला तुल्यता-वर्ग (Equivalence Class) कहलाता है और जिसे प्रतीक [0] से निरूपित करते हैं। इसी प्रकार O, 1 को अंतर्विष्ट करने वाला तुल्यता-वर्ग है, जिसे [1] द्वारा निरूपित करते हैं। नोट कीजिए कि $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ और

$[1] = [2r + 1], r \in \mathbf{Z}.$ वास्तव में, जो कुछ हमने ऊपर देखा है, वह किसी भी समुच्चय X में एक स्वेच्छ तुल्यता संबंध R के लिए सत्य होता है। किसी प्रदत्त स्वेच्छ समुच्चय X में प्रदत्त एक स्वेच्छ (arbitrary) तुल्यता संबंध R, X को परस्पर असंयुक्त उपसमुच्चयों A_i में विभाजित कर देता है, जिन्हें X का विभाजन (Partition) कहते हैं ओर जो निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं:

(i) समस्त i के लिए A_i के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित होते हैं।

(ii) A_i का कोई भी अवयव, A_j के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं होता है, जहाँ $i \neq j$

(iii) $\cup A_j = X$ तथा $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$

उपसमुच्चय A_i तुल्यता-वर्ग कहलाते हैं। इस स्थिति का रोचक पक्ष यह है कि हम विपरीत क्रिया भी कर सकते हैं। उदाहरण के लिए **Z** के उन उपविभाजनों पर विचार कीजिए, जो **Z** के ऐसे तीन परस्पर असंयुक्त उपसमुच्चयों A_1, A_2 तथा A_3 द्वारा प्रदत्त हैं, जिनका सम्मिलन (Union) **Z** है,

$$A_1 = \{x \in \mathbf{Z} : x \text{ संख्या 3 का गुणज है}\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 1 \text{ संख्या 3 का गुणज है}\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 2 \text{ संख्या 3 का गुणज है}\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$$

Z में एक संबंध $R = \{(a, b) : 3, a - b$ को विभाजित करता है$\}$ परिभाषित कीजिए। उदाहरण 5 में प्रयुक्त तर्क के अनुसार हम सिद्ध कर सकते हैं कि R एक तुल्यता संबंध हैं। इसके अतिरिक्त A_1, **Z** के उन सभी पूर्णांकों के समुच्चय के बराबर है, जो शून्य से संबंधित हैं, A_2, **Z** के उन सभी पूर्णांकों के समुच्चय के बराबर है, जो 1 से संबंधित हैं और A_3, **Z** के उन सभी पूर्णांकों के समुच्चय बराबर है, जो 2 से संबंधित हैं। अतः $A_1 = [0]$, $A_2 = [1]$ और $A_3 = [2]$. वास्तव में $A_1 = [3r]$, $A_2 = [3r + 1]$ और $A_3 = [3r + 2]$, जहाँ $r \in \mathbf{Z}$.

उदाहरण 6 मान लीजिए कि समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ में $R = \{(a, b) : a$ तथा b दोनों ही या तो विषम हैं या सम हैं$\}$ द्वारा परिभाषित एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। साथ ही सिद्ध कीजिए कि उपसमुच्चय $\{1, 3, 5, 7\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित है, और उपसमुच्चय $\{2, 4, 6\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित है, परंतु उपसमुच्चय $\{1, 3, 5, 7\}$ का कोई भी अवयव उपसमुच्चय $\{2, 4, 6\}$ के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है।

हल A का प्रदत्त कोई अवयव a या तो विषम है या सम है, अतएव $(a, a) \in R$. इसके अतिरिक्त $(a, b) \in R \Rightarrow a$ तथा b दोनों ही, या तो विषम हैं या सम हैं $\Rightarrow (b, a) \in R$. इसी प्रकार $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow$ अवयव a, b, c, सभी या तो विषम हैं या सम हैं $\Rightarrow (a, c) \in R$. अतः R एक तुल्यता संबंध है। पुनः, $\{1, 3, 5, 7\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं, क्योंकि इस उपसमुच्चय के सभी अवयव विषम हैं। इसी प्रकार $\{2, 4, 6,\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं, क्योंकि ये सभी सम हैं। साथ ही उपसमुच्चय $\{1, 3, 5, 7\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4, 6\}$ के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं हो सकता है, क्योंकि $\{1, 3, 5, 7\}$ के अवयव विषम हैं, जब कि $\{2, 4, 6\}$, के अवयव सम हैं।

प्रश्नावली 1.1

1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं:

(i) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ में संबंध R, इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में $R = \{(x, y) : y = x + 5$ तथा $x < 4\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(iii) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(x, y) : y$ भाज्य है x से$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है।

(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में $R = \{(x, y) : x - y$ एक पूर्णांक है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध R

(a) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं$\}$

(b) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

(c) $R = \{(x, y) : x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लंबा है$\}$

(d) $R = \{(x, y) : x , y$ की पत्नी है$\}$

(e) $R = \{(x, y) : x, y$ के पिता हैं$\}$

2. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \le b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

3. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

4. सिद्ध कीजिए कि **R** में $R = \{(a, b) : a \le b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

5. जाँच कीजिए कि क्या **R** में $R = \{(a, b) : a \le b^3\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?

6. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किंतु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

7. सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

8. सिद्ध कीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ में, $R = \{(a, b) : |a - b|$ सम है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं परंतु $\{1, 3, 5\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4\}$ के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।

9. सिद्ध किजिए कि समुच्चय $A = \{x \in \mathbf{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है:

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है$\}$,

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$,

प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

10. ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो

(i) सममित हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।

(ii) संक्रामक हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो। .

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो किंतु संक्रामक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो किंतु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रामक हो किंतु स्वतुल्य न हो।

11. सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में, $R = \{(P, Q) :$ बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। पुनः सिद्ध कीजिए कि बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

12. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज T_1, भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज T_2 तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज T_3 पर विचार कीजिए। T_1, T_2 और T_3 में से कौन से त्रिभुज परस्पर संबंधित हैं?

13. सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 3, 4, और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

14. मान लीजिए कि XY-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में $R = \{(L_1, L_2)$: L_1 समान्तर है L_2 के$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

15. मान लीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में, $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।

(A) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।

(B) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(C) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

(D) R एक तुल्यता संबंध है।

16. मान लीजिए कि समुच्चय **N** में, $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए:

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 फलनों के प्रकार (Types of Functions)

फलनों की अवधारणा, कुछ विशेष फलन जैसे तत्समक फलन, अचर फलन, बहुपद फलन, परिमेय फलन, मापांक फलन, चिह्न फलन आदि का वर्णन उनके आलेखों सहित कक्षा XI में किया जा चुका है।

दो फलनों के योग, अंतर, गुणा तथा भाग का भी अध्ययन किया जा चुका है। क्योंकि फलन की संकल्पना गणित तथा अध्ययन की अन्य शाखाओं (Disciplines) में सर्वाधिक महत्वपूर्ण है, इसलिए हम फलन के बारे में अपना अध्ययन वहाँ से आगे बढ़ाना चाहते हैं, जहाँ इसे पहले समाप्त किया था। इस अनुच्छेद में, हम विभिन्न प्रकार के फलनों का अध्ययन करेंगे।

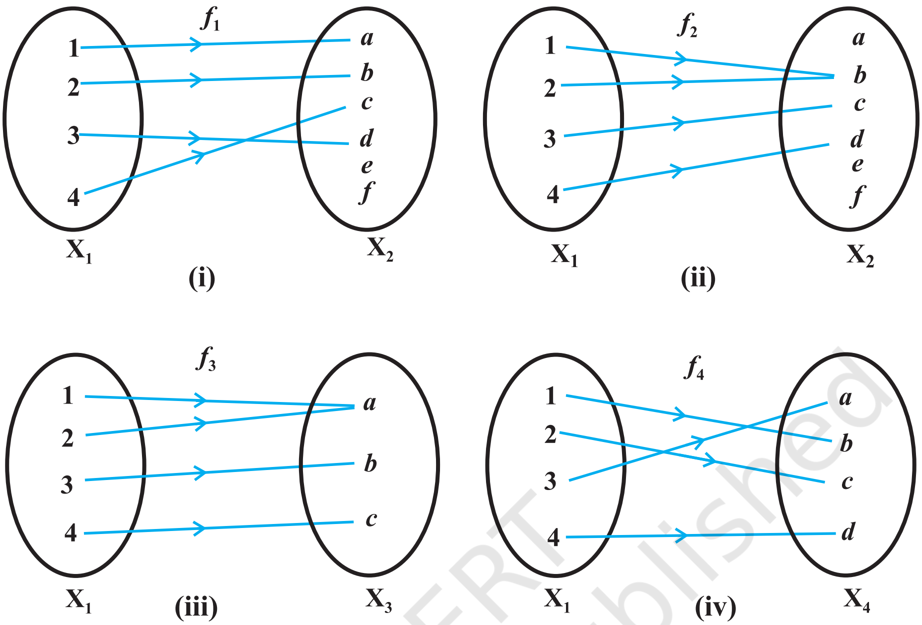
निम्नलिखित आकृतियों द्वारा दर्शाए गए फलन f_1, f_2, f_3 तथा f_4 पर विचार कीजिए।

आकृति 1.2 में हम देखते हैं कि X_1 के भिन्न (distinct) अवयवों के, फलन f_1 के अंतर्गत, प्रतिबिंब भी भिन्न हैं, किंतु f_2 के अंतर्गत दो भिन्न अवयवों 1 तथा 2 के प्रतिबिंब एक ही हैं नामतः b है। पुनः X_2 में कुछ ऐसे अवयव है जैसे e तथा f जो f_1 के अंतर्गत X_1 के किसी भी अवयव के प्रतिबिंब नहीं हैं, जबकि f_3 के अंतर्गत X_3 के सभी अवयव X_1 के किसी न किसी अवयव के प्रतिबिंब हैं।

उपर्युक्त परिचर्चा से हमें निम्नलिखित परिभाषाएँ प्राप्त होती हैं।

परिभाषा 5 एक फलन $f : X \to Y$ एकैकी (one-one) अथवा एकैक (injective) फलन कहलाता है, यदि f के अंतर्गत X के भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न होते हैं, अर्थात् प्रत्येक $x_1, x_2 \in X$, के लिए $f(x_1) = f(x_2)$ का तात्पर्य है कि $x_1 = x_2$, अन्यथा f एक बहुएक (many-one) फलन कहलाता है।

आकृति 1.2 (i) में फलन f_1 एकैकी फलन है तथा आकृति 1.2 (ii) में f_2 एक बहुएक फलन है।



आकृति 1.2

परिभाषा 6 फलन $f: X \to Y$ आच्छादक (onto) अथवा आच्छादी (surjective) कहलाता है, यदि f के अंतर्गत Y का प्रत्येक अवयव, X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब होता है, अर्थात् प्रत्येक $y \in Y$, के लिए, X में एक ऐसे अवयव x का अस्तित्व है कि $f(x) = y$.

आकृति 1.2 (iii) में, फलन f_3 आच्छादक है तथा आकृति 1.2 (i) में, फलन f_1 आच्छादक नहीं है, क्योंकि X_2 के अवयव e, तथा f, f_1 के अंतर्गत X_1 के किसी भी अवयव के प्रतिबिंब नहीं हैं।

टिप्पणी $f: X \to Y$ एक आच्छादक फलन है, यदि और केवल यदि f का परिसर (range) = Y.

परिभाषा 7 एक फलन $f: X \to Y$ एक एकैकी तथा आच्छादक (one-one and onto) अथवा एकैकी आच्छादी **(bijective)** फलन कहलाता है, यदि f एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही होता है।

आकृति 1.2 (iv) में, फलन f_4 एक एकैकी तथा आच्छादी फलन है।

उदाहरण 7 मान लीजिए कि कक्षा X के सभी 50 विद्यार्थियों का समुच्चय A है। मान लीजिए $f: A \to \mathbf{N}$, $f(x)$ = विद्यार्थी x का रोल नंबर, द्वारा परिभाषित एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

हल कक्षा के दो भिन्न-भिन्न विद्यार्थियों के रोल नंबर समान नहीं हो सकते हैं। अतएव f एकैकी है। व्यापकता की बिना क्षति किए हम मान सकते हैं कि विद्यार्थियों के रोल नंबर 1 से 50 तक हैं। इसका

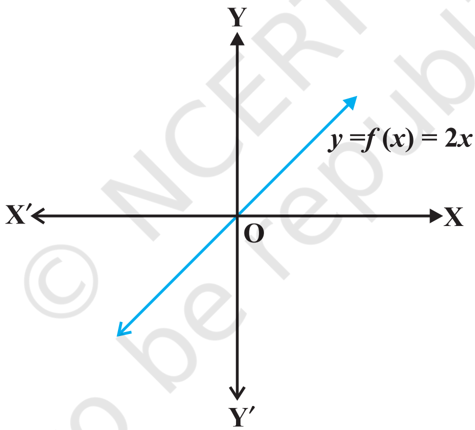
तात्पर्य यह हुआ कि **N** का अवयव 51, कक्षा के किसी भी विद्यार्थी का रोल नंबर नहीं है, अतएव f के अंतर्गत 51, A के किसी भी अवयव का प्रतिबिंब नहीं है। अतः f आच्छादक नहीं है।

उदाहरण 8 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

हल फलन f एकैकी है, क्योंकि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. पुन:, f आच्छदक नहीं है, क्योंकि $1 \in \mathbf{N}$, के लिए **N** में ऐसे किसी x का अस्तित्व नहीं है ताकि $f(x) = 2x = 1$ हो।

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, एकैकी तथा आच्छादक है।

हल f एकैकी है, क्योंकि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. साथ ही, **R** में प्रदत्त किसी भी वास्तविक संख्या y के लिए **R** में $\frac{y}{2}$ का अस्तित्व है, जहाँ $f(\frac{y}{2}) = 2 \cdot (\frac{y}{2}) = y$ है। अतः f आच्छादक भी है।



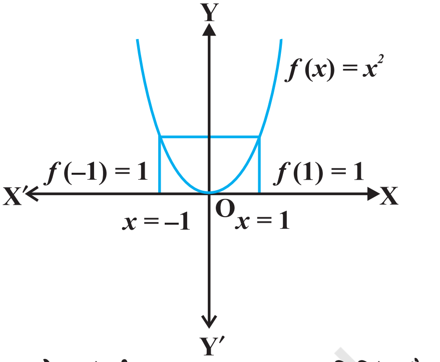
आकृति 1.3

उदाहरण 10 सिद्ध किजिए कि $f(1) = f(2) = 1$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, आच्छादक तो है किंतु एकैकी नहीं है।

हल f एकैकी नहीं है, क्योंकि $f(1) = f(2) = 1$, परंतु f आच्छादक है, क्योंकि किसी प्रदत्त $y \in \mathbf{N}$, $y \neq 1$, के लिए, हम x को $y + 1$ चुन लेते हैं, ताकि $f(y+1) = y + 1 - 1 = y$ साथ ही $1 \in \mathbf{N}$ के लिए $f(1) = 1$ है।

उदाहरण 11 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

हल क्योंकि $f(-1) = 1 = f(1)$, इसलिए f एकैकी नहीं है। पुन: सहप्रांत **R** का अवयव -2, प्रांत **R** के किसी भी अवयव x का प्रतिबिंब नहीं है (क्यों?)। अत: f आच्छादक नहीं है।



f के अंतर्गत 1 तथा –1 का प्रतिबिंब है।
आकृति 1.4

उदाहरण 12 सिद्ध कीजिए कि नीचे परिभाषित फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही है

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ यदि } x \text{ विषम है} \\ x-1, \text{ यदि } x \text{ सम है} \end{cases}$$

हल मान लीजिए $f(x_1) = f(x_2)$ है। नोट कीजिए कि यदि x_1 विषम है तथा x_2 सम है, तो $x_1 + 1 = x_2 - 1$, अर्थात् $x_2 - x_1 = 2$ जो असम्भव है। इस प्रकार x_1 के सम तथा x_2 के विषम होने की भी संभावना नहीं है। इसलिए x_1 तथा x_2 दोनों ही या तो विषम होंगे या सम होंगे। मान लीजिए कि x_1 तथा x_2 दोनों विषम हैं, तो $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. इसी प्रकार यदि x_1 तथा x_2 दोनों सम हैं, तो भी $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. अत: f एकैकी है। साथ ही सहप्रांत **N** की कोई भी विषम संख्या $2r + 1$, प्रांत **N** की संख्या $2r + 2$ का प्रतिबिंब है और सहप्रांत **N** की कोई भी सम संख्या $2r$; **N** की संख्या $2r - 1$ का प्रतिबिंब है। अत: f आच्छादक है।

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि आच्छादक फलन $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ सदैव एकैकी फलन होता है।

हल मान लीजिए कि f एकैकी नहीं है। अत: इसके प्रांत में कम से कम दो अवयव मान लिया कि 1 तथा 2 का अस्तित्व है जिनके सहप्रांत में प्रतिबिंब समान है। साथ ही f के अंतर्गत 3 का प्रतिबिंब केवल एक ही अवयव है। अत:, परिसर में, सहप्रांत $\{1, 2, 3\}$ के, अधिकतम दो ही अवयव हो सकते हैं, जिससे प्रकट होता है कि f आच्छादक नहीं है, जो कि एक विरोधोक्ति है। अत: f को एकैकी होना ही चाहिए।

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि एक एकैकी फलन $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ अनिवार्य रूप से आच्छादक भी है।

हल चूँकि f एकैकी है, इसलिए $\{1, 2, 3\}$ के तीन अवयव f के अंतर्गत सहप्रांत $\{1, 2, 3\}$ के तीन अलग-अलग अवयवों से क्रमश: संबंधित होंगे। अत: f आच्छादक भी है।

टिप्पणी उदाहरण 13 तथा 14 में प्राप्त परिणाम किसी भी स्वेच्छ परिमित (finite) समुच्चय X, के लिए सत्य है, अर्थात् एक एकैकी फलन $f: X \to X$ अनिवार्यत: आच्छादक होता है तथा प्रत्येक परिमित समुच्चय X के लिए एक आच्छादक फलन $f: X \to X$ अनिवार्यत: एकैकी होता है। इसके

विपरीत उदाहरण 8 तथा 10 से स्पष्ट होता है कि किसी अपरिमित (Infinite) समुच्चय के लिए यह सही नहीं भी हो सकता है। वास्तव में यह परिमित तथा अपरिमित समुच्चयों के बीच एक अभिलक्षणिक (characteristic) अंतर है।

प्रश्नावली 1.2

1. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ $\mathbf{R}_*$ सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत $\mathbf{R}_*$ को $\mathbf{N}$ से बदल दिया जाए, जब कि सहप्रांत पूर्ववत $\mathbf{R}_*$ ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

2. निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादी (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए:

(i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।

(ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।

(iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन है।

(iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ फलन है।

(v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ फलन है।

3. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

4. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $|x|$ बराबर x, यदि x धन या शून्य है तथा $|x|$ बराबर $-x$, यदि x ऋण है।

5. सिद्ध कीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x > 0 \\ 0, \text{ यदि } x = 0 \\ -1, \text{ यदि } x < 0, \end{cases}$$

द्वारा प्रदत्त चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

6. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बतलाइए कि क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

(i) $f(x) = 3 - 4x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।

(ii) $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।

8. मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि $f: A \times B \to B \times A$, इस प्रकार कि $f(a, b) = (b, a)$ एक एकैकी आच्छादी (bijective) फलन है।

9. मान लीजिए कि समस्त $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित एक फलन $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ है। बतलाइए कि क्या फलन f एकैकी आच्छादी (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

10. मान लीजिए कि $A = \mathbf{R} - \{3\}$ तथा $B = \mathbf{R} - \{1\}$ हैं। $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f: A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

11. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।

(A) f एकैकी आच्छादक है (B) f बहुएक आच्छादक है

(C) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है (D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

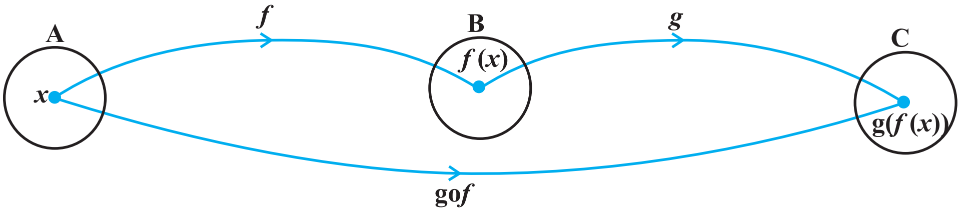
12. मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है। सही उत्तर चुनिए:

(A) f एकैकी आच्छादक है (B) f बहुएक आच्छादक है

(C) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है (D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

1.4 फलनों का संयोजन तथा व्युत्क्रमणीय फलन (Composition of Functions and Invertible Function)

परिभाषा 8 मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन हैं। तब f और g का संयोजन, gof द्वारा निरूपित होता है, तथा फलन $gof: A \to C$, $gof(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in A$ द्वारा परिभाषित होता है।



आकृति 1.5

उदाहरण 15 मान लीजिए कि $f: \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ और $g: \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ दो फलन इस प्रकार हैं कि $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ और $g(3) = g(4) = 7$ तथा $g(5) = g(9) = 11$, तो gof ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$, $gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$, $gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ और $gof(5) = g(5) = 11$.

उदाहरण 16 यदि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तथा $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है तो gof और fog ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए $gof \neq fog$.

हल यहाँ $gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3(\cos x)^2 = 3\cos^2 x$. इसी प्रकार, $fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$ हैं। नोट कीजिए कि $x = 0$ के लिए $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$ है। अतः $gof \neq fog$.

उपर्युक्त परिचर्चा, उदाहरण 22 तथा टिप्पणी निम्नलिखित परिभाषा के लिए प्रेरित करते हैं:

परिभाषा 9 फलन $f: X \to Y$ **व्युत्क्रमणीय (Invertible)** कहलाता है, यदि एक फलन $g: Y \to X$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $gof = I_X$ तथा $fog = I_Y$ है। फलन g को फलन f का प्रतिलोम (Inverse) कहते हैं और इसे प्रतीक f^{-1} द्वारा प्रकट करते हैं।

अतः, यदि f व्युत्क्रमणीय है, तो f अनिवार्यतः एकैकी तथा आच्छादक होता है और विलोमतः, यदि f एकैकी तथा आच्छादक है, तो f अनिवार्यतः व्युत्क्रमणीय होता है। यह तथ्य, f को एकैकी तथा आच्छादक सिद्ध करके, व्युत्क्रमणीय प्रमाणित करने में महत्वपूर्ण रूप से सहायक होता है, विशेष रूप से जब f का प्रतिलोम वास्तव में ज्ञात नहीं करना हो।

उदाहरण 17 मान लीजिए कि $f: \mathbf{N} \to Y$, $f(x) = 4x + 3$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ $Y = \{y \in \mathbf{N}: y = 4x + 3$ किसी $x \in \mathbf{N}$ के लिए$\}$। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

हल Y के किसी स्वेच्छ अवयव y पर विचार कीजिए। Y, की परिभाषा द्वारा, प्रांत **N** के किसी अवयव x के लिए $y = 4x + 3$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $x = \frac{(y-3)}{4}$ है। अब $g(y) = \frac{(y-3)}{4}$ द्वारा

$g: Y \rightarrow \mathbf{N}$ को परिभाषित कीजिए। इस प्रकार $gof(x) = g(f(x)) = g(4x+3) = \dfrac{(4x+3-3)}{4} = x$ तथा $fog(y) = f(g(y)) = f\left(\dfrac{(y-3)}{4}\right) = \dfrac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$ है। इससे स्पष्ट होता है कि $gof = I_N$ तथा $fog = I_Y$, जिसका तात्पर्य यह हुआ कि f व्युत्क्रमणीय है और फलन g फलन f का प्रतिलोम है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 18 यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी एक तुल्यता संबंध है।

हल क्योंकि R_1 तथा R_2 तुल्यता संबंध है इसलिए $(a, a) \in R_1$, तथा $(a, a) \in R_2$, $\forall a \in A$ इसका तात्पर्य है कि $(a, a) \in R_1 \cap R_2, \forall a$, जिससे सिद्ध होता है कि $R_1 \cap R_2$ स्वतुल्य है। पुनः $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ तथा $(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ तथा $(b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$, अतः $R_1 \cap R_2$ सममित है। इसी प्रकार $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ तथा $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ तथा $(a, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$. इससे सिद्ध होता है कि $R_1 \cap R_2$ संक्रामक है। अतः $R_1 \cap R_2$ एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि समुच्चय A में धन पूर्णांकों के क्रमित युग्मों (ordered pairs) का एक संबंध R, (x, y) R (u, v), यदि और केवल यदि, $xv = yu$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

हल स्पष्टतया (x, y) R (x, y), $\forall (x, y) \in A$, क्योंकि $xy = yx$ है। इससे स्पष्ट होता है कि R स्वतुल्य है। पुनः (x, y) R $(u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ और इसलिए (u, v) R (x, y) है। इससे स्पष्ट होता है कि R सममित है। इसी प्रकार (x, y) R (u, v) तथा (u, v) R $(a, b) \Rightarrow xv = yu$ तथा $ub = va \Rightarrow xv\dfrac{a}{u} = yu\dfrac{a}{u} \Rightarrow xv\dfrac{b}{v} = yu\dfrac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ और इसलिए (x, y) R (a, b) है। अतएव R संक्रामक है। अतः R एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 20 मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ है। मान लीजिए कि X में $R_1 = \{(x, y) : x - y$ संख्या 3 से भाज्य है$\}$ द्वारा प्रदत्त एक संबंध R_1 है तथा $R_2 = \{(x, y): \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ या $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ या $\{(x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$ द्वारा प्रदत्त X में एक अन्य संबंध R_2 है। सिद्ध कीजिए कि $R_1 = R_2$ है।

हल नोट कीजिए कि $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ तथा $\{3, 6, 9\}$ समुच्चयों में से प्रत्येक का अभिलक्षण (characterstic) यह है कि इनके किसी भी दो अवयवों का अंतर 3 का एक गुणज है। इसलिए $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x - y$ संख्या 3 का गुणज है $\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ या $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ या $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2$, अतः $R_1 \subset R_2$. इसी प्रकार $\{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ या $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ या $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x - y$ संख्या 3 से भाज्य है $\Rightarrow \{x, y\} \in R_1$. इससे स्पष्ट होता है कि $R_2 \subset R_1$. अतः $R_1 = R_2$ है।

उदाहरण 21 मान लीजिए कि $f : X \to Y$ एक फलन है। X में $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ द्वारा प्रदत्त एक संबंध R परिभाषित कीजिए। जाँचिए कि क्या R एक तुल्यता संबंध है।

हल प्रत्येक $a \in X$ के लिए $(a, a) \in R$, क्योंकि $f(a) = f(a)$, जिससे स्पष्ट होता है कि R स्वतुल्य है। इसी प्रकार, $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in R$. इसलिए R सममित है। पुनः $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ तथा $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$, जिसका तात्पर्य है कि R संक्रामक है। अतः R एक तुल्यता संबंध है।

उदाहरण 22 समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ से स्वयं तक सभी एकैकी फलन की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल $\{1, 2, 3\}$ से स्वयं तक एकैकी फलन केवल तीन प्रतीकों 1, 2, 3 का क्रमचय है। अतः $\{1, 2, 3\}$ से स्वयं तक के प्रतिचित्रों (Maps) की कुल संख्या तीन प्रतीकों 1, 2 , 3 के क्रमचयों की कुल संख्या के बराबर होगी, जो कि $3! = 6$ है।

उदाहरण 23 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$ है। तब सिद्ध कीजिए कि ऐसे संबंधों की संख्या चार है, जिनमें (1, 2) तथा (2, 3) हैं और जो स्वतुल्य तथा संक्रामक तो हैं किंतु सममित नहीं हैं।

हल $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, (1, 2) तथा (2, 3) अवयवों वाला वह सबसे छोटा संबंध R_1 है, जो स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है। अब यदि R_1 में युग्म (2, 1) बढ़ा दें, तो प्राप्त संबंध R_2 अब भी स्वतुल्य तथा संक्रामक है परंतु सममित नहीं है। इसी प्रकार, हम R_1 में (3, 2) बढ़ा कर R_3 प्राप्त कर सकते हैं, जिनमें अभीष्ट गुणधर्म हैं। तथापि हम R_1 में किन्हीं दो युग्मों (2, 1), (3, 2) या एक युग्म (3, 1) को नहीं बढ़ा सकते हैं, क्योंकि ऐसा करने पर हम, संक्रामकता बनाए रखने के लिए, शेष युग्म को लेने के लिए बाध्य हो जाएँगे और इस प्रक्रिया द्वारा प्राप्त संबंध सममित भी हो जाएगा, जो अभीष्ट नहीं है। अतः अभीष्ट संबंधों की कुल संख्या तीन है।

उदाहरण 24 सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में (1, 2) तथा (2, 1) को अन्तर्विष्ट करने वाले तुल्यता संबंधों की संख्या 2 है।

हल (1, 2) तथा (2, 1) को अंतर्विष्ट करने वाला सबसे छोटा तुल्यता संबंध R_1, $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ है। अब केवल 4 युग्म, नामतः (2, 3), (3, 2), (1, 3) तथा (3, 1) शेष बचते हैं। यदि हम इनमें से किसी एक को, जैसे (2, 3) को R_1 में अंतर्विष्ट करते हैं, तो सममित के लिए हमें (3, 2) को भी लेना पड़ेगा, साथ ही संक्रमकता हेतु हम (1, 3) तथा (3, 1) को लेने के

लिए बाध्य होंगे। अतः R_1 से बड़ा तुल्यता संबंध केवल सार्वत्रिक संबंध है। इससे स्पष्ट होता है कि (1, 2) तथा (2, 1) को अंतर्विष्ट करने वाले तुल्यता संबंधों की कुल संख्या दो है।

उदाहरण 25 तत्समक फलन $I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ पर विचार कीजिए, जो $I_N(x) = x, \forall x \in \mathbf{N}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि, यद्यपि I_N आच्छादक है किंतु निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित फलन $I_N + I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ आच्छादक नहीं है

$$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$$

हल स्पष्टतया I_N आच्छादक है किंतु $I_N + I_N$ आच्छादक नहीं है। क्योंकि हम सहप्रांत **N** में एक अवयव 3 ले सकते हैं जिसके लिए प्रांत **N** में किसी ऐसे x का अस्तित्व नहीं है कि $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$ हो।

उदाहरण 26 $f(x) = \sin x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ तथा $g(x) = \cos x$ द्वारा प्रदत्त फलन $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f तथा g एकैकी है, परंतु $f + g$ एकैकी नहीं है।

हल क्योंकि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, के दो भिन्न-भिन्न अवयवों x_1 तथा x_2 के लिए $\sin x_1 \neq \sin x_2$ तथा $\cos x_1 \neq \cos x_2$ इसलिए f तथा g दोनों ही आवश्यक रूप से एकैकी हैं। परंतु $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ तथा $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ है। अतः $f + g$ एकैकी नहीं है।

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

2. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एकैक (Injective) है।

3. एक अरिक्त समुच्चय X दिया हुआ है। P(X) जो कि X के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है, पर विचार कीजिए। निम्नलिखित तरह से P(X) में एक संबंध R परिभाषित कीजिए:

P(X) में उपसमुच्चयों A, B के लिए, ARB, यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। क्या R, P(X) में एक तुल्यता संबंध है? अपने उत्तर का औचित्य भी लिखिए।

4. समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. मान लीजिए कि $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ और $f, g : A \to B$, क्रमश: $f(x) = x^2 - x, x \in A$ तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या f तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए। (संकेत: नोट कीजिए कि दो फलन $f : A \to B$ तथा $g : A \to B$ समान कहलाते हैं यदि $f(a) = g(a)\ \forall a \in A$ हो।

6. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव $(1, 2)$ तथा $(1, 3)$ हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रामक नहीं है, की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो अवयव $(1, 2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है।

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

सारांश

इस अध्याय में, हमने विविध प्रकार के संबंधों, फलनों तथा द्विआधारी संक्रियाओं का अध्ययन किया है। इस अध्याय की मुख्य विषय-वस्तु निम्नलिखित है:

- X में, $R = \phi \subset X \times X$ द्वारा प्रदत्त संबंध R, **रिक्त संबंध** होता है।
- X में, $R = X \times X$ द्वारा प्रदत्त संबंध R, **सार्वत्रिक संबंध** है।
- X में, ऐसा संबंध कि $\forall a \in X, (a, a) \in R$, **स्वतुल्य संबंध** है।
- X में, इस प्रकार का संबंध R, जो प्रतिबंध $(a, b) \in R$ का तात्पर्य है कि $(b, a) \in R$ को संतुष्ट करता है **सममित संबंध** है।
- X में, प्रतिबंध R, $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R\ \forall a, b, c \in X$ को संतुष्ट करने वाला संबंध R **संक्रामक संबंध** है।
- X में, संबंध R, जो स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है, **तुल्यता संबंध** है।
- X में, किसी तुल्यता संबंध R के लिए $a \in X$ के **संगत तुल्यता वर्ग [*a*],** X का वह उपसमुच्चय है जिसके सभी अवयव a से संबंधित हैं।
- एक फलन $f : X \to Y$ एकैकी (अथवा एकैक) फलन है, यदि
  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,\ \forall\ x_1, x_2 \in X$
- एक फलन $f : X \to Y$ **आच्छादक (अथवा आच्छादी)** फलन है, यदि किसी प्रदत्त $y \in Y, \exists\ x \in X$, इस प्रकार कि $f(x) = y$
- एक फलन $f : X \to Y$ **व्युत्क्रमणीय** है, यदि और केवल यदि f एकैकी तथा आच्छादक है।

- किसी प्रदत्त परिमित समुच्चय X के लिए फलन $f: X \rightarrow X$ एकैकी (तदानुसार आच्छादक) होता है, यदि और केवल यदि f आच्च्दछादक (तदानुसार एकैकी) है। यह किसी परिमित समुच्चय का अभिलाक्षणिक गुणधर्म (Characterstic Property) है। यह अपरिमित समुच्चय के लिए सत्य नहीं है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

फलन की संकल्पना, R. Descartes (सन् 1596-1650 ई.) से प्रारंभ हो कर एक लंबे अंतराल में विकसित हुई है। Descartes ने सन् 1637 ई. में अपनी पांडुलिपि "Geometrie" में शब्द 'फलन' का प्रयोग, ज्यामितीय वक्रों, जैसे अतिपरवलय (Hyperbola), परिवलय (Parabola) तथा दीर्घवृत्त (Ellipse), का अध्ययन करते समय, एक चर राशि x के धन पूर्णांक घात x^n के अर्थ में किया था। James Gregory (सन् 1636-1675 ई.) ने अपनी कृति " Vera Circuliet Hyperbolae Quadratura" (सन् 1667 ई.) में, फलन को एक ऐसी राशि माना था, जो किसी अन्य राशि पर बीजीय अथवा अन्य संक्रियाओं को उत्तरोत्तर प्रयोग करने से प्राप्त होती है। बाद में G. W. Leibnitz (1646-1716 ई.) नें 1673 ई. में लिखित अपनी पांडुलिपि "Methodus tangentium inversa, seu de functionibus" में शब्द 'फलन' को किसी ऐसी राशि के अर्थ में प्रयोग किया, जो किसी वक्र के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक इस प्रकार परिवर्तित होती रहती है, जैसे वक्र पर बिंदु के निर्देशांक, वक्र की प्रवणता, वक्र की स्पर्शी तथा अभिलंब परिवर्तित होते हैं। तथापि अपनी कृति "Historia" (1714 ई.) में Leibnitz ने फलन को एक चर पर आधारित राशि के रूप में प्रयोग किया था। वाक्यांश 'x का फलन' प्रयोग में लाने वाले वे सर्वप्रथम व्यक्ति थे। John Bernoulli (1667-1748 ई.) ने सर्वप्रथम 1718 ई. में संकेतन (Notation) ϕx को वाक्यांश 'x का फलन' को प्रकट करने के लिए किया था। परंतु फलन को निरूपित करने के लिए प्रतीकों, जैसे f, F, ϕ, ψ... का व्यापक प्रयोग Leonhard Euler (1707-1783 ई.) द्वारा 1734 ई. में अपनी पांडुलिपि "Analysis Infinitorium" के प्रथम खण्ड में किया गया था। बाद में Joseph Louis Lagrange (1736-1813 ई.) ने 1793 ई. में अपनी पांडुलिपि "Theorie des functions analytiques" प्रकाशित की, जिसमें उन्होंने विश्लेषणात्मक (Analytic) फलन के बारे में परिचर्चा की थी तथा संकेतन $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ आदि का प्रयोग x के भिन्न-भिन्न फलनों के लिए किया था। तदोपरांत Lejeunne Dirichlet (1805-1859 ई.) ने फलन की परिभाषा दी। जिसका प्रयोग उस समय तक होता रहा जब तक वर्तमान काल में फलन की समुच्चय सैद्धांतिक परिभाषा का प्रचलन नहीं हुआ, जो Georg Cantor (1845-1918 ई) द्वारा विकसित समुच्चय सिद्धांत के बाद हुआ। वर्तमान काल में प्रचलित फलन की समुच्चय सैद्धांतिक परिभाषा Dirichlet द्वारा प्रदत्त फलन की परिभाषा का मात्र अमूर्तीकरण (Abstraction) है।

12081CH02

अध्याय 2

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometric Functions)

❖*Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things— FELIX KLEIN* ❖

2.1 भूमिका (Introduction)

अध्याय 1 में, हम पढ़ चुके हैं कि किसी फलन f का प्रतीक f^{-1} द्वारा निरूपित प्रतिलोम (Inverse) फलन का अस्तित्व केवल तभी है यदि f एकैकी तथा आच्छादक हो। बहुत से फलन ऐसे हैं जो एकैकी, आच्छादक या दोनों ही नहीं हैं, इसलिए हम उनके प्रतिलोमों की बात नहीं कर सकते हैं। कक्षा XI में, हम पढ़ चुके हैं कि त्रिकोणमितीय फलन अपने स्वाभाविक (सामान्य) प्रांत और परिसर में एकैकी तथा आच्छादक नहीं होते हैं और इसलिए उनके प्रतिलोमों का अस्तित्व नहीं होता है। इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांतों तथा परिसरों पर लगने वाले उन प्रतिबंधों (Restrictions) का अध्ययन करेंगे, जिनसे उनके प्रतिलोमों का अस्तित्व सुनिश्चित होता है और आलेखों द्वारा प्रतिलोमों का अवलोकन करेंगे। इसके अतिरिक्त इन प्रतिलोमों के कुछ प्रारंभिक गुणधर्म (Properties) पर भी विचार करेंगे।

Arya Bhatta
(476-550 A. D.)

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, कलन (Calculus) में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं, क्योंकि उनकी सहायता से अनेक समाकल (Integrals) परिभाषित होते हैं। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की संकल्पना का प्रयोग विज्ञान तथा अभियांत्रिकी (Engineering) में भी होता है।

2.2 आधारभूत संकल्पनाएँ (Basic Concepts)

कक्षा XI, में, हम त्रिकोणमितीय फलनों का अध्ययन कर चुके हैं, जो निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित हैं

sine फलन, अर्थात्, $\sin : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$

cosine फलन, अर्थात्, $\cos : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$

tangent फलन, अर्थात्, $\tan : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n + 1)\ \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

cotangent फलन, अर्थात्, $\cot : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

secant फलन, अर्थात्, $\sec : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n + 1)\ \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

cosecant फलन, अर्थात्, $\text{cosec} : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

हम अध्याय 1 में यह भी सीख चुके हैं कि यदि $f : X \to Y$ इस प्रकार है कि $f(x) = y$ एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो तो हम एक अद्वितीय फलन $g : Y \to X$ इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि $g(y) = x$, जहाँ $x \in X$ तथा $y = f(x), y \in Y$ है। यहाँ g का प्रांत $= f$ का परिसर और g का परिसर $= f$ का प्रांत। फलन g को फलन f का प्रतिलोम कहते हैं और इसे f^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं। साथ ही g भी एकैकी तथा आच्छादक होता है और g का प्रतिलोम फलन f होता हैं अतः $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$ इसके साथ ही

$$(f^{-1} \text{ o } f)\ (x) = f^{-1}\ (f\ (x)) = f^{-1}(y) = x$$

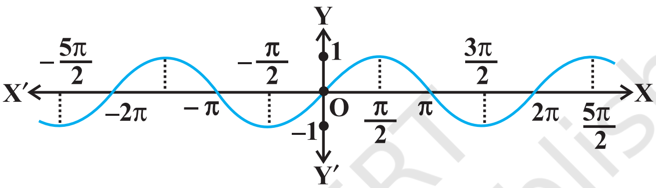
और $$(f \text{ o } f^{-1})\ (y) = f\ (f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

क्योंकि sine फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा इसका परिसर संवृत अंतराल $[-1, 1]$ है। यदि हम इसके प्रांत को $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ में सीमित (प्रतिबंधित) कर दें, तो यह परिसर $[-1, 1]$ वाला, एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। वास्तव में, sine फलन, अंतरालों $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right], \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ इत्यादि में, से किसी में भी सीमित होने से, परिसर $[-1, 1]$ वाला, एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। अतः हम इनमें से प्रत्येक अंतराल में, sine फलन के प्रतिलोम फलन को $\sin^{-1}$ (arc sine function) द्वारा निरूपित करते हैं। अतः $\sin^{-1}$ एक फलन है, जिसका प्रांत $[-1, 1]$ है, और जिसका परिसर $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right], \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ या $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ इत्यादि में से कोई भी अंतराल हो सकता है। इस प्रकार के प्रत्येक अंतराल के संगत हमें फलन $\sin^{-1}$ की एक शाखा (Branch) प्राप्त होती है। वह शाखा, जिसका परिसर $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ है, **मुख्य शाखा** (**मुख्य मान शाखा**) कहलाती है, जब कि परिसर के रूप में अन्य अंतरालों से $\sin^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ मिलती हैं। जब हम फलन $\sin^{-1}$ का उल्लेख करते हैं, तब हम इसे प्रांत $[-1, 1]$ तथा परिसर $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ वाला फलन समझते हैं। इसे हम $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ लिखते हैं।

प्रतिलोम फलन की परिभाषा द्वारा, यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sin(\sin^{-1} x) = x$, यदि $-1 \le x \le 1$ तथा $\sin^{-1}(\sin x) = x$ यदि $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ है। दूसरे शब्दों में, यदि $y = \sin^{-1} x$ हो तो $\sin y = x$ होता है।

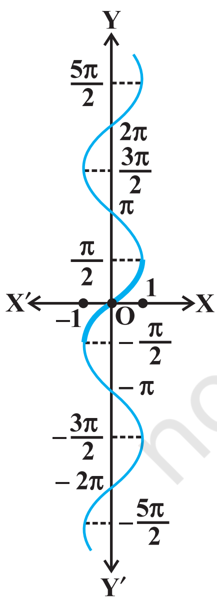
टिप्पणी

(i) हमें अध्याय 1 से ज्ञात है कि, यदि $y = f(x)$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है, तो $x = f^{-1}(y)$ होता है। अतः मूल फलन sin के आलेख में x तथा y अक्षों का परस्पर विनिमय करके फलन $\sin^{-1}$ का आलेख प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात्, यदि (a, b), sin फलन के आलेख का एक बिंदु है, तो (b, a), sin फलन के प्रतिलोम फलन का संगत बिंदु होता है। अतः फलन



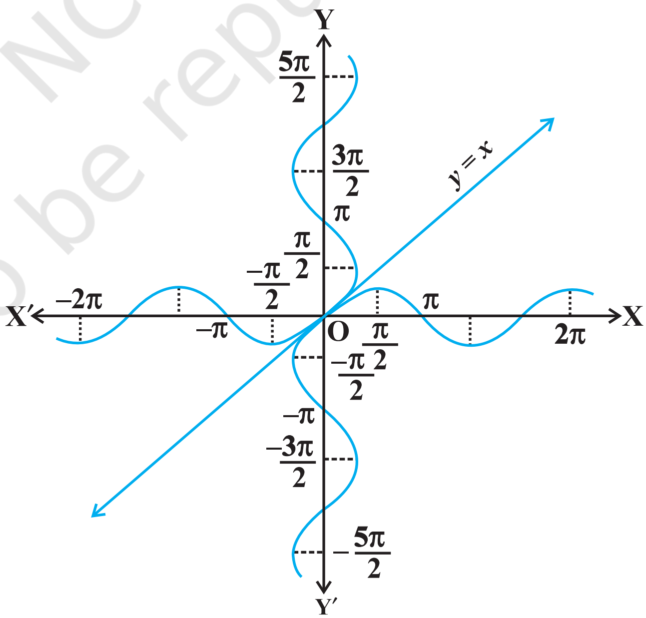
$y = \sin x$

आकृति 2.1 (i)



$y = \sin^{-1} x$

आकृति 2.1 (ii)



$y = \sin x$ और $y = \sin^{-1} x$

आकृति 2.1 (iii)

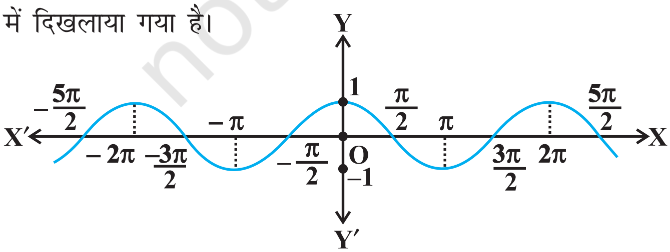
$y = \sin^{-1} x$ का आलेख, फलन $y = \sin x$ के आलेख में x तथा y अक्षों के परस्पर विनिमय करके प्राप्त किया जा सकता है। फलन $y = \sin x$ तथा फलन $y = \sin^{-1} x$ के आलेखों को आकृति 2.1 (i), (ii), में दर्शाया गया है। फलन $y = \sin^{-1} x$ के आलेख में गहरा चिह्नित भाग मुख्य शाखा को निरूपित करता है।

(ii) यह दिखलाया जा सकता है कि प्रतिलोम फलन का आलेख, रेखा $y = x$ के परितः (Along), संगत मूल फलन के आलेख को दर्पण प्रतिबिंब (Mirror Image), अर्थात् परावर्तन (Reflection) के रूप में प्राप्त किया जा सकता है। इस बात की कल्पना, $y = \sin x$ तथा $y = \sin^{-1} x$ के उन्हीं अक्षों (Same axes) पर, प्रस्तुत आलेखों से की जा सकती है (आकृति 2.1 (iii))।

sine फलन के समान cosine फलन भी एक ऐसा फलन है जिसका प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और जिसका परिसर समुच्चय $[-1, 1]$ है। यदि हम cosine फलन के प्रांत को अंतराल $[0, \pi]$ में सीमित कर दें तो यह परिसर $[-1, 1]$ वाला एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। वस्तुतः, cosine फलन, अंतरालों $[-\pi, 0]$, $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से, परिसर $[-1, 1]$ वाला एक एकैकी आच्छादी (Bijective) फलन हो जाता है। अतः हम इन में से प्रत्येक अंतराल में cosine फलन के प्रतिलोम को परिभाषित कर सकते हैं। हम cosine फलन के प्रतिलोम फलन को $\cos^{-1}$ (arc cosine function) द्वारा निरूपित करते हैं। अतः $\cos^{-1}$ एक फलन है जिसका प्रांत $[-1, 1]$ है और परिसर $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ इत्यादि में से कोई भी अंतराल हो सकता है। इस प्रकार के प्रत्येक अंतराल के संगत हमें फलन $\cos^{-1}$ की एक शाखा प्राप्त होती है। वह शाखा, जिसका परिसर $[0, \pi]$ है, मुख्य शाखा (मुख्य मान शाखा) कहलाती है और हम लिखते हैं कि

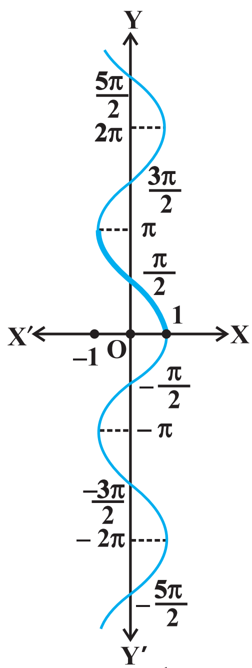
$$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$y = \cos^{-1} x$ द्वारा प्रदत्त फलन का आलेख उसी प्रकार खींचा जा सकता है जैसा कि $y = \sin^{-1} x$ के आलेख के बारे में वर्णन किया जा चुका है। $y = \cos x$ तथा $y = \cos^{-1} x$ के आलेखों को आकृतियों 2.2 (i) तथा (ii) में दिखलाया गया है।



y* = cos *x

आकृति 2.2 (i)

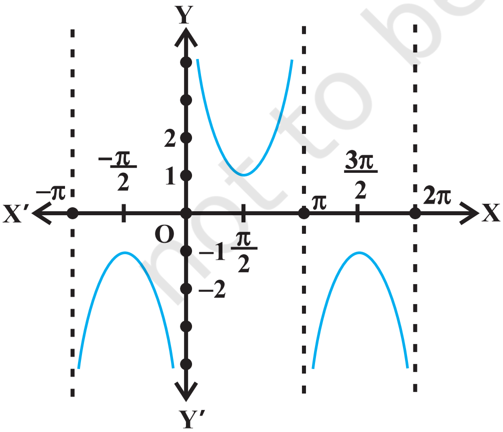


y* = cos⁻¹ *x

आकृति 2.2 (ii)

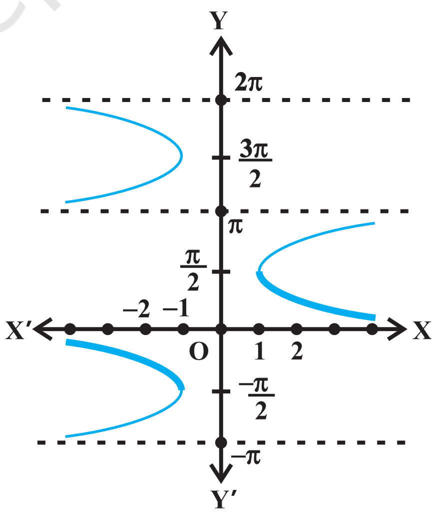
आइए अब हम $\text{cosec}^{-1}x$ तथा $\sec^{-1}x$ पर विचार करें।

क्योंकि $\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$, इसलिए cosec फलन का प्रांत समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ और $x \neq n\pi,$ $n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ अथवा $y \leq -1\}$, अर्थात्, समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$ है। इसका अर्थ है कि $y = \text{cosec}\, x$, $-1 < y < 1$ को छोड़ कर अन्य सभी वास्तविक मानों को ग्रहण करता है तथा यह π के पूर्णांक (Integral) गुणजों के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम cosec फलन के प्रांत को अंतराल $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, में सीमित कर दें, तो यह एक एकैकी तथा आच्छादक फलन होता है, जिसका परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$. होता है। वस्तुतः cosec फलन, अंतरालों $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$ होता है। इस प्रकार cosec^{-1} एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है जिसका प्रांत $\mathbf{R} - (-1, 1)$ है और परिसर अंतरालों $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ इत्यादि में से कोई भी एक हो सकता है। परिसर $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ के संगत फलन को cosec^{-1} की **मुख्य शाखा** कहते हैं। इस प्रकार मुख्य शाखा निम्नलिखित तरह से व्यक्त होती है:



$y = \text{cosec}\, x$

आकृति 2.3 (i)



$y = \text{cosec}^{-1}x$

आकृति 2.3 (ii)

$$\text{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

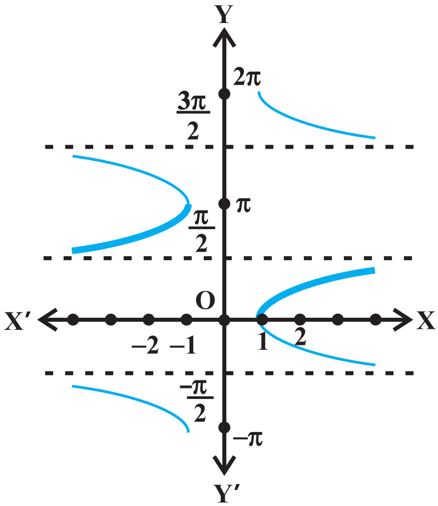
$y = \text{cosec}\, x$ तथा $y = \text{cosec}^{-1} x$ के आलेखों को आकृति 2.3 (i), (ii) में दिखलाया गया है।

इसी तरह, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = \sec x$ का प्रांत समुच्चय $\mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$ है। इसका अर्थ है कि sec (secant) फलन $-1 < y < 1$ को छोड़कर अन्य सभी वास्तविक मानों को ग्रहण (Assumes) करता है और यह $\dfrac{\pi}{2}$ के विषम गुणजों के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम secant फलन के प्रांत को अंतराल $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$, में सीमित कर दें तो यह एक एकैकी तथा आच्छादक फलन होता है जिसका परिसर समुच्चय $\mathbf{R} - (-1, 1)$ होता है। वास्तव में secant फलन अंतरालों $[-\pi, 0] - \{\dfrac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\dfrac{3\pi}{2}\}$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर $\mathbf{R} - (-1, 1)$ होता है। अतः $\sec^{-1}$ एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है जिसका प्रांत $(-1, 1)$ हो और जिसका परिसर अंतरालों $[-\pi, 0] - \{\dfrac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\dfrac{3\pi}{2}\}$ इत्यादि में से कोई भी हो सकता है। इनमें से प्रत्येक अंतराल के संगत हमें फलन $\sec^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ प्राप्त होती हैं। वह शाखा जिसका परिसर $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$ होता है, फलन $\sec^{-1}$ की मुख्य शाखा कहलाती है। इसको हम निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं:

$$\sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \rightarrow [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$$

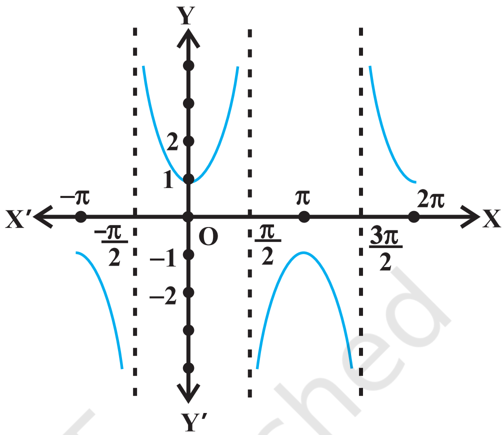
$y = \sec x$ तथा $y = \sec^{-1} x$ के आलेखों को आकृतियों 2.4 (i), (ii) में दिखलाया गया है। अंत में, अब हम $\tan^{-1}$ तथा $\cot^{-1}$ पर विचार करेंगे।

हमें ज्ञात है कि, tan फलन (tangent फलन) का प्रांत समुच्चय$\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर $\mathbf{R}$ है। इसका अर्थ है कि tan फलन $\dfrac{\pi}{2}$ के विषम गुणजों



$y = \sec^{-1} x$

आकृति 2.4 (i)

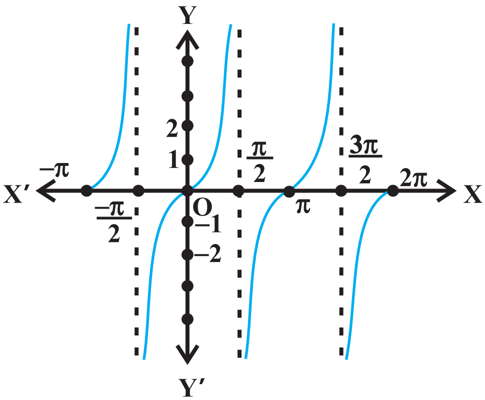


$y = \sec x$

आकृति 2.4 (ii)

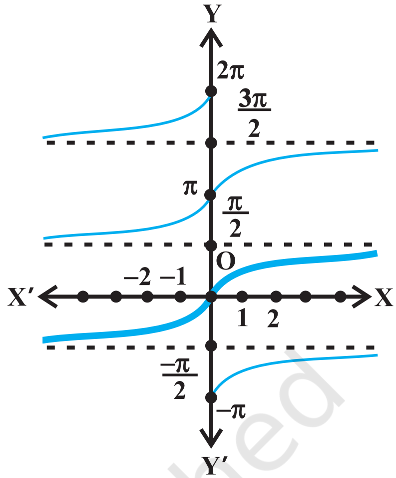
के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम tangent फलन के प्रांत को अंतराल $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में सीमित कर दें, तो यह एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है जिसका परिसर समुच्चय **R** होता है। वास्तव में, tangent फलन, अंतरालों $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर समुच्चय **R** होता है। अतएव $\tan^{-1}$ एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है, जिसका प्रांत **R** हो और परिसर अंतरालों $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ इत्यादि में से कोई भी हो सकता है। इन अंतरालों द्वारा फलन $\tan^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ मिलती हैं। वह शाखा, जिसका परिसर $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है, फलन $\tan^{-1}$ की **मुख्य शाखा** कहलाती है। इस प्रकार

$$\tan^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$y = \tan x$

आकृति 2.5 (i)

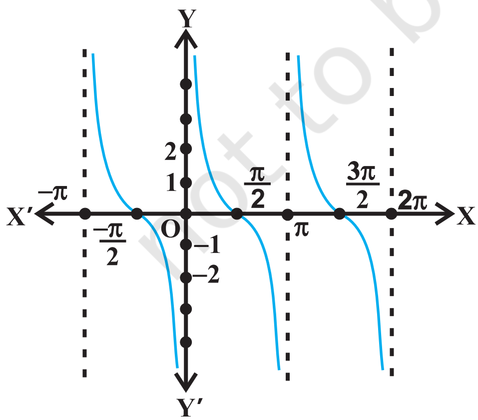


$y = \tan^{-1} x$

आकृति 2.5 (ii)

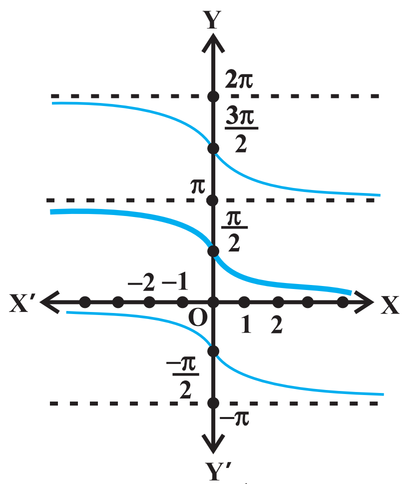
$y = \tan x$ तथा $y = \tan^{-1}x$ के आलेखों को आकृतियों 2.5 (i), (ii) में दिखलाया गया है।

हमें ज्ञात है कि cot फलन (cotangent फलन) का प्रांत समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}\}$ है तथा परिसर समुच्चय **R** है। इसका अर्थ है कि cotangent फलन, π के पूर्णांकीय गुणजों



$y = \cot x$

आकृति 2.6 (i)



$y = \cot^{-1} x$

आकृति 2.6 (ii)

के लिए परिभाषित नहीं है। यदि हम cotangent फलन के प्रांत को अंतराल $(0, \pi)$ में सीमित कर दें तो यह परिसर **R** वाला एक एकैकी आच्छादी फलन होता है। वस्तुत: cotangent फलन अंतरालों $(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$ इत्यादि में से किसी में भी सीमित होने से एकैकी आच्छादी होता है और इसका परिसर समुच्चय **R** होता है। वास्तव में $\cot^{-1}$ एक ऐसे फलन के रूप में परिभाषित हो सकता है, जिसका प्रांत **R** हो और परिसर, अंतरालों $(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$ इत्यादि में से कोई भी हो। इन अंतरालों से फलन $\cot^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ प्राप्त होती हैं। वह शाखा, जिसका परिसर $(0, \pi)$ होता है, फलन $\cot^{-1}$ की **मुख्य शाखा** कहलाती है। इस प्रकार

$$\cot^{-1} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$$

$y = \cot x$ तथा $y = \cot^{-1}x$ के आलेखों को आकृतियों 2.6 (i), (ii) में प्रदर्शित किया गया है।

निम्नलिखित सारणी में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (मुख्य मानीय शाखाओं) को उनके प्रांतों तथा परिसरों के साथ प्रस्तुत किया गया है।

$\sin^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to$	$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to$	$[0, \pi]$
cosec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\to$	$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$\sec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\to$	$[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$
$\tan^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to$	$\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to$	$(0, \pi)$

टिप्पणी

1. $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$ की भ्रांति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ और यह तथ्य अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी सत्य होता है।
2. जब कभी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की किसी शाखा विशेष का उल्लेख न हो, तो हमारा तात्पर्य उस फलन की मुख्य शाखा से होता है।
3. किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का वह मान, जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित होता है, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का **मुख्य मान** (Principal value) कहलाता है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे:

उदाहरण 1 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. अत: $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

हमें ज्ञात है कि $\sin^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ है।

इसलिए $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{4}$ है।

उदाहरण 2 $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$. अतएव

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ है।}$$

हमें ज्ञात है कि $\cot^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $(0, \pi)$ होता है और $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ है। अत: $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित के मुख्य मानों को ज्ञात कीजिए:

1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **2.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $\text{cosec}^{-1}(2)$

4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **5.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **6.** $\tan^{-1}(-1)$

7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **8.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **9.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

11. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **12.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13. यदि $\sin^{-1} x = y$, तो

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

स्मरण कीजिए कि, यदि $y = \sin^{-1}x$ हो तो $x = \sin y$ तथा यदि $x = \sin y$ हो तो $y = \sin^{-1}x$ होता है। यह इस बात के समतुल्य (Equivalent) है कि

$$\sin(\sin^{-1} x) = x,\ x \in [-1, 1] \text{ तथा } \sin^{-1}(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

उचित परिसर मानों के लिए अन्य समरूप त्रिकोणमितीय फलन भी परिणाम देते हैं।

उदाहरण 3 दर्शाइए कि

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

हल

(i) मान लीजिए कि $x = \sin\theta$ तो $\sin^{-1} x = \theta$ इस प्रकार

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$
$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$
$$= 2\sin^{-1}x$$

(ii) मान लीजिए कि $x = \cos\theta$ तो उपर्युक्त विधि के प्रयोग द्वारा हमें $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1}x$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 $\tan^{-1}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, $-\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हम लिख सकते हैं कि

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

उदाहरण 5 $\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ को सरलतम रूप में लिखिए।

हल मान लीजिए कि $x = \sec\theta$, then $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \tan\theta$

इसलिए $\cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta = \sec^{-1}x$ जो अभीष्ट सरलतम रूप है।

प्रश्नावली 2.2

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

1. $3\sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3),\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1} x = \cos^{-1} (4x^3 - 3x),\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिए:

3. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

4. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), 0 < x < \pi$

5. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), \frac{-\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

6. $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a$

7. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right), a > 0; \frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

8. $\tan^{1}\left[2\cos\left(2\sin^{1}\frac{1}{2}\right)\right]$

9. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0$ तथा $xy < 1$

प्रश्न संख्या 16 से 18 में दिए प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:

10. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

11. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

12. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

13. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

14. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$ का मान है

(A) $\frac{1}{2}$ है (B) $\frac{1}{3}$ है (C) $\frac{1}{4}$ है (D) 1

15. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान

(A) π है (B) $-\frac{\pi}{2}$ है (C) 0 है (D) $2\sqrt{3}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 6 $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $\sin^{-1}(\sin x)=x$ होता है। इसलिए $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{3\pi}{5}$

किंतु $\frac{3\pi}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, जो $\sin^{-1}x$ की मुख्य शाखा है।

तथापि $\sin(\frac{3\pi}{5})=\sin(\pi-\frac{3\pi}{5})=\sin\frac{2\pi}{5}$ तथा $\frac{2\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

अत: $$\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{5})=\frac{2\pi}{5}$$

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

1. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{13\pi}{6}\right)$

2. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{7\pi}{6}\right)$

सिद्ध कीजिए

3. $2\sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \tan^{-1}\dfrac{24}{7}$

4. $\sin^{-1}\dfrac{8}{17} + \sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \tan^{-1}\dfrac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \cos^{-1}\dfrac{33}{65}$

6. $\cos^{-1}\dfrac{12}{13} + \sin^{-1}\dfrac{3}{5} = \sin^{-1}\dfrac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\dfrac{63}{16} = \sin^{-1}\dfrac{5}{13} + \cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

सिद्ध कीजिए:

8. $\tan^{1}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\cos^{1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$

9. $\cot^{1}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \dfrac{x}{2}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

10. $\tan^{1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\cos^{1} x, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [**संकेत**: $x = \cos 2\theta$ रखिए]

निम्नलिखित समीकरणों को सरल कीजिए:

11. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$

12. $\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{2}\tan^{-1} x, (x > 0)$

13. $\sin(\tan^{-1} x), |x| < 1$ बराबर होता है:

(A) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

14. यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, तो x का मान बराबर है:

(A) $0, \dfrac{1}{2}$ (B) $1, \dfrac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{2}$

सारांश

- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (मुख्य शाखा) के प्रांत तथा परिसर निम्नलिखित सारणी में वर्णित हैं:

फलन	प्रांत	परिसर (मुख्य शाखा)
$y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = \sec^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$y = \tan^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \cot^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

- $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$ की भ्रान्ति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ और इसी प्रकार यह तथ्य अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के लिए सत्य होता है।
- किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का वह मान, जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित होता है, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का **मुख्य मान** (Principal Value) कहलाता है।

उपयुक्त प्रांतों के लिए

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ऐसा विश्वास किया जाता है कि त्रिकोणमिती का अध्ययन सर्वप्रथम भारत में आरंभ हुआ था। आर्यभट्ट (476 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.) भास्कर प्रथम (600 ई.) तथा भास्कर द्वितीय (1114 ई.)ने प्रमुख परिणामों को प्राप्त किया था। यह संपूर्ण ज्ञान भारत से मध्यपूर्व और पुनः वहाँ से यूरोप गया। यूनानियों ने भी त्रिकोणमिति का अध्ययन आरंभ किया परंतु उनकी कार्य विधि इतनी अनुपयुक्त थी, कि भारतीय विधि के ज्ञात हो जाने पर यह संपूर्ण विश्व द्वारा अपनाई गई।

भारत में आधुनिक त्रिकोणमितीय फलन जैसे किसी कोण की ज्या (sine) और फलन के परिचय का पूर्व विवरण सिद्धांत (संस्कृत भाषा में लिखा गया ज्योतिषीय कार्य) में दिया गया है जिसका योगदान गणित के इतिहास में प्रमुख है।

भास्कर प्रथम (600 ई.) ने $90°$ से अधिक, कोणों के sine के मान के लए सूत्र दिया था। सोलहवीं शताब्दी का मलयालम भाषा में $\sin(A + B)$ के प्रसार की एक उपपत्ति है। $18°$, $36°$, $54°$, $72°$, आदि के sine तथा cosine के विशुद्ध मान भास्कर द्वितीय द्वारा दिए गए हैं।

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, आदि को चाप $\sin x$, चाप $\cos x$, आदि के स्थान पर प्रयोग करने का सुझाव ज्योतिषविद Sir John F.W. Hersehel (1813 ई.) द्वारा दिए गए थे। ऊँचाई और दूरी संबंधित प्रश्नों के साथ Thales (600 ई. पूर्व) का नाम अपरिहार्य रूप से जुड़ा हुआ है। उन्हें मिश्र के महान पिरामिड की ऊँचाई के मापन का श्रेय प्राप्त है। इसके लिए उन्होंने एक ज्ञात ऊँचाई के सहायक दंड तथा पिरामिड की परछाइयों को नापकर उनके अनुपातों की तुलना का प्रयोग किया था। ये अनुपात हैं

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (सूर्य का उन्नतांश)}$$

Thales को समुद्री जहाज़ की दूरी की गणना करने का भी श्रेय दिया जाता है। इसके लिए उन्होंने समरूप त्रिभुजों के अनुपात का प्रयोग किया था। ऊँचाई और दूरी संबंधी प्रश्नों का हल समरूप त्रिभुजों की सहायता से प्राचीन भारतीय कार्यों में मिलते हैं।

12081CH03

अध्याय 3

आव्यूह (Matrices)

❖ *The essence of mathematics lies in its freedom — CANTOR* ❖

3.1 भूमिका (Introduction)

गणित की विविध शाखाओं में आव्यूह के ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है। आव्यूह, गणित के सर्वाधिक शक्तिशाली साधनों में से एक है। अन्य सीधी-सादी विधियों की तुलना में यह गणितीय साधन हमारे कार्य को काफी हद तक सरल कर देता है। रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने के लिए संक्षिप्त तथा सरल विधियाँ प्राप्त करने के प्रयास के परिणामस्वरूप आव्यूह की संकल्पना का विकास हुआ। आव्यूहों को केवल रैखिक समीकरणों के निकाय के गुणांकों को प्रकट करने के लिए ही नहीं प्रयोग किया जाता है, अपितु आव्यूहों की उपयोगिता इस प्रयोग से कहीं अधिक है। आव्यूह संकेतन तथा संक्रियाओं का प्रयोग व्यक्तिगत कंप्यूटर के लिए इलेक्ट्रानिक स्प्रेडशीट प्रोग्रामों (Electronic Spreadsheet Programmes) में किया जाता है, जिसका प्रयोग, क्रमश: वाणिज्य तथा विज्ञान के विभिन्न क्षेत्रों में होता है, जैसे, बजट (Budgeting), विक्रय बहिर्वेशन (Sales Projection), लागत आकलन (Cost Estimation), किसी प्रयोग के परिणामों का विश्लेषण इत्यादि। इसके अतिरिक्त अनेक भौतिक संक्रियाएँ जैसे आवर्धन (Magnification), घूर्णन (Rotation) तथा किसी समतल द्वारा परावर्तन (Reflection) को आव्यूहों द्वारा गणितीय ढंग से निरूपित किया जा सकता है। आव्यूहों का प्रयोग गूढ़लेखिकी (Cryptography) में भी होता है। इस गणितीय साधन का प्रयोग न केवल विज्ञान की ही कुछ शाखाओं तक सीमित है, अपितु इसका प्रयोग अनुवंशिकी, अर्थशास्त्र, आधुनिक मनोविज्ञान तथा औद्योगिक प्रबंधन में भी किया जाता है।

इस अध्याय में आव्यूह तथा आव्यूह बीजगणित (Matrix algebra) के आधारभूत सिद्धांतों से अवगत होना, हमें रुचिकर लगेगा।

3.2 आव्यूह (Matrix)

मान लीजिए कि हम यह सूचना व्यक्त करना चाहते हैं कि राधा के पास 15 पुस्तिकाएँ हैं। इसे हम [15] रूप में, इस समझ के साथ व्यक्त कर सकते हैं, कि [ ] के अंदर लिखित संख्या राधा के पास पुस्तिकाओं की संख्या है। अब यदि हमें यह व्यक्त करना है कि राधा के पास 15 पुस्तिकाएँ तथा 6 कलमें हैं, तो इसे हम [15 6] प्रकार से, इस समझ के साथ व्यक्त कर सकते हैं कि [ ] के अंदर की प्रथम प्रविष्टि राधा के पास की पुस्तिकाओं की संख्या, जबकि द्वितीय प्रविष्टि राधा के पास कलमों

की संख्या दर्शाती है। अब मान लीजिए कि हम राधा तथा उसके दो मित्रों फौजिया तथा सिमरन के पास की पुस्तिकाओं तथा कलमों की निम्नलिखित सूचना को व्यक्त करना चाहते हैं:

राधा के पास	15	पुस्तिकाएँ तथा	6 कलम हैं,
फौजिया के पास	10	पुस्तिकाएँ तथा	2 कलम हैं,
सिमरन के पास	13	पुस्तिकाएँ तथा	5 कलम हैं,

अब इसे हम सारणिक रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं:

	पुस्तिका	**कलम**
राधा	15	6
फौजिया	10	2
सिमरन	13	5

इसे निम्नलिखित ढंग से व्यक्त कर सकते हैं:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{पहली पंक्ति} \\ \leftarrow \text{दूसरी पंक्ति} \\ \leftarrow \text{तीसरी पंक्ति} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{पहला स्तंभ} & \text{दूसरा स्तंभ} \end{array} & \end{array}$$

अथवा

	राधा	**फौजिया**	**सिमरन**
पुस्तिका	15	10	13
कलम	6	2	5

जिसे निम्नलिखित ढंग से व्यक्त कर सकते हैं:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{पहली पंक्ति} \\ \leftarrow \text{दूसरी पंक्ति} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{पहला स्तंभ} & \text{दूसरा स्तंभ} & \text{तीसरा स्तंभ} \end{array} & \end{array}$$

पहली प्रकार की व्यवस्था में प्रथम स्तंभ की प्रविष्टियाँ क्रमशः राधा, फौजिया तथा सिमरन के पास पुस्तिकाओं की संख्या प्रकट करती हैं और द्वितीय स्तंभ की प्रविष्टियाँ क्रमशः राधा, फौजिया तथा

सिमरन के पास कलमों की संख्या प्रकट करती हैं। इसी प्रकार, दूसरी प्रकार की व्यवस्था में प्रथम पंक्ति की प्रविष्टियाँ क्रमशः राधा, फौजिया तथा सिमरन के पास पुस्तिकाओं की संख्या प्रकट करती हैं। द्वितीय पंक्ति की प्रविष्टियाँ क्रमशः राधा, फौजिया तथा सिमरन के पास कलमों की संख्या प्रकट करती हैं। उपर्युक्त प्रकार की व्यवस्था या प्रदर्शन को आव्यूह कहते हैं। औपचारिक रूप से हम आव्यूह को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं:

परिभाषा 1 आव्यूह संख्याओं या फलनों का एक आयताकार क्रम-विन्यास है। इन संख्याओं या फलनों को आव्यूह के अवयव अथवा प्रविष्टियाँ कहते हैं।

आव्यूह को हम अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े (Capital) अक्षरों द्वारा व्यक्त करते हैं। आव्यूहों के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त उदाहरणों में क्षैतिज रेखाएँ आव्यूह की पंक्तियाँ (Rows) ओर ऊर्ध्व रेखाएँ आव्यूह के स्तंभ (Columns) कहलाते हैं। इस प्रकार A में 3 पंक्तियाँ तथा 2 स्तंभ हैं और B में 3 पंक्तियाँ तथा 3 स्तंभ जबकि C में 2 पंक्तियाँ तथा 3 स्तंभ हैं।

3.2.1 *आव्यूह की कोटि (Order of a matrix)*

m पंक्तियों तथा n स्तंभों वाले किसी आव्यूह को $m \times n$ कोटि (order) का आव्यूह अथवा केवल $m \times n$ आव्यूह कहते हैं । अतएव आव्यूहों के उपर्युक्त उदाहरणों के संदर्भ में A, एक 3×2 आव्यूह, B एक 3×3 आव्यूह तथा C, एक 2×3 आव्यूह हैं। हम देखते हैं कि A में $3 \times 2 = 6$ अवयव है और B तथा C में क्रमशः 9 तथा 6 अवयव हैं।

सामान्यतः, किसी $m \times n$ आव्यूह का निम्नलिखित आयाताकार क्रम-विन्यास होता है:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mj} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

अथवा $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ जहाँ $i, j \in \mathbf{N}$

इस प्रकार iवीं पंक्ति के अवयव $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3},..., a_{in}$ हैं, जबकि jवें स्तंभ के अवयव $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j},..., a_{mj}$ हैं।

सामान्यत: a_{ij}, iवीं पंक्ति और jवें स्तंभ में आने वाला अवयव होता है। हम इसे A का (i, j)वाँ अवयव भी कह सकते हैं। किसी $m \times n$ आव्यूह में अवयवों की संख्या mn होती है।

टिप्पणी इस अध्याय में,

1. हम किसी $m \times n$ कोटि के आव्यूह को प्रकट करने के लिए, संकेत $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ का प्रयोग करेंगे।
2. हम केवल ऐसे आव्यूहों पर विचार करेंगे, जिनके अवयव वास्तविक संख्याएँ हैं अथवा वास्तविक मानों को ग्रहण करने वाले फलन हैं।

हम एक समतल के किसी बिंदु (x, y) को एक आव्यूह (स्तंभ अथवा पंक्ति) द्वारा प्रकट कर सकते हैं, जैसे $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (अथवा $[x, y]$)से, उदाहरणार्थ, बिंदु P(0, 1), आव्यूह निरूपण में $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ या $[0\ 1]$ द्वारा प्रकट किया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि इस प्रकार हम किसी बंद रैखिक आकृति के शीर्षों को एक आव्यूह के रूप में लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए एक चतुर्भज ABCD पर विचार कीजिए, जिसके शीर्ष क्रमश: A (1, 0), B (3, 2), C (1, 3), तथा D (–1, 2) हैं।

अब, चतुर्भुज ABCD आव्यूह रूप में निम्नलिखित प्रकार से निरूपित किया जा सकता है:

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{array} \quad \text{या} \quad Y = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

अत: आव्यूहों का प्रयोग किसी समतल में स्थित ज्यामितीय आकृतियों के शीर्षों को निरूपित करने के लिए किया जा सकता है।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 तीन फैक्ट्रियों I, II तथा III में पुरुष तथा महिला कर्मियों से संबंधित निम्नलिखित सूचना पर विचार कीजिए:

	पुरुष कर्मी	महिला कर्मी
I	30	25
II	25	31
III	27	26

उपर्युक्त सूचना को एक 3×2 आव्यूह में निरूपित कीजिए। तीसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ वाली प्रविष्टि क्या प्रकट करती है?

हल प्रदत्त सूचना को 3×2 आव्यूह के रूप में निम्नलिखित प्रकार से निरूपित किया जा सकता है:

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

तीसरी पंक्ति और दूसरे स्तंभ की प्रविष्टि फैक्ट्री–III कारखाने में महिला कार्यकर्ताओं की संख्या प्रकट करती है।

उदाहरण 2 यदि किसी आव्यूह में 8 अवयव हैं, तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हो सकती हैं?

हल हमें ज्ञात है कि, यदि किसी आव्यूह की कोटि $m \times n$ है तो इसमें mn अवयव होते हैं। अतएव 8 अवयवों वाले किसी आव्यूह के सभी संभव कोटियाँ ज्ञात करने के लिए हम प्राकृत संख्याओं के उन सभी क्रमित युग्मों को ज्ञात करेंगे जिनका गुणनफल 8 है।

अत: सभी संभव क्रमित युग्म $(1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4)$ हैं।

अतएव संभव कोटियाँ $1 \times 8, 8 \times 1, 4 \times 2, 2 \times 4$ हैं।

उदाहरण 3 एक ऐसे 3×2 आव्यूह की रचना कीजिए, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ द्वारा प्रदत्त हैं।

हल एक 3×2 आव्यूह, सामान्यत: इस प्रकार होता है: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

अब, $$a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|, \; i = 1, 2, 3 \text{ तथा } j = 1, 2$$

इसलिए

$$a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3.1| = 1 \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3.2| = \frac{5}{2}$$

$$a_{21}=\frac{1}{2}|2-3.1|=\frac{1}{2} \qquad a_{22}=\frac{1}{2}|2-3.2|=2$$

$$a_{31}=\frac{1}{2}|3-3.1|=0 \qquad a_{32}=\frac{1}{2}|3-3.2|=\frac{3}{2}$$

अत: अभीष्ट आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ है।

3.3 आव्यूहों के प्रकार (Types of Matrices)

इस अनुच्छेद में हम विभिन्न प्रकार के आव्यूहों की परिचर्चा करेंगे।

(i) **स्तंभ आव्यूह (Column matrix)**

एक आव्यूह, **स्तंभ आव्यूह** कहलाता है, यदि उसमें केवल एक स्तंभ होता है। उदाहरण के लिए $A=\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, 4×1 कोटि का एक स्तंभ आव्यूह है। व्यापक रूप से, $A=[a_{ij}]_{m\times 1}$ एक $m\times 1$ कोटि का स्तंभ आव्यूह है।

(ii) **पंक्ति आव्यूह (Row matrix)**

एक आव्यूह, *पंक्ति आव्यूह* कहलाता है, यदि उसमें केवल एक पंक्ति होती है।

उदाहरण के लिए $B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 4}$, 1×4 कोटि का एक पंक्ति आव्यूह है। व्यापक रूप से, $B=[b_{ij}]_{1\times n}$ एक $1\times n$ कोटि का पंक्ति आव्यूह है।

(iii) **वर्ग आव्यूह (Square matrix)**

एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के समान होती है, एक *वर्ग आव्यूह* कहलाता है। अत: एक $m\times n$ आव्यूह, वर्ग आव्यूह कहलाता है, यदि $m=n$ और उसे कोटि

'n' का वर्ग आव्यूह कहते हैं। उदाहरण के लिए $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ एक 3 कोटि का वर्ग आव्यूह है। व्यापक रूप से $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ एक m कोटि का वर्ग आव्यूह है।

टिप्पणी यदि $A = [a_{ij}]$ एक n कोटि का वर्ग आव्यूह है, तो अवयवों (प्रविष्टियाँ) $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ को आव्यूह A के विकर्ण के अवयव कहते हैं।

अत: यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ है तो A के विकर्ण के अवयव 1, 4, 6 हैं।

(iv) **विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix)**

एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ *विकर्ण आव्यूह* कहलाता है, यदि विकर्ण के अतिरिक्त इसके अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं अर्थात्, एक आव्यूह $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ विकर्ण आव्यूह कहलाता है, यदि $b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$ हो।

उदाहरणार्थ $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, क्रमश: कोटि 1, 2 तथा 3 के विकर्ण आव्यूह हैं।

(v) **अदिश आव्यूह (Scalar matrix)**

एक विकर्ण आव्यूह, *अदिश आव्यूह* कहलाता है, यदि इसके विकर्ण के अवयव समान होते हैं, अर्थात्, एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ अदिश आव्यूह कहलाता है, यदि

$b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$

$b_{ij} = k$, जब $i = j$, जहाँ k कोई अचर है।

उदाहरणार्थ,

$A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ क्रमश:

कोटि 1, 2 तथा 3 के अदिश आव्यूह हैं।

(vi) **तत्समक आव्यूह (Identity matrix)**

एक वर्ग आव्यूह, जिसके विकर्ण के सभी अवयव 1 होते हैं तथा शेष अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं, *तत्समक आव्यूह* कहलाता है। दूसरे शब्दों में, वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक तत्समक आव्यूह है, यदि $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{यदि } i = j \\ 0 & \text{यदि } i \neq j \end{cases}$

हम, n कोटि के तत्समक आव्यूह को I_n द्वारा निरूपित करते हैं। जब संदर्भ से कोटि स्पष्ट होती है, तब इसे हम केवल I से प्रकट करते हैं।

उदाहरण के लिए $[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ क्रमशः कोटि 1, 2 तथा 3 के तत्समक आव्यूह हैं।

ध्यान दीजिए कि यदि $k = 1$ हो तो, एक अदिश आव्यूह, तत्समक आव्यूह होता है, परंतु प्रत्येक तत्समक आव्यूह स्पष्टतया एक अदिश आव्यूह होता है।

(vii) **शून्य आव्यूह (Zero matrix)**

एक आव्यूह, शून्य आव्यूह अथवा *रिक्त आव्यूह* कहलाता है, यदि इसके सभी अवयव शून्य होते हैं।

उदाहरणार्थ, $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [0, 0]$ सभी शून्य आव्यूह हैं। हम शून्य आव्यूह को O द्वारा निरूपित करते हैं। इनकी कोटियाँ, संदर्भ द्वारा स्पष्ट होती हैं।

3.3.1 *आव्यूहों की समानता (Equality of matrices)*

परिभाषा 2 दो आव्यूह $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कहलाते हैं, यदि

(i) वे समान कोटियों के होते हों, तथा

(ii) A का प्रत्येक अवयव, B के संगत अवयव के समान हो, अर्थात् i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हों

उदाहरण के लिए, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ समान आव्यूह हैं किंतु $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ समान आव्यूह नहीं हैं। प्रतीकात्मक रूप में, यदि दो आव्यूह A तथा B समान हैं, तो हम इसे $A = B$ लिखते हैं।

यदि $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, तो $x = -1.5, y = 0, z = 2, a = \sqrt{6}, b = 3, c = 2$

उदाहरण 4 यदि $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$

हो तो a, b, c, x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि प्रदत्त आव्यूह समान हैं, इसलिए इनके संगत अवयव भी समान होंगे। संगत अवयवों की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है:

$$x + 3 = 0, \quad z + 4 = 6, \quad 2y - 7 = 3y - 2$$
$$a - 1 = -3, \quad 0 = 2c + 2 \quad b - 3 = 2b + 4,$$

इन्हें सरल करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$a = -2, b = -7, c = -1, x = -3, y = -5, z = 2$$

उदाहरण 5 यदि $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ हो तो $a, b, c,$ तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

हल दो आव्यूहों की समानता की परिभाषा द्वारा, संगत अवयवों को समान रखने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$2a + b = 4 \qquad 5c - d = 11$$
$$a - 2b = -3 \qquad 4c + 3d = 24$$

इन समीकरणों को सरल करने पर $a = 1, b = 2, c = 3$ तथा $d = 4$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 3.1

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$, के लिए ज्ञात कीजिए:

(i) आव्यूह की कोटि (ii) अवयवों की संख्या

(iii) अवयव $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$

2. यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ क्या होंगी?

3. यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों तो क्या होगा?

4. एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्रदत्त हैं

(i) $a_{ij} = \dfrac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{(i+2j)^2}{2}$

5. एक 3×4 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होते हैं:

(i) $a_{ij} = \dfrac{1}{2}|-3i+j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

6. निम्नलिखित समीकरणों से x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. समीकरण $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ से a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) इनमें से कोई नहीं

9. x तथा y के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्नलिखित युग्म समान हैं?

$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

(A) $x = \dfrac{-1}{3}, \; y = 7$ (B) ज्ञात करना संभव नहीं है

(C) $y = 7, \; x = \dfrac{-2}{3}$ (D) $x = \dfrac{-1}{3}, \; y = \dfrac{-2}{3}$.

10. 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 आव्यूहों पर संक्रियाएँ (Operations on Matrices)

इस अनुच्छेद में हम आव्यूहों पर कुछ संक्रियाओं को प्रस्तुत करेंगे जैसे आव्यूहों का योग, किसी आव्यूह का एक अदिश से गुणा, आव्यूहों का व्यवकलन तथा गुणा:

3.4.1 *आव्यूहों का योग (Addition of matrices)*

मान लीजिए कि फातिमा की स्थान A तथा स्थान B पर दो फैक्ट्रियाँ हैं। प्रत्येक फैक्ट्री में लड़कों तथा लड़कियों के लिए, खेल के जूते, तीन भिन्न-भिन्न मूल्य वर्गों, क्रमशः 1, 2 तथा 3 के बनते हैं। प्रत्येक फैक्ट्री में बनने वाले जूतों की संख्या नीचे दिए आव्यूहों द्वारा निरूपित हैं:

$$\begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{A पर फैक्ट्री} \\ \begin{array}{cc} \text{लड़के} & \text{लड़कियाँ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{B पर फैक्ट्री} \\ \begin{array}{cc} \text{लड़के} & \text{लड़कियाँ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 70 & 55 \\ 75 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

मान लीजिए कि फातिमा प्रत्येक मूल्य वर्ग में बनने वाले खेल के जूतों की कुल संख्या जानना चाहती हैं। अब कुल उत्पादन इस प्रकार है:

मूल्य वर्ग 1 : लड़कों के लिए (80 + 90), लड़कियों के लिए (60 + 50)

मूल्य वर्ग 2 : लड़कों के लिए (75 + 70), लड़कियों के लिए (65 + 55)

मूल्य वर्ग 3 : लड़कों के लिए (90 + 75), लड़कियों के लिए (85 + 75)

आव्यूह के रूप में इसे इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$

यह नया आव्यूह, उपर्युक्त दो आव्यूहों का **योगफल** है। हम देखते हैं कि दो आव्यूहों का योगफल, प्रदत्त आव्यूहों के संगत अवयवों को जोड़ने से प्राप्त होने वाला आव्यूह होता है। इसके अतिरिक्त, योग के लिए दोनों आव्यूहों को समान कोटि का होना चाहिए।

इस प्रकार, यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ एक 2×3 आव्यूह है तथा $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ एक अन्य 2×3 आव्यूह है, तो हम $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

व्यापक रूप से, मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ दो समान कोटि, $m \times n$ वाले आव्यूह हैं तो A तथा B दोनों आव्यूहों का योगफल, आव्यूह $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, द्वारा परिभाषित होता है, जहाँ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, i तथा j के सभी संभव मानों को व्यक्त करता है।

उदाहरण 6 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ है तो $A + B$ ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि A तथा B समान कोटि 2×3 वाले आव्यूह हैं, इसलिए A तथा B का योग परिभाषित है, और

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1 \\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ द्वारा प्राप्त होता है।

टिप्पणी

1. हम इस बात पर बल देते हैं कि यदि A तथा B समान कोटि वाले आव्यूह नहीं हैं तो $A + B$ परिभाषित नहीं है। उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A + B$ परिभाषित नहीं है।
2. हम देखते हैं कि आव्यूहों का योग, समान कोटि वाले आव्यूहों के समुच्चय में द्विआधारी संक्रिया का एक उदाहरण है।

3.4.2 *एक आव्यूह का एक अदिश से गुणन (Multiplication of a matrix by a scalar)*

अब मान लीजिए कि फ़ातिमा ने A पर स्थित फैक्ट्री में सभी मूल्य वर्ग के उत्पादन को दो गुना कर दिया है (संदर्भ 3.4.1)

A पर स्थित फैक्ट्री में उत्पादन की संख्या नीचे दिए आव्यूह में दिखलाई गई है।

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{लड़के} & \text{लड़कियाँ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A पर स्थित फैक्ट्री में उत्पादित नयी (बदली हुई) संख्या अग्रलिखित है:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{लड़के} \quad \text{लड़कियाँ} \\ \begin{bmatrix} 2\times 80 & 2\times 60 \\ 2\times 75 & 2\times 65 \\ 2\times 90 & 2\times 85 \end{bmatrix}\end{array}$$

इसे आव्यूह रूप में, $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ प्रकार से निरूपित कर सकते हैं। हम देखते हैं कि यह नया आव्यूह पहले आव्यूह के प्रत्येक अवयव को 2 से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में हम, किसी आव्यूह के एक अदिश से गुणन को, निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं। यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक आव्यूह है तथा k एक अदिश है तो kA एक ऐसा आव्यूह है जिसे A के प्रत्येक अवयव को अदिश k से गुणा करके प्राप्त किया जाता है।

दूसरे शब्दों में, $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$, अर्थात् kA का (i, j)वाँ अवयव, i तथा j के हर संभव मान के लिए, ka_{ij} होता है।

उदाहरण के लिए, यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ है तो

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

आव्यूह का ऋण आव्यूह (Negative of a matrix) किसी आव्यूह A का ऋण आव्यूह –A से निरूपित होता है। हम –A को $-A = (-1)A$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$, तो – A निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होता है

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

आव्यूहों का अंतर (Difference of matrices) यदि $A = [a_{ij}]$, तथा $B = [b_{ij}]$ समान कोटि $m \times n$ वाले दो आव्यूह हैं तो इनका अंतर $A - B$, एक आव्यूह $D = [d_{ij}]$ जहाँ i तथा j के समस्त

मानों के लिए $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ है, द्वारा परिभाषित होता है। दूसरे शब्दों में, $D = A - B = A + (-1)\,B$, अर्थात् आव्यूह A तथा आव्यूह $-B$ का योगफल।

उदाहरण 7 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हैं तो $2A - B$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 *आव्यूहों के योग के गुणधर्म (Properties of matrix addition)*

आव्यूहों के योग की संक्रिया निम्नलिखित गुणधर्मों (नियमों) को संतुष्ट करती है:

(i) **क्रम-विनिमेय नियम (Commutative Law)** यदि $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ समान कोटि $m \times n$, वाले आव्यूह हैं, तो $A + B = B + A$ होगा।

अब $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (संख्याओं का योग क्रम-विनिमेय है।)

$= ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$

(ii) **साहचर्य नियम (Associative Law)** समान कोटि $m \times n$ वाले किन्हीं भी तीन आव्यूहों $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ के लिए $(A + B) + C = A + (B + C)$

अब $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (क्यों ?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$

(iii) **योग के तत्समक का अस्तित्व (Existence of additive identity)** मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ आव्यूह है और O एक $m \times n$ शून्य आव्यूह है, तो $A + O = O + A = A$ होता है। दूसरे शब्दों में, आव्यूहों के योग संक्रिया का तत्समक शून्य आव्यूह O है।

(iv) **योग के प्रतिलोम का अस्तित्व (The existence of additive inverse)** मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक आव्यूह है, तो एक अन्य आव्यूह $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ इस प्रकार का है

कि $A + (-A) = (-A) + A = O$, अतएव आव्यूह $-A$, आव्यूह A का योग के अंतर्गत प्रतिलोम आव्यूह अथवा ऋण आव्यूह है।

3.4.4 एक आव्यूह के अदिश गुणन के गुणधर्म *(Properties of scalar multiplication of a matrix)*

यदि $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कोटि $m \times n$, वाले दो आव्यूह हैं और k तथा l अदिश हैं, तो

(i) $k(A + B) = k\,A + kB$, (ii) $(k + l)A = k\,A + l\,A$

अब, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, और k तथा l अदिश हैं, तो

(i) $$k\,(A + B) = k\,([a_{ij}] + [b_{ij}])$$
$$= k\,[a_{ij} + b_{ij}] = [k\,(a_{ij} + b_{ij})] = [(k\,a_{ij}) + (k\,b_{ij})]$$
$$= [k\,a_{ij}] + [k\,b_{ij}] = k\,[a_{ij}] + k\,[b_{ij}] = kA + kB$$

(ii) $$(k + l)\,A = (k + l)\,[a_{ij}]$$
$$= [(k + l)\,a_{ij}] = [k\,a_{ij}] + [l\,a_{ij}] = k\,[a_{ij}] + l\,[a_{ij}] = k\,A + l\,A.$$

उदाहरण 8 यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A + 3X = 5B$ दिया हो तो आव्यूह X ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $2A + 3X = 5B$

या $2A + 3X - 2A = 5B - 2A$

या $2A - 2A + 3X = 5B - 2A$ (आव्यूह योग क्रम-विनिमेय है)

या $O + 3X = 5B - 2A$ ($-2A$, आव्यूह $2A$ का योग प्रतिलोम है)

या $3X = 5B - 2A$ (O, योग का तत्समक है)

या $$X = \frac{1}{3}\,(5B - 2A)$$

या $$X = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 9 X तथा Y, ज्ञात कीजिए, यदि $X+Y=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $X-Y=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है।

हल यहाँ पर $$(X + Y) + (X - Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

या $$(X + X) + (Y - Y) = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

या $$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

साथ ही $$(X + Y) - (X - Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

या $$(X - X) + (Y + Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

या $$Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 10 निम्नलिखित समीकरण से x तथा y के मानों को ज्ञात कीजिए:

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

हल दिया है

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

या $\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

या $2x + 3 = 7$ तथा $2y - 4 = 14$ (क्यों?)

या $2x = 7 - 3$ तथा $2y = 18$

या $x = \dfrac{4}{2}$ तथा $y = \dfrac{18}{2}$

अर्थात् $x = 2$ तथा $y = 9$

उदाहरण 11 दो किसान रामकिशन और गुरचरन सिंह केवल तीन प्रकार के चावल जैसे बासमती, परमल तथा नउरा की खेती करते हैं। दोनों किसानों द्वारा, सितंबर तथा अक्तूबर माह में, इस प्रकार के चावल की बिक्री (रुपयों में) को, निम्नलिखित A तथा B आव्यूहों में व्यक्त किया गया है:

सितंबर माह की बिक्री (Rs में)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{बासमती} & \text{परमल} & \text{नउरा} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10{,}000 & 20{,}000 & 30{,}000 \\ 50{,}000 & 30{,}000 & 10{,}000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{रामकिशन} \\ \text{गुरुचरण सिंह} \end{array}$$

अक्तूबर माह की बिक्री (Rs में)

$$A - B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{बासमती} & \text{परमल} & \text{नउरा} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10{,}000 & 24{,}000 \\ 30{,}000 & 20{,}000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{रामकिशन} \\ \text{गुरुचरण सिंह} \end{array}$$

(i) प्रत्येक किसान की प्रत्येक प्रकार के चावल की सितंबर तथा अक्तूबर की सम्मिलित बिक्री ज्ञात कीजिए।

(ii) सितंबर की अपेक्षा अक्तूबर में हुई बिक्री में कमी ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि दोनों किसानों को कुल बिक्री पर 2% लाभ मिलता है, तो अक्तूबर में प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री पर प्रत्येक किसान को मिलने वाला लाभ ज्ञात कीजिए।

हल

(i) प्रत्येक किसान की प्रत्येक प्रकार के चावल की सितंबर तथा अक्तूबर में प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री अगले पृष्ठ पर दी गई है:

$$A + B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{बासमती} & \text{परमल} & \text{नउरा} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15,000 & 30,000 & 36,000 \\ 70,000 & 40,000 & 20,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{रामकिशन} \\ \text{गुरुचरण सिंह} \end{array}$$

(ii) सितंबर की अपेक्षा अक्तूबर में हुई बिक्री में कमी नीचे दी गई है,

$$A - B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{बासमती} & \text{परमल} & \text{नउरा} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{रामकिशन} \\ \text{गुरुचरण सिंह} \end{array}$$

(iii) B का 2% $= \dfrac{2}{100} \times B = 0.02 \times B$

$$= 0.02 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{बासमती} & \text{परमल} & \text{नउरा} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{रामकिशन} \\ \text{गुरुचरण सिंह} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{बासमती} & \text{परमल} & \text{नउरा} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{रामकिशन} \\ \text{गुरुचरण सिंह} \end{array}$$

अतः अक्तूबर माह में, रामकिशन, प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री पर क्रमशः ₹100, ₹200, तथा ₹120 लाभ प्राप्त करता है और गुरचरन सिंह, प्रत्येक प्रकार के चावल की बिक्री पर क्रमशः ₹400, ₹200 तथा ₹200 लाभ अर्जित करता है।

3.4.5 *आव्यूहों का गुणन (Multiplication of matrices)*

मान लीजिए कि मीरा और नदीम दो मित्र हैं। मीरा 2 कलम तथा 5 कहानी की पुस्तकें खरीदना चाहती हैं, जब कि नदीम को 8 कलम तथा 10 कहानी की पुस्तकों की आवश्यकता है। वे दोनों एक दुकान पर (कीमत) ज्ञात करने के लिए जाते हैं, जो निम्नलिखित प्रकार है:

कलम – प्रत्येक ₹5, कहानी की पुस्तक – प्रत्येक ₹50 है।

उन दोनों में से प्रत्येक को कितनी धनराशि खर्च करनी पड़ेगी? स्पष्टतया, मीरा को ₹$(5 \times 2 + 50 \times 5)$ अर्थात्, ₹260 की आवश्यकता है, जबकि नदीम को ₹$(8 \times 5 + 50 \times 10)$ अर्थात् ₹540 की आवश्यकता है। हम उपर्युक्त सूचना को आव्यूह निरूपण में इस प्रकार से प्रकट कर सकते हैं:

आवश्यकता	**प्रति नग दाम (रुपयों में)**	**आवश्यक धनराशि (रुपयों में)**
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 \\ 8\times5+10\times50 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$

मान लीजिए कि उनके द्वारा किसी अन्य दुकान पर ज्ञात करने पर भाव निम्नलिखित प्रकार हैं:

कलम – प्रत्येक ₹ 4, कहानी की पुस्तक – प्रत्येक ₹40

अब, मीरा तथा नदीम द्वारा खरीदारी करने के लिए आवश्यक धनराशि क्रमश: ₹$(4 \times 2 + 40 \times 5)$ = ₹ 208 तथा ₹$(8 \times 4 + 10 \times 40)$ = ₹432 है।

पुन: उपर्युक्त सूचना को निम्नलिखित ढंग से निरूपित कर सकते हैं:

आवश्यकता	**प्रति नग दाम (रुपयों में)**	**आवश्यक धनराशि (रुपयों में)**
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4\times2+40\times5 \\ 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$

अब, उपर्युक्त दोनों दशाओं में प्राप्त सूचनाओं को एक साथ आव्यूह निरूपण द्वारा निम्नलिखित प्रकार से प्रकट कर सकते हैं:

आवश्यकता	**प्रति नग दाम (रुपयों में)**	**आवश्यक धनराशि (रुपयों में)**
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 & 4\times2+40\times5 \\ 8\times5+10\times50 & 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त विवरण आव्यूहों के गुणन का एक उदाहरण है। हम देखते हैं कि आव्यूहों A तथा B के गुणन के लिए, A में स्तंभों की संख्या B में पंक्तियों की संख्या के बराबर होनी चाहिए। इसके अतिरिक्त गुणनफल आव्यूह (Product matrix) के अवयवों को प्राप्त करने के लिए, हम A की पंक्तियों तथा B के स्तंभों को लेकर, अवयवों के क्रमानुसार (Element–wise) गुणन करते हैं और तदोपरांत इन गुणनफलों का योगफल ज्ञात करते हैं। औपचारिक रूप से, हम आव्यूहों के गुणन को निम्नलिखित तरह से परिभाषित करते हैं:

दो आव्यूहों A तथा B का गुणनफल परिभाषित होता है, यदि A में स्तंभों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के समान होती है। मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है और $B = [b_{jk}]$ एक $n \times p$ कोटि का आव्यूह है। तब आव्यूहों A तथा B का गुणनफल एक $m \times p$ कोटि का आव्यूह C होता है। आव्यूह C का (i, k)वाँ अवयव c_{ik} प्राप्त करने के लिए हम A की i वीं पंक्ति और B के kवें स्तंभ को लेते है और फिर उनके अवयवों का क्रमानुसार गुणन करते हैं। तदोपरान्त इन सभी गुणनफलों का योगफल ज्ञात कर लेते हैं। दूसरे शब्दों में यदि,

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ है तो A की i वीं पंक्ति $[a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}]$ तथा B का kवाँ स्तंभ

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$ हैं, तब $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

आव्यूह $C = [c_{ik}]_{m\times p}$, A तथा B का गुणनफल है।

उदाहरण के लिए, यदि $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ है तो

गुणनफल CD परिभाषित है तथा $CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ एक 2×2 आव्यूह है जिसकी प्रत्येक प्रविष्टि C की किसी पंक्ति की प्रविष्टियों की D के किसी स्तंभ की संगत प्रविष्टियों के गुणनफलों के योगफल के बराबर होती है। इस उदाहरण में यह चारों परिकलन निम्नलिखित हैं,

प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(-1)(-1)+(2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$

प्रथम पंक्ति तथा दूसरे स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7)+(-1)(1)+2(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$

दूसरी पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2)+3(-1)+4(5) & ? \end{bmatrix}$

दूसरी पंक्ति तथा दूसरे स्तंभ के अवयव $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7)+3(1)+4(-4) \end{bmatrix}$

अत: $CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$

उदहारण 12 यदि $A=\begin{bmatrix}6 & 9\\2 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\7 & 9 & 8\end{bmatrix}$ है तो AB ज्ञात कीजिए।

हल आव्यूह A में 2 स्तंभ हैं जो आव्यूह B की पंक्तियों के समान हैं। अतएव AB परिभाषित है। अब

$$AB = \begin{bmatrix}6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8)\\2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}12+63 & 36+81 & 0+72\\4+21 & 12+27 & 0+24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}75 & 117 & 72\\25 & 39 & 24\end{bmatrix}$$

टिप्पणी यदि AB परिभाषित है तो यह आवश्यक नहीं है कि BA भी परिभाषित हो। उपर्युक्त उदाहरण में AB परिभाषित है परंतु BA परिभाषित नहीं है क्योंकि B में 3 स्तंभ हैं जबकि A में केवल 2 पंक्तियाँ (3 पंक्तियाँ नहीं) हैं। यदि A तथा B क्रमशः $m \times n$ तथा $k \times l$ कोटियों के आव्यूह हैं तो AB तथा BA दोनों ही परिभाषित हैं **यदि और केवल यदि** $n = k$ तथा $l = m$ हो। विशेष रूप से, यदि A और B दोनों ही समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं, तो AB तथा BA दोनों परिभाषित होते हैं।

आव्यूहों के गुणन की अक्रम-विनिमेयता (Non-Commutativity of multiplication of matrices)

अब हम एक उदाहरण के द्वारा देखेंगे कि, यदि AB तथा BA परिभाषित भी हों, तो यह आवश्यक नहीं है कि AB = BA हो।

उदाहरण 13 यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & 2 & 5\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\\2 & 1\end{bmatrix}$, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। दर्शाइए कि $AB \neq BA$

हल क्योंकि कि A एक 2×3 आव्यूह है और B एक 3×2 आव्यूह है, इसलिए AB तथा BA दोनों ही परिभाषित हैं तथा क्रमशः 2×2 तथा 3×3, कोटियों के आव्यूह हैं। नोट कीजिए कि

$$AB = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\\2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-8+6 & 3-10+3\\-8+8+10 & -12+10+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -4\\10 & 3\end{bmatrix}$$

और $$BA = \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-12 & -4+6 & 6+15\\4-20 & -8+10 & 12+25\\2-4 & -4+2 & 6+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10 & 2 & 21\\-16 & 2 & 37\\-2 & -2 & 11\end{bmatrix}$$

स्पष्टतया $AB \neq BA$.

उपर्युक्त उदाहरण में AB तथा BA भिन्न-भिन्न कोटियों के आव्यूह हैं और इसलिए $AB \neq BA$ है। परंतु कोई ऐसा सोच सकता है कि यदि AB तथा BA दोनों समान कोटि के होते तो संभवत: वे समान होंगे। किंतु ऐसा भी नहीं है। यहाँ हम एक उदाहरण यह दिखलाने के लिए दे रहे हैं कि यदि AB तथा BA समान कोटि के हों तो भी यह आवश्यक नहीं है कि वे समान हों।

उदाहरण 14 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

और $$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ है। स्पष्टतया $AB \neq BA$ है।

अत: आव्यूह गुणन क्रम-विनिमेय नहीं होता है।

> **टिप्पणी** इसका तात्पर्य यह नहीं है कि A तथा B आव्यूहों के उन सभी युग्मों के लिए, जिनके लिए AB तथा BA परिभाषित है, $AB \neq BA$ होगा। उदाहरण के लिए
>
> यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, तो $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
>
> ध्यान दीजिए कि समान कोटि के विकर्ण आव्यूहों का गुणन क्रम-विनिमेय होता है।

दो शून्येतर आव्यूहों के गुणनफल के रूप में शून्य आव्यूह: (Zero matrix as the product of two non-zero matrices)

हमें ज्ञात है कि दो वास्तविक संख्याओं a तथा b के लिए, यदि $ab = 0$ है तो या तो $a = 0$ अथवा $b = 0$ होता है। किंतु आव्यूहों के लिए यह अनिवार्यत: सत्य नहीं होता है। इस बात को हम एक उदाहरण द्वारा देखेंगे।

उदाहरण 15 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ है तो AB का मान ज्ञात कीजिए

हल यहाँ पर $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

अत: यदि दो आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह है तो आवश्यक नहीं है कि उनमें से एक आव्यूह अनिवार्यत: शून्य आव्यूह हो।

3.4.6 *आव्यूहों के गुणन के गुणधर्म (Properties of multiplication of matrices)*

आव्यूहों के गुणन के गुणधर्मों का हम नीचे बिना उनकी उपपत्ति दिए उल्लेख कर रहे हैं:

1. **साहचर्य नियम:** किन्हीं भी तीन आव्यूहों A, B तथा C के लिए

   $(AB)\,C = A\,(BC)$, जब कभी समीकरण के दोनों पक्ष परिभाषित होते हैं।

2. **वितरण नियम :** किन्हीं भी तीन आव्यूहों A, B तथा C के लिए

   (i) A (B+C) = AB + AC

   (ii) (A+B) C = AC + BC, जब भी समीकरण के दोनों पक्ष परिभाषित होते हैं।

3. **गुणन के तत्समक का अस्तित्व :** प्रत्येक वर्ग आव्यूह A के लिए समान कोटि के एक आव्यूह I का अस्तित्व इस प्रकार होता है, कि IA = AI = A

   अब हम उदाहरणों के द्वारा उपर्युक्त गुणधर्मां का सत्यापन करेंगे।

उदाहरण 16 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ तो A(BC) तथा (AB)C ज्ञात कीजिए और दिखलाइए कि (AB)C = A(BC) है।

हल यहाँ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 3+2-4 \\ 2+0-3 & 6+0+12 \\ 3+0-2 & 9-2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$

$$(AB)\,(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1 \\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18 \\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

अब $BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

अतएव $$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

स्पष्टतया, (AB) C = A (BC)

उदाहरण 17 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

तो AC, BC तथा (A + B)C का परिकलन कीजिए। यह भी सत्यापित कीजिए कि (A + B) C = AC + BC

हल $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

अतएव, $$(A + B)C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

इसके अतिरिक्त $$AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

और $$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

इसलिए $$AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

स्पष्टतया $(A + B)\, C = AC + BC$

उदाहरण 18 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^3 - 23A - 40I = O$

हल हम जानते हैं कि $$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

इसलिए $$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

अब $$A^3 - 23A - 40I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

उदाहरण 19 किसी विधान सभा चुनाव के दौरान एक राजनैतिक दल ने अपने उम्मीदवार के प्रचार हेतु एक जन संपर्क फर्म को ठेके पर अनुबंद्धित किया। प्रचार हेतु तीन विधियों द्वारा संपर्क स्थापित करना निश्चित हुआ। ये हैं: टेलीफोन द्वारा, घर-घर जाकर तथा पर्चा वितरण द्वारा। प्रत्येक संपर्क का शुल्क (पैसों में) नीचे आव्यूह A में व्यक्त है,

$$A = \begin{array}{c} \text{प्रति संपर्क मूल्य} \\ \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{टेलीफोन द्वारा} \\ \text{घर जाकर} \\ \text{पर्चा द्वारा} \end{array}$$

X तथा Y दो शहरों में, प्रत्येक प्रकार के सम्पर्कों की संख्या आव्यूह

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{टेलीफोन} & \text{घर जाकर} & \text{पर्चा द्वारा} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \to X \\ \to Y \end{array}$$

में व्यक्त है। X तथा Y शहरों में राजनैतिक दल द्वारा व्यय की गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर

$$BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 250,000 \\ 120,000 + 100,000 + 500,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 340,000 \\ 720,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

अत: दल द्वारा दोनों शहरों में व्यय की गई कुल धनराशि क्रमश: 3,40,000 पैसे व 7,20,000 पैसे अर्थात् Rs 3400 तथा Rs 7200 हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) A + B (ii) A – B (iii) 3A – C

(iv) AB (v) BA

2. निम्नलिखित को परिकलित कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

3. निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, तो (A+B) तथा (B – C) परिकलित कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि $A + (B - C) = (A + B) - C$.

5. यदि $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, तो $3A - 5B$ परिकलित कीजिए।

6. सरल कीजिए, $\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

7. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि

(i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $X \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

8. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

9. x तथा y ज्ञात कीजिए यदि $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

10. प्रदत्त समीकरण को x, y, z तथा t के लिए हल कीजिए यदि

$$2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

11. यदि $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ है तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ है तो x, y, z तथा w के मानों को ज्ञात कीजिए।

13. यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)\,F(y) = F(x + y)$

14. दर्शाइए कि

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\2 & 3 & 4\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

15. यदि $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\2 & 1 & 3\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$, का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

17. यदि $A = \begin{bmatrix}3 & -2\\4 & -2\end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो तो k ज्ञात कीजिए।

18. यदि $A = \begin{bmatrix}0 & -\tan\frac{\alpha}{2}\\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0\end{bmatrix}$ तथा I कोटि 2 का एक तत्समक आव्यूह है। तो सिद्ध कीजिए कि $I + A = (I - A)\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

19. किसी व्यापार संघ के पास 30,000 रुपयों का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बांडों में निवेशित करना है। प्रथम बांड पर 5% वार्षिक तथा द्वितीय बांड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि 30,000 रुपयों के कोष को दो प्रकार के बांडों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज

(a) Rs 1800 हो। (b) Rs 2000 हो।

20. किसी स्कूल की पुस्तकों की दुकान में 10 दर्जन रसायन विज्ञान, 8 दर्जन भौतिक विज्ञान तथा 10 दर्जन अर्थशास्त्र की पुस्तकें हैं। इन पुस्तकों का विक्रय मूल्य क्रमशः Rs 80, Rs 60 तथा Rs 40 प्रति पुस्तक है। आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी।

मान लीजिए कि X, Y, Z, W तथा P क्रमशः $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ तथा $p \times k$, कोटियों के आव्यूह हैं। नीचे दिए प्रश्न संख्या 21 तथा 22 में सही उत्तर चुनिए।

21. PY + WY के परिभाषित होने के लिए n, k तथा p पर क्या प्रतिबंध होगा?

(A) $k = 3, p = n$ (B) k स्वेच्छ है , $p = 2$

(C) p स्वेच्छ है, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

22. यदि $n = p$, तो आव्यूह $7X - 5Z$ की कोटि है।

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5. आव्यूह का परिवर्त (Transpose of a Matrix)

इस अनुच्छेद में हम किसी आव्यूह के परिवर्त तथा कुछ विशेष प्रकार के आव्यूहों, जैसे सममित आव्यूह (Symmetric Matrix) तथा विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix) के बारे में जानेंगे।

परिभाषा 3 यदि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है तो A की पंक्तियों तथा स्तंभों का परस्पर विनिमय (Interchange) करने से प्राप्त होने वाला आव्यूह A *का परिवर्त* (Transpose) कहलाता है। आव्यूह A के परिवर्त को A' (या A^T) से निरूपित करते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, तो $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ होगा। उदाहरणार्थ, यदि

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ हो तो } A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ होगा।}$$

आव्यूहों के परिवर्त के गुणधर्म (Properties of transpose of matrices)

अब हम किसी आव्यूह के परिवर्त आव्यूह के निम्नलिखित गुणधर्मों को बिना उपपत्ति दिए व्यक्त करते हैं। इनका सत्यापन उपयुक्त उदाहरणों द्वारा किया जा सकता हैं। उपयुक्त कोटि के किन्हीं आव्यूहों A तथा B के लिए

(i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (जहाँ k कोई अचर है।)

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$

उदाहरण 20 यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ तो निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(kB)' = kB'$, जहाँ k कोई अचर है।

हल

(i) यहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

अत: $(A')' = A$

(ii) यहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

अतएव $$(A+B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

अब $$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

अतएव $$A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

अत: $(A+B)' = A' + B'$

(iii) यहाँ

$$kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$$

तब $$(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = kB'$$

अत: $(kB)' = kB'$

उदाहरण 21 यदि $A=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए $(AB)' = B'A'$ है।

हल यहाँ

$$A=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

इसलिए $$AB=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 12\\4 & 12 & -24\\5 & 15 & -30\end{bmatrix}$$

अत: $$(AB)'=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\\-6 & 12 & 15\\12 & -24 & -30\end{bmatrix}$$

अब $$A'=[-2\ \ 4\ \ 5],\ B'=\begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}$$

इसलिए $$B'A'=\begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\\-6 & 12 & 15\\12 & -24 & -30\end{bmatrix}=(AB)'$$

स्पष्टतया $(AB)' = B'A'$

3.6 समित तथा विषम समित आव्यूह (Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

परिभाषा 4 एक वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ *सममित* कहलाता है यदि $A' = A$ अर्थात् i व j के हर संभव मानों के लिए $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ हो।

उदाहरण के लिए, $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 2 & 3\\2 & -1.5 & -1\\3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है, क्योंकि $A' = A$

परिभाषा 5 एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ *विषम सममित आव्यूह* कहलाता है, यदि $A' = -A$, अर्थात् i तथा j के हर संभव मानों के लिए $a_{ji} = -a_{ij}$ हो। अब, यदि हम $i = j$ रखें, तो $a_{ii} = -a_{ii}$ होगा। अतः $2a_{ii} = 0$ या $a_{ii} = 0$ समस्त i के लिए।

इसका अर्थ यह हुआ कि किसी विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं। उदाहरणार्थ आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है, क्योंकि $B' = -B$ है।

अब, हम सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के कुछ गुणधर्मों को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह A के लिए $A + A'$ एक सममित आव्यूह तथा $A - A'$ एक विषम सममित आव्यूह होते हैं।

उपपत्ति मान लीजिए कि $B = A + A'$ तब

$$\begin{aligned} B' &= (A+A')' \\ &= A' + (A')' \quad (\text{क्योंकि } (A+B)' = (A' + B')) \\ &= A' + A \quad (\text{क्योंकि } (A')' = A) \\ &= A + A' \quad (\text{क्योंकि } A + B = B + A) \\ &= B \end{aligned}$$

इसलिए $B = A + A'$ एक सममित आव्यूह है।

अब मान लीजिए कि $C = A - A'$

$$\begin{aligned} C' &= (A - A')' = A' - (A')' \quad (\text{क्यों?}) \\ &= A' - A \quad (\text{क्यों?}) \\ &= -(A - A') = -C \end{aligned}$$

अतः $C = A - A'$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रमेय 2 किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपपत्ति मान लीजिए कि A एक वर्ग आव्यूह है। हम लिख सकते हैं कि

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

प्रमेय 1 द्वारा हमें ज्ञात है कि $(A+A')$ एक सममित आव्यूह तथा $(A-A')$ एक विषम सममित आव्यूह है। क्योंकि किसी भी आव्यूह A के लिए $(kA)' = kA'$ होता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\frac{1}{2}(A+A')$ सममित आव्यूह तथा $\frac{1}{2}(A-A')$ विषम सममित आव्यूह है। अतः किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 22 आव्यूह $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल यहाँ $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

मान लीजिए कि $$P = \frac{1}{2}(B+B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ है।

अब $$P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

अतः $P = \frac{1}{2}(B+B')$ एक सममित आव्यूह है।

साथ ही मान लीजिए $$Q = \frac{1}{2}(B-B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ है।

तब $$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

अतः $$Q = \frac{1}{2}(B - B')$$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अब $$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

अतः आव्यूह B एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त किया गया।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक का परिवर्त ज्ञात कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$ (ii) $(A-B)' = A' - B'$

3. यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$ (ii) $(A-B)' = A' - B'$

4. यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हैं तो $(A + 2B)'$ ज्ञात कीजिए।

5. A तथा B आव्यूहों के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$, जहाँ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$

7. (i) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है।

8. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ तो $\frac{1}{2}(A + A')$ तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 में सही उत्तर चुनिए:

11. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB – BA एक

(A) विषम सममित आव्यूह है (B) सममित आव्यूह है

(C) शून्य आव्यूह है (D) तत्समक आव्यूह है

12. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो α का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrices)

परिभाषा 6 यदि A, कोटि m, का, एक वर्ग आव्यूह है और यदि एक अन्य वर्ग आव्यूह का अस्तित्व इस प्रकार है, कि AB = BA = I, तो B को आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह कहते हैं और इसे A^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं। ऐसी दशा में आव्यूह A व्युत्क्रमणीय कहलाता है।

उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ दो आव्यूह हैं।

अब $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

साथ ही $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ है। अतः B आव्यूह, A का व्युत्क्रम है।

दूसरे शब्दों में, $B = A^{-1}$ तथा A आव्यूह B, का व्युत्क्रम है, अर्थात् $A = B^{-1}$

टिप्पणी

1. किसी आयताकार (Rectangular) आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह नहीं होता है, क्योंकि गुणनफल AB तथा BA के परिभाषित होने और समान होने के लिए, यह अनिवार्य है कि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हों।
2. यदि B, आव्यूह A का व्युत्क्रम है, तो A, आव्यूह B का व्युत्क्रम होता है।

प्रमेय 3 [व्युत्क्रम आव्यूह की अद्वितीयता (Uniqueness of inverse)] किसी वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है तो अद्वितीय होता है।

उपपत्ति मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$ कोटि m का, एक वर्ग आव्यूह है। यदि संभव हो, तो मान लीजिए B तथा C आव्यूह A के दो व्युत्क्रम आव्यूह हैं। अब हम दिखाएँगें कि B = C है।

क्योंकि आव्यूह A का व्युत्क्रम B है

अतः $$AB = BA = I \qquad \ldots (1)$$

क्योंकि आव्यूह A का व्युत्क्रम C भी है अतः

$$AC = CA = I \qquad \ldots (2)$$

अब $$B = BI = B\,(AC) = (BA)\,C = IC = C$$

प्रमेय 4 यदि A तथा B समान कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

उपपत्ति एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह की परिभाषा से

$$(AB)\,(AB)^{-1} = 1$$

या $$A^{-1}\,(AB)\,(AB)^{-1} = A^{-1}I$$ (A^{-1} का दोनों पक्षों से पूर्वगुणन करने पर)

या $$(A^{-1}A)\,B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$ ($A^{-1}I = A^{-1}$, तथा आव्यूह गुणन साहचर्य होता है)

या $$IB\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$

या $$B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$$

या $$B^{-1}B\,(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

या $$I\,(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

अतः $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

1. आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि

(A) AB = BA (B) AB = BA = 0

(C) AB = 0, BA = I (D) AB = BA = I

विविध उदाहरण

उदाहरण 23 यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो दर्शाइए कि AB सममित है, यदि और केवल यदि A तथा B क्रमविनिमेय है, अर्थात् AB = BA है।

हल दिया है कि A तथा B दोनों सममित आव्यूह हैं, इसलिए $A' = A$ तथा $B' = B$ है।

मान लीजिए कि AB सममित है तो $(AB)' = AB$

किंतु $$(AB)' = B'A' = BA \text{ (क्यों?)}$$

अत: $$BA = AB$$

विलोमत:, यदि $AB = BA$ है तो हम सिद्ध करेंगे कि AB सममित है।

अब $$(AB)' = B'A'$$
$$= B\,A \text{ (क्योंकि A तथा B सममित हैं)}$$
$$= AB$$

अत: AB सममित है।

उदाहरण 24 मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ है। एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = O$ हो।

हल क्योंकि A, B, C सभी कोटि 2, के वर्ग आव्यूह हैं और $CD - AB$ भली-भाँति परिभाषित है, इसलिए D कोटि 2 का एक वर्ग आव्यूह होना चाहिए।

मान लीजिए कि $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ है। तब $CD - AB = O$ से प्राप्त होता है कि

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

या $$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

आव्यूहों की समानता से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं:

$$2a + 5c - 3 = 0 \qquad \text{... (1)}$$
$$3a + 8c - 43 = 0 \qquad \text{... (2)}$$
$$2b + 5d = 0 \qquad \text{... (3)}$$

तथा $$3b + 8d - 22 = 0 \qquad \text{... (4)}$$

(1) तथा (2), को सरल करने पर $a = -191, c = 77$ प्राप्त होता है।

(3) तथा (4), को सरल करने पर $b = -110, d = 44$ प्राप्त होता है।

अत: $$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

1. यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है।

2. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $B'AB$ सममित अथवा विषम सममित है यदि A सममित अथवा विषम सममित है।

3. x, y, तथा z के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ समीकरण $A'A = I$ को संतुष्ट करता है।

4. x के किस मान के लिए $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ है ?

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है।

6. यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

7. एक निर्माता तीन प्रकार की वस्तुएँ x, y, तथा z का उत्पादन करता है जिन का वह दो बाजारों में विक्रय करता है। वस्तुओं की वार्षिक बिक्री नीचे सूचित (निदर्शित) है:

बाज़ार	**उत्पादन**		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

(a) यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य क्रमशः Rs 2.50, Rs 1.50 तथा Rs 1.00 है तो प्रत्येक बाज़ार में कुल आय (Revenue), आव्यूह बीजगणित की सहायता से ज्ञात कीजिए।

(b) यदि उपर्युक्त तीन वस्तुओं की प्रत्येक इकाई की लागत (Cost) क्रमशः Rs 2.00, Rs 1.00 तथा पैसे 50 है तो कुल लाभ (Gross profit) ज्ञात कीजिए।

8. आव्यूह X ज्ञात कीजिए, यदि $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ है।

निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए:

9. यदि $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$, तो

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

10. यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही है तो:

(A) A एक विकर्ण आव्यूह है। (B) A एक शून्य आव्यूह है।

(C) A एक वर्ग आव्यूह है। (D) इनमें से कोई नहीं।

11. यदि A एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$, तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर है:

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

सारांश

- आव्यूह, फलनों या संख्याओं का एक आयताकार क्रम-विन्यास है।
- m पंक्तियों तथा n स्तंभों वाले आव्यूह को $m \times n$ कोटि का आव्यूह कहते हैं।
- $[a_{ij}]_{m \times 1}$ एक स्तंभ आव्यूह है।
- $[a_{ij}]_{1 \times n}$ एक पंक्ति आव्यूह है।
- एक $m \times n$ आव्यूह एक वर्ग आव्यूह है, यदि $m = n$ है।
- $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ एक विकर्ण आव्यूह है, यदि $a_{ij} = 0$, जब $i \neq j$
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक अदिश आव्यूह है, यदि $a_{ij} = 0$, जब $i \neq j$, $a_{ij} = k$, (k एक अचर है), जब $i = j$ है।
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ एक तत्समक आव्यूह है, यदि $a_{ij} = 1$ जब $i = j$ तथा $a_{ij} = 0$ जब $i \neq j$ है।
- किसी शून्य आव्यूह (या रिक्त आव्यूह) के सभी अवयव शून्य होते हैं।
- $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$ यदि (i) A तथा B समान कोटि के हैं तथा (ii) i तथा j के समस्त संभव मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हो।

- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A - B = A + (-1) B$
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, जहाँ A, B तथा C समान कोटि के आव्यूह हैं।
- $k(A + B) = kA + kB$, जहाँ A तथा B समान कोटि के आव्यूह है तथा k एक अचर है।
- $(k + l) A = kA + lA$, जहाँ k तथा l अचर हैं।
- यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तथा $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ तो $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$, जहाँ $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ है।
- (i) $A(BC) = (AB)C$, (ii) $A(B + C) = AB + AC$, (iii) $(A + B)C = AC + BC$
- यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तो A' या $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$
- (i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$
- यदि $A' = A$ है तो A एक सममित आव्यूह है।
- यदि $A' = -A$ है तो A एक विषम सममित आव्यूह है।
- किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित और एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में निरूपित किया जा सकता है।
- यदि A तथा B दो वर्ग आव्यूह हैं, इस प्रकार कि $AB = BA = I$, तो आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह B है, जिसे A^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं और आव्यूह B का व्यूत्क्रम A है।
- वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है, अद्वितीय होता है।

12081CH04

अध्याय 4

सारणिक (Determinants)

❖*All Mathematical truths are relative and conditional — C.P. STEINMETZ* ❖

4.1 भूमिका (Introduction)

P.S. Laplace (1749-1827)

पिछले अध्याय में, हमने आव्यूह और आव्यूहों के बीजगणित के विषय में अध्ययन किया है। हमने बीजगणितीय समीकरणों के निकाय को आव्यूहों के रूप में व्यक्त करना भी सीखा है। इसके अनुसार रैखिक समीकरणों के निकाय

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

को $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अब इन समीकरणों के निकाय का अद्वितीय हल है अथवा नहीं, इसको $a_1 b_2 - a_2 b_1$ संख्या द्वारा ज्ञात किया जाता है। (स्मरण कीजिए कि यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ या $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, हो तो समीकरणों के निकाय का हल अद्वितीय होता है) यह संख्या $a_1 b_2 - a_2 b_1$ जो समीकरणों के निकाय के अद्वितीय हल ज्ञात करती है, वह आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ से संबंधित है और इसे A का **सारणिक या det A** कहते हैं। सारणिकों का इंजीनियरिंग, विज्ञान, अर्थशास्त्र, सामाजिक विज्ञान इत्यादि में विस्तृत अनुप्रयोग हैं।

इस अध्याय में, हम केवल वास्तविक प्रविष्टियों के 3 कोटि तक के सारणिकों पर विचार करेंगे। इस अध्याय में सारणिकों के गुण धर्म, उपसारणिक, सह-खण्ड और त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सारणिकों का अनुप्रयोग, एक वर्ग आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम, रैखिक समीकरण के निकायों

की संगतता और असंगतता और एक आव्यूह के व्युत्क्रम का प्रयोग कर दो अथवा तीन चरांकों के रैखिक समीकरणों के हल का अध्ययन करेंगे।

4.2 सारणिक (Determinant)

हम n कोटि के प्रत्येक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ को एक संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) द्वारा संबंधित करा सकते हैं जिसे वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते हैं। इसे एक फलन की तरह सोचा जा सकता है जो प्रत्येक आव्यूह को एक अद्वितीय संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) से संबंधित करता है।

यदि M वर्ग आव्यूहों का समुच्चय है, k सभी संख्याओं (वास्तविक या सम्मिश्र) का समुच्चय है और $f : M \to K$, $f(A) = k$, के द्वारा परिभाषित है जहाँ $A \in M$ और $k \in K$ तब $f(A)$, A का सारणिक कहलाता है। इसे $|A|$ या det (A) या Δ के द्वारा भी निरूपित किया जाता है।

यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, तो A के सारणिक को $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$ द्वारा लिखा जाता है।

टिप्पणी

(i) आव्यूह A के लिए, $|A|$ को A का सारणिक पढ़ते हैं।

(ii) केवल वर्ग आव्यूहों के सारणिक होते हैं।

4.2.1 *एक कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinant of a matrix of order one)*

माना एक कोटि का आव्यूह $A = [a]$ हो तो A के सारणिक को a के बराबर परिभाषित किया जाता है।

4.2.2 *द्वितीय कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinant of a matrix of order two)*

माना 2×2 कोटि का आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ है।

तो A के सारणिक को इस प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है:

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

उदाहरण 1 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8$

उदाहरण 2 $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x\,(x) - (x+1)\,(x-1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$

4.2.3 3 × 3 कोटि के आव्यूह का सारणिक (*Determinant of a matrix of order 3 × 3*)

तृतीय कोटि के आव्यूह के सारणिक को द्वितीय कोटि के सारणिकों में व्यक्त करके ज्ञात किया जाता है। यह एक सारणिक का एक पंक्ति (या एक स्तंभ) के अनुदिश प्रसरण कहलाता है। तृतीय कोटि के सारणिक को छः प्रकार से प्रसारित किया जाता है तीनों पंक्तियों (R_1, R_2 तथा R_3) में से प्रत्येक के संगत और तीनों स्तंभ (C_1, C_2 तथा C_3) में से प्रत्येक के संगत दर्शाए गए प्रसरण समान परिणाम देते हैं जैसा कि निम्नलिखित स्थितियों में स्पष्ट किया गया है।

वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, के सारणिक पर विचार करते हैं।

जहाँ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति (R_1) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 1 R_1 के पहले अवयव a_{11} को $(-1)^{(1+1)}$ $[(-1)^{a_{11}\text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक $|A|$ की पहली पंक्ति (R_1) तथा पहला स्तंभ (C_1) के अवयवों को हटाने से प्राप्त द्वितीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए क्योंकि a_{11}, R_1 और C_1 में स्थित है

अर्थात् $$(-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 2 क्योंकि a_{12}, R_1 तथा C_2 में स्थित है इसलिए R_1 के दूसरे अवयव a_{12} को $(-1)^{1+2}$ $[(-1)^{a_{12}\text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक $|A|$ की पहली पंक्ति (R_1) व दूसरे स्तंभ (C_2) को हटाने से प्राप्त द्वितीय क्रम के सारणिक से गुणा कीजिए

अर्थात् $$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 3 क्योंकि a_{13}, R_1 तथा C_3 में स्थित है इसलिए R_1 के तीसरे अवयव को $(-1)^{1+3}$ $[(-1)^{a_{13}\text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक $|A|$ की पहली पंक्ति (R_1) व तीसरे स्तंभ (C_3) को हटाने से प्राप्त तृतीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए

अर्थात् $$(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

चरण 4 अब A का सारणिक अर्थात् | A | के व्यंजक को उपरोक्त चरण 1, 2 व 3 से प्राप्त तीनों पदों का योग करके लिखिए अर्थात्

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

या
$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\ (a_{22}\ a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\ (a_{21}\ a_{33} - a_{31}\,a_{23}) \\ &\quad + a_{13}\ (a_{21}\ a_{32} - a_{31}\ a_{22}) \\ &= a_{11}\ a_{22}\ a_{33} - a_{11}\ a_{32}\,a_{23} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33} + a_{12}\ a_{31}\,a_{23} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} \\ &\quad - a_{13}\ a_{31}\ a_{22} \qquad \ldots (1) \end{aligned}$$

टिप्पणी हम चारों चरणों का एक साथ प्रयोग करेंगे।

द्वितीय पंक्ति (R_2) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 के अनुदिश प्रसरण करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\ a_{21}\ (a_{12}\ a_{33} - a_{32}\,a_{13}) + a_{22}\ (a_{11}\ a_{33} - a_{31}\,a_{13}) \\ &\quad - a_{23}\ (a_{11}\ a_{32} - a_{31}\ a_{12}) \\ |A| &= -\ a_{21}\ a_{12}\ a_{33} + a_{21}\ a_{32}\,a_{13} + a_{22}\ a_{11}\ a_{33} - a_{22}\ a_{31}\,a_{13} - a_{23}\ a_{11}\ a_{32} \\ &\quad + a_{23}\ a_{31}\ a_{12} \\ &= a_{11}\ a_{22}\ a_{33} - a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} \\ &\quad - a_{13}\ a_{31}\ a_{22} \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

पहले स्तंभ (C_1) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1, के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है

$$|A| = a_{11}\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\, a_{31}\,(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{13}\,a_{22}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \qquad \text{... (3)}$$

(1), (2) और (3) से स्पष्ट है कि $|A|$ का मान समान है। यह पाठकों के अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है कि वे यह सत्यापित करें कि $|A|$ का R_3, C_2 और C_3 के अनुदिश प्रसरण (1), (2) और (3) से प्राप्त परिणामों के समान है।

अत: एक सारणिक को किसी भी पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करने पर समान मान प्राप्त होता है।

टिप्पणी

(i) गणना को सरल करने के लिए हम सारणिक का उस पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करेंगे जिसमें शून्यों की संख्या अधिकतम होती है।

(ii) सारणिकों का प्रसरण करते समय $(-1)^{i+j}$ से गुणा करने के स्थान पर, हम $(i+j)$ के सम या विषम होने के अनुसार +1 या –1 से गुणा कर सकते हैं।

(iii) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ तो यह सिद्ध करना सरल है कि $A = 2B$. किंतु $|A| = 0 - 8 = -8$ और $|B| = 0 - 2 = -2$ है।

अवलोकन कीजिए कि $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ या $|A| = 2^n|B|$, जहाँ $n = 2$, वर्ग आव्यूहों A व B की कोटि है।

व्यापक रूप में, यदि $A = kB$, जहाँ A व B वर्ग आव्यूहों की कोटि n है, तब $|A| = k^n|B|$, जहाँ $n = 1, 2, 3$ है।

उदाहरण 3 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि तीसरे स्तंभ में दो प्रविष्टियाँ शून्य हैं। इसलिए तीसरे स्तंभ (C_3) के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-12) - 0 + 0 = -52$$

उदाहरण 4 $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

उदाहरण 5 यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x के मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

अर्थात् $$3 - x^2 = 3 - 8$$

अर्थात् $$x^2 = 8$$

अतः $$x = \pm 2\sqrt{2}$$

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1 से 2 तक में सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए $|3A| = 27|A|$

5. निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, हो तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

7. x के मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

8. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है:

(A) 6 (B) ± 6 (C) – 6 (D) 0

4.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

हमने पिछली कक्षाओं में सीखा है कि एक त्रिभुज जिसके शीर्षबिंदु (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3), हों तो उसका क्षेत्रफल व्यंजक $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अब इस व्यंजक को सारणिक के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots (1)$$

टिप्पणी

(i) क्योंकि क्षेत्रफल एक धनात्मक राशि होती है इसलिए हम सदैव (1) में सारणिक का निरपेक्ष मान लेते हैं।

(ii) यदि क्षेत्रफल दिया हो तो गणना के लिए सारणिक का धनात्मक और ऋणात्मक दोनों मानों का प्रयोग कीजिए।

(iii) तीन संरेख बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

उदाहरण 6 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (3, 8), (– 4, 2) और (5, 1) हैं।

हल त्रिभुज का क्षेत्रफल:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 72 - 14) = \frac{61}{2}$$

उदाहरण 7 सारणिकों का प्रयोग करके A(1, 3) और B (0, 0) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और k का मान ज्ञात कीजिए यदि एक बिंदु D(k, 0) इस प्रकार है कि Δ ABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

हल मान लीजिए AB पर कोई बिंदु P (x, y) है तब Δ ABP का क्षेत्रफल = 0 (क्यों?)

इसलिए
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

इससे प्राप्त है
$$\frac{1}{2}(y-3x) = 0 \text{ या } y = 3x$$

जो अभीष्ट रेखा AB का समीकरण है।

किंतु Δ ABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई दिया है अत:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ हमें प्राप्त है } \frac{-3k}{2} = \pm 3, \text{ i.e., } k = \quad 2$$

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक में दिए गए शीर्ष बिंदुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2. दर्शाइए कि बिंदु A $(a, b + c)$, B $(b, c + a)$ और C $(c, a + b)$ संरेख हैं।

3. प्रत्येक में k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुजों का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ शीर्षबिंदु निम्नलिखित हैं:

(i) $(k, 0)$, (4, 0), (0, 2) (ii) (–2, 0), (0, 4), $(0, k)$

4. (i) सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) सारणिकों का प्रयोग करके (3, 1) और (9, 3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. यदि शीर्ष (2, –6), (5, 4) और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान है:

(A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.4 उपसारणिक और सहखंड (Minor and Co-factor)

इस अनुच्छेद में हम उपसारणिकों और सहखंडों का प्रयोग करके सारणिको के प्रसरण का विस्तृत रूप लिखना सीखेंगे।

परिभाषा 1 सारणिक के अवयव a_{ij} का उपसारणिक एक सारणिक है जो i वी पंक्ति और j वाँ स्तंभ जिसमें अवयव a_{ij} स्थित है, को हटाने से प्राप्त होता है। अवयव a_{ij} के उपसारणिक को M_{ij} के द्वारा व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी $n(n \geq 2)$ क्रम के सारणिक के अवयव का उपसारणिक $n-1$ क्रम का सारणिक होता है।

उदाहरण 8 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि 6 दूसरी पंक्ति एवं तृतीय स्तंभ में स्थित है। इसलिए इसका उपसारणिक $= M_{23}$ निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होता है।

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \text{ (}\Delta \text{ से } R_2 \text{ और } C_3 \text{ हटाने पर)}$$

परिभाषा 2 एक अवयव a_{ij} का सहखंड जिसे A_{ij} द्वारा व्यक्त करते हैं, जहाँ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

के द्वारा परिभाषित करते हैं जहाँ a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

उदाहरण 9 सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंड ज्ञात कीजिए।

हल अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

यहाँ $a_{11} = 1$, इसलिए $M_{11} = a_{11}$ का उपसारणिक $= 3$

$M_{12} =$ अवयव a_{12} का उपसारणिक $= 4$

$M_{21} =$ अवयव a_{21} का उपसारणिक $= -2$

$M_{22} =$ अवयव a_{22} का उपसारणिक $= 1$

अब a_{ij} का सहखंड A_{ij} है। इसलिए

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$$

उदाहरण 10 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के अवयवों a_{11} तथा a_{21} के उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए।

हल उपसारणिक और सहखंड की परिभाषा द्वारा हम पाते हैं:

$$a_{11} \text{ का उपसारणिक } = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$$

$$a_{11} \text{ का सहखंड } = A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$$

$$a_{21} \text{ का उपसारणिक } = M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}$$

$$a_{21} \text{ का सहखंड } = A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)\ (a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}) = -\, a_{12}\, a_{33} + a_{13}\, a_{32}$$

टिप्पणी उदाहरण 21 में सारणिक **Δ** का R_1 के सापेक्ष प्रसरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13}$, जहाँ a_{ij} का सहखंड A_{ij} हैं।

$= R_1$ के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग।

इसी प्रकार Δ का R_2, R_3, C_1, C_2 और C_3 के अनुदिश 5 प्रसरण अन्य प्रकार से हैं।

अत: सारणिक Δ, किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग है।

टिप्पणी यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों से गुणा किया जाए तो उनका योग शून्य होता है। उदाहरणतया, माना $\Delta = a_{11}\, A_{21} + a_{12}\, A_{22} + a_{13}\, A_{23}$ तब:

$$\Delta = a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \ (\text{ क्योंकि } R_1 \text{ और } R_2 \text{ समान हैं})$$

इसी प्रकार हम अन्य पंक्तियों और स्तंभों के लिए प्रयत्न कर सकते हैं।

उदाहरण 11 सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए और सत्यापित कीजिए कि $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$ है।

हल यहाँ $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$; इसलिए $A_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46$; इसलिए $A_{12} = (-1)^{1+2}(-46) = 46$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30$; इसलिए $A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$

$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4$; इसलिए $A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19$; इसलिए $A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$; इसलिए $A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12$; इसलिए $A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22$; इसलिए $A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$

और $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18$; इसलिए $A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$

अब $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 5$; तथा $A_{31} = -12, A_{32} = 22, A_{33} = 18$ है।

इसलिए $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

प्रश्नावली 4.3

निम्नलिखित सारणिकों के अवयवों के उपसारणिक एवं सहखंड लिखिए।

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखंड A_{ij} हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है:

(A) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

4.5 आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम (Adjoint and Inverse of a Matrix)

पिछले अध्याय में हमने एक आव्यूह के व्युत्क्रम का अध्ययन किया है। इस अनुच्छेद में हम एक आव्यूह के व्युत्क्रम के अस्तित्व के लिए शर्तों की भी व्याख्या करेंगे।

A^{-1} ज्ञात करने के लिए पहले हम एक आव्यूह का सहखंडज परिभाषित करेंगे।

4.5.1 *आव्यूह का सहखंडज (Adjoint of a matrix)*

परिभाषा 3 एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ का सहखंडज, आव्यूह $[A_{ij}]$ के परिवर्त के रूप में परिभाषित है, जहाँ A_{ij}, अवयव a_{ij} का सहखंड है। आव्यूह A के सहखंडज को *adj* A के द्वारा व्यक्त करते हैं।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ है।

तब $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ का परिवर्त $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ होता है।

उदाहरण 12 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $A_{11} = 4, A_{12} = –1, A_{21} = –3, A_{22} = 2$

अत: $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी 2×2 कोटि के वर्ग आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ का सहखंडज $adj\ A$, a_{11} और a_{22} को परस्पर बदलने एवं a_{12} और a_{21} के चिह्न परिवर्तित कर देने से भी प्राप्त किया जा सकता है जैसा नीचे दर्शाया गया है।

$$adj\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

चिह्न बदलिए परस्पर बदलिए

हम बिना उपपत्ति के निम्नलिखित प्रमेय निर्दिष्ट करते हैं।

प्रमेय 1 यदि A कोई n कोटि का आव्यूह है तो, $A(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\, I$, जहाँ I, n कोटि का तत्समक आव्यूह है।

सत्यापनः मान लीजिए

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ है तब } adj\, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

क्योंकि एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों का संगत सहखंडों की गुणा का योग $|A|$ के समान होता है अन्यथा शून्य होता है।

इस प्रकार
$$A\,(adj\, A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I$$

इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $(adj\, A)\, A = |A|\, I$

अतः $A\,(adj\, A) = (adj\, A)\, A = |A|\, I$ सत्यापित है।

परिभाषा 4 एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय (singular) कहलाता है यदि $|A| = 0$ है।

उदाहरण के लिए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ का सारणिक शून्य है। अतः A अव्युत्क्रमणीय है।

परिभाषा 5 एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय (non-singular) कहलाता है यदि $|A| \neq 0$

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ है।

अतः A व्युत्क्रमणीय है।

हम निम्नलिखित प्रमेय बिना उपपत्ति के निर्दिष्ट कर रहे हैं।

प्रमेय 2 यदि A तथा B दोनों एक ही कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो AB तथा BA भी उसी कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह होते हैं।

प्रमेय 3 आव्यूहों के गुणनफल का सारणिक उनके क्रमशः सारणिकों के गुणनफल के समान होता है अर्थात् $|AB| = |A|\,|B|$, जहाँ A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं।

टिप्पणी हम जानते हैं कि $(adj\, A)\, A = |A|\, I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

दोनों ओर आव्यूहों का सारणिक लेने पर,

$$|(adj\,A)\,A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

अर्थात् $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (क्यों?)

अर्थात् $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \quad (1)$$

अर्थात् $$|(adj\ A)| = |A|^2$$

व्यापक रुप से, यदि n कोटि का एक वर्ग आव्यूह A हो तो $|adj\,A| = |A|^{n-1}$ होगा।

प्रमेय 4 एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रम का अस्तित्व है, यदि और केवल यदि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

उपपत्ति मान लीजिए n कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह A है और n कोटि का तत्समक आव्यूह I है। तब n कोटि के एक वर्ग आव्यूह B का अस्तित्व इस प्रकार हो ताकि AB = BA = I

अब AB = I है तो $|AB| = |I|$ या $|A|\,|B| = 1$ (क्योंकि $|I| = 1, |AB| = |A|\,|B|$)

इससे प्राप्त होता है $|A| \neq 0$. अतः A व्युत्क्रमणीय है।

विलोमतः मान लीजिए A व्युत्क्रमणीय है। तब $|A| \neq 0$

अब $$A\,(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\,I$$ (प्रमेय 1)

या $$A\left(\frac{1}{|A|}adj\,A\right) = \left(\frac{1}{|A|}adj\,A\right)A = I$$

या $$AB = BA = I, \text{ जहाँ } B = \frac{1}{|A|}adj\,A$$

अतः A के व्युत्क्रम का अस्तित्व है और $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\,A$

उदाहरण 13 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A.\,adj\,A = |A|\,.\,I$ और A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $|A| = 1\,(16-9) - 3\,(4-3) + 3\,(3-4) = 1 \neq 0$

अब $A_{11} = 7,\ A_{12} = -1, A_{13} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 1, A_{23} = 0, A_{31} = -3, A_{32} = 0, A_{33} = 1$

इसलिए $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $$A.(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\,.\,I$$

और $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\,A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 14 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

हल हम जानते हैं कि $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$

क्योंकि $|AB| = -11 \neq 0$, $(AB)^{-1}$ का अस्तित्व है और इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}.adj(AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

और $|A| = -11 \neq 0$ व $|B| = 1 \neq 0$. इसलिए A^{-1} और B^{-1} दोनों का अस्तित्व है और जिसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

इसलिए $$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

उदाहरण 15 प्रदर्शित कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ समीकरण $A^2 - 4A + I = O$, जहाँ I 2×2 कोटि का एक तत्समक आव्यूह है और O, 2×2 कोटि का एक शून्य आव्यूह है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

अतः $$A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

अब $A^2 - 4A + I = O$

इसलिए $AA - 4A = -I$

या $A\ A(A^{-1}) - 4\ AA^{-1} = -IA^{-1}$ (दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन द्वारा क्योंकि $|A| \neq 0$)

या $A(AA^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

या $AI - 4I = -A^{-1}$

या $$A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

अतः $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्नावली 4.4

प्रश्न 1 और 2 में प्रत्येक आव्यूह का सहखंडज (adjoint) ज्ञात कीजिए

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3 और 4 में सत्यापित कीजिए कि $A(adj\ A) = (adj\ A).A = |A|.I$ है।

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5 से 11 में दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ है।

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

14. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि

$A^2 + aA + bI = O$ हो।

15. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ है।

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ है तथा

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

17. यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|adj\, A|$ का मान है:

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमीय आव्यूह है तो $\det (A^{-1})$ बराबर:

(A) $\det (A)$ (B) $\dfrac{1}{\det (A)}$ (C) 1 (D) 0

4.6 सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोग (Applications of Determinants and Matrices)

इस अनुच्छेद में हम दो या तीन अज्ञात राशियों के रैखिक समीकरण निकाय के हल और रैखिक समीकरणों के निकाय की संगतता की जाँच में सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोगों का वर्णन करेंगे।

संगत निकाय: निकाय संगत कहलाता है यदि इसके हलों (एक या अधिक) का अस्तित्व होता है।

असंगत निकाय: निकाय असंगत कहलाता है यदि इसके किसी भी हल का अस्तित्व नहीं होता है।

टिप्पणी इस अध्याय में हम अद्वितीय हल के समीकरण निकाय तक सीमित रहेंगे।

4.6.1 *आव्यूह के व्युत्क्रम द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय का हल (Solution of a system of linear equations using inverse of a matrix)*

आइए हम रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह समीकरण के रूप में व्यक्त करते हैं और आव्यूह के व्युत्क्रम का प्रयोग करके उसे हल करते हैं।

निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

तब समीकरण निकाय $AX = B$ के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त की जा सकती है।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

स्थिति 1 यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है। अतः $AX = B$ से हम पाते हैं कि

$$A^{-1} (AX) = A^{-1} B \qquad \text{(}A^{-1}\text{ से पूर्व गुणन के द्वारा)}$$

या $$(A^{-1}A) X = A^{-1} B \qquad \text{(साहचर्य गुणन द्वारा)}$$

या $$I X = A^{-1} B$$

या $$X = A^{-1} B$$

यह आव्यूह समीकरण दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल प्रदान करता है क्योंकि एक आव्यूह का व्युत्क्रम अद्वितीय होता है। समीकरणों के निकाय के हल करने की यह विधि आव्यूह विधि कहलाती है।

स्थिति 2 यदि A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $|A| = 0$ होता है।

इस स्थिति में हम $(adj\, A)\, B$ ज्ञात करते हैं।

यदि $(adj\, A)\, B \neq O$, (O शून्य आव्यूह है), तब कोई हल नहीं होता है और समीकरण निकाय असंगत कहलाती है।

यदि $(adj\, A)\, B = O$, तब निकाय संगत या असंगत होगी क्योंकि निकाय के अनंत हल होंगे या कोई भी हल नहीं होगा।

उदाहरण 16 निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

हल समीकरण निकाय AX = B के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}$$

अब, $|A| = -11 \neq 0$, अतः A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है इसलिए इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है। और इसका एक अद्वितीय हल है।

ध्यान दीजिए कि $$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}2 & -5\\-3 & 2\end{bmatrix}$$

इसलिए $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}2 & -5\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}$$

अर्थात् $$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-33\\11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

अतः $$x = 3, y = -1$$

उदाहरण 17 निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

हल समीकरण निकाय को AX = B के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\2 & 1 & -1\\4 & -3 & 2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \text{ और } B=\begin{bmatrix}8\\1\\4\end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि

$$|A| = 3(2-3) + 2(4+4) + 3(-6-4) = -17 \neq 0 \text{ है।}$$

अतः A व्युत्क्रमणीय है, और इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है।

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$$
$$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$$
$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$$

इसलिए $$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

और $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अतः $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 1, y = 2$ व $z = 3$

उदाहरण 18 तीन संख्याओं का योग 6 है। यदि हम तीसरी संख्या को 3 से गुणा करके दूसरी संख्या में जोड़ दें तो हमें 11 प्राप्त होता है। पहली ओर तीसरी को जोड़ने से हमें दूसरी संख्या का दुगुना प्राप्त होता है। इसका बीजगणितीय निरूपण कीजिए और आव्यूह विधि से संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए पहली, दूसरी व तीसरी संख्या क्रमशः x, y और z, द्वारा निरूपित है। तब दी गई शर्तों के अनुसार हमें प्राप्त होता है:

$$x + y + z = 6$$
$$y + 3z = 11$$
$$x + z = 2y$$

या $$x - 2y + z = 0$$

इस निकाय को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

यहाँ $|A| = 1(1+6) + 0 + 1(3-1) = 9 \neq 0$ है। अब हम adj A ज्ञात करते हैं।

$$A_{11} = 1\ (1 + 6) = 7, \quad A_{12} = -\ (0 - 3) = 3, \quad A_{13} = -1$$
$$A_{21} = -\ (1 + 2) = -3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -\ (-2 - 1) = 3$$
$$A_{31} = (3 - 1) = 2, \quad A_{32} = -\ (3 - 0) = -3, \quad A_{33} = (1 - 0) = 1$$

अतः $adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

इस प्रकार $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj.\ (A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

क्योंकि $$X = A^{-1} B$$

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+\ 0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 1, y = 2, z = 3$

प्रश्नावली 4.5

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 6 तक दी गई समीकरण निकायों का संगत अथवा असंगत के रूप में वर्गीकरण कीजिए

1. $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$
$x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 14 तक प्रत्येक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

7. $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$

11. $2x + y + z = 1$

12. $x - y + z = 4$

$3x + 2y = 5$ $\qquad x - 2y - z = \dfrac{3}{2}$ $\qquad 2x + y - 3z = 0$

$3y - 5z = 9$ $\qquad x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$ $\qquad$ **14.** $x - y + 2z = 7$

$x - 2y + z = -4$ $\qquad 3x + 4y - 5z = -5$

$3x - y - 2z = 3$ $\qquad 2x - y + 3z = 12$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$2x - 3y + 5z = 11$

$3x + 2y - 4z = -5$

$x + y - 2z = -3$

16. 4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य Rs 60 है। 2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य Rs 90 है। 6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य Rs 70 है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण 19 आव्यूहों के गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिएः

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2y - 3z &= 1 \\ 3x - 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

हल दिया गया गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-\ 9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

अब दिए गए समीकरण निकाय को आव्यूह के रूप निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

या
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 0, y = 5$ और $z = 3$

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ से स्वतंत्र है।

2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

5. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

निम्नलिखित प्रश्नों 8 से 9 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

8. यदि x, y, z शून्येतर वास्तविक संख्याएँ हों तो आव्यूह $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है:

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$ हो तो:

(A) $\det(A) = 0$ (B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$ (D) $\det(A) \in [2, 4]$.

सारांश

- आव्यूह $A = [a_{11}]_{1\times1}$ का सारणिक $|a_{11}|_{1\times1} = a_{11}$ के द्वारा दिया जाता है।
- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$ के द्वारा दिया जाता है।

- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ के सारणिक का मान (R_1 के अनुदिश प्रसरण से) निम्नलिखित रूप द्वारा दिया जाता है।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) शीर्षों वाली त्रिभुज का क्षेत्रफल निम्नलिखित रूप द्वारा दिया जाता है:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- दिए गए आव्यूह A के सारणिक के एक अवयव a_{ij} का उपसारणिक, i वीं पंक्ति और j वां स्तंभ हटाने से प्राप्त सारणिक होता है और इसे M_{ij} द्वारा व्यक्त किया जाता है।
- a_{ij} का सहखंड $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ द्वारा दिया जाता है।
- A के सारणिक का मान $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ है और इसे एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग करके प्राप्त किया जाता है।
- यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और अन्य दूसरी पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों की गुणा कर दी जाए तो उनका योग शून्य होता है उदाहरणतया

  $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$
- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, तो सहखंडज $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ होता है, जहाँ a_{ij} का सहखंड A_{ij} है।
- $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$, जहाँ A, n कोटि का वर्ग आव्यूह है।
- यदि कोई वर्ग आव्यूह क्रमशः अव्युत्क्रमणीय या व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि $|A| = 0$ या $|A| \neq 0$
- यदि $AB = BA = I$, जहाँ B एक वर्ग आव्यूह है तब A का व्युत्क्रम B होता है और $A^{-1} = B$ या $B^{-1} = A$ और इसलिए $(A^{-1})^{-1} = A$
- किसी वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम है यदि और केवल यदि A व्युत्क्रमणीय है।
- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\ A)$
- यदि
  $$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
  $$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
  $$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

  तब इन समीकरणों को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है।

  जहाँ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

- समीकरण $AX = B$ का अद्वितीय हल $X = A^{-1} B$ द्वारा दिया जाता है जहाँ $|A| \neq 0$
- समीकरणों का एक निकाय संगत या असंगत होता है यदि इसके हल का अस्तित्व है अथवा नहीं है।
- आव्यूह समीकरण $AX = B$ में एक वर्ग आव्यूह A के लिए

  (i) यदि $|A| \neq 0$, तो अद्वितीय हल का अस्तित्व है।

  (ii) यदि $|A| = 0$ और $(adj\, A)\, B \neq O$, तो किसी हल का अस्तित्व नहीं है।

  (iii) यदि $|A| = 0$ और $(adj\, A)\, B = O$, तो निकाय संगत या असंगत होती है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणना बोर्ड पर छड़ों का प्रयोग करके कुछ रैखिक समीकरणों की अज्ञात राशियों के गुणांकों को निरूपित करने की चीनी विधि ने वास्तव में विलोपन की साधारण विधि की खोज करने में सहायता की है। छड़ों की व्यवस्था क्रम एक सारणिक में संख्याओं की उचित व्यवस्था क्रम जैसी थी। इसलिए एक सारणिक की सरलीकरण में स्तंभों या पंक्तियों के घटाने का विचार उत्पन्न करने में चीनी प्रथम विचारकों में थे (‘Mikami, China, pp 30, 93).

सत्रहवीं शताब्दी के महान जापानी गणितज्ञ Seki Kowa द्वारा 1683 में लिखित पुस्तक 'Kai Fukudai no Ho' से ज्ञात होता है कि उन्हें सारणिकों और उनके प्रसार का ज्ञान था। परंतु उन्होंने इस विधि का प्रयोग केवल दो समीकरणों से एक राशि के विलोपन में किया परंतु युगपत रैखिक समीकरणों के हल ज्ञात करने में इसका सीधा प्रयोग नहीं किया था। ‘T. Hayashi, “The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics,” in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vendermonde पहले व्यक्ति थे जिन्होनें सारणिकों को स्वतंत्र फलन की तरह से पहचाना इन्हें विधिवत इसका अन्वेषक (संस्थापक) कहा जा सकता है। Laplace (1772) ने सारणिकों को इसके पूरक उपसारणिकों के रूप में व्यक्त करके प्रसरण की व्यापक विधि दी। 1773 में Lagrange ने दूसरे व तीसरे क्रम के सारणिकों को व्यवहृत किया और सारणिकों के हल के अतिरिक्त उनका अन्यत्र भी प्रयोग किया। 1801 में Gauss ने संख्या के सिद्धांतों में सारणिकों का प्रयोग किया।

अगले महान योगदान देने वाले Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812) थे जिन्होंने m-स्तंभों और n-पंक्तियों के दो आव्यूहों के गुणनफल से संबंधित प्रमेय का उल्लेख किया जो विशेष स्थिति $m = n$ में गुणनफल प्रमेय में बदल जाती है।

उसी दिन Cauchy (1812) ने भी उसी विषय-वस्तु पर शोध प्रस्तुत किए। उन्होंने आज के व्यावहारिक सारणिक शब्द का प्रयोग किया। उन्होंने Binet से अधिक संतुष्ट करने वाली गुणनफल प्रमेय की उपपत्ति दी।

इन सिद्धांतों पर महानतम योगदान वाले Carl Gustav Jacob Jacobi थे। इसके पश्चात सारणिक शब्द को अंतिम स्वीकृति प्राप्त हुई।

अध्याय **5**

12081CH05

सांतत्य तथा अवकलनीयता (Continuity and Differentiability)

❖ *The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking." — ALBERT EINSTEIN* ❖

5.1 भूमिका (Introduction)

यह अध्याय अनिवार्यतः कक्षा 11 में पढ़े गए फलनों के अवकलन (differentiation) का क्रमागत है। हम कुछ निश्चित बहुपदीय फलनों एवं त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलन करना सीख चुके हैं। इस अध्याय में हम सांतत्य (continuity), अवकलनीयता (differentiability) तथा इनके पारस्परिक संबंधों की महत्वपूर्ण संकल्पनाओं को प्रस्तुत करेंगे। यहाँ हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय (inverse trigonometric) फलनों का अवकलन करना भी सीखेंगे। अब हम कुछ नए प्रकार के फलनों को प्रस्तुत कर रहे हैं, जिनको चरघातांकी (exponential) और लघुगणकीय (logarithmic) फलन कहते हैं। इन फलनों द्वारा हमें अवकलन की सशक्त प्रविधियों का ज्ञान होता है। अवकल गणित (differential calculus) के माध्यम से हम ज्यामितीय रूप से सुस्पष्ट (obvious) कुछ स्थितियों को समझाते हैं। इस प्रक्रिया, में हम इस विषय की कुछ आधारभूत (मूल) प्रमेयों (theorems) को सीखेंगे।

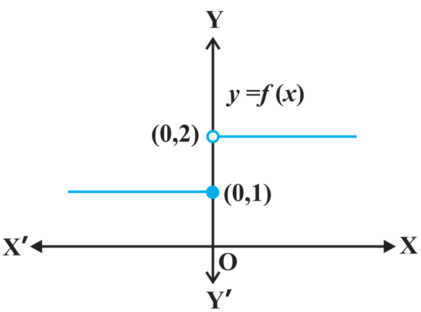
Sir Issac Newton (1642-1727)

5.2 सांतत्य (Continuity)

सांतत्य की संकल्पना का कुछ अनुमान (बोध) कराने के लिए, हम अनुच्छेद को दो अनौपचारिक उदाहरणों से प्रारंभ करते हैं। निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \le 0 \\ 2, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

यह फलन वास्तव में वास्तविक रेखा (real line) के प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है। इस फलन का आलेख आकृति 5.1 में दर्शाया गया है। कोई भी इस आलेख से निष्कर्ष निकाल सकता है कि $x = 0$ के अतिरिक्त, x–अक्ष



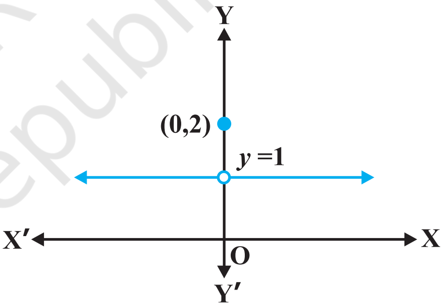
आकृति 5.1

के अन्य सन्निकट बिंदुओं के लिए फलन के संगत मान भी $x = 0$ को छोड़कर एक दूसरे के समीप (लगभग समान) हैं। 0 के सन्निकट बायीं ओर के बिंदुओं, अर्थात् $-0.1, -0.01, -0.001$, प्रकार के बिंदुओं, पर फलन का मान 1 है तथा 0 के सन्निकट दायीं ओर के बिंदुओं, अर्थात् 0.1, 0.01, 0.001, प्रकार के बिंदुओं पर फलन का मान 2 है। बाएँ और दाएँ पक्ष की सीमाओं (limits) की भाषा का प्रयोग करके, हम कह सकते हैं कि $x = 0$ पर फलन f के बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ क्रमशः 1 तथा 2 हैं। विशेष रूप से बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ समान / संपाती (coincident) नहीं हैं। हम यह भी देखते हैं कि $x = 0$ पर फलन का मान बाएँ पक्ष की सीमा के संपाती है (बराबर है)। नोट कीजिए कि इस आलेख को हम लगातार एक साथ (in one stroke), अर्थात् कलम को इस कागज़ की सतह से बिना उठाए, नहीं खींच सकते। वास्तव में, हमें कलम को उठाने की आवश्यकता तब होती है जब हम शून्य से बायीं ओर आते हैं। यह एक उदाहरण है जहाँ फलन $x = 0$ पर संतत (continuous) नहीं है।

अब नीचे दर्शाए गए फलन पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 2, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

यह फलन भी प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है। $x = 0$ पर दोनों ही, बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ 1 के बराबर हैं। किंतु $x = 0$ पर फलन का मान 2 है, जो बाएँ और दाएँ पक्ष की सीमाओं के उभयनिष्ठ मान के बराबर नहीं है।



आकृति 5.2

पुनः हम नोट करते हैं कि फलन के आलेख को बिना कलम उठाए हम नहीं खींच सकते हैं। यह एक दूसरा उदाहरण है जिसमें $x = 0$ पर फलन संतत नहीं है।

सहज रूप से (naively) हम कह सकते हैं कि एक अचर बिंदु पर कोई फलन संतत है, यदि उस बिंदु के आस-पास (around) फलन के आलेख को हम कागज़ की सतह से कलम उठाए बिना खींच सकते हैं। इस बात को हम गणितीय भाषा में, यथातथ्य (precisely), निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं:

परिभाषा 1 मान लीजिए कि f वास्तविक संख्याओं के किसी उपसमुच्चय में परिभाषित एक वास्तविक फलन है और मान लीजिए कि f के प्रांत में c एक बिंदु है। तब f बिंदु c पर संतत है, यदि

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \text{ है।}$$

विस्तृत रूप से यदि $x = c$ पर बाएँ पक्ष की सीमा, दाएँ पक्ष की सीमा तथा फलन के मान का यदि अस्तित्व (existence) है और ये सभी एक दूसरे के बराबर हों, तो $x = c$ पर f संतत कहलाता है। स्मरण कीजिए कि यदि $x = c$ पर बाएँ पक्ष तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हैं, तो इनके उभयनिष्ठ

मान को हम $x = c$ पर फलन की सीमा कहते हैं। इस प्रकार हम सांतत्य की परिभाषा को एक अन्य प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं, जैसा कि नीचे दिया गया है।

एक फलन $x = c$ पर संतत है, यदि फलन $x = c$ पर परिभाषित है और यदि $x = c$ पर फलन का मान $x = c$ पर फलन की सीमा के बराबर है। यदि $x = c$ पर फलन संतत नहीं है तो हम कहते हैं कि c पर f असंतत (discontinuous) है तथा c को f का एक *असांतत्य का बिंदु* (point of discontinuity) कहते हैं।

उदाहरण 1 $x = 1$ पर फलन $f(x) = 2x + 3$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

हल पहले यह ध्यान दीजिए कि फलन, $x = 1$ पर परिभाषित है और इसका मान 5 है। अब फलन की $x = 1$ पर सीमा ज्ञात करते हैं। स्पष्ट है कि

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5 \text{ है।}$$

अतः $$\lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

अतएव $x = 1$ पर f संतत है।

उदाहरण 2 जाँचिए कि क्या फलन $f(x) = x^2$, $x = 0$ पर संतत है?

हल ध्यान दीजिए कि प्रदत्त बिंदु $x = 0$ पर फलन परिभाषित है और इसका मान 0 है। अब $x = 0$ पर फलन की सीमा निकालते हैं। स्पष्टतया

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

इस प्रकार $$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

अतः $x = 0$ पर f संतत है।

उदाहरण 3 $x = 0$ पर फलन $f(x) = |x|$ के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल परिभाषा द्वारा

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

स्पष्टतया $x = 0$ पर फलन परिभाषित है और $f(0) = 0$ है। बिंदु $x = 0$ पर f की बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार 0 पर f की दाएँ पक्ष की सीमा के लिए

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ है।}$$

इस प्रकार $x = 0$ पर बाएँ पक्ष की सीमा, दाएँ पक्ष की सीमा तथा फलन का मान संपाती हैं। अतः $x = 0$ पर f संतत है।

उदाहरण 4 दर्शाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत नहीं है।

हल यहाँ $x = 0$ पर फलन परिभाषित है और $x = 0$ पर इसका मान 1 है। जब $x \neq 0$, तब फलन बहुपदीय है। इसलिए

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$$

क्योंकि $x = 0$ पर f की सीमा, $f(0)$ के बराबर नहीं है, इसलिए $x = 0$ पर फलन संतत नहीं है। हम यह भी सुनिश्चित कर सकते हैं कि इस फलन के लिए असांतत्य का बिंदु केवल $x = 0$ है।

उदाहरण 5 उन बिंदुओं की जाँच कीजिए जिन पर अचर फलन (Constant function) $f(x) = k$ संतत है।

हल यह फलन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है और किसी भी वास्तविक संख्या के लिए इसका मान k है। मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या है, तो

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

चूँकि किसी वास्तविक संख्या c के लिए $f(c) = k = \lim_{x \to c} f(x)$ है इसलिए फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए संतत है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के लिए तत्समक फलन (Identity function) $f(x) = x$, प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए संतत है।

हल स्पष्टतया यह फलन प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है और प्रत्येक वास्तविक संख्या c के लिए $f(c) = c$ है।

साथ ही
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

इस प्रकार, $\lim_{x \to c} f(x) = c = f(c)$ और इसलिए यह फलन f के प्रांत के सभी बिंदुओं पर संतत है।

एक प्रदत्त बिंदु पर किसी फलन के सांतत्य को परिभाषित करने के बाद अब हम इस परिभाषा का स्वाभाविक प्रसार (extension) करके किसी फलन के, उसके प्रांत में, सांतत्य पर विचार करेंगे।

परिभाषा 2 एक वास्तविक फलन f संतत कहलाता है यदि वह f के प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत है।

इस परिभाषा को कुछ विस्तार से समझने की आवश्यकता है। मान लीजिए कि f एक ऐसा फलन है, जो संवृत अंतराल (closed interval) $[a, b]$ में परिभाषित है, तो f के संतत होने के लिए आवश्यक है कि वह $[a, b]$ के अंत्य बिंदुओं (end points) a तथा b सहित उसके प्रत्येक बिंदु पर संतत हो। f का अंत्य बिंदु a पर सांतत्य का अर्थ है कि

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

और f का b पर सांतत्य का अर्थ है कि

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

प्रेक्षण कीजिए कि $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ तथा $\lim\limits_{x \to b^+} f(x)$ का कोई अर्थ नहीं है। इस परिभाषा के परिणामस्वरूप, यदि f केवल एक बिंदु पर परिभाषित है, तो वह उस बिंदु पर संतत होता है, अर्थात् यदि f का प्रांत एकल (समुच्चय) है, तो f एक संतत फलन होता है।

उदाहरण 7 क्या $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है?

हल f को हम ऐसे लिख सकते हैं कि $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

उदाहरण 3 से हम जानते हैं कि $x = 0$ पर f संतत है।

मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि $c < 0$ है। अतएव $f(c) = -c$

साथ ही $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c \qquad \text{(क्यों?)}$$

चूँकि $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, इसलिए f सभी ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

अब मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि $c > 0$ है। अतएव $f(c) = c$

साथ ही $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c \qquad \text{(क्यों?)}$$

क्योंकि $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, इसलिए f सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है। चूँकि f सभी बिंदुओं पर संतत है, अतः यह एक संतत फलन है।

उदाहरण 8 फलन $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल स्पष्टतया f प्रत्येक वास्तविक संख्या c के लिए परिभाषित है और c पर इसका मान $c^3 + c^2 - 1$ है। हम यह भी जानते हैं कि

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}(x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

अतः $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ है इसलिए प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए f संतत है। इसका अर्थ है कि f एक संतत फलन है।

उदाहरण 9 $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ द्वारा परिभाषित फलन f के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल किसी एक शून्येतर (Non-zero) वास्तविक संख्या c को सुनिश्चित कीजिए

अब $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

साथ ही, चूँकि $c \neq 0$, इसलिए $f(c) = \dfrac{1}{c}$ है। इस प्रकार $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ और इसलिए f अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत है। इस प्रकार f एक संतत फलन है।

हम इस अवसर का लाभ, *अनंत* (infinity) की संकल्पना (concept) को समझाने के लिए, उठाते हैं। हम इसके लिए फलन $f(x) = \dfrac{1}{x}$ का विश्लेषण $x = 0$ के निकटस्थ मानों पर करते हैं। इसके लिए हम 0 के *सन्निकट* की वास्तविक संख्याओं के लिए फलन के मानों का अध्ययन करने की प्रचलित युक्ति का प्रयोग करते हैं। अनिवार्यतः (essentially) हम $x = 0$ पर f के दाएँ पक्ष की सीमा ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। इसको हम नीचे सारणीबद्ध करते हैं। (सारणी 5.1)

सारणी 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{-1}$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x दायीं ओर से 0 के निकट अग्रसर होता है $f(x)$ का मान उत्तरोत्तर अति शीघ्रता से बढ़ता जाता है। इस बात को एक अन्य प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है, जैसेः

एक धन वास्तविक संख्या को 0 के अत्यंत निकट चुनकर, $f(x)$ के मान को किसी भी प्रदत्त संख्या से अधिक किया जा सकता है। प्रतीकों में इस बात को हम निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं कि

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

(इसको इस प्रकार पढ़ा जाता है: 0 पर, $f(x)$ के दाएँ पक्ष की धनात्मक सीमा अनंत है)। यहाँ पर हम बल देना चाहते हैं कि $+\infty$ एक वास्तविक संख्या नहीं है और इसलिए 0 पर f के दाएँ पक्ष की सीमा का अस्तित्व नहीं है (वास्तविक संख्याओं के रूप में)।

इसी प्रकार से 0 पर f के बाएँ पक्ष की सीमा ज्ञात की जा सकती है। निम्नलिखित सारणी से स्वत: स्पष्ट है।

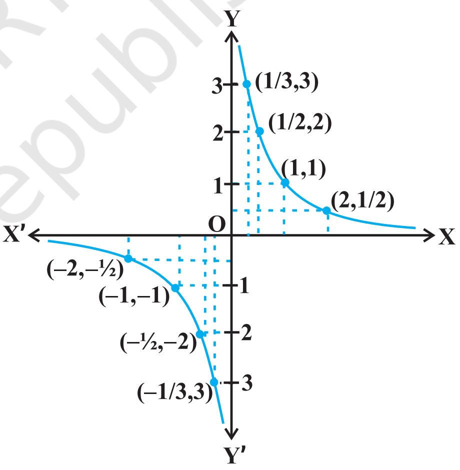
सारणी 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3.333...$	-5	-10	-10^2	-10^3	-10^n

सारणी 5.2 से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या को 0 के अत्यंत निकट चुनकर, $f(x)$ के मान को किसी भी प्रदत्त संख्या से कम किया जा सकता है। प्रतीकात्मक रूप से हम

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \text{ लिखते हैं}$$

(जिसे इस प्रकार पढ़ा जाता है: 0 पर $f(x)$ के बाएँ पक्ष की सीमा ऋणात्मक अनंत है।) यहाँ हम इस बात पर बल देना चाहते हैं कि $-\infty$ एक वास्तविक संख्या नहीं है अतएव 0 पर f के बाएँ पक्ष की सीमा का अस्तित्व नहीं है (वास्तविक संख्याओं के रूप में)। आकृति 5.3 का आलेख उपर्युक्त तथ्यों का ज्यामितीय निरूपण है।



आकृति 5.3

उदाहरण 10 निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ यदि } x \le 1 \\ x-2, \text{ यदि } x > 1 \end{cases}$$

हल फलन f वास्तविक रेखा के प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है।

दशा 1 यदि $c < 1$, तो $f(c) = c + 2$ है। इस प्रकार $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x + 2 = c + 2$ है।

अतः 1 से कम सभी वास्तविक संख्याओं पर f संतत है।

दशा 2 यदि $c > 1$, तो $f(c) = c - 2$ है।

इसलिए $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (x - 2) = c - 2 = f(c)$ है।

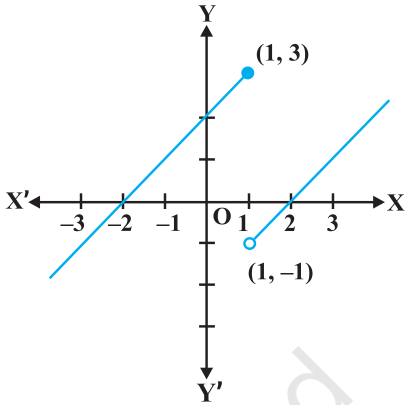
अतएव उन सभी बिंदुओं पर जहाँ $x > 1$ है, f संतत है।

दशा 3 यदि $c = 1$, तो $x = 1$ पर f के बाएँ पक्ष की सीमा, अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

$x = 1$ पर f के दाएँ पक्ष की सीमा, अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$



आकृति 5.4

अब चूँकि $x = 1$ पर f के बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती (coincident) नहीं हैं, अतः $x = 1$ पर f संतत नहीं है। इस प्रकार f के असांतत्य का बिंदु केवल मात्र $x = 1$ है। इस फलन का आलेख आकृति 5.4 में दर्शाया गया है।

उदाहरण 11 निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित फलन f के समस्त (सभी) असांतत्य बिंदुओं को ज्ञात कीजिए

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{यदि } x < 1 \\ 0, & \text{यदि } x = 1 \\ x - 2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

हल पूर्ववर्ती उदाहरण की तरह यहाँ भी हम देखते हैं प्रत्येक वास्तविक संख्या $x \neq 1$ के लिए f संतत है। $x = 1$ के लिए f के बाएँ पक्ष की सीमा, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3$ है।

$x = 1$ के लिए f के दाएँ पक्ष की सीमा, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 2) = 1 - 2 = -1$ है।

चूँकि $x = 1$ पर f के बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती नहीं हैं, अतः $x = 1$ पर f संतत नहीं है। इस प्रकार f के असांतत्य का बिंदु केवल मात्र $x = 1$ है। इस फलन का आलेख आकृति 5.5 में दर्शाया गया है।

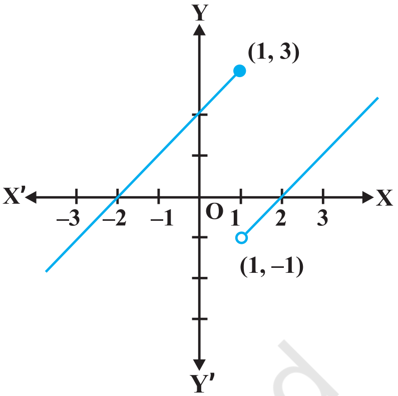
उदाहरण 12 निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{यदि } x < 0 \\ -x + 2, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

हल ध्यान दीजिए कि विचाराधीन फलन 0 (शून्य) के अतिरिक्त अन्य समस्त वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। परिभाषानुसार इस फलन का प्रांत

$D_1 \cup D_2$ है जहाँ $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ और

$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$है।

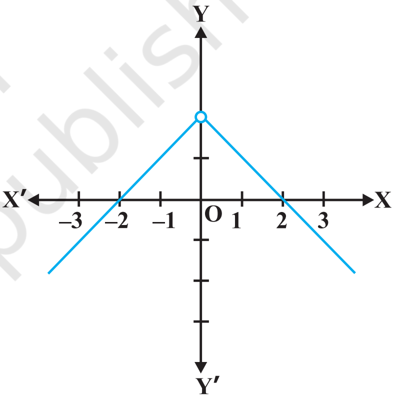


आकृति 5.5

दशा 1 यदि $c \in D_1$, तो $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (x + 2) = c + 2 = f(c)$ है अतएव D_1 में f संतत है।

दशा 2 यदि $c \in D_2$, तो $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (-x + 2) = -c + 2 = f(c)$ है अतएव D_2 में भी f संतत है।

क्योंकि f अपने प्रांत के समस्त बिंदुओं पर संतत है जिससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि f एक संतत फलन है। इस फलन का आलेख आकृति 5.6 में खींचा गया है। ध्यान दीजिए कि इस फलन के आलेख को खींचने के लिए हमें कलम को कागज़ की सतह से उठाना पड़ता है, किंतु हमें ऐसा केवल उन बिंदुओं पर करना पड़ता है जहाँ पर फलन परिभाषित नहीं है।



आकृति 5.6

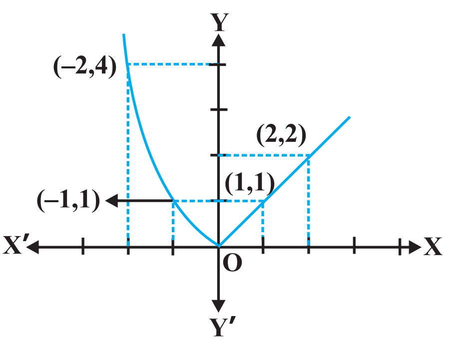
उदाहरण 13 निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \geq 0 \\ x^2, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

हल स्पष्टतया, प्रदत्त फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। इस फलन का आलेख आकृति 5.7 में दिया है। इस आलेख के निरीक्षण से यह तर्कसंगत लगता है कि फलन के प्रांत को वास्तविक रेखा के तीन असंयुक्त (disjoint) उप समुच्चयों में विभाजित कर लिया जाए। मान लिया कि

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{0\}$ तथा

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$है।



आकृति 5.7

दशा 1 D_1 के किसी भी बिंदु पर $f(x) = x^2$ है और यह सरलता से देखा जा सकता है कि D_1 में f संतत है। (उदाहरण 2 देखिए)

दशा 2 D_3 के किसी भी बिंदु पर $f(x) = x$ है और यह सरलता से देखा जा सकता है कि D_3 में f संतत है। (उदाहरण 6 देखिए)

दशा 3 अब हम $x = 0$ पर फलन का विश्लेषण करते हैं। 0 के लिए फलन का मान $f(0) = 0$ है। 0 पर f के बाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0^2 = 0 \text{ है तथा}$$

0 पर f के दाएँ पक्ष की सीमा

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \text{ है।}$$

अतः $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ अतएव 0 पर f संतत है। इसका अर्थ यह हुआ कि f अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत है। अतः f एक संतत फलन है।

उदाहरण 14 दर्शाइए कि प्रत्येक बहुपद फलन संतत होता है।

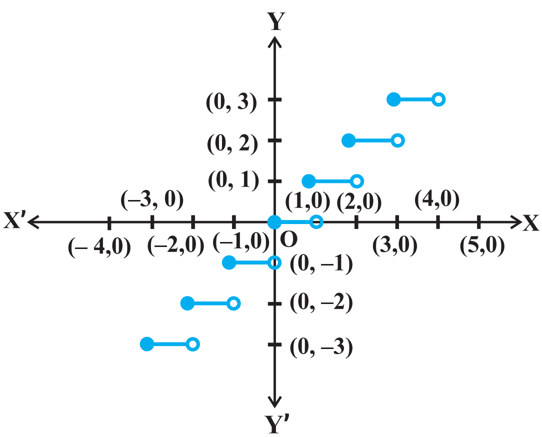
हल स्मरण कीजिए कि कोई फलन p, एक बहुपद फलन होता है यदि वह किसी प्राकृत संख्या n के लिए $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ द्वारा परिभाषित हो, जहाँ $a_i \in \mathbf{R}$ तथा $a_n \neq 0$ है। स्पष्टतया यह फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। किसी निश्चित वास्तविक संख्या c के लिए हम देखते हैं कि

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

इसलिए परिभाषा द्वारा c पर p संतत है। चूँकि c कोई भी वास्तविक संख्या है इसलिए p किसी भी वास्तविक संख्या के लिए संतत है, अर्थात् p एक संतत फलन है।

उदाहरण 15 $f(x) = [x]$ द्वारा परिभाषित महत्तम पूर्णांक फलन के असांतत्य के समस्त बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ $[x]$ उस महत्तम पूर्णांक को प्रकट करता है, जो x से कम या उसके बराबर है।

हल पहले तो हम यह देखते हैं कि f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। इस फलन का आलेख आकृति 5.8 में दिखाया गया है।



आकृति 5.8

आलेख से ऐसा प्रतीत होता है कि प्रदत्त फलन x के सभी पूर्णांक मानों के लिए असंतत है। नीचे हम छानबीन करेंगे कि क्या यह सत्य है।

दशा 1 मान लीजिए कि c एक ऐसी वास्तविक संख्या है, जो किसी भी पूर्णांक के बराबर नहीं है। आलेख से यह स्पष्ट है कि c के निकट की सभी वास्तविक संख्याओं के लिए दिए हुए फलन का मान $[c]$; हैं, अर्थात् $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} [x] = [c]$ साथ ही $f(c) = [c]$ अतः प्रदत्त फलन, उन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है, जो पूर्णांक नहीं है।

दशा 2 मान लीजिए कि c एक पूर्णांक है। अतएव हम एक ऐसी पर्याप्ततः छोटी वास्तविक संख्या $r > 0$ प्राप्त कर सकते हैं जो कि $[c - r] = c - 1$ जबकि $[c + r] = c$ है।

सीमाओं के रूप में, इसका अर्थ यह हुआ कि

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = c - 1 \text{ तथा } \lim_{x \to c^+} f(x) = c$$

चूँकि किसी भी पूर्णांक c के लिए ये सीमाएँ समान नहीं हो सकती हैं, अतः प्रदत्त फलन x सभी पूर्णांक मानों के लिए असंतत है।

5.2.1 *संतत फलनों का बीजगणित (Algebra of continuous functions)*

पिछली कक्षा में, सीमा की संकल्पना समझने के उपरांत, हमनें सीमाओं के बीजगणित का कुछ अध्ययन किया था। अनुरूपतः अब हम संतत फलनों के बीजगणित का भी कुछ अध्ययन करेंगे। चूँकि किसी बिंदु पर एक फलन का सांतत्य पूर्णरूप से उस बिंदु पर फलन की सीमा द्वारा निर्धारित होता है, अतएव यह तर्कसंगत है कि हम सीमाओं के सदृश्य ही यहाँ भी बीजीय परिणामों की अपेक्षा करें।

प्रमेय 1 मान लीजिए कि f तथा g दो ऐसे वास्तविक फलन हैं, जो एक वास्तविक संख्या c के लिए संतत हैं। तब,

(1) $f + g$, $x = c$ पर संतत है

(2) $f - g$, $x = c$ पर संतत है

(3) $f \cdot g$, $x = c$ पर संतत है

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $x = c$ पर संतत है (जबकि $g(c) \neq 0$ है।)

उपपत्ति हम बिंदु $x = c$ पर $(f + g)$ के सांतत्य की जाँच करते हैं। हम दखते हैं कि

$$\lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] \qquad (f + g \text{ की परिभाषा द्वारा})$$

$$= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad (\text{सीमाओं के प्रमेय द्वारा})$$

$$= f(c) + g(c) \qquad \text{(क्योंकि } f \text{ तथा } g \text{ संतत फलन हैं)}$$

$$= (f + g)(c) \qquad (f + g \text{ की परिभाषा द्वारा})$$

अतः, $f + g$ भी $x = c$ के लिए संतत है।

प्रमेय 1 के शेष भागों की उपपत्ति इसी के समान है जिन्हें पाठकों के लिए अभ्यास हेतु छोड़ दिया गया है।

टिप्पणी

(i) उपर्युक्त प्रमेय के भाग (3) की एक विशेष दशा के लिए, यदि f एक अचर फलन $f(x) = \lambda$ हो, जहाँ λ, कोई अचर वास्तविक संख्या है, तो $(\lambda \,.\, g)(x) = \lambda \,.\, g(x)$ द्वारा परिभाषित फलन $(\lambda \,.\, g)$ भी एक संतत फलन है। विशेष रूप से, यदि $\lambda = -1$, तो f के सांतत्य में $-f$ का सांतत्य अंतर्निहित होता है।

(ii) उपर्युक्त प्रमेय के भाग (4) की एक विशेष दशा के लिए, यदि f एक अचर फलन $f(x) = \lambda$, तो $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ द्वारा परिभाषित फलन $\frac{\lambda}{g}$ भी एक संतत फलन होता है, जहाँ $g(x) \neq 0$ है। विशेष रूप से, g के सांतत्य में $\frac{1}{g}$ का सांतत्य अंतर्निहित है।

उपर्युक्त दोनों प्रमेयों के उपयोग द्वारा अनेक संतत फलनों को बनाया जा सकता है। इनसे यह निश्चित करने में भी सहायता मिलती है कि कोई फलन संतत है या नहीं। निम्नलिखित उदाहरणों में यह बात स्पष्ट की गई है।

उदाहरण 16 सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमेय फलन संतत होता है।

हल स्मरण कीजिए कि प्रत्येक परिमेय फलन f निम्नलिखित रूप का होता है:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \; q(x) \neq 0$$

जहाँ p और q बहुपद फलन हैं। f का प्रांत, उन बिंदुओं को छोड़कर जिन पर q शून्य है, समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं। चूँकि बहुपद फलन संतत होते हैं (उदाहरण 14), अतएव प्रमेय 1 के भाग (4) द्वारा f एक संतत फलन है।

उदाहरण 17 sine फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए।

हल इस पर विचार करने के लिए हम निम्नलिखित तथ्यों का प्रयोग करते हैं:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

हमने इन तथ्यों को यहाँ प्रमाणित तो नहीं किया है, किन्तु sine फलन के आलेख को शून्य के निकट देख कर ये तथ्य सहजानुभूति (intuitively) से स्पष्ट हो जाता है।

अब देखिए कि $f(x) = \sin x$ सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। मान लीजिए कि c एक वास्तविक संख्या है। $x = c + h$ रखने पर, यदि $x \to c$ तो हम देखते हैं कि $h \to 0$ इसलिए

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} \sin x \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(c+h) \\
&= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h] \\
&= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h\to 0} [\cos c \sin h] \\
&= \sin c + 0 = \sin c = f(c)
\end{aligned}$$

इस प्रकार $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ अतः f एक संतत फलन है।

टिप्पणी इसी प्रकार cosine फलन के सांतत्य को भी प्रमाणित किया जा सकता है।

उदाहरण 18 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan x$ एक संतत फलन है।

हल दिया हुआ फलन $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ है। यह फलन उन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है, जहाँ $\cos x \neq 0$, अर्थात् $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ है। हमने अभी प्रमाणित किया है कि sine और cosine फलन, संतत फलन हैं। इसलिए tan फलन, इन दोनों फलनों का भागफल होने के कारण, x के उन सभी मानों के लिए संतत है जिन के लिए यह परिभाषित है।

फलनों के संयोजन (composition) से संबंधित, संतत फलनों का व्यवहार एक रोचक तथ्य है। स्मरण कीजिए कि यदि f और g दो वास्तविक फलन हैं, तो

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

परिभाषित है, जब कभी g का परिसर f के प्रांत का एक उपसमुच्चय होता है। निम्नलिखित प्रमेय (प्रमाण बिना केवल व्यक्त), संयुक्त (composite) फलनों के सांतत्य को परिभाषित करती है।

प्रमेय 2 मान लीजिए कि f और g इस प्रकार के दो वास्तविक मानीय (real valued) फलन हैं कि c पर $(f \circ g)$ परिभाषित है। यदि c पर g तथा $g(c)$ पर f संतत है, तो c पर $(f \circ g)$ संतत होता है।

निम्नलिखित उदाहरणों में इस प्रमेय को स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 19 दर्शाइए कि $f(x) = \sin (x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है।

हल प्रेक्षण कीजिए कि विचाराधीन फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। फलन f को, g तथा h दो फलनों के संयोजन $(g \circ h)$ के रूप में सोचा जा सकता है, जहाँ $g(x) = \sin x$ तथा $h(x) = x^2$ है। चूँकि g और h दोनों ही संतत फलन हैं, इसलिए प्रमेय 2 द्वारा यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है, कि f एक संतत फलन है।

उदाहरण 20 दर्शाइए कि $f(x) = |1 - x + |x||$ द्वारा परिभाषित फलन f, जहाँ x एक वास्तविक संख्या है, एक संतत फलन है।

हल सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए g को $g(x) = 1 - x + |x|$ तथा h को $h(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित कीजिए। तब,

$$\begin{aligned}(h \circ g)(x) &= h(g(x)) \\ &= h(1 - x + |x|) \\ &= |1 - x + |x|| = f(x)\end{aligned}$$

उदाहरण 7 में हम देख चुके हैं कि h एक संतत फलन है। इसी प्रकार एक बहुपद फलन और एक मापांक फलन का योग होने के कारण g एक संतत फलन है। अत: दो संतत फलनों का संयुक्त फलन होने के कारण f भी एक संतत फलन है।

प्रश्नावली 5.1

1. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ तथा $x = 5$ पर संतत है।

2. $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

3. निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए:

(a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5}, x \neq -5$ (d) $f(x) = |x - 5|$

4. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^n$, $x = n$, पर संतत है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

5. क्या $f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \leq 1 \\ 5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f

$x = 0$, $x = 1$, तथा $x = 2$ पर संतत है?

f के सभी असांतत्य के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जब कि f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

6. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{यदि } x\le 2\\ 2x-3, & \text{यदि } x>2\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}|x|+3, & \text{यदि } x\le -3\\ -2x, & \text{यदि } -3<x<3\\ 6x+2, & \text{यदि } x\ge 3\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{यदि } x\ne 0\\ 0, & \text{यदि } x=0\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & \text{यदि } x<0\\ -1, & \text{यदि } x\ge 0\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{यदि } x\ge 1\\ x^2+1, & \text{यदि } x<1\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}x^3-3, & \text{यदि } x\le 2\\ x^2+1, & \text{यदि } x>2\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}x^{10}-1, & \text{यदि } x\le 1\\ x^2, & \text{यदि } x>1\end{cases}$

13. क्या $f(x)=\begin{cases}x+5, & \text{यदि } x\le 1\\ x-5, & \text{यदि } x>1\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है?

फलन f, के सांतत्य पर विचार कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है:

14. $f(x)=\begin{cases}3, & \text{यदि } 0\le x\le 1\\ 4, & \text{यदि } 1<x<3\\ 5, & \text{यदि } 3\le x\le 10\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{यदि } x<0\\ 0, & \text{यदि } 0\le x\le 1\\ 4x, & \text{यदि } x>1\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{यदि } x\le -1\\ 2x, & \text{यदि } -1<x\le 1\\ 2, & \text{यदि } x>1\end{cases}$

17. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & \text{यदि } x\le 3\\ bx+3, & \text{यदि } x>3\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x=3$ पर संतत है।

18. λ के किस मान के लिए

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{यदि } x \le 0 \\ 4x + 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x = 0$ पर संतत है। $x = 1$ पर इसके सांतत्य पर विचार कीजिए।

19. दर्शाइए कि $g(x) = x - [x]$ द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिंदुओं पर असंतत है। यहाँ $[x]$ उस महत्तम पूर्णांक निरूपित करता है, जो x के बराबर या x से कम है।

20. क्या $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर संतत है?

21. निम्नलिखित फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए:

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \,.\, \cos x$

22. cosine, cosecant, secant और cotangent फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए।

23. f के सभी असांतत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{यदि } x < 0 \\ x + 1, & \text{यदि } x \ge 0 \end{cases}$$

24. निर्धारित कीजिए कि फलन f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{यदि } x \ne 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक संतत फलन है।

25. f के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & \text{यदि } x \ne 0 \\ -1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

प्रश्न 26 से 29 में k के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि प्रदत्त फलन निर्दिष्ट बिंदु पर संतत हो:

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k \cos x}{\pi - 2x}, & \text{यदि } x \ne \dfrac{\pi}{2} \\ 3, & \text{यदि } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \dfrac{\pi}{2}$ पर

27. $f(x)=\begin{cases} kx^2, & \text{यदि } x \le 2 \\ 3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर

28. $f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x \le \pi \\ \cos x, & \text{यदि } x > \pi \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर

29. $f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x \le 5 \\ 3x-5, & \text{यदि } x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर

30. a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x)=\begin{cases} 5, & \text{यदि } x \le 2 \\ ax+b, & \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{यदि } x \ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन हो।

31. दर्शाइए कि $f(x) = \cos(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

32. दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

33. जाँचिए कि क्या $\sin |x|$ एक संतत फलन है।

34. $f(x) = |x| - |x + 1|$ द्वारा परिभाषित फलन f के सभी असांत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

5.3. अवकलनीयता (Differentiability)

पिछली कक्षा में सीखे गए तथ्यों को स्मरण कीजिए। हमनें एक वास्तविक फलन के अवकलज (Derivative) को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया था।

मान लीजिए कि f एक वास्तविक फलन है तथा c इसके प्रांत में स्थित एक बिंदु है। c पर f का अवकलज निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

यदि इस सीमा का अस्तित्व हो तो c पर f के अवकलज को $f'(c)$ या $\frac{d}{dx}(f(x))|_c$ द्वारा प्रकट करते हैं।

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

द्वारा परिभाषित फलन, जब भी इस सीमा का अस्तित्व हो, f के अवकलज को परिभाषित करता है। f के अवकलज को $f'(x)$ या $\frac{d}{dx}(f(x))$ द्वारा प्रकट करते हैं और यदि $y = f(x)$ तो इसे $\frac{dy}{dx}$ या y' द्वारा प्रकट करते हैं। किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को अवकलन (differentiation) कहते हैं। हम वाक्यांश "x के सापेक्ष $f(x)$ का अवकलन कीजिए (differentiate)" का भी प्रयोग करते हैं, जिसका अर्थ होता है कि $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

अवकलज के बीजगणित के रूप में निम्नलिखित नियमों को प्रमाणित किया जा चुका है:

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (लेबनीज़ या गुणनफल नियम)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, जहाँ $v \neq 0$ (भागफल नियम)

नीचे दी गई सारणी में कुछ प्रामाणिक (standard) फलनों के अवकलजों की सूची दी गई है:

सारणी 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$

जब कभी भी हमने अवकलज को परिभाषित किया है तो एक सुझाव भी दिया है कि "*यदि सीमा का अस्तित्व हो।*" अब स्वाभाविक रूप से प्रश्न उठता है कि यदि ऐसा नहीं है तो क्या होगा? यह प्रश्न नितांत प्रासंगिक है और इसका उत्तर भी। यदि $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ का अस्तित्व नहीं है, तो हम कहते हैं कि c पर f अवकलनीय नहीं है। दूसरे शब्दों में, हम कहते हैं कि अपने प्रांत के किसी बिंदु c पर फलन f अवकलनीय है, यदि दोनों सीमाएँ $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ तथा $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ परिमित (finite) तथा समान हैं। फलन अंतराल $[a, b]$ में अवकलनीय कहलाता है, यदि वह अंतराल $[a, b]$ के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय है। जैसा कि सांतत्य के संदर्भ में कहा गया था कि अंत्य बिंदुओं a तथा b पर हम क्रमशः दाएँ तथा बाएँ पक्ष की सीमाएँ लेते हैं, जो कि और कुछ नहीं, बल्कि a तथा b पर फलन के दाएँ पक्ष तथा बाएँ पक्ष के अवकलज ही हैं। इसी प्रकार फलन अंतराल (a, b) में अवकलनीय कहलाता है, यदि वह अंतराल (a, b) के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय है।

प्रमेय 3 यदि फलन किसी बिंदु c पर अवकलनीय है, तो उस बिंदु पर वह संतत भी है।

उपपत्ति चूँकि बिंदु c पर f अवकलनीय है, अतः

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

किंतु $x \neq c$ के लिए

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c)$$

इसलिए $$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c)\right]$$

या $$\lim_{x \to c} [f(x)] - \lim_{x \to c} [f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] . \lim_{x \to c} [(x - c)]$$

$$= f'(c) . 0 = 0$$

या $$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

इस प्रकार $x = c$ पर फलन f संतत है।

उपप्रमेय 1 प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है।

यहाँ हम ध्यान दिलाते हैं कि उपर्युक्त कथन का विलोम (converse) सत्य नहीं है। निश्चय ही हम देख चुके हैं कि $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है। इस फलन के बाएँ पक्ष की सीमा पर विचार करने से

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

तथा दाँए पक्ष की सीमा

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ है।}$$

चूँकि 0 पर उपर्युक्त बाएँ तथा दाएँ पक्ष की सीमाएँ समान नहीं हैं, इसलिए $\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ का अस्तित्व नहीं है और इस प्रकार 0 पर f अवकलनीय नहीं है। अतः f एक अवकलनीय फलन नहीं है।

5.3.1 संयुक्त फलनों के अवकलज (*Differentials of composite functions*)

संयुक्त फलनों के अवकलज के अध्ययन को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। मान लीजिए कि हम f का अवकलज ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

एक विधि यह है कि द्विपद प्रमेय के प्रयोग द्वारा $(2x + 1)^3$ को प्रसारित करके प्राप्त बहुपद फलन का अवकलज ज्ञात करें, जैसा नीचे स्पष्ट किया गया है;

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)$$

$$= 24x^2 + 24x + 6$$

$$= 6(2x + 1)^2$$

अब, ध्यान दीजिए कि

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

जहाँ $g(x) = 2x + 1$ तथा $h(x) = x^3$ है। मान लीजिए $t = g(x) = 2x + 1$. तो $f(x) = h(t) = t^3$.

अत: $\dfrac{df}{dx} = 6(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 . 2 = 3t^2 . 2 = \dfrac{dh}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$

इस दूसरी विधि का लाभ यह है कि कुछ प्रकार के फलन, जैसे $(2x + 1)^{100}$ के अवकलज का परिकलन करना इस विधि द्वारा सरल हो जाता है। उपर्युक्त परिचर्चा से हमें औपचारिक रूप से निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है, जिसे शृंखला नियम (chain rule) कहते हैं।

प्रमेय 4 (**शृंखला नियम**) मान लीजिए कि f एक वास्तविक मानीय फलन है, जो u तथा v दो फलनों का संयोजन है; अर्थात् $f = v \circ u$. मान लीजिए कि $t = u(x)$ और, यदि $\dfrac{dt}{dx}$ तथा $\dfrac{dv}{dt}$ दोनों का अस्तित्व है, तो

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

हम इस प्रमेय की उपपत्ति छोड़ देते हैं। शृंखला नियम का विस्तार निम्नलिखित प्रकार से किया जा सकता है। मान लीजिए कि f एक वास्तविक मानीय फलन है, जो तीन फलनों u, v और w का संयोजन है, अर्थात्

$f = (w \circ u) \circ v$ है यदि $t = u(x)$ तथा $s = v(t)$ है तो

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}(w \circ u)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

यदि उपर्युक्त कथन के सभी अवकलजों का अस्तित्व हो तो पाठक और अधिक फलनों के संयोजन के लिए श्रृंखला नियम को प्रयुक्त कर सकते हैं।

उदाहरण 21 $f(x) = \sin(x^2)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि प्रदत्त फलन दो फलनों का संयोजन है। वास्तव में, यदि $u(x) = x^2$ और $v(t) = \sin t$ है तो

$$f(x) = (v \text{ o } u)(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ रखने पर ध्यान दीजिए कि $\frac{dv}{dt} = \cos t$ तथा $\frac{dt}{dx} = 2x$ और दोनों का अस्तित्व भी हैं। अतः श्रृंखला नियम द्वारा

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \cos t \,.\, 2x$$

सामान्यतः अंतिम परिणाम को x के पदों में व्यक्त करने का प्रचलन है अतएव

$$\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1 से 8 में x के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिए:

1. $\sin(x^2 + 5)$ **2.** $\cos(\sin x)$ **3.** $\sin(ax + b)$

4. $\sec(\tan(\sqrt{x}))$ **5.** $\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$ **6.** $\cos x^3 \,.\, \sin^2(x^5)$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$ **8.** $\cos(\sqrt{x})$

9. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x - 1|, x \in \mathbf{R}, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

10. सिद्ध कीजिए कि महत्तम पूर्णांक फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1$ तथा $x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

5.3.2 अस्पष्ट फलनों के अवकलज (Derivatives of Implicit Functions)

अब तक हम $y = f(x)$ के रूप के विविध फलनों का अवकलन करते रहे हैं परंतु यह आवश्यक नहीं है कि फलनों को सदैव इसी रूप में व्यक्त किया जाए। उदाहरणार्थ, x और y के बीच निम्नलिखित संबंधों में से एक पर विशेष रूप से विचार कीजिए:

$$x - y - \pi = 0$$

$$x + \sin xy - y = 0$$

पहली दशा में, हम y के लिए सरल कर सकते हैं और संबंध को $y = x - \pi$ के रूप में लिख सकते हैं। दूसरी दशा में, ऐसा नहीं लगता है कि संबंध y को सरल करने का कोई आसान तरीका है। फिर भी दोनों में से किसी भी दशा में, y की x पर निर्भरता के बारे में कोई संदेह नहीं है। जब x और y के बीच का संबंध इस प्रकार व्यक्त किया गया हो कि उसे y के लिए सरल करना आसान हो और $y = f(x)$ के रूप में लिखा जा सके, तो हम कहते हैं कि y को x के स्पष्ट (explicit) फलन के रूप में व्यक्त किया गया है। उपर्युक्त दूसरे संबंध में, हम कहते हैं कि y को x के अस्पष्ट (implicity) फलन के रूप में व्यक्त किया गया है।

उदाहरण 22 यदि $x - y = \pi$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल एक विधि यह है कि हम y के लिए सरल करके उपर्युक्त संबंध को निम्न प्रकार लिखें यथा

$$y = x - \pi$$

तब

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

विकल्पतः इस संबंध का x, के सापेक्ष सीधे अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(x - y) = \frac{d\pi}{dx}$$

याद कीजिए कि $\frac{d\pi}{dx}$ का अर्थ है कि x के सापेक्ष एक अचर π का अवकलन करना। इस प्रकार

$$\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

जिसका तात्पर्य है कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

उदाहरण 23 यदि $y + \sin y = \cos x$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल हम इस संबंध का सीधे अवकलज करते हैं।

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

शृंखला नियम का प्रयोग करने पर

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

इससे निम्नलिखित परिणाम मिलता है,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1+\cos y}$$

जहाँ $$y \neq (2n + 1)\,\pi$$

5.3.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज (Derivatives of Inverse Trigonometric Functions)

हम पुनः ध्यान दिलाते हैं कि प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन संतत होते हैं, परंतु हम इसे प्रमाणित नहीं करेंगे। अब हम इन फलनों के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए श्रृंखला नियम का प्रयोग करेंगे।

$f(x) = \sin^{-1} x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। यह मान लीजिए कि इसका अस्तित्व है।

हल मान लीजिए कि $y = f(x) = \sin^{-1} x$ है तो $x = \sin y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

ध्यान दीजिए कि यह केवल $\cos y \neq 0$ के लिए परिभाषित है, अर्थात्, $\sin^{-1} x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, अर्थात् $x \neq -1, 1$, अर्थात् $x \in (-1, 1)$

इस परिणाम को कुछ आकर्षक बनाने हेतु हम निम्नलिखित व्यवहार कौशल (manipulation) करते हैं। स्मरण कीजिए कि $x \in (-1, 1)$ के लिए $\sin(\sin^{-1} x) = x$ और इस प्रकार

$$\cos^2 y = 1 - (\sin y)^2 = 1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2 = 1 - x^2$$

साथ ही चूँकि $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y$ एक धनात्मक राशि है और इसलिए $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

इस प्रकार $x \in (-1, 1)$ के लिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)$	$\sin^{-1}x$	$\cos^{-1}x$	$\tan^{-1}x$
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Domain of f'	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	**R**

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित प्रश्नों में $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

1. $2x + 3y = \sin x$

2. $2x + 3y = \sin y$

3. $ax + by^2 = \cos y$

4. $xy + y^2 = \tan x + y$

5. $x^2 + xy + y^2 = 100$

6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

7. $\sin^2 y + \cos xy = k$

8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

9. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

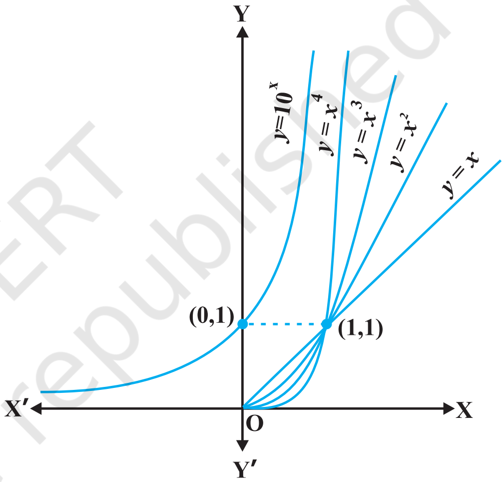
14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलन (Exponential and Logarithmic Functions)

अभी तक हमने फलनों, जैसे बहुपद फलन, परिमेय फलन तथा त्रिकोणमितीय फलन, के विभिन्न वर्गों के कुछ पहलुओं के बारे में सीखा है। इस अनुच्छेद में हम परस्पर संबंधित फलनों के एक नए वर्ग के बारे में सीखेंगे, जिन्हें चरघातांकी (exponential) तथा लघुगणकीय (logarithmic) फलन कहते हैं। यहाँ पर विशेष रूप से यह बतलाना आवश्यक है कि इस अनुच्छेद के बहुत से कथन प्रेरक तथा यथातथ्य हैं और उनकी उपपत्तियाँ इस पुस्तक की विषय-वस्तु के क्षेत्र से बाहर हैं।

आकृति 5.9 में $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$ तथा $y = f_4(x) = x^4$ के आलेख दिए गए हैं। ध्यान दीजिए कि ज्यों-ज्यों x की घात बढ़ती जाती है वक्र की प्रवणता भी बढ़ती जाती है। वक्र की प्रवणता बढ़ने से वृद्धि की दर तेज होती जाती है। इसका अर्थ यह है कि x (>1) के मान में निश्चित वृद्धि के संगत $y = f_n(x)$ का मान बढ़ता जाता है जैसे-जैसे n का मान 1, 2, 3, 4 होता जाता है। यह कल्पनीय है कि ऐसा कथन सभी धनात्मक मान के लिए सत्य है जहाँ $f_n(x) = x^n$ है। आवश्यकरूप से, इसका अर्थ यह हुआ कि जैसे-जैसे n में वृद्धि होती जाती है $y = f_n(x)$ का आलेख y-अक्ष की ओर अधिक झुकता जाता है। उदाहरण के लिए $f_{10}(x) = x^{10}$ तथा $f_{15}(x) = x^{15}$ पर विचार कीजिए। यदि x का मान 1 से बढ़कर 2 हो जाता है, तो f_{10} का मान 1 से बढ़कर 2^{10} हो जाता है, जबकि f_{15} का मान 1 से बढ़कर 2^{15} हो जाता है। इस प्रकार x में समान वृद्धि के लिए, f_{15} की वृद्धि f_{10} की वृद्धि के अपेक्षा अधिक तीव्रता से होती है।



आकृति 5.9

उपर्युक्त परिचर्चा का निष्कर्ष यह है कि बहुपद फलनों की वृद्धि उनके घात पर निर्भर करती है, अर्थात् घात बढ़ाते जाइए वृद्धि बढ़ती जाएगी। इसके उपरांत एक स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि, क्या कोई ऐसा फलन है जो बहुपद फलनों की अपेक्षा अधिक तेजी से बढ़ता है? इसका उत्तर सकारात्मक है और इस प्रकार के फलन का एक उदाहरण $y = f(x) = 10^x$ है

हमारा दावा यह है कि किसी धन पूर्णांक n के लिए यह फलन f, फलन $f_n(x) = x^n$ की अपेक्षा अधिक तेजी से बढ़ता है। उदाहरण के लिए हम सिद्ध कर सकते हैं कि $f_{100}(x) = x^{100}$ की अपेक्षा 10^x अधिक तेजी से बढ़ता है। यह नोट कीजिए कि x के बड़े मानों के लिए, जैसे $x = 10^3$, $f_{100}(x) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ जबकि $f(10^3) = 10^{10^3} = 10^{1000}$ है। स्पष्टत: $f_{100}(x)$ की अपेक्षा $f(x)$

का मान बहुत अधिक है। यह सिद्ध करना कठिन नहीं है कि x के उन सभी मानों के लिए जहाँ $x > 10^3$, $f(x) > f_{100}(x)$ है। किंतु हम यहाँ पर इसकी उपपत्ति देने का प्रयास नहीं करेंगे। इसी प्रकार x के बड़े मानों को चुनकर यह सत्यापित किया जा सकता है कि, किसी भी धन पूर्णांक n के लिए $f_n(x)$ की अपेक्षा $f(x)$ का मान अधिक तेजी से बढ़ता है।

परिभाषा 3 फलन $y = f(x) = b^x$, धनात्मक आधार $b > 1$ के लिए चरघातांकी फलन कहलाता है।

आकृति 5.9 में $y = 10^x$ का रेखाचित्र दर्शाया गया है।

यह सलाह दी जाती है कि पाठक इस रेखाचित्र को b के विशिष्ट मानों, जैसे 2, 3 और 4 के लिए खींच कर देखें। चरघातांकी फलन की कुछ प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:

(1) चरघातांकी फलन का प्रांत, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R** होता है।

(2) चरघातांकी फलन का परिसर, समस्त धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है।

(3) बिंदु (0, 1) चरघातांकी फलन के आलेख पर सदैव होता है (यह इस तथ्य का पुनः कथन है कि किसी भी वास्तविक संख्या $b > 1$ के लिए $b^0 = 1$)

(4) चरघातांकी फलन सदैव एक वर्धमान फलन (increasing function) होता है, अर्थात् जैसे-जैसे हम बाएँ से दाएँ ओर बढ़ते जाते हैं, आलेख ऊपर उठता जाता है।

(5) x के अत्यधिक बड़े ऋणात्मक मानों के लिए चरघातांकी फलन का मान 0 के अत्यंत निकट होता है। दूसरे शब्दों में, द्वितीय चतुर्थांश में, आलेख उत्तरोत्तर x-अक्ष की ओर अग्रसर होता है (किंतु उससे कभी मिलता नहीं है।)

आधार 10 वाले चरघातांकी फलन को **साधारण चरघातांकी फलन (common exponential Function)** कहते हैं। कक्षा XI की पाठ्यपुस्तक के परिशिष्ट A.1.4 में हमने देखा था कि श्रेणी

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \text{ है।}$$

का योग एक ऐसी संख्या है जिसका मान 2 तथा 3 के मध्य होता है और जिसे e द्वारा प्रकट करते हैं। इस e को आधार के रूप में प्रयोग करने पर, हमें एक अत्यंत महत्वपूर्ण चरघातांकी फलन $y = e^x$ प्राप्त होता है। इसे **प्राकृतिक चरघातांकी फलन (natural exponential function)** कहते हैं।

यह जानना रुचिकर होगा कि क्या चरघातांकी फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व है और यदि 'हाँ' तो क्या उसकी एक समुचित व्याख्या की जा सकती है। यह खोज निम्नलिखित परिभाषा के लिए प्रेरित करती है।

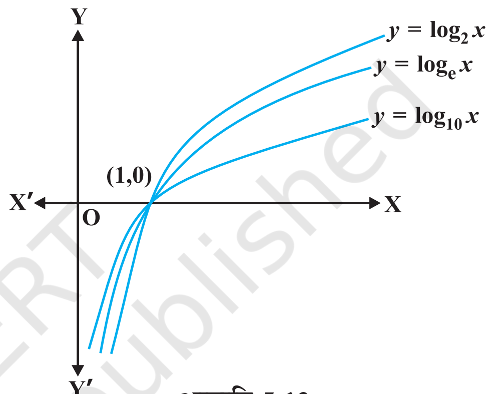
परिभाषा 4 मान लीजिए कि $b > 1$ एक वास्तविक संख्या है। तब हम कहते हैं कि, b आधार पर a का लघुगणक x है, यदि $b^x = a$ है।

b आधार पर a के लघुगणक को प्रतीक $\log_b a$ से प्रकट करते हैं। इस प्रकार यदि $b^x = a$, तो $\log_b a = x$ इसका अनुभव करने के लिए आइए हम कुछ स्पष्ट उदाहरणों का प्रयोग करें। हमें ज्ञात है कि $2^3 = 8$ है। लघुगणकीय शब्दों में हम इसी बात को पुनः $\log_2 8 = 3$ लिख सकते हैं। इसी प्रकार $10^4 = 10000$ तथा $\log_{10} 10000 = 4$ समतुल्य कथन हैं। इसी तरह से $625 = 5^4 = 25^2$ तथा $\log_5 625 = 4$ अथवा $\log_{25} 625 = 2$ समतुल्य कथन हैं।

थोड़ा सा और अधिक परिपक्व दृष्टिकोण से विचार करने पर हम कह सकते हैं कि $b > 1$ को आधार निर्धारित करने के कारण 'लघुगणक' को धन वास्तविक संख्याओं के समुच्चय से सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में एक फलन के रूप में देखा जा सकता है। यह फलन, जिसे **लघुगणकीय फलन (logarithmic function)** कहते हैं, निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$

$$x \to \log_b x = y \quad \text{यदि} \quad b^y = x$$



आकृति 5.10

पूर्व कथित तरह से, यदि आधार $b = 10$ है तो इसे **'साधारण लघुगणक'** और यदि $b = e$ है तो इसे **'प्राकृतिक लघुगणक'** कहते हैं। बहुधा प्राकृतिक लघुगणक को ln द्वारा प्रकट करते हैं। इस अध्याय में $\log x$ आधार e वाले लघुगणकीय फलन को निरूपित करता है। आकृति 5.10 में 2, तथा 10 आधारीय लघुगणकीय फलनों के आलेख दर्शाए गए हैं।

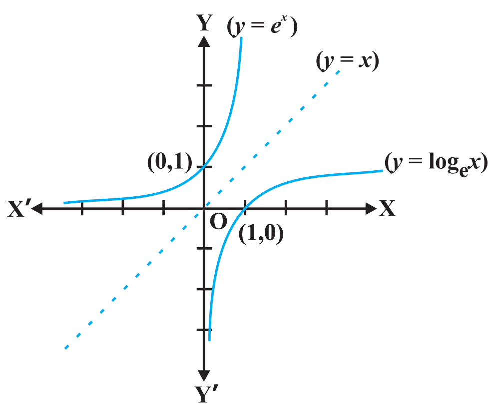
आधार $b > 1$ वाले लघुगणकीय फलनों की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएँ नीचे सूचीबद्ध हैं:

(1) धनेतर (non-positive) संख्याओं के लिए हम लघुगणक की कोई अर्थपूर्ण परिभाषा नहीं बना सकते हैं और इसलिए लघुगणकीय फलन का प्रांत $\mathbf{R}^+$ है।

(2) लघुगणकीय फलन का परिसर समस्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(3) बिंदु (1, 0) लघुगणकीय फलनों के आलेख पर सदैव रहता है।

(4) लघुगणकीय फलन एक वर्धमान फलन होते हैं, अर्थात् ज्यों-ज्यों हम बाएँ से दाएँ ओर चलते हैं, आलेख उत्तरोत्तर ऊपर उठता जाता है।



आकृति 5.11

(5) 0 के अत्याधिक निकट वाले x के लिए, $\log x$ के मान को किसी भी दी गई वास्तविक संख्या से कम किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, चौथे (चतुर्थ) चतुर्थांश में आलेख y-अक्ष के निकटतम अग्रसर होता है (किंतु इससे कभी मिलता नहीं है)।

(6) आकृति 5.11 में $y = e^x$ तथा $y = \log_e x$ के आलेख दर्शाए गए हैं। यह ध्यान देना रोचक है कि दोनों वक्र रेखा $y = x$ में एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब हैं।

लघुगणकीय फलनों के दो महत्वपूर्ण गुण नीचे प्रमाणित किए गए हैं:

(1) आधार परिवर्तन का एक मानक नियम है, जिससे $\log_a p$ को $\log_b p$ के पदों में ज्ञात किया जा सकता है। मान लीजिए कि $\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$ तथा $\log_b a = \gamma$ है। इसका अर्थ यह है कि $a^\alpha = p$, $b^\beta = p$ तथा $b^\gamma = a$ है। अब तीसरे परिणाम को पहले में रखने से

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

इसको दूसरे समीकरण में प्रयोग करने पर

$$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$$

अतः $\beta = \alpha\gamma$ अथवा $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$ है। इस प्रकार

$$\boldsymbol{\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}}$$

(2) गुणनफलनों पर $\log$ फलन का प्रभाव इसका एक अन्य रोचक गुण है। मान लीजिए कि $\log_b pq = \alpha$ है। इससे $b^\alpha = pq$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार यदि $\log_b p = \beta$ तथा $\log_b q = \gamma$ है तो $b^\beta = p$ तथा $b^\gamma = q$ प्राप्त होता है। परंतु $b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$ है।

इसका तात्पर्य है कि $\alpha = \beta + \gamma$, अर्थात्

$$\boldsymbol{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$$

इससे एक विशेष रोचक तथा महत्वपूर्ण परिणाम तब निकलता है जब $p = q$ है। ऐसी दशा में, उपर्युक्त को पुनः निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\boldsymbol{\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2 \log_b p}$$

इसका एक सरल व्यापकीकरण अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है अर्थात् किसी भी धन पूर्णांक n के लिए

$$\boldsymbol{\log_b p^n = n \log_b p}$$

वास्तव में यह परिणाम n के किसी भी वास्तविक मान के लिए सत्य है, किंतु इसे हम प्रमाणित करने का प्रयास नहीं करेंगे। इसी विधि से पाठक निम्नलिखित को सत्यापित कर सकते हैं:

$$\boldsymbol{\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y}$$

उदाहरण 24 क्या यह सत्य है कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए $x = e^{\log x}$ है?

हल पहले तो ध्यान दीजिए कि log फलन का प्रांत सभी धन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है। इसलिए उपर्युक्त समीकरण धनेतर वास्तविक संख्याओं के लिए सत्य नहीं है। अब मान लीजिए कि $y = e^{\log x}$ है। यदि $y > 0$ तब दोनो पक्षों का लघुगणक लेने से $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \,.\, \log e = \log x$ है। जिससे $y = x$ प्राप्त होता है। अतएव $x = e^{\log x}$ केवल x के धन मानों के लिए सत्य है।

अवकल गणित (differential calculus) में, प्राकृतिक चरघातांकी फलन का एक असाधारण गुण यह है कि, अवकलन की प्रक्रिया में यह परिवर्तित नहीं होता है। इस गुण को नीचे प्रमेयों में व्यक्त किया गया है, जिसकी उपपत्ति को हम छोड़ देते हैं।

प्रमेय 5*

(1) x के सापेक्ष e^x का अवकलज e^x ही होता है, अर्थात् $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) x के सापेक्ष $\log x$ का अवकलज $\dfrac{1}{x}$ होता है, अर्थात् $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$

उदाहरण 25 x के सापेक्ष निम्नलिखित का अवकलन कीजिए:

(i) e^{-x} (ii) $\sin (\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1} (e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

हल

(i) मान लीजिए $y = e^{-x}$ है। अब श्रृंखला नियम के प्रयोग द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(ii) मान लीजिए कि $y = \sin (\log x)$ है। अब श्रृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos (\log x)}{x}$$

(iii) मान लीजिए कि $y = \cos^{-1} (e^x)$ है। अब श्रृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

(iv) मान लीजिए कि $y = e^{\cos x}$ है। अब श्रृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

**कृपया पूरक पाठ्य सामग्री पृष्ठ 232–233 पर देखें*

प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$ **2.** $e^{\sin^{-1} x}$ **3.** e^{x^3}

4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$ **5.** $\log(\cos e^x)$ **6.** $e^x + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}},\ x > 0$ **8.** $\log(\log x),\ x > 1$ **9.** $\dfrac{\cos x}{\log x},\ x > 0$

10. $\cos(\log x + e^x)$

5.5. लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

इस अनुच्छेद में हम निम्नलिखित प्रकार के एक विशिष्ट वर्ग के फलनों का अवकलन करना सीखेंगे:

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

लघुगणक (e आधार पर) लेने पर उपर्युक्त को निम्नलिखित प्रकार से पुन: लिख सकते हैं

$$\log y = v(x) \log [u(x)]$$

श्रृंखला नियम के प्रयोग द्वारा

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log [u(x)]$$

इसका तात्पर्य है कि

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]\right]$$

इस विधि में ध्यान देने की मुख्य बात यह है कि $f(x)$ तथा $u(x)$ को सदैव धनात्मक होना चाहिए अन्यथा उनके लघुगणक परिभाषित नहीं होंगे। इस प्रक्रिया को **लघुगणकीय अवकलन (logarithmic differentiation)** कहते हैं और जिसे निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 26 x के सापेक्ष $\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ का अवकलन कीजिए।

हल मान लीजिए कि $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$

दोनों पक्षों के लघुगणक लेने पर

$$\log y = \frac{1}{2}[\log (x-3) + \log (x^2+4) - \log (3x^2+4x+5)]$$

दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष अवलकन करने पर

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

उदाहरण 27 x के सापेक्ष a^x का अवकलन कीजिए, जहाँ a एक धन अचर है।

हल मान लीजिए कि $y = a^x$, तो

$$\log y = x \log a$$

दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = y \log a$$

इस प्रकार $$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

विकल्पतः $$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\log a}) = e^{x\log a}\frac{d}{dx}(x\log a)$$

$$= e^{x \log a} \,.\, \log a = a^x \log a$$

उदाहरण 28 x के सापेक्ष $x^{\sin x}$, का अवकलन कीजिए, जब कि $x > 0$ है।

हल मान लीजिए कि $y = x^{\sin x}$ है। अब दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \sin x \log x$$

अतएव $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \sin x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(\sin x)$$

या $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cos x$$

या $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1} \cdot \sin x + x^{\sin x} \cdot \cos x \log x$$

उदाहरण 29 यदि $y^x + x^y + x^x = a^b$ है। तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$, $v = x^y$ तथा $w = x^x$ रखने पर हमें $u + v + w = a^b$ प्राप्त होता है।

इसलिए $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \qquad \text{... (1)}$$

अब $u = y^x$ है। दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log u = x \log y$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log y) + \log y\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$ प्राप्त होता है।

इसलिए $$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \qquad \text{... (2)}$$

इसी प्रकार $$v = x^y$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log v = y \log x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$ प्राप्त होता है।

अतएव $$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx}\right] \quad \ldots (3)$$

पुनः $$w = x^x$$

दोनों पक्षों का लघुगणन करने पर

$$\log w = x \log x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x \,.\, \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\cdot\frac{1}{x} + \log x \cdot 1$$ प्राप्त होता है।

अर्थात् $$\frac{dw}{dx} = w\,(1 + \log x)$$

$$= x^x\,(1 + \log x) \quad \ldots (4)$$

(1), (2), (3) तथा (4), द्वारा

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) + x^y\left(\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right) + x^x\,(1 + \log x) = 0$$

या $$(x \,.\, y^{x-1} + x^y \,.\, \log x)\,\frac{dy}{dx} = -\,x^x\,(1 + \log x) - y \,.\, x^{y-1} - y^x \log y$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{-[y^x \log y + y \,.\, x^{y-1} + x^x(1 + \log x)]}{x \,.\, y^{x-1} + x^y \log x}$$

प्रश्नावली 5.5

1 से 11 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)\,(x-5)}}$

3. $(\log x)^{\cos x}$

4. $x^x - 2^{\sin x}$

5. $(x + 3)^2 \cdot (x + 4)^3 \cdot (x + 5)^4$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

10. $x^{x\cos x} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$

11. $(x \cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

12 से 15 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

12. $x^y + y^x = 1$

13. $y^x = x^y$

14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

15. $xy = e^{(x-y)}$

16. $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

17. $(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ का अवकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से कीजिए:

(i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके

(ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके

(iii) लघुगणकीय अवकलन द्वारा

यह भी सत्यापित कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

18. यदि u, v तथा w, x के फलन हैं, तो दो विधियों अर्थात् प्रथम-गुणनफल नियम की पुनरावृत्ति द्वारा, द्वितीय - लघुगणकीय अवकलन द्वारा दर्शाइए कि

$$\frac{d}{dx}(u.\ v.\ w) = \frac{du}{dx}\ v.\ w + u\ .\ \frac{dv}{dx}\ .\ w + u\ .\ v\ \frac{dw}{dx}$$

5.6 फलनों के प्राचलिक रूपों के अवकलज (Derivatives of Functions in Parametric Forms)

कभी-कभी दो चर राशियों के बीच का संबंध न तो स्पष्ट होता है और न अस्पष्ट, किंतु एक अन्य (तीसरी) चर राशि से पृथक्-पृथक् संबंधों द्वारा प्रथम दो राशियों के मध्य एक संबंध स्थापित हो जाता है ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि उन दोनों के बीच का संबंध एक तीसरी चर राशि के माध्यम से वर्णित है। यह तीसरी चर राशि **प्राचल (Parameter)** कहलाती है। अधिक सुस्पष्ट तरीके से दो चर राशियों x तथा y के बीच, $x = f(t)$, $y = g(t)$ के रूप में व्यक्त संबंध, को प्राचलिक रूप में व्यक्त संबंध कहते हैं, जहाँ t एक प्राचल है।

इस रूप के फलनों के अवकलज ज्ञात करने हेतु, शृंखला नियम द्वारा

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\left(\text{जब कभी } \frac{dx}{dt} \neq 0\right) \text{प्राप्त होता है।}$$

इस प्रकार $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}\left(\text{क्योंकि } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ तथा } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) [\text{बशर्ते } f'(t) \neq 0]$$

उदाहरण 30 यदि $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$$

इसलिए $$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

उदाहरण 31 यदि $x = at^2,\ y = 2at$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $x = at^2,\ y = 2at$

इसलिए $$\frac{dx}{dt} = 2at \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = 2a$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

उदाहरण 32 यदि $x = a(\theta + \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल यहाँ $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta),\ \frac{dy}{d\theta} = a(\sin\theta)$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

टिप्पणी यहाँ, यह ध्यान दीजिए कि $\frac{dy}{dx}$ को मुख्य चर राशियों x और y को सम्मिलित किए बिना ही, केवल प्राचल के पदों में व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 33 यदि $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ है तब

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + (\sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

अतः $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta,\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ का प्राचलिक समीकरण है।

इस प्रकार, $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$ और $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

इसलिए, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

प्रश्नावली 5.6

यदि प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में x तथा y दिए समीकरणों द्वारा, एक दूसरे से प्राचलिक रूप में संबंधित हों, तो प्राचलों का विलोपन किए बिना, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिएः

1. $x = 2at^2, y = at^4$

2. $x = a\cos\theta, y = b\cos\theta$

3. $x = \sin t, y = \cos 2t$

4. $x = 4t, y = \frac{4}{t}$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta, y = \sin\theta - \sin 2\theta$

6. $x = a\,(\theta - \sin\theta),\ y = a\,(1 + \cos\theta)$ **7.** $x = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

8. $x = a\left(\cos t + \log\tan\dfrac{t}{2}\right)\ y = a\sin t$ **9.** $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$

10. $x = a\,(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a\,(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

11. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, तो दर्शाइए कि $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

5.7 द्वितीय कोटि का अवकलज (Second Order Derivative)

मान लीजिए कि $y = f(x)$ है तो

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \ldots (1)$$

यदि $f'(x)$ अवकलनीय है तो हम x के सापेक्ष (1) का पुनः अवकलन कर सकते हैं। इस प्रकार बायाँ पक्ष $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ हो जाता है, जिसे द्वितीय कोटि का अवकलज (Second Order Derviative) कहते हैं और $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ से निरूपित करते हैं। $f(x)$ के द्वितीय कोटि के अवकलज को $f''(x)$ से भी निरूपित करते हैं। यदि $y = f(x)$ हो तो इसे $D^2(y)$ या y'' या y_2 से भी निरूपित करते हैं। हम टिप्पणी करते हैं कि उच्च क्रम के अवकलन भी इसी प्रकार किए जाते हैं।

उदाहरण 34 यदि $y = x^3 + \tan x$ है तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $y = x^3 + \tan x$ है। अब

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

इसलिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + \sec^2 x\right)$$

$$= 6x + 2\sec x \,.\, \sec x\tan x = 6x + 2\sec^2 x\tan x$$

उदाहरण 35 यदि $y = A\sin x + B\cos x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ है।

हल यहाँ पर

$$\frac{dy}{dx} = \text{A} \cos x - \text{B} \sin x$$

और
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (\text{A} \cos x - \text{B} \sin x)$$
$$= -\text{A} \sin x - \text{B} \cos x = -y$$

इस प्रकार
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

उदाहरण 36 यदि $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

हल यहाँ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ है। अब

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6\,(e^{2x} + e^{3x})$$

इसलिए
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$

अतः
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$
$$-\,30\,(e^{2x} + e^{3x}) + 6\,(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$$

उदाहरण 37 यदि $y = \sin^{-1} x$ है तो दर्शाइए कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ है।

हल यहाँ $y = \sin^{-1}x$ है तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

या
$$\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

या
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

या
$$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\right) = 0$$

या $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=0$$

अतः $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$$

विकल्पतः दिया है कि $y=\sin^{-1}x$ है तो

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ अर्थात् } (1-x^2)\,y_1^2=1$$

अतएव $$(1-x^2)\cdot 2y_1y_2+y_1^2(0-2x)=0$$

अतः $$(1-x^2)\,y_2-xy_1=0$$

प्रश्नावली 5.7

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में दिए फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए:

1. x^2+3x+2 **2.** x^{20} **3.** $x \,.\, \cos x$

4. $\log x$ **5.** $x^3\log x$ **6.** $e^x \sin 5x$

7. $e^{6x}\cos 3x$ **8.** $\tan^{-1}x$ **9.** $\log(\log x)$

10. $\sin(\log x)$

11. यदि $y=5\cos x-3\sin x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

12. यदि $y=\cos^{-1}x$ है तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ को केवल y के पदों में ज्ञात कीजिए।

13. यदि $y=3\cos(\log x)+4\sin(\log x)$ है तो दर्शाइए कि $x^2y_2+xy_1+y=0$

14. यदि $y=\mathrm{A}e^{mx}+\mathrm{B}e^{nx}$ है तो दर्शाइए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2}-(m+n)\dfrac{dy}{dx}+mny=0$

15. यदि $y=500e^{7x}+600e^{-7x}$ है तो दर्शाइए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2}=49y$ है।

16. यदि $e^y(x+1)=1$ है तो दर्शाइए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ है।

17. यदि $y=(\tan^{-1}x)^2$ है तो दर्शाइए कि $(x^2+1)^2y_2+2x(x^2+1)y_1=2$ है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 38 x के सापेक्ष निम्नलिखित का अवकलन कीजिए:

(i) $\sqrt{3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $\log_7(\log x)$

हल

(i) मान लीजिए कि $y=\sqrt{3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}=(3x+2)^{\frac{1}{2}}+(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$ है।

ध्यान दीजिए कि यह फलन सभी वास्तविक संख्याओं $x>-\dfrac{2}{3}$ के लिए परिभाषित है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(3x+2)+\left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$=\frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3)-\left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4x$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}-\frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

यह सभी वास्तविक संख्याओं $x>-\dfrac{2}{3}$ के लिए परिभाषित है।

(ii) मान लीजिए कि $y=\log_7(\log x)=\dfrac{\log(\log x)}{\log 7}$ (आधार परिवर्तन के सूत्र द्वारा)

समस्त वास्तविक संख्याओं $x>1$ के लिए फलन परिभाषित है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log 7}\frac{d}{dx}(\log(\log x))$$

$$=\frac{1}{\log 7}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=\frac{1}{x\log 7\log x}$$

उदाहरण 39 x के सापेक्ष निम्नलिखित का अवकलन कीजिए:

(i) $\cos^{-1}(\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

हल

(i) मान लीजिए कि $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ है। ध्यान दीजिए कि यह फलन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। हम इसे निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं।

$$f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right], \text{ since } \frac{\pi}{2}-x \in [0.\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2}-x$$

अत: $f'(x) = -1$ है।

(ii) मान लीजिए कि $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ है। ध्यान दीजिए कि यह फलन उन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है जिनके लिए $\cos x \neq -1$, अर्थात् π के समस्त विषम गुणजों के अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक संख्याओं के लिए हम इस फलन को निम्नलिखित प्रकार से पुन: व्यक्त कर सकते हैं:

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

ध्यान दीजिए कि हम अंश तथा हर में $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ को काट सके, क्योंकि यह शून्य के बराबर नहीं है। अत: $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ है।

(iii) मान लीजिए कि $f(x) = \sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ है। इस फलन का प्रांत ज्ञात करने के लिए हमें उन सभी x को ज्ञात करने की आवश्यकता है जिनके लिए $-1 \leq \dfrac{2^{x+1}}{1+4^x} \leq 1$ है। क्योंकि $\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}$ सदैव

धन राशि है, इसलिए हमें उन सभी x को ज्ञात करना है जिनके लिए $\frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$, अर्थात् वे सभी x जिनके लिए $2^{x+1} \le 1 + 4^x$ है। हम इसको $2 \le \frac{1}{2^x} + 2^x$ प्रकार भी लिख सकते हैं, जो सभी x के लिए सत्य है। अतः फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। अब $2^x = \tan\theta$ रखने पर यह फलन निम्नलिखित प्रकार से पुनः लिखा जा सकता है:

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta] = 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

अतः

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+(2^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x} \cdot (2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

उदाहरण 40 यदि सभी $0 < x < \pi$ के लिए $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ है तो $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ फलन $y = (\sin x)^{\sin x}$ सभी धन वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log(\sin x)^{\sin x} = \sin x \log(\sin x)$$

अब

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log(\sin x))$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \cos x$$

$$= (1 + \log(\sin x))\cos x$$

अब $\dfrac{dy}{dx} = y((1 + \log(\sin x))\cos x) = (1 + \log(\sin x))(\sin x)^{\sin x}\cos x$

उदाहरण 41 धनात्मक अचर a के लिए $\dfrac{dy}{dx}$, ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$y = a^{t+\frac{1}{t}}, \text{ तथा } x = \left(t+\frac{1}{t}\right)^a \text{ है।}$$

हल ध्यान दीजिए कि दोनों y तथा x, समस्त वास्तविक संख्या $t \neq 0$ के लिए परिभाषित हैं। स्पष्टत:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right).\log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

इसी प्रकार
$$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ केवल यदि $t \neq \pm 1$ है। अत: $t \neq \pm 1$ के लिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

उदाहरण 42 $e^{\cos x}$ के सापेक्ष $\sin^2 x$ का अवकलन कीजिए।

हल मान लीजिए कि $u(x) = \sin^2 x$ तथा $v(x) = e^{\cos x}$ है। यहाँ हमें $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{du/dx}{dv/dx}$ ज्ञात करना है। स्पष्टत:

$$\frac{du}{dx} = 2\sin x\cos x \text{ और } \frac{dv}{dx} = e^{\cos x}(-\sin x) = -(\sin x)e^{\cos x} \text{ है।}$$

अत:
$$\frac{du}{dv} = \frac{2\sin x\cos x}{-\sin x\, e^{\cos x}} = -\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न संख्या 1 से 11 तक प्रदत्त फलनों का, x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

2. $\sin^3 x + \cos^6 x$

3. $(5x)^{3 \cos x\, 2x}$

4. $\sin^{-1}(x\sqrt{x})$, $0 \le x \le 1$.

5. $\dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, -2 < x < 2.$

6. $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right], 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

7. $(\log x)^{\log x}, x > 1$

8. $\cos(a \cos x + b \sin x)$, किन्हीं अचर a तथा b के लिए

9. $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}, \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

10. $x^x + x^a + a^x + a^a$, किसी नियत $a > 0$ तथा $x > 0$ के लिए

11. $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$, $x > 3$ के लिए

12. यदि $y = 12(1 - \cos t), x = 10(t - \sin t), -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

13. यदि $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $0 < x < 1$ है तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

14. यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

15. यदि किसी $c > 0$ के लिए $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$ a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

16. यदि $\cos y = x \cos(a + y)$, तथा $\cos a \ne \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

17. यदि $x = a\,(\cos t + t \sin t)$ और $y = a\,(\sin t - t\cos t)$, तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

18. यदि $f(x) = |\,x\,|^3$, तो प्रमाणित कीजिए कि $f''(x)$ का अस्तित्व है और इसे ज्ञात भी कीजिए।

19. $\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sin \mathrm{A}\cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{A}\sin \mathrm{B}$ का प्रयोग करते हुए अवकलन द्वारा cosines के लिए योग सूत्र ज्ञात कीजिए।

20. क्या एक ऐसे फलन का अस्तित्व है, जो प्रत्येक बिंदु पर संतत हो किंतु केवल दो बिंदुओं पर अवकलनीय न हो? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

21. यदि $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

22. यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$, $-1 \le x \le 1$, तो दर्शाइए कि

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

सारांश

- एक वास्तविक मानीय फलन अपने प्रांत के किसी बिंदु पर संतत होता है यदि उस बिंदु पर फलन की सीमा, उस बिंदु पर फलन के मान के बराबर होती है।
- संतत फलनों के योग, अंतर, गुणनफल और भागफल संतत होते हैं, अर्थात्, यदि f तथा g संतत फलन हैं, तो
  $(f \pm g)\,(x) = f(x) \pm g(x)$ संतत होता है।
  $(f\,.\,g)\,(x) = f(x)\,.\,g(x)$ संतत होता है।
  $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (जहाँ $g(x) \neq 0$) संतत होता है।
- प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है किंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।
- श्रृंखला-नियम फलनों के संयोजन का अवकलन करने के लिए एक नियम है। यदि $f = v \circ u$, $t = u\,(x)$ और यदि $\dfrac{dt}{dx}$ तथा $\dfrac{dv}{dt}$ का अस्तित्व है तो

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

- कुछ मानक अवकलज (परिभाषित प्रांतों में) निम्नलिखित हैं:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- लघुगणकीय अवकलन, $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ के रूप के फलनों के अवकलन करने के लिए एक सशक्त तकनीक है। इस तकनीक के अर्थपूर्ण होने के लिए आवश्यक है कि $f(x)$ तथा $u(x)$ दोनों ही धनात्मक हों।

12081CH06

अध्याय 6

अवकलज के अनुप्रयोग (Application of Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature — WHITEHEAD* ❖

6.1 भूमिका (Introduction)

अध्याय 5 में हमने संयुक्त फलनों, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, अस्पष्ट फलनों, चरघातांकीय फलनों और लघुघातांकीय फलनों का अवकलज ज्ञात करना सीखा है। प्रस्तुत अध्याय में, हम गणित की विभिन्न शाखाओं में अवकलज के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे यथा इंजिनियरिंग, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान और कई दूसरे क्षेत्र। उदाहरण के लिए हम सीखेंगे कि किस प्रकार अवकलज का उपयोग (i) राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करने में, (ii) किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की समीकरण ज्ञात करने में, (iii) एक फलन के आलेख पर वर्तन बिंदु ज्ञात करने में, जो हमें उन बिंदुओं को ज्ञात करने में सहायक होता है जिन पर फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान होता है। हम उन अंतरालों को ज्ञात करने में भी अवकलज का उपयोग करेंगे, जिनमें एक फलन वर्धमान या ह्रासमान होता है। अंततः हम कुछ राशियों के सन्निकट मान प्राप्त करने में अवकलज प्रयुक्त करेंगे।

6.2 राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of Change of Quantities)

पुनः स्मरण कीजिए कि अवकलज $\dfrac{ds}{dt}$ से हमारा तात्पर्य समय अंतराल t के सापेक्ष दूरी s के परिवर्तन की दर से है। इसी प्रकार, यदि एक राशि y एक दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$ को संतुष्ट करते हुए परिवर्तित होती है तो $\dfrac{dy}{dx}$ (या $f'(x)$), x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है और $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (या $f'(x_0)$) $x = x_0$ पर) x के सापेक्ष y की परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है।

इसके अतिरिक्त, यदि दो राशियाँ x और y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $x = f(t)$ और $y = g(t)$ है तब श्रृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt}, \text{ यदि } \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ प्राप्त होता है।}$$

इस प्रकार, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर का परिकलन t के सापेक्ष y और x के परिवर्तन की दर का प्रयोग करके किया जा सकता है ।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब $r = 5$ cm है।

हल त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ से दिया जाता है। इसलिए, r के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ से प्राप्त है। जब $r = 5$ cm तो $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ है। अतः वृत्त का क्षेत्रफल 10π cm^2/cm की दर से बदल रहा है।

उदाहरण 2 एक घन का आयतन 9 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लंबायीं 10 cm है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है।

हल मान लीजिए कि घन की एक कोर की लंबायीं x cm है। घन का आयतन V तथा घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल S है। तब, $V = x^3$ और $S = 6x^2$, जहाँ x समय t का फलन है।

अब $$\frac{dV}{dt} = 9 \text{ cm}^3/\text{s} \text{ (दिया है)}$$

इसलिए $$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(श्रृंखला नियम से)}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

या $$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \qquad \dots (1)$$

अब $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(श्रृंखला नियम से)}$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x} \quad \text{((1) के प्रयोग से)}$$

अतः, जब $$x = 10 \text{ cm}, \frac{dS}{dt} = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s}$$

उदाहरण 3 एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 4 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10 cm है, तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है?

हल त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ से दिया जाता है। इसलिए समय t के सापेक्ष क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर है

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{(श्रृंखला नियम से)}$$

यह दिया गया है कि $\frac{dr}{dt} = 4$ cm

इसलिए जब $r = 10$ cm

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)\,(4) = 80\pi$$

अतः जब $r = 10$ cm तब वृत्त से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 80π cm²/s की दर से बढ़ रहा है।

> **टिप्पणी** x का मान बढ़ने से यदि y का मान बढ़ता है तो $\frac{dy}{dx}$ धनात्मक होता है और x का मान बढ़ने से यदि y का मान घटता है, तो $\frac{dy}{dx}$ ऋणात्मक होता है।

उदाहरण 4 किसी आयत की लंबायीं x, 3 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 2 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब $x = 10$ cm और $y = 6$ cm है तब आयत के (a) परिमाप और (b) क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि समय के सापेक्ष लंबायीं x घट रही है और चौड़ाई y बढ़ रही है तो हम पाते हैं कि

$$\frac{dx}{dt} = -3 \text{ cm/min} \quad \text{और} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ cm/min}$$

(a) आयत का परिमाप P से प्रदत्त है, अर्थात्

$$P = 2(x + y)$$

इसलिए $$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3+2) = -2 \text{ cm/min}$$

(b) आयत का क्षेत्रफल A से प्रदत्त है यथा

$$A = x \,.\, y$$

इसलिए
$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot y + x\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$= -3(6) + 10(2) \text{ (क्योंकि } x = 10 \text{ cm और } y = 6 \text{cm)}$$
$$= 2 \text{ cm}^2/\text{min}$$

उदाहरण 5 किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत C(x) रुपये में

$$C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30x + 5000$$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जब 3 इकाई उत्पादित की जाती है। जहाँ सीमांत लागत (marginal cost या MC) से हमारा अभिप्राय किसी स्तर पर उत्पादन के संपूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर से है।

हल क्योंकि सीमांत लागत उत्पादन के किसी स्तर पर x इकाई के सापेक्ष संपूर्ण लागत के परिवर्तन की दर है। हम पाते हैं कि

सीमांत लागत
$$MC = \frac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$$

जब $x = 3$ है तब
$$MC = 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$$
$$= 0.135 - 0.12 + 30 = 30.015$$

अत: अभीष्ट सीमांत लागत अर्थात लागत प्रति इकाई Rs 30.02 (लगभग) है।

उदाहरण 6 किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपये में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 5$ हो तो सीमांत आय ज्ञात कीजिए। जहाँ सीमांत आय (marginal revenue or MR) से हमारा अभिप्राय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष संपूर्ण आय के परिवर्तन की दर से है।

हल क्योंकि सीमांत आय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष आय परिवर्तन की दर होती है। हम जानते हैं कि

सीमांत आय
$$MR = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$$

जब $x = 5$ है तब
$$MR = 6(5) + 36 = 66$$

अत: अभीष्ट सीमांत आय अर्थात आय प्रति इकाई Rs 66 है।

प्रश्नावली 6.1

1. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि

(a) $r = 3$ cm है। (b) $r = 4$ cm है।

2. एक घन का आयतन 8 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जबकि इसके किनारे की लंबायीं 12 cm है।

3. एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 cm/s की दर से बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10 cm है।

4. एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm/s की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm लंबा है?

5. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है ओर तरंगें वृत्तों में 5 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 cm है तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

6. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 cm/s की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है जब $r = 4.9$ cm है?

7. एक आयत की लंबायीं x, 5 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8$ cm और $y = 6$ cm हैं तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

8. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 cm^3 गैस प्रति सेकंड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 cm है।

9. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 cm है।

10. एक 5 m लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 cm/s की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 m दूर है?

11. एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा हैं। वक्र पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 8 गुना तीव्रता से बदल रहा है।

12. हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ cm/s की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 cm है?

13. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

14. एक पाइप से रेत 12 cm^3/s की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने के शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 cm है?

15. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंध कुल लागत $C(x)$ (रुपये में)

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

16. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।

प्रश्न 17 तथा 18 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

17. एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है:

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में

$R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमांत आय है:

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 वर्धमान (Increasing) और ह्रासमान (Decreasing) फलन

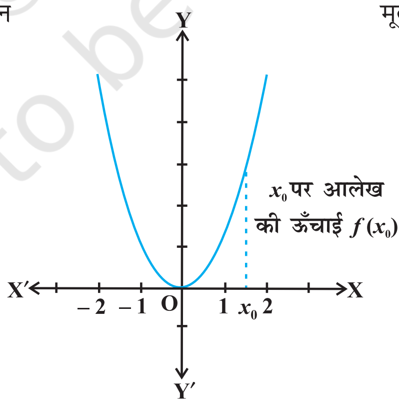
इस अनुच्छेद में हम अवकलन का प्रयोग करके यह ज्ञात करेंगे कि फलन वर्धमान है या ह्रासमान या इनमें से कोई नहीं है।

$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन f पर विचार कीजिए। इस फलन का आलेख आकृति 6.1 में दिया गया है।

मूल बिंदु के बायीं ओर का मान

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

जैसे जैसे हम बाँए से दाँए ओर बढ़ते जाते हैं तो आलेख की ऊँचाई घटती जाती है।



आकृति 6.1

मूल बिंदु के दायीं ओर का मान

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

जैसे जैसे हम बाँए से दाँए ओर बढ़ते जाते है तो आलेख की ऊँचाई बढ़ती जाती है।

सर्वप्रथम मूल बिंदु के दायीं ओर के आलेख (आकृति 6.1) पर विचार करते हैं। यह देखिए कि आलेख के अनुदिश जैसे जैसे बाएँ से दाएँ ओर जाते हैं, आलेख की ऊँचाई लगातार बढ़ती जाती है। इसी कारण वास्तविक संख्याओं $x > 0$ के लिए फलन वर्धमान कहलाता है।

अब मूल बिंदु के बायीं ओर के आलेख पर विचार करते हैं। यहाँ हम देखते हैं कि जैसे जैसे आलेख के अनुदिश बाएँ से दाएँ की ओर जाते हैं, आलेख की ऊँचाई लगातार घटती जाती है। फलस्वरूप वास्तविक संख्याओं $x < 0$ के लिए फलन ह्रासमान कहलाता है।

हम अब एक अंतराल में वर्धमान या ह्रासमान फलनों की निम्नलिखित विश्लेषणात्मक परिभाषा देंगे।

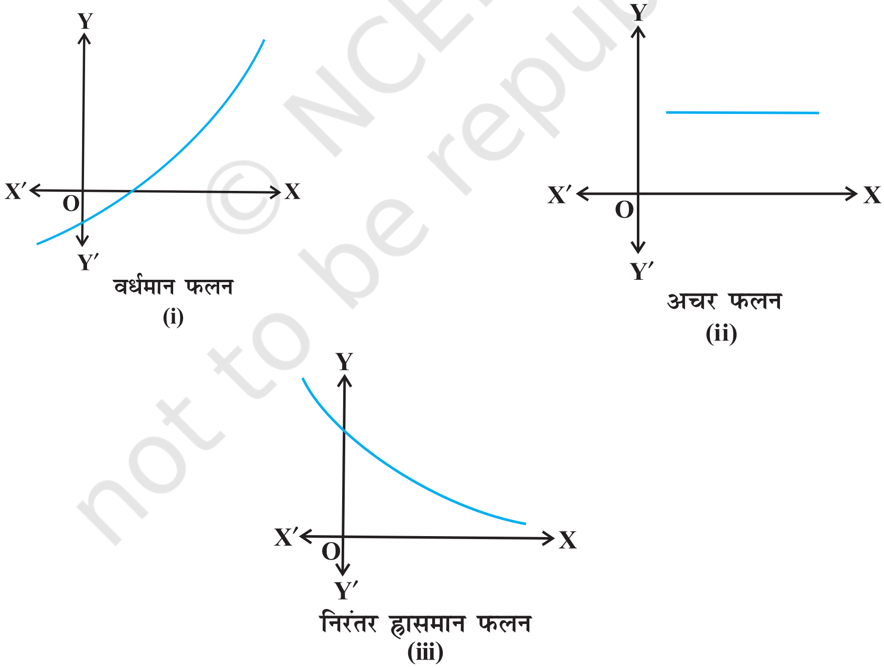
परिभाषा 1 मान लीजिए वास्तविक मान फलन f के प्रांत में I एक अंतराल है। तब f

(i) अंतराल I में वर्धमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

(ii) अंतराल I में ह्रासमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

(iii) अंतराल I में अचर है, यदि $f(x) = c, x \in$ I जहाँ c एक अचर है।

इस प्रकार के फलनों का आलेखीय निरूपण आकृति 6.2 में देखिए।



आकृति 6.2

अब हम एक बिंदु पर वर्धमान या ह्रासमान फलन को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 2 मान लीजिए कि वास्तविक मानों के परिभाषित फलन f के प्रांत में एक बिंदु x_0 है तब x_0 पर f वर्धमान और ह्रासमान कहलाता है यदि x_0 को अंतर्विष्ट करने वाले एक ऐसे विवृत्त अंतराल I का अस्तित्व इस प्रकार है कि I में, f क्रमशः वर्धमान और ह्रासमान है

आइए इस परिभाषा को वर्धमान फलन के लिए स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 7 दिखाइए कि प्रदत्त फलन $f(x) = 7x - 3$, **R** पर एक वर्धमान फलन है।

हल मान लीजिए **R** में x_1 और x_2 कोई दो संख्याएँ हैं, तब

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2$$
$$\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

इस प्रकार, परिभाषा 1 से परिणाम निकलता है कि **R** पर f एक वर्धमान फलन है।

अब हम वर्धमान और ह्रासमान फलनों के लिए प्रथम अवकलज परीक्षण प्रस्तुत करेंगे। इस परीक्षण की उपपत्ति में अध्याय 5 में अध्ययन की गई मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

प्रमेय 1 मान लीजिए कि f अंतराल $[a,b]$ पर संतत और विवृत्त अंतराल (a,b) पर अवकलनीय है। तब

(a) $[a,b]$ में f वर्धमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) \geq 0$ है।

(b) $[a,b]$ में f ह्रासमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) \leq 0$ है।

(c) $[a,b]$ में f एक अचर फलन है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) = 0$ है।

उपपत्ति (a) मान लीजिए $x_1, x_2 \in [a, b]$ इस प्रकार हैं कि $x_1 < x_2$ तब मध्य मान प्रमेय से x_1 और x_2 के मध्य एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1)$$

अर्थात् $$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad (\text{क्योंकि } f'(c) > 0)$$

अर्थात् $$f(x_2) > f(x_1)$$

इस प्रकार, हम देखते हैं, कि

$$[a,b] \text{ के सभी } x_1, x_2 \text{ के लिए } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

अतः $[a,b]$ में f एक वर्धमान फलन है।

भाग (b) और (c) की उपपत्ति इसी प्रकार है। पाठकों के लिए इसे अभ्यास हेतु छोड़ा जाता है।

टिप्पणी

इस सदंर्भ में एक अन्य सामान्य प्रमेय के अनुसार यदि किसी अंतराल के अंत्य बिंदुओं के अतिरिक्त $f'(x) > 0$ जहाँ x, अंतराल में कोई अवयव है और f उस अंतराल में संतत है तब f को वर्धमान कहते हैं। इसी प्रकार यदि किसी अंतराल के अंत्य बिंदुओं के सिवाय $f^1(x) < 0$ जहाँ x अंतराल का कोई अवयव है और f उस अंतराल में संतत है तब f को ह्रासमान कहते हैं।

उदाहरण 8 दिखाइए कि प्रदत्त फलन f,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x,\ x \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{R}$ पर वर्धमान फलन है।

हल ध्यान दीजिए कि

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= 3(x-1)^2 + 1 > 0, \quad \text{सभी } x \in \mathbf{R} \text{ के लिए} \end{aligned}$$

इसलिए फलन f, $\mathbf{R}$ पर वर्धमान है।

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त फलन $f(x) = \cos x$

(a) $(0, \pi)$ में ह्रासमान है

(b) $(\pi, 2\pi)$, में वर्धमान है

(c) $(0, 2\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

हल ध्यान दीजिए कि $f'(x) = -\sin x$

(a) चूँकि प्रत्येक $x \in (0, \pi)$ के लिए $\sin x > 0$, हम पाते हैं कि $f'(x) < 0$ और इसलिए $(0, \pi)$ में f ह्रासमान है।

(b) चूँकि प्रत्येक $x \in (\pi, 2\pi)$ के लिए $\sin x < 0$, हम पाते हैं कि $f'(x) > 0$ और इसलिए $(\pi, 2\pi)$ में f वर्धमान है।

(c) उपरोक्त (a) और (b) से स्पष्ट है कि $(0, 2\pi)$ में f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

उदाहरण 10 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f

(a) वर्धमान है (b) ह्रासमान है

हल यहाँ

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

या $$f'(x) = 2x - 4$$

इसलिए, $f'(x) = 0$ से $x = 2$ प्राप्त होता है। अब बिंदु $x = 2$ वास्तविक रेखा को दो असंयुक्त अंतरालों, नामतः $(-\infty, 2)$ और $(2, \infty)$ (आकृति 6.3) में विभक्त करता है। अंतराल $(-\infty, 2)$ में $f'(x) = 2x - 4 < 0$ है।

आकृति 6.3

इसलिए, इस अंतराल में, f ह्रासमान है। अंतराल $(2, \infty)$, में $f'(x) > 0$ है, इसलिए इस अंतराल में फलन f वर्धमान है।

उदाहरण 11 वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत्त फलन f, (a) वर्धमान (b) ह्रासमान है।

हल यहाँ

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

या
$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$
$$= 12(x^2 - x - 6)$$
$$= 12(x - 3)(x + 2)$$

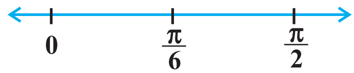
आकृति 6.4

इसलिए $f'(x) = 0$ से $x = -2, 3$ प्राप्त होते हैं। $x = -2$ और $x = 3$ वास्तविक रेखा को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभक्त करता है (आकृति 6.4)।

अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में $f'(x)$ धनात्मक है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में $f'(x)$ ऋणात्मक है। फलस्वरूप फलन f अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में वर्धमान है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में फलन ह्रासमान है। तथापि f, **R** पर न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिह्न	फलन f की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f वर्धमान है
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ह्रासमान है
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f वर्धमान है

उदाहरण 12 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें प्रदत्त फलन $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में (a) वर्धमान है। (b) ह्रासमान है।



आकृति 6.5

हल ज्ञात है कि

$$f(x) = \sin 3x$$

या $$f'(x) = 3\cos 3x$$

इसलिए, $f'(x) = 0$ से मिलता है $\cos 3x = 0$ जिससे $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (क्योंकि $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$) प्राप्त होता है। इसलिए, $x = \frac{\pi}{6}$ और $\frac{\pi}{2}$ है। अब बिंदु $x = \frac{\pi}{6}$, अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ को दो असंयुक्त अंतरालों $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ और $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ में विभाजित करता है।

पुनः सभी $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ के लिए $f'(x) > 0$ क्योंकि $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$ और सभी $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए $f'(x) < 0$ क्योंकि $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x \le \frac{3\pi}{2}$

इसलिए, अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ में f वर्धमान है और अंतराल $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है। इसके अतिरिक्त दिया गया फलन $x = 0$ तथा $x = \frac{\pi}{6}$ पर संतत भी है। इसलिए प्रमेय 1 के द्वारा, f, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ में वर्धमान और $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ में ह्रासमान है।

उदाहरण 13 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f, वर्धमान या ह्रासमान है।

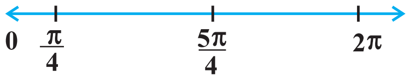
हल ज्ञात है कि

$$f(x) = \sin x + \cos x, \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

या $$f'(x) = \cos x - \sin x$$

अब $f'(x) = 0$ से $\sin x = \cos x$ जिससे हमें $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ प्राप्त होते हैं। क्योंकि $0 \le x \le 2\pi$,

बिंदु $x=\frac{\pi}{4}$ और $x=\frac{5\pi}{4}$ अंतराल $[0, 2\pi]$ को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में विभक्त करते हैं।



आकृति 6.6

ध्यान दीजिए कि $f'(x)>0$ यदि $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$

अतः अंतरालों $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में फलन f वर्धमान है।

और $f'(x)<0$, यदि $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

अतः f अंतराल $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिह्न	फलन की प्रकृति
$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	>0	f वर्धमान है
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	<0	f ह्रासमान है
$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$	>0	f वर्धमान है

प्रश्नावली 6.2

1. सिद्ध कीजिए **R** पर $f(x) = 3x + 17$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है।

2. सिद्ध कीजिए कि **R** पर $f(x) = e^{2x}$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है।

3. सिद्ध कीजिए $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन

(a) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है (b) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में ह्रासमान है

(c) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान

5. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f

(a) वर्धमान (b) ह्रासमान

6. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन f वर्धमान या ह्रासमान है:

(a) $f(x)\ x^2 + 2x + 5$ (b) $f(x) 10 - 6x - 2x^2$

(c) $f(x) -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $f(x)\ 6 - 9x - x^2$

(e) $f(x)\ (x + 1)^3\ (x - 3)^3$

7. सिद्ध कीजिए कि $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}, x > -1$, अपने संपूर्ण प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

8. x के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = [x(x-2)]^2$ एक वर्धमान फलन है।

9. सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ में $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$, θ का एक वर्धमान फलन है।

10. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में वर्धमान फलन है।

11. सिद्ध कीजिए कि $(-1, 1)$ में $f(x) = x^2 - x + 1$ से प्रदत्त फलन न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

12. निम्नलिखित में कौन से फलन $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है ?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन f ह्रासमान है?

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) इनमें से कोई नही

14. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल $[1, 2]$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है।

15. मान लीजिए $[-1, 1]$ से असंयुक्त एक अंतराल I हो तो सिद्ध कीजिए कि I में $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ से प्रदत्त फलन f, वर्धमान है।

16. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान और $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ में ह्रासमान है।

17. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log|\cos x|$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान और $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ में ह्रासमान है।

18. सिद्ध कीजिए कि **R** में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

19. निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2 e^{-x}$ वर्धमान है?

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

6.4 उच्चतम और निम्नतम (Maxima and Minima)

इस अनुच्छेद में, हम विभिन्न फलनों के उच्चतम और निम्नतम मानों की गणना करने में अवकलज की संकल्पना का प्रयोग करेंगे। वास्तव में हम एक फलन के आलेख के वर्तन बिंदुओं (Turning points) को ज्ञात करेंगे और इस प्रकार उन बिंदुओं को ज्ञात करेंगे जिन पर आलेख स्थानीय अधिकतम (या न्यूनतम) पर पहुँचता है। इस प्रकार के बिंदुओं का ज्ञान एक फलन का आलेख खींचने में बहुत उपयोगी होता है। इसके अतिरिक्त हम एक फलन का निरपेक्ष उच्चतम मान (Absolute maximum value) ओर निरपेक्ष न्यूनतम मान (Absolute minimum value) भी ज्ञात करेंगे जो कई अनुप्रयुक्त समस्याओं के हल के लिए आवश्यक हैं।

आइए हम दैनिक जीवन की निम्नलिखित समस्याओं पर विचार करें

(i) संतरों के वृक्षों के एक बाग से होने वाला लाभ फलन $P(x) = ax + bx^2$ द्वारा प्रदत्त है जहाँ a, b अचर हैं और x प्रति एकड़ में संतरे के वृक्षों की संख्या है। प्रति एकड़ कितने वृक्ष अधिकतम लाभ देगें?

(ii) एक 60 m ऊँचे भवन से हवा में फेंकी गई एक गेंद $h(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ के द्वारा निर्धारित पथ के अनुदिश चलती है, जहाँ x भवन से गेंद की क्षैतिज दूरी और $h(x)$ उसकी ऊँचाई है। गेंद कितनी अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचेगी?

(iii) शत्रु का एक अपाचे हेलिकॉप्टर वक्र $f(x) = x^2 + 7$ द्वारा प्रदत्त पथ के अनुदिश उड़ रहा है। बिंदु $(1, 2)$ पर स्थित एक सैनिक उस हेलिकॉप्टर को गोली मारना चाहता है जब हेलिकॉप्टर उसके निकटतम हो। यह निकटतम दूरी कितनी है?

उपर्युक्त समस्याओं में कुछ सर्वसामान्य है अर्थात् हम प्रदत्त फलनों के उच्चतम अथवा निम्नतम मान ज्ञात करना चाहते हैं। इन समस्याओं को सुलझाने के लिए हम विधिवत एक फलन का अधिकतम मान या न्यूनतम मान व स्थानीय उच्चतम व स्थानीय निम्नतम के बिंदुओं और इन बिंदुओं को निर्धारित करने के परीक्षण को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 3 मान लीजिए एक अंतराल I में एक फलन f परिभाषित है, तब

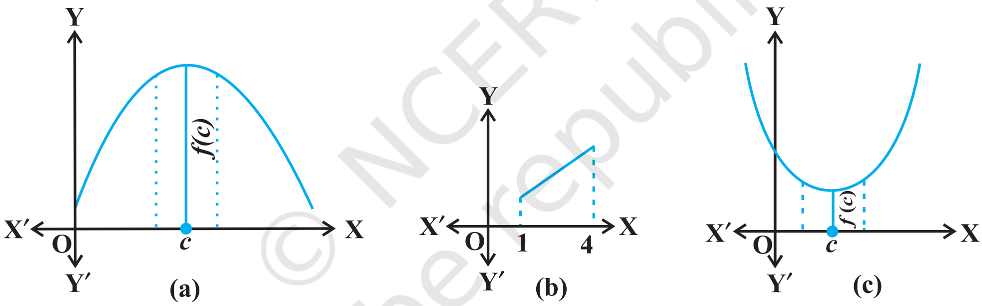
(a) f का उच्चतम मान I में होता है, यदि I में एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f(c) \geq f(x)$, $\forall\ x \in$ I

संख्या $f(c)$ को I में f का उच्चतम मान कहते हैं और बिंदु c को I में f के उच्चतम मान वाला बिंदु कहा जाता है।

(b) f का निम्नतम मान I में होता है यदि I में एक बिंदु c का अस्तित्व है इस प्रकार कि $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in$ I

संख्या $f(c)$ को I में f का निम्नतम मान कहते हैं और बिंदु c को I में f के निम्नतम मान वाला बिंदु कहा जाता है।

(c) I में f एक चरम मान (extreme value) रखने वाला फलन कहलाता है यदि I में एक ऐसे बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f(c)$, f का उच्चतम मान अथवा निम्नतम मान है।
इस स्थिति में $f(c)$, I में f का चरम मान कहलाता है और बिंदु c एक चरम बिंदु कहलाता है।



आकृति 6.7

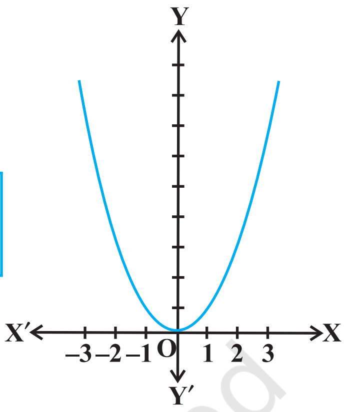
टिप्पणी आकृति 6.7 (a), (b) और (c) में हमने कुछ विशिष्ट फलनों के आलेख प्रदर्शित किए हैं जिनसे हमें एक बिंदु पर उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात करने में सहायता मिलती है। वास्तव में आलेखों से हम उन फलनों के जो अवकलित नहीं होते हैं। उच्चतम / निम्नतम मान भी ज्ञात कर सकते हैं, (उदाहरण 27)।

उदाहरण 14 $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ से प्रदत्त फलन f के उच्चतम और निम्नतम मान, यदि कोई हों तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए फलन के आलेख (आकृति 6.8) से हम कह सकते हैं कि $f(x) = 0$ यदि $x = 0$ है और

$$f(x) \geq 0, \text{ सभी } x \in \mathbf{R} \text{ के लिए।}$$

इसलिए, f का निम्नतम मान 0 है और f के निम्नतम मान का बिंदु $x = 0$ है। इसके अतिरिक्त आलेख से यह भी देखा जा सकता है कि फलन f का कोई उच्चतम मान नहीं है, अतः **R** में f के उच्चतम मान का बिंदु नहीं है।



आकृति 6.8

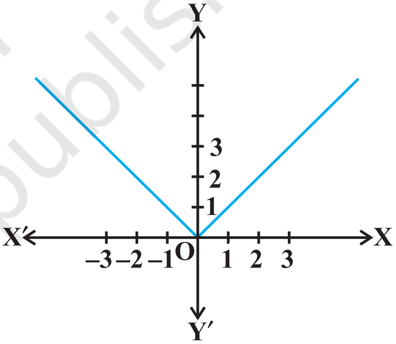
टिप्पणी यदि हम फलन के प्रांत को केवल $[-2, 1]$ तक सीमित करें तब $x = -2$ पर f का उच्चतम मान $(-2)^2 = 4$ है।

उदाहरण 15 $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन f के उच्चतम और निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए फलन के आलेख (आकृति 6.9) से

$f(x) \geq 0$, सभी $x \in \mathbf{R}$ और $f(x) = 0$ यदि $x = 0$ है।

इसलिए, f का निम्नतम मान 0 है और f के निम्नतम मान का बिंदु $x = 0$ है। और आलेख से यह भी स्पष्ट है **R** में f का कोई उच्चतम मान नहीं है। अतः **R** में कोई उच्चतम मान का बिंदु नहीं है।



आकृति 6.9

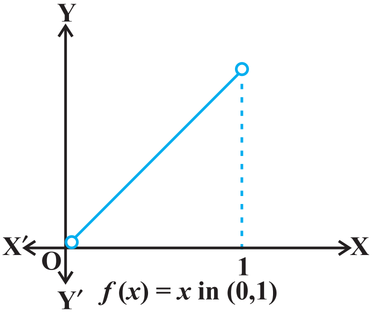
टिप्पणी

(i) यदि हम फलन के प्रांत को केवल $[-2, 1]$ तक सीमित करें, तो f का उच्चतम मान $|-2| = 2$ होगा।

(ii) उदाहरण 27 में ध्यान दें कि फलन f, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 16 $f(x) = x, x \in (0, 1)$ द्वारा प्रदत्त फलन के उच्चतम और निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिए अंतराल $(0, 1)$ में दिया फलन एक निरंतर वर्धमान फलन है। फलन f के आलेख (आकृति 6.10) से ऐसा प्रतीत होता है कि फलन का निम्नतम मान 0 के दायीं ओर के निकटतम बिंदु और उच्चतम मान 1 के बायीं ओर के निकटतम बिंदु पर होना चाहिए। क्या ऐसे बिंदु उपलब्ध हैं? ऐसे बिंदुओं को अंकित करना संभव नहीं है। वास्तव में, यदि 0 का निकटतम बिंदु x_0 हो तो $\frac{x_0}{2} < x_0$ सभी $x_0 \in (0,1)$



आकृति 6.10

के लिए और यदि 1 का निकटतम बिंदु x_1 हो तो सभी $x_1 \in (0,1)$ के लिए $\frac{x_1+1}{2} > x_1$ है।

इसलिए दिए गए फलन का अंतराल (0, 1) में न तो कोई उच्चतम मान है और न ही कोई निम्नतम मान है।

टिप्पणी पाठक देख सकते हैं कि उदाहरण 28 में यदि f के प्रांत में 0 और 1 को सम्मिलित कर लिया जाए अर्थात f के प्रांत को बढ़ाकर [0, 1] कर दिया जाए तो फलन का निम्नतम मान $x = 0$ पर 0 और उच्चतम मान $x = 1$ पर 1 है। वास्तव में हम निम्नलिखित परिणाम पाते हैं (इन परिणामों की उपपत्ति इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर है)।

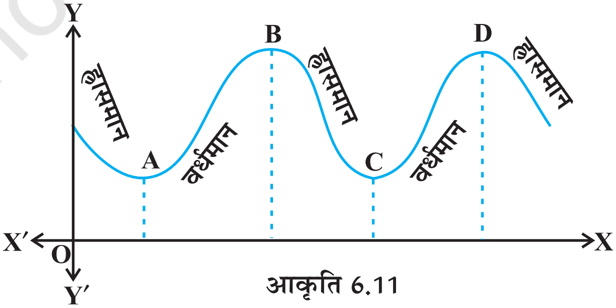
प्रत्येक एकदिष्ट (monotonic) फलन अपने परिभाषित प्रांत के अंत्य बिंदुओं पर उच्चतम/निम्नतम ग्रहण करता है।

इस परिणाम का अधिक व्यापक रूप यह है कि संवृत्त अंतराल पर प्रत्येक संतत फलन के उच्चतम और निम्नष्ठ मान होते हैं।

टिप्पणी किसी अंतराल I में एकदिष्ट फलन से हमारा अभिप्राय है कि I में फलन या तो वर्धमान है या ह्रासमान है।

इस अनुच्छेद में एक संवृत्त अंतराल पर परिभाषित फलन के उच्चतम और निम्नतम मानों के बारे में बाद में विचार करेंगे।

आइए अब आकृति 6.11 में दर्शाए गए किसी फलन के आलेख का अध्ययन करें। देखिए कि फलन का आलेख बिंदुओं A, B, C तथा D पर वर्धमान से ह्रासमान या विलोमतः ह्रासमान से वर्धमान होता है। इन बिंदुओं को फलन के वर्तन बिंदु कहते हैं। पुनः ध्यान दीजिए कि वर्तन बिंदुओं पर आलेख में एक छोटी पहाड़ी या छोटी घाटी बनती है। मोटे तौर पर बिंदुओं A तथा C में से प्रत्येक के सामीप्य (Neighbourhood) में फलन का निम्नतम मान है, जो उनकी अपनी-अपनी घाटियों के अधोभागों (Bottom) पर है। इसी प्रकार बिंदुओं B तथा D में से प्रत्येक के सामीप्य में फलन का उच्चतम मान है, जो उनकी अपनी-अपनी पहाड़ियों के शीर्षों पर है। इस कारण से बिंदुओं A तथा C को स्थानीय



आकृति 6.11

निम्नतम मान (या सापेक्ष निम्नतम मान) का बिंदु तथा B और D को स्थानीय उच्चतम मान (या सापेक्ष उच्चतम मान) के बिंदु समझा जा सकता है। फलन के स्थानीय उच्चतम मान और स्थानीय निम्नतम मानों को क्रमशः फलन का स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम कहा जाता है।

अब हम औपचारिक रूप से निम्नलिखित परिभाषा देते हैं।

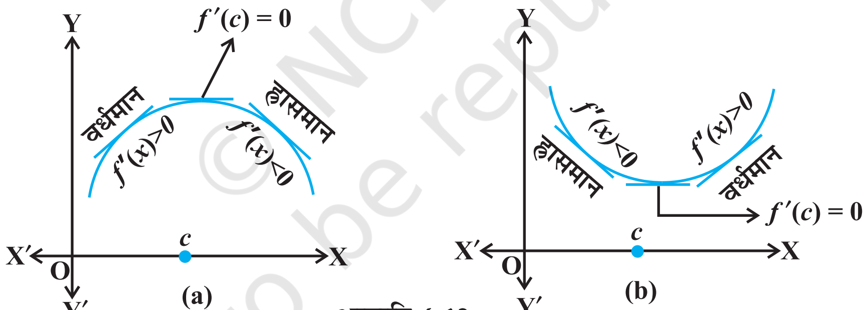
परिभाषा 4 मान लीजिए f एक वास्तविक मानीय फलन है और c फलन f के प्रांत में एक आंतरिक बिंदु है। तब

(a) c को स्थानीय उच्चतम का बिंदु कहा जाता है यदि एक ऐसा $h > 0$ है कि $(c-h, c+h)$ में सभी x के लिए $f(c) \geq f(x)$ हो। तब $f(c)$, फलन f का स्थानीय उच्चतम मान कहलाता है।

(b) c को स्थानीय निम्नतम का बिंदु कहा जाता है यदि एक ऐसा $h > 0$ है कि $(c-h, c+h)$ में सभी x के लिए $f(c) \leq f(x)$ हो। तब $f(c)$, फलन f का स्थानीय निम्नतम मान कहलाता है।

ज्यामितीय दृष्टिकोण से, उपर्युक्त परिभाषा का अर्थ है कि यदि $x = c$, फलन f का स्थानीय उच्चतम का बिंदु है, तो c के आसपास का आलेख आकृति 6.12(a) के अनुसार होगा। ध्यान दीजिए कि अंतराल $(c-h, c)$ में फलन f वर्धमान (अर्थात् $f'(x) > 0$) और अंतराल $(c, c+h)$ में फलन ह्रासमान (अर्थात् $f'(x) < 0$) है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $f'(c)$ अवश्य ही शून्य होना चाहिए।



आकृति 6.12

इसी प्रकार, यदि c, फलन f का स्थानीय निम्नतम बिंदु है तो c के आसपास का आलेख आकृति 6.14(b) के अनुसार होगा। यहाँ अंतराल $(c-h, c)$ में f ह्रासमान (अर्थात् $f'(x) < 0$) है और अंतराल $(c, c+h)$ में f वर्धमान (अर्थात, $f'(x) > 0$) है। यह पुनः सुझाव देता है कि $f'(c)$ अवश्य ही शून्य होना चाहिए।

उपर्युक्त परिचर्चा से हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है (बिना उपपत्ति)।

प्रमेय 2 मान लीजिए एक विवृत्त अंतराल I में f एक परिभाषित फलन है। मान लीजिए $c \in I$ कोई बिंदु है। यदि f का $x = c$ पर एक स्थानीय उच्चतम या एक स्थानीय निम्नतम का बिंदु है तो $f'(c) = 0$ है या f बिंदु c पर अवकलनीय नहीं है।

टिप्पणी उपरोक्त प्रमेय का विलोम आवश्यक नहीं है कि सत्य हो जैसे कि एक बिंदु जिस पर अवकलज शून्य हो जाता है तो यह आवश्यक नहीं है कि वह स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम का बिंदु है। उदाहरणतया यदि $f(x) = x^3$ हो तो $f'(x) = 3x^2$ और इसलिए $f'(0) = 0$ है। परन्तु 0 न तो स्थानीय उच्चतम और न ही स्थानीय निम्नतम बिंदु है। आकृति 6.15

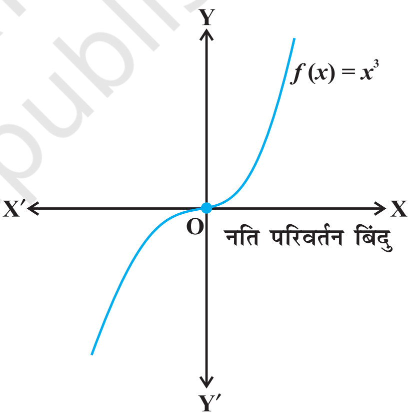
टिप्पणी फलन f के प्रांत में एक बिंदु c, जिस पर या तो $f'(c) = 0$ है या f अवकलनीय नहीं है, f का क्रांतिक बिंदु (Critical Point) कहलाता है। ध्यान दीजिए कि यदि f बिंदु c पर संतत है और $f'(c) = 0$ है तो यहाँ एक ऐसे $h > 0$ का अस्तित्व है कि अंतराल $(c - h, c + h)$ में f अवकलनीय है।

अब हम केवल प्रथम अवकलजों का प्रयोग करके स्थानीय उच्चतम बिंदु या स्थानीय निम्नतम बिंदुओं को ज्ञात करने की क्रियाविधि प्रस्तुत करेंगे।

प्रमेय 3 (प्रथम अवकलज परीक्षण) मान लीजिए कि एक फलन f किसी विवृत्त अंतराल I पर परिभाषित है। मान लीजिए कि f अंतराल I में स्थित क्रांतिक बिंदु c पर संतत है। तब

(i) x के बिंदु c से हो कर बढ़ने के साथ-साथ, यदि $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है अर्थात् यदि बिंदु c के बायीं ओर और उसके पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) > 0$ तथा c के दायीं ओर और पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) < 0$ हो तो c स्थानीय उच्चतम एक बिंदु है।

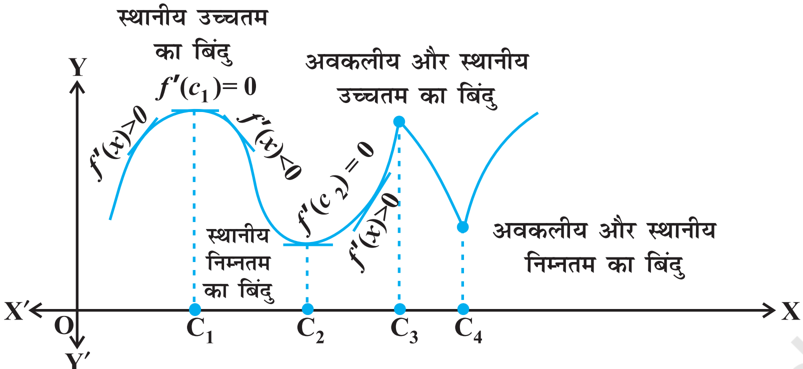
(ii) x के बिंदु c से हो कर बढ़ने के साथ-साथ यदि $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है, अर्थात् यदि बिंदु c के बायीं ओर और उसके पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) < 0$ तथा c के दायीं ओर और उसके पर्याप्त निकट के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x) > 0$ हो तो c स्थानीय निम्नतम बिंदु है।



आकृति 6.13

(iii) x के बिंदु c से हो कर बढ़ने के साथ यदि $f'(x)$ का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है, तो c न तो स्थानीय उच्चतम बिंदु है और न स्थानीय निम्नतम बिंदु। वास्तव में, इस प्रकार के बिंदु को नति परिवर्तन बिंदु (Point of Inflection) (आकृति 6.13) कहते हैं।

टिप्पणी यदि c फलन f का एक स्थानीय उच्चतम बिंदु है तो $f(c)$ फलन f का स्थानीय उच्चतम मान है। इसी प्रकार, यदि c फलन f का एक स्थानीय निम्नतम बिंदु है, तो $f(c)$ फलन f का स्थानीय निम्नतम मान है। आकृतियाँ 6.13 और 6.14 प्रमेय 3 की ज्यामितीय व्याख्या करती है।



आकृति 6.14

उदाहरण 17 $f(x) = x^3 - 3x + 3$ द्वारा प्रदत्त फलन के लिए स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के सभी बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

या $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

या $$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ और } x = -1$$

इस प्रकार, केवल $x = \pm 1$ ही ऐसे क्रांतिक बिंदु हैं जो f के स्थानीय उच्चतम और/या स्थानीय निम्नतम संभावित बिंदु हो सकते हैं। पहले हम $x = 1$ पर परीक्षण करते हैं।

ध्यान दीजिए कि 1 के निकट और 1 के दायीं ओर $f'(x) > 0$ है और 1 के निकट और 1 के बायीं ओर $f'(x) < 0$ है। इसलिए प्रथम अवकलज परीक्षण द्वारा $x = 1$, स्थानीय निम्नतम बिंदु है और स्थानीय निम्नतम मान $f(1) = 1$ है।

$x = -1$ की दशा में, -1 के निकट और -1 के बायीं ओर $f'(x) > 0$ और -1 के निकट और -1 के दायीं ओर $f'(x) < 0$ है। इसलिए प्रथम अवकलज परीक्षण द्वारा $x = -1$ स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और स्थानीय उच्चतम मान $f(-1) = 5$ है।

x के मान		**$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ का चिह्न**
1 के निकट	दायीं ओर (माना 1.1)	>0
	बायीं ओर (माना 0.9)	<0
-1 के निकट	दायीं ओर (माना -0.9)	<0
	बायीं ओर (माना -1.1)	>0

उदाहरण 18 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

या
$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2$$

या
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

इस प्रकार केवल $x = 1$ ही f का क्रांतिक बिंदु है। अब हम इस बिंदु पर f के स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम के लिए परीक्षण करेंगे। देखिए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $f'(x) \geq 0$ और विशेष रूप से 1 के समीप और 1 के बायीं ओर और दायीं ओर के मानों के लिए $f'(x) > 0$ है। इसलिए प्रथम अवकलज परीक्षण से बिंदु $x = 1$ न तो स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और न ही स्थानीय निम्नतम का बिंदु है। अत: $x = 1$ एक नति परिवर्तन (inflection) बिंदु है।

> **टिप्पणी** ध्यान दीजिए कि उदाहरण 30 में $f'(x)$ का चिह्न अंतराल **R** में कभी भी नहीं बदलता। अत: f के आलेख में कोई भी वर्तन बिंदु नहीं है और इसलिए स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम का कोई भी बिंदु नहीं है।

अब हम किसी प्रदत्त फलन के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के परीक्षण के लिए एक दूसरी क्रियाविधि प्रस्तुत करेंगे। यह परीक्षण प्रथम अवकलज परीक्षण की तुलना में प्राय: सरल है।

प्रमेय 4 मान लीजिए कि f, किसी अंतराल I में परिभाषित एक फलन है तथा $c \in$ I है। मान लीजिए कि f, c पर दो बार लगातार अवकलनीय है। तब

(i) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) < 0$ तो $x = c$ स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है।
इस दशा में f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

(ii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) > 0$ तो $x = c$ स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है।
इस दशा में f का स्थानीय निम्नतम मान $f(c)$ है।

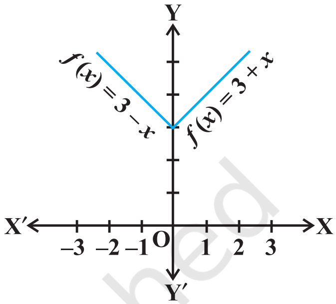
(iii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) = 0$ है तो यह परीक्षण असफल हो जाता है।
इस स्थिति में हम पुन: प्रथम अवकलज परीक्षण पर वापस जाकर यह ज्ञात करते हैं कि c उच्चतम, निम्नतम या नति परिवर्तन का बिंदु है।

> **टिप्पणी** बिंदु c पर f दो बार लगातार अवकलनीय है इससे हमारा तात्पर्य कि c पर f के द्वितीय अवकलज का अस्तित्व है।

उदाहरण 19 $f(x) = 3 + |x|, x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन f का स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि दिया गया $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। इस प्रकार द्वितीय अवकलज परीक्षण असफल हो जाता है। अब हम प्रथम अवकलज परीक्षण करते हैं। नोट कीजिए कि 0 फलन f का एक

क्रांतिक बिंदु है। अब 0 के बायीं ओर, $f(x) = 3 - x$ और इसलिए $f'(x) = -1 < 0$ है साथ ही 0 के दायीं ओर, $f(x) = 3 + x$ है और इसलिए $f'(x) = 1 > 0$ है। अतएव, प्रथम अवकलज परीक्षण द्वारा $x = 0, f$ का स्थानीय निम्नतम बिंदु है तथा f का स्थानीय न्यूनतम मान $f(0) = 3$ है।



आकृति 6.15

उदाहरण 20 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

या $$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x-1)(x+2)$$

या $x = 0, x = 1$ और $x = -2$ पर $f'(x) = 0$ है।

अब $$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 2)$$

अतः $$\begin{cases} f''(0) = -24 < 0 \\ f''(1) = 36 > 0 \\ f''(-2) = 72 > 0 \end{cases}$$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परीक्षण द्वारा $x = 0$ स्थानीय उच्चतम बिंदु है और f का स्थानीय उच्चतम मान $f(0) = 12$ है। जबकि $x = 1$ और $x = -2$ स्थानीय निम्नतम बिंदु है और स्थानीय निम्नतम मान $f(1) = 7$ और $f(-2) = -20$ है।

उदाहरण 21 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

या $$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2 \\ f''(x) = 12(x-1) \end{cases}$$

अब $f'(x) = 0$ से $x = -1$ प्राप्त होता है। तथा $f''(1) = 0$ है। इसलिए यहाँ द्वितीय अवकलज परीक्षण असफल है। अतः हम प्रथम अवकलज परीक्षण की ओर वापस जाएँगे।

हमने पहले ही (उदाहरण 30) में देखा है कि प्रथम अवकलज परीक्षण की दृष्टि से $x = 1$ न तो स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और न ही स्थानीय निम्नतम का बिंदु है अपितु यह नति परिवर्तन का बिंदु है।

उदाहरण 22 ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है और जिनके वर्गों का योग न्यूनतम हो।

हल मान लीजिए पहली संख्या x है तब दूसरी संख्या $15 - x$ है। मान लीजिए इन संख्याओं के वर्गों का योग $S(x)$ से व्यक्त होता है। तब

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2 = 2x^2 - 30x + 225$$

या
$$\begin{cases} S'(x) = 4x - 30 \\ S''(x) = 4 \end{cases}$$

अब $S'(x) = 0$ से $x = \frac{15}{2}$ प्राप्त होता है तथा $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$ है। इसलिए द्वितीय अवकलज परीक्षण द्वारा S के स्थानीय निम्नतम का बिंदु $x = \frac{15}{2}$ है। अतः जब संख्याएँ $\frac{15}{2}$ और $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ हो तो संख्याओं के वर्गों का योग निम्नतम होगा।

टिप्पणी उदाहरण 22 की भाँति यह सिद्ध किया जा सकता है कि ऐसी दो घन संख्याएँ जिनका योग k है और जिनके वर्गों का योग न्यूनतम हो तो ये संख्याएँ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ होंगी।

उदाहरण 23 बिंदु $(0, c)$ से परवलय $y = x^2$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ $\frac{1}{2} \leq c \leq 5$ है।

हल मान लीजिए परवलय $y = x^2$ पर (h, k) कोई बिंदु है। मान लीजिए (h, k) और $(0, c)$ के बीच दूरी D है। तब

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad \ldots (1)$$

क्योंकि (h, k) परवलय $y = x^2$ पर स्थित है अतः $k = h^2$ है। इसलिए (1) से

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

या
$$D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

अब
$D'(k) = 0$ से $k = \frac{2c-1}{2}$ प्राप्त होता है

ध्यान दीजिए कि जब $k < \frac{2c-1}{2}$, तब $2(k-c) + 1 < 0$, अर्थात् $D'(k) < 0$ है तथा जब $k > \frac{2c-1}{2}$

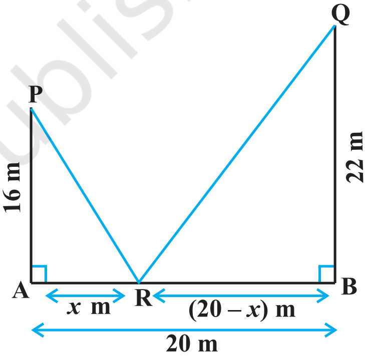
तब $2(k-c)+1>0$ है अर्थात् $D'(k)>0$ (इस प्रकार प्रथम अवकलज परीक्षण से $k=\frac{2c-1}{2}$ पर k निम्नतम है। अतः अभीष्ट न्यूनतम दूरी

$$D\left(\frac{2c-1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2c-1}{2}+\left(\frac{2c-1}{2}-c\right)^2}=\frac{\sqrt{4c-1}}{2}$$ है।

टिप्पणी पाठक ध्यान दें कि उदाहरण 23 में हमने द्वितीय अवकलज परीक्षण के स्थान पर प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग किया है क्योंकि यह सरल एवं छोटा है।

उदाहरण 24 मान लीजिए बिंदु A और B पर क्रमशः AP तथा BQ दो उर्ध्वाधर स्तंभ है। यदि AP = 16 m, BQ = 22 m और AB = 20 m हों तो AB पर एक ऐसा बिंदु R ज्ञात कीजिए ताकि $RP^2 + RQ^2$ निम्नतम हो।

हल मान लीजिए AB पर एक बिंदु R इस प्रकार है कि AR = x m है। तब RB = $(20 - x)$ m (क्योंकि AB = 20 m) आकृति 6.16 से



आकृति 6.16

$$RP^2 = AR^2 + AP^2$$

और $$RQ^2 = RB^2 + BQ^2$$

इसलिए $$RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$$
$$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 1140$$

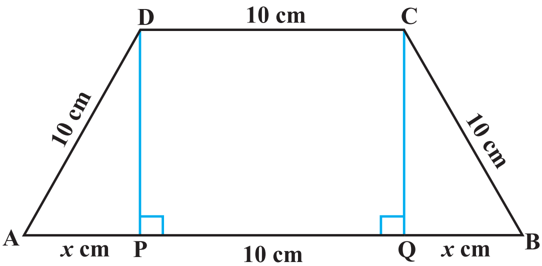
मान लीजिए कि $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$ है।

अतः $S'(x) = 4x - 40$ है।

अब $S'(x) = 0$ से $x = 10$ प्राप्त होता है और सभी x के लिए $S''(x) = 4 > 0$ है और इसलिए $S''(10) > 0$ है। इसलिए द्वितीय अवकलज परीक्षण से $x = 10$, S का स्थानीय निम्नतम का बिंदु है। अतः AB पर R की A से दूरी AR = x = 10 m है।

उदाहरण 25 यदि एक समलंब चतुर्भुज के आधार के अतिरिक्त तीनों भुजाओं की लंबायीं 10 cm है तब समलंब चतुर्भुज का अधिकतम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल अभीष्ट समलंब को आकृति 6.17 में दर्शाया गया है। AB पर DP तथा CQ लंब खींचिए। मान लीजिए $AP = x$ cm है। ध्यान दीजिए कि $\Delta APD \cong \Delta BQC$ है इसलिए $QB = x$ cm है। और पाइथागोरस प्रमेय से, $DP = QC = \sqrt{100-x^2}$ है। मान लीजिए समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल A है।



आकृति 6.17

अतः
$$A \equiv A(x)$$
$$= \frac{1}{2}(\text{समांतर भुजाओं का योग})(\text{ऊँचाई})$$
$$= \frac{1}{2}(2x+10+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$$
$$= (x+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

या
$$A'(x) = (x+10)\frac{(-2x)}{\sqrt{100-x^2}} + \left(\sqrt{100-x^2}\right)$$
$$= \frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}$$

अब $A'(x) = 0$ से $2x^2 + 10x - 100 = 0$, जिससे $x = 5$ और $x = -10$ प्राप्त होता है।

क्योंकि x दूरी को निरूपित करता है इसलिए यह ऋण नहीं हो सकता है। इसलिए $x = 5$ है। अब

$$A''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10)-(-2x^2-10x+100)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$$

$$= \frac{2x^3-300x-1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (सरल करने पर)}$$

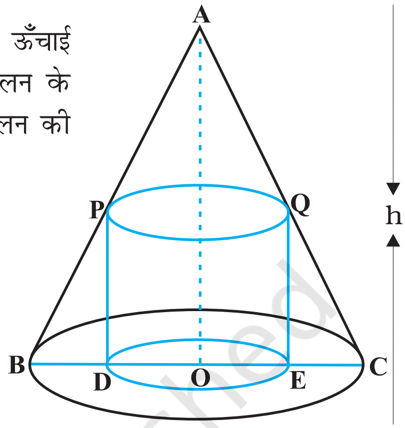
अतः
$$A''(5) = \frac{2(5)^3-300(5)-1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

इस प्रकार, $x = 5$ पर समलंब का क्षेत्रफल अधिकतम है और अधिकतम क्षेत्रफल

$$A(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}\text{ cm}^2 \text{ है।}$$

उदाहरण 26 सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

हल मान लीजिए शंकु के आधार की त्रिज्या $OC = r$ और ऊँचाई $OA = h$ है। मान लीजिए कि दिए हुए शंकु के अंतर्गत बेलन के आधार के वृत्त की त्रिज्या $OE = x$ है (आकृति 6.18)। बेलन की ऊँचाई QE के लिए:



आकृति 6.18

$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \quad (\text{क्योंकि } \Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

या $$\frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$

या $$QE = \frac{h(r-x)}{r}$$

मान लीजिए बेलन का वक्रपृष्ठ S है । तब

$$S \equiv S(x) = \frac{2\pi x h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

या $$\begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

अब $S'(x) = 0$ से $x = \frac{r}{2}$ प्राप्त होता है। क्योंकि सभी x के लिए $S''(x) < 0$ है। अतः $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$ है। इसलिए $x = \frac{r}{2}$, S का उच्चतम बिंदु है। अतः दिए शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ के बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

6.4.1 *एक संवृत्त अंतराल में किसी फलन का उच्चतम और निम्नतम मान (Maximum and Minimum Values of a Function in a Closed Interval)*

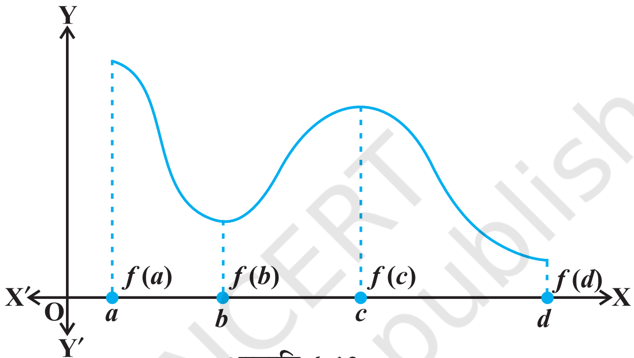
मान लीजिए $f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$ द्वारा प्रदत्त एक प्रलन f है।

ध्यान दीजिए कि $(0, 1)$ पर फलन संतत है और इस अंतराल में न तो इसका कोई उच्चतम मान है और न ही इसका कोई निम्नतम मान है।

तथापि, यदि हम f के प्रांत को संवृत्त अंतराल $[0, 1]$ तक बढ़ा दें तब भी f का शायद कोई स्थानीय उच्चतम (निम्नतम) मान नहीं होगा परंतु इसका निश्चित ही उच्चतम मान $3 = f(1)$ और

निम्नतम मान $2 = f(0)$ हैं। $x = 1$ पर f का उच्चतम मान 3, [0, 1] पर f का निरपेक्ष उच्चतम मान (महत्तम मान) (absolute maximum value) या सार्वत्रिक अधिकतम मान (global maximum or greatest value) कहलाता है। इसी प्रकार, $x = 0$ पर f का निम्नतम मान 2, [0, 1] पर f का निरपेक्ष निम्नतम मान (न्यूनतम मान) (absolute minimum value) या सार्वत्रिक न्यूनतम मान (global minimum or least value) कहलाता है।

एक संवृत्त अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित किसी संतत फलन f के संगत आकृति 6.19 में प्रदर्शित आलेख पर विचार कीजिए कि $x = b$ पर फलन f का स्थानीय निम्नतम है तथा स्थानीय निम्नतम मान $f(b)$ है। फलन का $x = c$ पर स्थानीय उच्चतम बिंदु है तथा स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।



आकृति 6.19

साथ ही आलेख से यह भी स्पष्ट है कि f का निरपेक्ष उच्चतम मान $f(a)$ तथा निरपेक्ष निम्नतम मान $f(d)$ है। इसके अतिरिक्त ध्यान दीजिए कि f का निरपेक्ष उच्चतम (निम्नतम) मान स्थानीय उच्चतम (निम्नतम) मान से भिन्न है।

अब हम एक संवृत्त अंतराल I में एक फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम के विषय में दो परिणामों (बिना उपपत्ति) के कथन बताएँगे।

प्रमेय 5 मान लीजिए एक अंतराल $I = [a, b]$ पर f एक संतत फलन है। तब f का निरपेक्ष उच्चतम मान होता है और I में कम से कम एक बार f यह मान प्राप्त करता है तथा f का निरपेक्ष निम्नतम मान होता है और I में कम से कम एक बार f यह मान प्राप्त करता है।

प्रमेय 6 मान लीजिए संवृत्त अंतराल I पर f एक अवकलनीय फलन है और मान लीजिए कि I का कोई आंतरिक बिंदु c है। तब

(i) यदि c पर f निरपेक्ष उच्चतम मान प्राप्त करता है, तो $f'(c) = 0$

(ii) यदि c पर f निरपेक्ष निम्नतम मान प्राप्त करता है, तो $f'(c) = 0$

उपर्युक्त प्रमेयों के विचार से, दिए गए संवृत्त अंतराल में किसी फलन के निरपेक्ष उच्चतम मान और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात करने के लिए विधि निम्नलिखित हैं।

व्यावहारिक विधि (Working Rule)

चरण 1: दिए गए अंतराल में f के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए अर्थात् x के वह सभी मान ज्ञात कीजिए जहाँ या तो $f'(x) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है।

चरण 2: अंतराल के अंत्य बिंदु लीजिए।

चरण 3: इन सभी बिंदुओं पर (चरण 1 व 2 में सूचीबद्ध) f के मानों की गणना कीजिए।

चरण 4: चरण 3 में गणना से प्राप्त f के मानों में से उच्चतम और निम्नतम मानों को लीजिए। यही उच्चतम मान, f का निरपेक्ष उच्चतम मान और निम्नतम मान, f का निरपेक्ष निम्नतम मान होंगे।

उदाहरण 27 अंतराल $[1, 5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत्त फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

या
$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-3)(x-2)$$

ध्यान दीजिए $f'(x) = 0$ से $x = 2$ और $x = 3$ प्राप्त होते हैं।

अब हम इन बिंदुओं और अंतराल $[1, 5]$ के अंत्य बिंदुओं अर्थात् $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ और $x = 5$ पर f के मान का परिकलन करेंगे। अब:

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$
$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$
$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$
$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

इस प्रकार, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि अंतराल $[1, 5]$ पर फलन f के लिए $x = 5$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 56 और $x = 1$ पर निरपेक्ष निम्नतम मान 24 है।

उदाहरण 28 $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ द्वारा प्रदत्त एक फलन f के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

या
$$f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

इस प्रकार $f'(x) = 0$ से $x = \dfrac{1}{8}$ प्राप्त होता है। और ध्यान दीजिए कि $x = 0$ पर $f'(x)$ परिभाषित नहीं है। इसलिए क्रांतिक बिंदु $x = 0$ और $x = \dfrac{1}{8}$ हैं। अब क्रांतिक बिंदुओं $x = 0, \dfrac{1}{8}$ और अंतराल के अंत्य बिंदुओं $x = -1$ व $x = 1$ पर फलन f के मान का परिकलन करने से

$$f(-1) = 12(-1^{\frac{4}{3}}) - 6(-1^{\frac{1}{3}}) = 18$$

$$f(0) = 12\,(0) - 6\,(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4}$$

$$f(1) = 12(1^{\frac{4}{3}}) - 6(1^{\frac{1}{3}}) = 6$$

प्राप्त होते हैं। इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि $x = -1$ पर f का निरपेक्ष उच्चतम मान 18 है और $x = \dfrac{1}{8}$ पर f का निरपेक्ष निम्नतम मान $\dfrac{-9}{4}$ है।

उदाहरण 29 शत्रु का एक अपाचे हेलिकॉप्टर वक्र $y = x^2 + 7$ के अनुदिश प्रदत्त पथ पर उड़ रहा है। बिंदु $(3, 7)$ पर स्थित एक सैनिक अपनी स्थिति से न्यूनतम दूरी पर उस हेलिकॉप्टर को गोली मारना चाहता है। न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल x के प्रत्येक मान के लिए हेलिकॉप्टर की स्थिति बिंदु $(x, x^2 + 7)$ है। इसलिए $(3, 7)$ पर स्थित सैनिक और हेलिकॉप्टर के बीच दूरी $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2 + 7 - 7)^2}$, अर्थात् $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ है।

मान लीजिए कि $$f(x) = (x - 3)^2 + x^4$$

या $$f'(x) = 2(x - 3) + 4x^3 = 2\,(x - 1)\,(2x^2 + 2x + 3)$$

इसलिए $f'(x) = 0$ से $x = 1$ प्राप्त होता है तथा $2x^2 + 2x + 3 = 0$ से कोई वास्तविक मूल प्राप्त नहीं होता है। पुनः अंतराल के अंत्य बिंदु भी नहीं है, जिन्हें उस समुच्चय में जोड़ा जाए जिनके लिए f' का मान शून्य है अर्थात् केवल एक बिंदु, नामतः $x = 1$ ही ऐसा है। इस बिंदु पर f का मान $f(1) = (1 - 3)^2 + (1)^4 = 5$ से प्रदत्त है। इस प्रकार, सैनिक एवं हेलिकॉप्टर के बीच की दूरी $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ है।

ध्यान दीजिए कि $\sqrt{5}$ या तो उच्चतम मान या निम्नतम मान है। क्योंकि

$$\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5} \text{ है।}$$

इससे यह निष्कर्ष निकला कि $\sqrt{f(x)}$ का निम्नतम मान $\sqrt{5}$ है। अतः सैनिक और हेलिकॉप्टर के बीच की निम्नतम दूरी $\sqrt{5}$ है।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई तो, ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = (2x - 1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(iii) $f(x) = -(x - 1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हों, तो ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = |x + 2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x + 1| + 3$

(iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\sin 4x + 3|$

(v) $h(x) = x + 1, x \in (-1, 1)$

3. निम्नलिखित फलनों के स्थानीय उच्चतम या निम्नतम, यदि कोई हों तो, ज्ञात कीजिए तथा स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम मान, जैसी स्थिति हो, भी ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(iv) $f(x) = \sin x - \cos x,\ 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x},\quad x > 0$

(vii) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1-x},\ 0 < x < 1$

4. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलनों का उच्चतम या निम्नतम मान नहीं है:

(i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5. प्रदत्त अंतरालों में निम्नलिखित फलनों के निरपेक्ष उच्चतम मान और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = \sin x + \cos x\ , x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \dfrac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$

6. यदि लाभ फलन $p(x) = 41 - 72x - 18x^2$ से प्रदत्त है तो किसी कंपनी द्वारा अर्जित उच्चतम लाभ ज्ञात कीजिए।

7. अंतराल $[0, 3]$ पर $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ के उच्चतम मान ओर निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

8. अंतराल $[0, 2\pi]$ के किन बिंदुओं पर फलन $\sin 2x$ अपना उच्चतम मान प्राप्त करता है?

9. फलन $\sin x + \cos x$ का उच्चतम मान क्या है?

10. अंतराल [1, 3] में $2x^3 - 24x + 107$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए। इसी फलन का अंतराल [–3, –1] में भी महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि दिया है कि अंतराल [0, 2] में $x = 1$ पर फलन $x^4 - 62x^2 + ax + 9$ उच्चतम मान प्राप्त करता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

12. $[0, 2\pi]$ पर $x + \sin 2x$ का उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

13. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

14. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए ताकि $x + y = 60$ और xy^3 उच्चतम हो।

15. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिनका योग 35 हो और गुणनफल $x^2 y^5$ उच्चतम हो।

16. ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 16 हो और जिनके घनों का योग निम्नतम हो।

17. 18 cm भुजा के टिन के किसी वर्गाकार टुकड़े से प्रत्येक कोने पर एक वर्ग काटकर तथा इस प्रकार बनें टिन के फलकों को मोड़ कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चतम हो?

18. 45 cm × 24 cm की टिन की आयताकार चादर के कोनों पर वर्ग काटकर तथा इस प्रकार बनें टिन के फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चतम हो।

19. सिद्ध किजिए कि एक दिए वृत्त के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चतम होता है।

20. सिद्ध किजिए कि प्रदत्त पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है।

21. 100 cm^3 आयतन वाले डिब्बे सभी बंद बेलनाकार (लंब वृत्तीय) डिब्बों में से न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल वाले डिब्बे की विमाएँ ज्ञात किजिए।

22. एक 28 cm लंबे तार को दो टुकड़ों में विभक्त किया जाना है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे वे वृत्त बनाया जाना है। दोनों टुकड़ों की लंबायीं कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो?

23. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम शंकु का आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है।

24. सिद्ध कीजिए कि न्यूनतम पृष्ठ का दिए आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई, आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुनी होती है।

25. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

26. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लंब वृत्तीय शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

प्रश्न संख्या 27 से 29 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

27. वक्र $x^2 = 2y$ पर (0, 5) से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिंदु है:

(A) $(2\sqrt{2},4)$ (B) $(2\sqrt{2},0)$ (C) (0, 0) (D) (2, 2)

28. x, के सभी वास्तविक मानों के लिए $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ का न्यूनतम मान है:

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le 1$ का उच्चतम मान है:

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

विविध उदाहरण

उदाहरण 30 एक कार समय $t = 0$ पर बिंदु P से चलना प्रारंभ करके बिंदु Q पर रुक जाती है। कार द्वारा t सेकंड में तय की दूरी, x मीटर में

$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right) \text{ द्वारा प्रदत्त है।}$$

कार को Q तक पहुँचने में लगा समय ज्ञात कीजिए और P तथा Q के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए t सेकंड में कार का वेग v है।

अब $$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

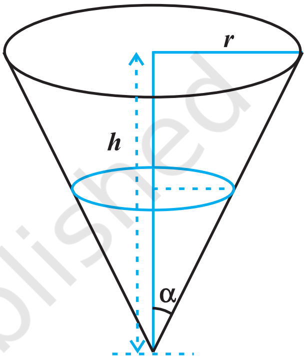
या $$v = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4-t)$$

इस प्रकार $v = 0$ से $t = 0$ या $t = 4$ प्राप्त होते हैं।

अब P और Q पर कार का वेग $v = 0$ है। इसलिए Q पर कार 4 सेकंडों में पहुँचेगी। अब 4 सेकंडों में कार द्वारा तय की गई दूरी निम्नलिखित है:

$$x]_{t=4} = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}\text{ m}$$

उदाहरण 31 पानी की एक टंकी का आकार, उर्ध्वाधर अक्ष वाले एक उल्टे लंब वृत्तीय शंकु है जिसका शीर्ष नीचे है। इसका अर्द्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}(0.5)$ है। इसमें 5 m³/min की दर से पानी भरा जाता है। पानी के स्तर के बढ़ने की दर उस क्षण ज्ञात कीजिए जब टंकी में पानी की ऊँचाई 10 m है।



आकृति 6.20

हल मान लीजिए कि r, h और α आकृति 6.20 के अनुसार है। तब

$\tan\alpha = \dfrac{r}{h}$ है।

इसलिए $$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = \tan^{-1}(0.5) \quad \text{(दिया है)}$$

अत: $$\frac{r}{h} = 0.5 \text{ या } r = \frac{h}{2}$$

मान लीजिए शंकु का आयतन V है। तब

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

अत: $$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt} \quad \text{(श्रृंखला नियम द्वारा)}$$

$$= \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

अब आयतन के परिवर्तन की दर अर्थात् $\dfrac{dV}{dt} = 5\,\text{cm}^3/\text{min}$ और $h = 4$ m है।

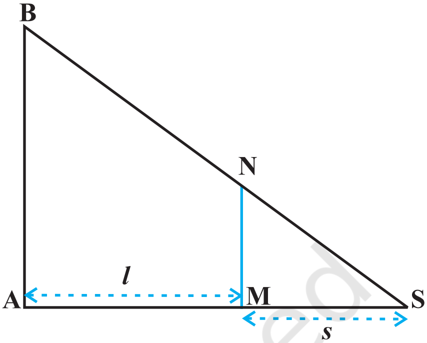
इसलिए $$5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

या $$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}\text{ m/min}\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$

अत: पानी के स्तर के उठने की दर $\dfrac{35}{88}$ m/min है।

उदाहरण 32 2 m ऊँचाई का आदमी 6 m ऊँचे बिजली के खंभे से दूर 5 km/h की समान चाल से चलता है। उसकी छाया की लंबायीं की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 6.21 में, मान लीजिए, AB एक बिजली का खंभा है। B बिंदु पर बल्ब है और मान लीजिए कि एक विशेष समय t पर आदमी MN है। मान लीजिए $AM = l$ m और व्यक्ति की छाया MS है। और मान लीजिए $MS = s$ m है।



आकृति 6.21

ध्यान दीजिए कि $\Delta ASB \sim \Delta MSN$

या $$\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

या $$AS = 3s$$

[(क्योंकि $MN = 2$ m और $AB = 6$ m (दिया है)]

इस प्रकार $AM = 3s - s = 2s$ है। परन्तु $AM = l$ मीटर है।

इसलिए $$l = 2s$$

अत: $$\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

क्योंकि $\frac{dl}{dt} = 5$ km/h है। अत: छाया की लंबायीं में वृद्धि $\frac{5}{2}$ km/h की दर से होती है।

उदाहरण 33 उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें फलन

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

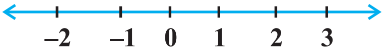
(a) वर्धमान (b) ह्रासमान है।

हल हमें ज्ञात है कि

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

या $$f'(x) = \frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 3(2x) + \frac{36}{5}$$

$$= \frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3) \qquad \text{(सरल करने पर)}$$



आकृति 6.22

अब $f'(x) = 0$ से $x = 1, x = -2,$ और $x = 3$ प्राप्त होते हैं। $x = 1, -2,$ और 3 वास्तविक रेखा को चार असंयुक्त अंतरालों नामतः $(-\infty, -2), (-2, 1), (1, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभक्त करता है। (आकृति 6.22)

अंतराल $(-\infty, -2)$ को लीजिए अर्थात् जब $-\infty < x < -2$ है।

इस स्थिति में हम $x - 1 < 0, x + 2 < 0$ और $x - 3 < 0$ प्राप्त करते हैं।

(विशेष रूप से $x = -3$ के लिए देखिए कि, $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

$= (-4)(-1)(-6) < 0$) इसलिए, जब $-\infty < x < -2$ है, तब $f'(x) < 0$ है।

अतः $(-\infty, -2)$ में फलन f ह्रासमान है।

अंतराल $(-2, 1)$, को लीजिए अर्थात् जब $-2 < x < 1$ है।

इस दशा में $x - 1 < 0, x + 2 > 0$ और $x - 3 < 0$ है।

(विशेष रूप से $x = 0$, के लिए ध्यान दीजिए कि, $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3) = (-1)(2)(-3) = 6 > 0$)

इसलिए जब $-2 < x < 1$ है, तब $f'(x) > 0$ है।

अतः $(-2, 1)$ में फलन f वर्धमान है।

अब अंतराल $(1,3)$ को लीजिए अर्थात् जब $1 < x < 3$ है। इस दशा में कि $x - 1 > 0, x + 2 > 0$ और $x - 3 < 0$ है।

इसलिए, जब $1 < x < 3$ है, तब $f'(x) < 0$ है।

अतः $(1, 3)$ में फलन f ह्रासमान है। अंत में अंतराल $(3, \infty)$, को लीजिए अर्थात् जब $3 < x < \infty$ है। इस दशा में $x - 1 > 0, x + 2 > 0$ और $x - 3 > 0$ है। इसलिए जब $x > 3$ है तो $f'(x) > 0$ है।

अतः अंतराल $(3, \infty)$ में फलन f वर्धमान है।

उदाहरण 34 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$ से प्रदत्त फलन f, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में निरंतर वर्धमान फलन है।

हल यहाँ

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$$

या
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sin x + \cos x)^2}(\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} \qquad \text{(सरल करने पर)}$$

ध्यान दीजिए कि $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में सभी x के लिए $2 + \sin 2x > 0$ है।

इसलिए $f'(x) > 0$ यदि $\cos x - \sin x > 0$

या $f'(x) > 0$ यदि $\cos x > \sin x$ या $\cot x > 1$

अब $\cot x > 1$ यदि $\tan x < 1$, अर्थात्, यदि $0 < x < \frac{\pi}{4}$

इसलिए अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में $f'(x) > 0$ है।

अतः $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में f एक वर्धमान फलन है।

उदाहरण 35 3 cm त्रिज्या की एक वृत्ताकार डिस्क को गर्म किया जाता है। प्रसार के कारण इसकी त्रिज्या 0.05 cm/s की दर से बढ़ रही है। वह दर ज्ञात कीजिए जिससे इसका क्षेत्रफल बढ़ रहा है जब इसकी त्रिज्या 3.2 cm है।

हल मान लीजिए कि दी गई तश्तरी की त्रिज्या r और इसका क्षेत्रफल A है।

तब
$$A = \pi r^2$$

या
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{(श्रृंखला नियम द्वारा)}$$

अब त्रिज्या की वृद्धि की सन्निकट दर $= dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = 0.05$ cm/s है।

इसलिए क्षेत्रफल में वृद्धि की सन्निकट दर निम्नांकित है

$$dA = \frac{dA}{dt}(\Delta t)$$

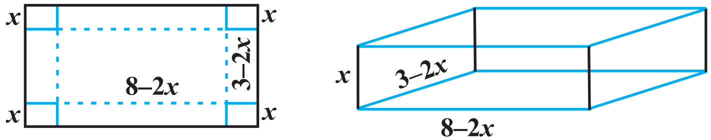
$$= 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right) = 2\pi r\,(dr)$$

$$= 2\pi\,(3.2)\,(0.05) \qquad (r = 3.2 \text{ cm})$$

$$= 0.320\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

उदाहरण 36 ऐल्यूमिनियम की $3 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ की आयताकार चादर के प्रत्येक कोने से समान वर्ग काटने पर बने एल्यूमिनियम के फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। इस प्रकार बने संदूक का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि अलग किए गए वर्ग की भुजा की लंबायीं x m है, तब बाक्स की ऊँचाई x, लंबायीं $8 - 2x$ और चौड़ाई $3 - 2x$ (आकृति 6.23) है। यदि संदूक का आयतन $V(x)$ है तब



(a) (b)

आकृति 6.23

$$V(x) = x(3\ 2x)\ (8 - 2x)$$

$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x, \text{ अत: } \begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$$

अब $V'(x) = 0$ से $x = \frac{2}{3}$ और $x = 3$ प्राप्त होता है। परन्तु $x \neq 3$ (क्यों?)

इसलिए $x = \frac{2}{3}$

अब $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$

इसलिए $x = \frac{2}{3}$ उच्चतम का बिंदु है अर्थात् यदि हम चादर के प्रत्येक किनारे से $\frac{2}{3}$ m भुजा के वर्ग हटा दें और शेष चादर से एक संदूक बनाए तो संदूक का आयतन अधिकतम होगा जो निम्नलिखित है:

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27}\text{m}^3$$

उदाहरण 37 एक निर्माता Rs $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ प्रति इकाई की दर से x इकाइयाँ बेच सकता है। x इकाइयों का उत्पाद मूल्य Rs $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ है। इकाइयों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जो उसे अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए बेचनी चाहिए।

हल मान लीजिए x इकाइयों का विक्रय मूल्य $S(x)$ है और x इकाइयों का उत्पाद मूल्य $C(x)$ है। तब हम पाते हैं

$$S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$$

और $$C(x) = \frac{x}{5} + 500$$

इस प्रकार, लाभ फलन $P(x)$ निम्नांकित द्वारा प्रदत्त है।

$$P(x) = S(x) - C(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

अर्थात् $$P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$$

या $$P'(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$$

अब $P'(x) = 0$ से $x = 240$ प्राप्त होता है और $P''(x) = \frac{-1}{50}$. इसलिए $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$ है।

इस प्रकार $x = 240$ उच्चतम का बिंदु है। अतः निर्माता अधिकतम लाभ अर्जित कर सकता है यदि वह 240 इकाइयाँ बेचता है।

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{\log x}{x}$ द्वारा प्रदत्त फलन $x = e$ पर उच्चतम है।

2. किसी निश्चित आधार b के एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ 3 cm/s की दर से घट रहीं है। उस समय जब त्रिभुज की समान भुजाएँ आधार के बराबर हैं, उसका क्षेत्रफल कितनी तेजी से घट रहा है।

3. अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

से प्रदत्त फलन f (i) निरंतर वर्धमान (ii) निरंतर ह्रासमान है।

4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}, x \neq 0$ से प्रदत्त फलन

(i) वर्धमान (ii) ह्रासमान है।

5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत उस समद्विबाहु त्रिभुज का महत्तम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष दीर्घ अक्ष का एक सिरा है।

6. आयताकार आधार व आयताकार दीवारों की 2 m गहरी और 8 m^3 आयतन की एक बिना ढक्कन की टंकी का निर्माण करना है। यदि टंकी के निर्माण में आधार के लिए Rs $70/m^2$ और दीवारों पर Rs $45/m^2$ व्यय आता है तो निम्नतम खर्च से बनी टंकी की लागत क्या है?

7. एक वृत्त और एक वर्ग के परिमापों का योग k है, जहाँ k एक अचर है। सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम है, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दुगुनी है।

8. किसी आयत के ऊपर बने अर्धवृत्त के आकार वाली खिड़की है। खिड़की का संपूर्ण परिमाप 10 m है। पूर्णतया खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए खिड़की की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

9. त्रिभुज की भुजाओं से a और b दूरी पर त्रिभुज के कर्ण पर स्थित एक बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि कर्ण की न्यूनतम लंबाई $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ है।

10. उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$ द्वारा प्रदत्त फलन f का,

(i) स्थानीय उच्चतम बिंदु है (ii) स्थानीय निम्नतम बिंदु है

(iii) नत परिवर्तन बिंदु है।

11. $f(x) = \cos^2 x + \sin x, x \in [0, \pi]$ द्वारा प्रदत्त फलन f का निरपेक्ष उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

12. सिद्ध कीजिए कि एक r त्रिज्या के गोले के अंतर्गत उच्चतम आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई $\frac{4r}{3}$ है।

13. मान लीजिए $[a, b]$ पर परिभाषित एक फलन f है इस प्रकार कि सभी $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि (a, b) पर f एक वर्धमान फलन है।

14. सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

15. सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु के ऊँचाई की एक तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ है।

19 से 24 तक के प्रश्नों के सही उत्तर चुनिए।

16. एक 10 m त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 m^3/h की दर से गेहूँ भरा जाता है। भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर है:

(A) 1 m/h (B) 0.1 m/h

(C) 1.1 m/h (D) 0.5 m/h

सारांश

- यदि एक राशि y एक दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$ को संतुष्ट करते हुए परिवर्तित होती है तो $\frac{dy}{dx}$ (या $f'(x)$) x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है और $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (या $f'(x_0)$) $x = x_0$ पर) x के सापेक्ष y के निरूपित की दर को निरूपित करता है।
- यदि दो राशियाँ x और y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $x = f(t)$ और $y = g(t)$, तब श्रृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ यदि } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

- एक फलन f

(a) अंतराल $[a, b]$ में वर्धमान है यदि

$[a, b]$ में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$ के लिए

विकल्पत: यदि प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए $f'(x) \geq 0$, है।

(b) अंतराल $[a, b]$ में ह्रासमान है यदि

$[a, b]$ में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$ के लिए

विकल्पत: यदि प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए $f'(x) \leq 0$ है।

- फलन f के प्रांत में एक बिंदु c जिस पर या तो $f'(c) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है, f का क्रांतिक बिंदु कहलाता है।
- **प्रथम अवकलज परीक्षण** मान लीजिए एक विवृत्त अंतराल I पर फलन f परिभाषित है। मान लीजिए I में एक क्रांतिक बिंदु c पर फलन f संतत है तब

(i) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढ़ता है तब $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है अर्थात् c के बायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि

$f'(x) > 0$ तथा c के दायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तब c स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है।

(ii) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढ़ता है तब $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है अर्थात् c के बायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तथा c के दायीं ओर और पर्याप्त निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) > 0$ तब c स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है।

(iii) जब x बिंदु c के बायीं ओर से दायीं ओर बढ़ता है तब $f'(x)$ परिवर्तित नहीं होता है तब c न तो स्थानीय उच्चतम का बिंदु है और न ही स्थानीय निम्नतम का बिंदु। वास्तव में इस प्रकार का बिंदु एक नति परिवर्तन बिंदु है।

- **द्वितीय अवकलज परीक्षण** मान लीजिए एक अंतराल I पर f एक परिभाषित फलन है और $c \in$ I है। मान लीजिए f, c पर लगातार दो बार अवकलनीय है। तब

(i) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) < 0$ तब $x = c$ स्थानीय उच्चतम का एक बिंदु है। f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

(ii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) > 0$ तब $x = c$ स्थानीय निम्नतम का एक बिंदु है। इस स्थिति में f का स्थानीय निम्नतम मान $f(c)$ है।

(iii) यदि $f'(c) = 0$ और $f''(c) = 0$, तब यह परीक्षण असफल रहता है।

इस स्थिति में हम पुन: वापस प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग करते हैं और यह ज्ञात करते हैं कि c उच्चतम, निम्नतम या नति परिवर्तन का बिंदु है।

- निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात करने की व्यावहारिक विधि है:

चरण 1: अंतराल में f के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए अर्थात् x के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जहाँ या तो $f'(x) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है।

चरण 2: अंतराल के अंत्य बिंदु लीजिए।

चरण 3: (चरण 1 व 2 से प्राप्त) सभी बिंदुओं पर f के मानों की गणना कीजिए।

चरण 4: चरण 3 में गणना से प्राप्त f के सभी मानों में से उच्चतम और निम्नतम मानों को लीजिए। यही उच्चतम मान, f का निरपेक्ष उच्चतम मान और निम्नतम मान, f का निरपेक्ष निम्नतम मान होंगे।

अध्याय 7

12082CH07

समाकलन Integrals

❖ *Just as a mountaineer climbs a mountain – because it is there, so a good mathematics student studies new material because it is there.* – *JAMES B. BRISTOL* ❖

7.1 भूमिका (Introduction)

G .W. Leibnitz (1646–1716)

अवकल गणित अवकलज की संकल्पना पर केंद्रित है। फलनों के आलेखों के लिए स्पर्श रेखाएँ परिभाषित करने की समस्या एवं इस प्रकार की रेखाओं की प्रवणता का परिकलन करना अवकलज के लिए मूल अभिप्रेरण था। समाकलन गणित, फलनों के आलेख से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल को परिभाषित करने एवं इसके क्षेत्रफल का परिकलन करने की समस्या से प्रेरित है।

यदि एक फलन f किसी अंतराल I में अवकलनीय है अर्थात् I के प्रत्येक बिंदु पर फलन के अवकलज f' का अस्तित्व है, तब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि यदि I के प्रत्येक बिंदु पर f' दिया हुआ है तो क्या हम फलन f ज्ञात कर सकते हैं? वे सभी फलन जिनसे हमें एक फलन उनके अवकलज के रूप में प्राप्त हुआ है, इस फलन के प्रतिअवकलज (पूर्वग) कहलाते हैं। अग्रत: वह सूत्र जिससे ये सभी प्रतिअवकलज प्राप्त होते हैं, फलन का अनिश्चित समाकलन कहलाता है और प्रतिअवकलज ज्ञात करने का यह प्रक्रम समाकलन करना कहलाता है। इस प्रकार की समस्याएँ अनेक व्यावहारिक परिस्थितियों में आती हैं। उदाहरणत: यदि हमें किसी क्षण पर किसी वस्तु का तात्क्षणिक वेग ज्ञात है, तो स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि क्या हम किसी क्षण पर उस वस्तु की स्थिति ज्ञात कर सकते हैं? इस प्रकार की अनेक व्यावहारिक एवं सैद्धांतिक परिस्थितियाँ आती हैं, जहाँ समाकलन की संक्रिया निहित होती है। समाकलन गणित का विकास निम्नलिखित प्रकार की समस्याओं के हल करने के प्रयासों का प्रतिफल है।

(a) यदि एक फलन का अवकलज ज्ञात हो, तो उस फलन को ज्ञात करने की समस्या,

(b) निश्चित प्रतिबंधों के अंतर्गत फलन के आलेख से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या।

उपर्युक्त दोनो समस्याएँ समाकलनों के दो रूपों की ओर प्रेरित करती हैं, अनिश्चित समाकलन एवं निश्चित समाकलन। इन दोनों का सम्मिलित रूप समाकलन गणित कहलाता है।

अनिश्चित समाकलन एवं निश्चित समाकलन के मध्य एक संबंध है जिसे कलन की आधारभूत प्रमेय के रूप में जाना जाता है। यह प्रमेय निश्चित समाकलन को विज्ञान एवं अभियांत्रिकी के लिए एक व्यावहारिक औज़ार के रूप में तैयार करती है। अर्थशास्त्र, वित्त एवं प्रायिकता जैसे विभिन्न क्षेत्रों से अनेक प्रकार की रुचिकर समस्याओं को हल करने के लिए भी निश्चित समाकलन का उपयोग किया जाता है।

इस अध्याय में, हम अपने आपको अनिश्चित एवं निश्चित समाकलनों एवं समाकलन की कुछ विधियों सहित उनके प्रारंभिक गुणधर्मों के अध्ययन तक सीमित रखेंगे।

7.2 समाकलन को अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप में (Integration as the Inverse Process of Differentiation)

अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम को समाकलन कहते हैं। किसी फलन का अवकलन ज्ञात करने के स्थान पर हमें फलन का अवकलज दिया हुआ है और इसका पूर्वग अर्थात् वास्तविक फलन ज्ञात करने के लिए कहा गया है। यह प्रक्रम समाकलन अथवा प्रति-अवकलन कहलाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें,

हम जानते हैं कि
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \qquad \ldots (2)$$

और
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \ldots (3)$$

हम प्रेक्षित करते हैं कि समीकरण (1) में फलन $\cos x$ फलन $\sin x$ का अवकलज है। इसे हम इस प्रकार भी कहते हैं कि $\cos x$ का प्रतिअवकलज (अथवा समाकलन) $\sin x$ है। इसी प्रकार (2) एवं (3) से x^2 और e^x के प्रतिअवकलज (अथवा समाकलन) क्रमशः $\frac{x^3}{3}$ और e^x है। पुनः हम नोट करते हैं कि किसी भी वास्तविक संख्या C, जिसे अचर फलन माना जाता है, का अवकलज शून्य है, और इसलिए हम (1), (2) और (3) को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \mathrm{C}) = \cos x\,,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + \mathrm{C}\right) = x^2 \text{ और } \frac{d}{dx}(e^x + \mathrm{C}) = e^x$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त फलनों के प्रतिअवकलज अथवा समाकलन अद्धितीय नहीं हैं। वस्तुतः इन फलनों में से प्रत्येक फलन के अपरिमित प्रतिअवकलज हैं, जिन्हें हम वास्तविक

संख्याओं के समुच्चय से स्वेच्छ अचर C को कोई मान प्रदान करके प्राप्त कर सकते हैं। यही कारण है कि C को प्रथानुसार स्वेच्छ अचर कहते हैं। वस्तुतः C एक प्राचल है, जिसके मान को परिवर्तित करके हम दिए हुए फलन के विभिन्न प्रतिअवकलजों या समाकलनों को प्राप्त करते हैं। व्यापकतः यदि एक फलन F ऐसा है कि $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathrm{I}$ (वास्तविक संख्याओं का अंतराल) तो प्रत्येक स्वेच्छ अचर C, के लिए $\frac{d}{dx}[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}] = f(x)$, $x \in \mathrm{I}$

इस प्रकार $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, f के प्रतिअवकलजों के परिवार को व्यक्त करता है, जहाँ C समाकलन का अचर कहलाता है।

टिप्पणी समान अवकलज वाले फलनों में एक अचर का अंतर होता है। इसको दर्शाने के लिए, मान लीजिए g और h ऐसे दो फलन हैं जिनके अवकलज अंतराल I में समान हैं

$f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall x \in \mathrm{I}$ द्वारा परिभाषित फलन $f = g - h$ पर विचार कीजिए

तो $\frac{df}{dx} = f' = g' - h'$ से $f'(x) = g'(x) - h'(x)$ $\forall x \in \mathrm{I}$ प्राप्त है।

अथवा $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$ (परिकल्पना से)

अर्थात् I में x के सापेक्ष f के परिवर्तन की दर शून्य है और इसलिए f एक अचर है।

उपर्युक्त टिप्पणी के अनुसार यह निष्कर्ष निकालना न्यायसंगत है कि परिवार $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, f के सभी प्रतिअवकलजों को प्रदान करता है।

अब हम एक नए प्रतीक से परिचित होते हैं जो कि प्रतिअवकलजों के पूरे परिवार को निरूपित करेगा। यह प्रतीक $\int f(x)\,dx$ है, इसे x के सापेक्ष f का अनिश्चित समाकलन के रूप में पढ़ा जाता है।

प्रतीकतः हम $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ लिखते हैं।

संकेतन दिया हुआ है कि $\frac{dy}{dx} = f(x)$, तो हम $y = \int f(x)\,dx$ लिखते हैं।

सुविधा के लिए हम निम्नलिखित प्रतीकों/पदों/वाक्यांशों को उनके अर्थों सहित सारणी 7.1 में उल्लेखित करते हैं:

सारणी 7.1

प्रतीक/पद/वाक्यांश	अर्थ
$\int f(x)\,dx$	f का x के सापेक्ष समाकलन
$\int f(x)\,dx$ में $f(x)$	समाकल्य

$\int f(x)\,dx$ में x	समाकलन का चर
समाकलन करना	समाकलन ज्ञात करना
f का समाकलन	एक फलन F जिसके लिए $F'(x) = f(x)$
समाकलन संक्रिया	समाकलन ज्ञात करने का प्रक्रम
समाकलन का अचर	कोई भी वास्तविक संख्या जिसे अचर फलन कहते हैं।

हम पहले से ही बहुत से प्रमुख फलनों के अवकलजों के सूत्र जानते हैं। इन सूत्रों के संगत हम समाकलन के प्रामाणिक सूत्रों को तुरंत लिख सकते हैं। इन प्रामाणिक सूत्रों की सूची निम्नलिखित हैं जिसका उपयोग हम दूसरे फलनों के समाकलनों को ज्ञात करने में करेंगे।

अवकलज Derivatives	**समाकलन (प्रतिअवकलज) Integrals (Antiderivatives)**
(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
विशिष्ट रूप में हम देखते हैं	
$\dfrac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = x + C$
(ii) $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
(iii) $\dfrac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
(iv) $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
(v) $\dfrac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x$	$\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$
(vi) $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
(vii) $\dfrac{d}{dx}(-\text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x$	$\int \text{cosec}\, x \cot x\,dx = -\text{cosec}\, x + C$

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(-\cos^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(x) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\cot^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(-\text{cosec}^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad\quad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{cosec}^{-1} x + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $\quad\quad$ $\int e^x dx = e^x + C$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}$ $\quad\quad$ $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$ $\quad\quad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

टिप्पणी प्रयोग में हम प्रायः उस अंतराल का जिक्र नहीं करते जिसमें विभिन्न फलन परिभाषित हैं तथापि किसी भी विशिष्ट प्रश्न के संदर्भ में इसको भी ध्यान में रखना चाहिए।

7.2.1 *अनिश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some properties of indefinite integrals)*

इस उप परिच्छेद में हम अनिश्चित समाकलन के कुछ गुणधर्मों को व्युत्पन्न करेंगे।

(i) निम्नलिखित परिणामों के संदर्भ में अवकलन एवं समाकलन के प्रक्रम एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = f(x)$$

और $\quad \int f'(x)\, dx = f(x) + C$, जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है।

उपपत्ति मान लीजिए कि F, f का एक प्रतिअवकलज हैं अर्थात्

$$\frac{d}{dx}\text{F}(x) = f(x)$$

तो $$\int f(x)\, dx = \text{F}(x) + \text{C}$$

इसलिए $$\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = \frac{d}{dx}\left(\text{F}(x) + \text{C}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\text{F}(x) = f(x)$$

इसी प्रकार हम देखते हैं कि

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

और इसलिए $$\int f'(x)\, dx = f(x) + \text{C}$$

जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है जिसे समाकलन अचर कहते हैं।

(ii) ऐसे दो अनिश्चित समाकलन जिनके अवकलज समान हैं वक्रों के एक ही परिवार को प्रेरित करते हैं और इस प्रकार समतुल्य हैं।

उपपत्ति मान लीजिए f एवं g ऐसे दो फलन हैं जिनमें

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\, dx$$

अथवा $$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx\right] = 0$$

अत: $\int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx = \text{C}$, जहाँ C एक वास्तविक संख्या है। (क्यों?)

अथवा $$\int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx + \text{C}$$

इसलिए वक्रों के परिवार $\left\{\int f(x)\, dx + \text{C}_1, \text{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$

एवं $\left\{\int g(x)\, dx + \text{C}_2, \text{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ समतुल्य हैं।

इस प्रकार $\int f(x)\, dx$ और $\int g(x)\, dx$ समतुल्य हैं।

टिप्पणी दो परिवारों $\left\{\int f(x)\,dx + C_1, C_1 \in \mathbf{R}\right\}$ एवं $\left\{\int g(x)\,dx + C_2, C_2 \in \mathbf{R}\right\}$ की समतुल्यता को प्रथानुसार $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$, लिखकर व्यक्त करते हैं जिसमें प्राचल का वर्णन नहीं है।

(iii) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

उपपत्ति गुणधर्म (i) से

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\,dx\right] = f(x) + g(x) \qquad \ldots (1)$$

अन्यथा हमें ज्ञात है कि

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = f(x) + g(x) \qquad \ldots (2)$$

इस प्रकार गुणधर्म (ii) के संदर्भ में (1) और (2) से प्राप्त होता है कि

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(iv) किसी वास्तविक संख्या k, के लिए $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

उपपत्ति गुणधर्म (i) द्वारा $\frac{d}{dx}\int k\, f(x)\,dx = k\, f(x)$

और $\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)\,dx\right] = k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = k\, f(x)$

इसलिए गुणधर्म (ii) का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(v) प्रगुणों (iii) और (iv) का $f_1, f_2, \ldots, f_n$ फलनों की निश्चित संख्या और वास्तविक संख्याओं k_1, k_2, ..., k_n के लिए भी व्यापकीकरण किया जा सकता है जैसा कि नीचे दिया गया है

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n\int f_n(x)\,dx$$

दिए हुए फलन का प्रतिअवकलज ज्ञात करने के लिए हम अंतर्ज्ञान से ऐसे फलन की खोज करते हैं जिसका अवकलज दिया हुआ फलन है। अभीष्ट फलन की इस प्रकार की खोज, जो दिए हुए फलन के प्रति अवकलज ज्ञात करने के लिए की जाती है, को निरीक्षण द्वारा समाकलन कहते हैं। इसे हम कुछ उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण 1 निरीक्षण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित फलनों का प्रतिअवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

हल

(i) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\cos 2x$ है

हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

अथवा $\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

इसलिए $\cos 2x$ का एक प्रतिअवकलज $\frac{1}{2}\sin 2x$ है।

(ii) हम एक ऐसे फलन की खोज करना चाहते हैं जिसका अवकलज $3x^2 + 4x^3$ है।

अब $\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$

इसलिए $3x^2 + 4x^3$ का प्रतिअवकलज $x^3 + x^4$ है।

(iii) हम जानते हैं

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ और } \frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, x < 0$$

इन दोनों को संघटित करने पर हम पाते हैं $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

इसलिए $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$, जो कि $\frac{1}{x}$ के प्रतिअवकलजों में से एक है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\,dx$ (iii) $\int (\mathrm{x}^{\frac{2}{3}} + 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \frac{1}{\mathrm{x}})\,\mathrm{dx}$

हल हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2}dx = \int x\,dx - \int x^{-2}\,dx \qquad \text{(गुणधर्म v से)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1\right) - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2\right);$$ C_1, C_2 समाकलन अचर हैं।

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{x^{-1}}{-1} - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C_1 - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$$, जहाँ $C = C_1 - C_2$ एक अन्य समाकलन अचर है।

टिप्पणी इससे आगे हम केवल अंतिम उत्तर में ही, एक समाकलन अचर लिखेंगे।

(ii) यहाँ

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + x + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x + C$$

(iii) यहाँ $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int 2e^x\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2e^x - \log|x| + C$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2e^x - \log|x| + C$$

उदाहरण 3 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$

(iii) $\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

हल

(i) यहाँ

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + C$$

(ii) यहाँ

$$\int (\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$$

$$= -\cot x - \operatorname{cosec} x + C$$

(iii) यहाँ

$$\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

उदाहरण 4 $f(x) = 4x^3 - 6$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रतिअवकलज F ज्ञात कीजिए जहाँ $F(0) = 3$ है।

हल $f(x)$ का एक प्रति अवकलज $x^4 - 6x$ है

चूँकि $\frac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3 - 6$, इसलिए प्रतिअवकलज F,

$F(x) = x^4 - 6x + C$, द्वारा देय है जहाँ C अचर है।

दिया हुआ है कि $F(0) = 3$

इससे प्राप्त होता है $3 = 0 - 6 \times 0 + C$

अथवा $C = 3$

अतः अभीष्ट प्रतिअवकलज, $F(x) = x^4 - 6x + 3$ द्वारा परिभाषित एक अद्वितीय फलन है।

टिप्पणी

(i) हम देखते हैं कि यदि f का प्रतिअवकलज F है तो F + C, जहाँ C एक अचर है, भी f का एक प्रतिअवकलज है। इस प्रकार यदि हमें फलन f का एक प्रतिअवकलज F ज्ञात है तो हम F में कोई भी अचर जोड़कर f के अनंत प्रतिअवकलज लिख सकते हैं जिन्हें $F(x) + C$, $C \in \mathbf{R}$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। अनुप्रयोगों में सामान्यतः एक अतिरिक्त प्रतिबंध को संतुष्ट करना आवश्यक होता है जिससे C का एक विशिष्ट मान प्राप्त होता है और जिसके परिणामस्वरूप दिए हुए फलन का एक अद्वितीय प्रतिअवकलज प्राप्त होता है।

(ii) कभी-कभी F को प्रारंभिक फलनों जैसे कि बहुपद, लघुगणकीय, चर घातांकी, त्रिकोणमितीय, और प्रतिलोम त्रिकोणमितीय, इत्यादि के रूप में अभिव्यक्त करना असंभव होता है। इसलिए $\int f(x)\,dx$ ज्ञात करना अवरुद्ध हो जाता है। उदाहरणत: निरीक्षण विधि से $\int e^{-x^2} dx$ को ज्ञात करना असंभव है क्योंकि निरीक्षण से हम ऐसा फलन ज्ञात नहीं कर सकते जिसका अवकलज e^{-x^2} है।

(iii) यदि समाकल का चर x, के अतिरिक्त अन्य कोई है तो समाकलन के सूत्र तदनुसार रूपांतरित कर लिए जाते हैं। उदाहरणत:

$$\int y^4\, dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5} y^5 + C$$

प्रश्नावली 7.1

निम्नलिखित फलनों के प्रतिअवकलज (समाकलन) निरीक्षण विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax + b)^2$ **5.** $\sin 2x - 4\, e^{3x}$

निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

6. $\int (4\, e^{3x} + 1)\, dx$ **7.** $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$

9. $\int (2x^2 + e^x)\, dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$

12. $\int \frac{x^3 + 3x + 4}{\sqrt{x}}\, dx$ **13.** $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\, dx$ **14.** $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx$

15. $\int \sqrt{x}\,(3x^2 + 2x + 3)\, dx$ **16.** $\int (2x - 3\cos x + e^x)\, dx$

17. $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx$ **18.** $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\, dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\, dx$ **20.** $\int \frac{2 - 3\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

प्रश्न 21 एवं 22 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

21. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलज है:

(A) $\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (B) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}x^{2}+C$

(C) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (D) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

22. यदि $\dfrac{d}{dx}f(x)=4x^3-\dfrac{3}{x^4}$ जिसमें $f(2)=0$ तो $f(x)$ है:

(A) $x^4+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{129}{8}$ (B) $x^3+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{129}{8}$

(C) $x^4+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{129}{8}$ (D) $x^3+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{129}{8}$

7.3 समाकलन की विधियाँ (Methods of Integration)

पिछले परिच्छेद में हमने ऐसे समाकलनों की चर्चा की थी, जो कुछ फलनों के अवकलजों से सरलतापूर्वक प्राप्त किए जा सकते हैं। यह निरीक्षण पर आधारित विधि थी, इसमें ऐसे फलन F की खोज की जाती है जिसका अवकलज f है इससे f के समाकलन की प्राप्ति होती है। तथापि निरीक्षण पर आधारित यह विधि अनेक फलनों की स्थिति में बहुत उचित नहीं है। अत: समाकलनों को प्रामाणिक रूप में परिवर्तित करते हुए उन्हें ज्ञात करने के लिए हमें अतिरिक्त विधियाँ विकसित करने की आवश्यकता है। इनमें मुख्य विधियाँ निम्नलिखित पर आधारित हैं:

1. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन
2. आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा समाकलन
3. खंडश: समाकलन

7.3.1 *प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by substitution)*

इस उप परिच्छेद में हम प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन पर विचार करेंगे। स्वतंत्र चर x को t में परिवर्तित करने के लिए $x = g(t)$ प्रतिस्थापित करते हुए दिए गए समाकलन $\int f(x)\,dx$ को अन्य रूप में परिवर्तित किया जा सकता है।

$$\mathrm{I} = \int f(x)\,dx \text{ पर विचार कीजिए}$$

अब $x = g(t)$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $\frac{dx}{dt} = g'(t)$

हम $dx = g'(t)\, dt$ लिखते हैं।

इस प्रकार $\mathrm{I} = \int f(x)\, dx = \int f\{g(t)\}\, g'(t)\, dt$

प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन के लिए यह चर परिवर्तन का सूत्र हमारे पास उपलब्ध एक महत्वपूर्ण साधन है। उपयोगी प्रतिस्थापन क्या होगा इसका अनुमान लगाना हमेशा महत्वपूर्ण है। सामान्यत: हम एक ऐसे फलन के लिए प्रतिस्थापन करते हैं जिसका अवकलज भी समाकल्य में सम्मिलित हों, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$ (iii) $\frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(iv) $\frac{\sin (\tan^{-1} x)}{1+x^2}$

हल

(i) हम जानते हैं कि mx का अवकलज m है। अत: हम $mx = t$ प्रतिस्थापन करते हैं, ताकि $mdx = dt$

इसलिए $\int \sin mx\, dx = \frac{1}{m}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{m}\cos t + \mathrm{C} = -\frac{1}{m}\cos mx + \mathrm{C}$

(ii) $x^2 + 1$ का अवकलज $2x$ है। अत: हम $x^2 + 1 = t$ के प्रतिस्थापन का उपयोग करते हैं ताकि $2x\, dx = dt$

इसलिए $\int 2x \sin (x^2+1)\, dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + \mathrm{C} = -\cos (x^2 + 1) + \mathrm{C}$

(iii) $\sqrt{x}$ का अवकलज $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ है। अत: हम

$\sqrt{x} = t$ के प्रतिस्थापन का उपयोग करते हैं ताकि $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$ जिससे $dx = 2t\, dt$ प्राप्त होता है।

अत: $\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\tan^4 t \sec^2 t\, 2t\, dt}{t} = 2\int \tan^4 t\, \sec^2 t\, dt$

फिर से हम दूसरा प्रतिस्थापन $\tan t = u$ करते हैं ताकि $\sec^2 t\, dt = du$

इसलिए $2\int \tan^4 t \sec^2 t\, dt = 2\int u^4\, du = 2\dfrac{u^5}{5} + C$

$$= \frac{2}{5}\tan^5 t + C \text{ (क्योंकि } u = \tan t)$$

$$= \frac{2}{5}\tan^5 \sqrt{x} + C \text{ (क्योंकि } t = \sqrt{x})$$

अतः $\displaystyle\int \frac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{5}\tan^5\sqrt{x} + C$

विकल्पतः $\tan\sqrt{x} = t$ प्रतिस्थापन कीजिए

(iv) $\tan^{-1}x$ का अवकलज $\dfrac{1}{1+x^2}$ है। अतः हम $\tan^{-1}x = t$ प्रतिस्थापन का उपयोग करते हैं ताकि

$\dfrac{dx}{1+x^2} = dt$

इसलिए $\displaystyle\int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\, dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + C = -\cos(\tan^{-1}x) + C$

अब हम कुछ महत्वपूर्ण समाकलनों जिनमें त्रिकोणमितीय फलनों और उनके प्रामाणिक समाकलनों का उपयोग प्रतिस्थापन विधि में किया गया है, पर चर्चा करते हैं।

(i) $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

हम पाते हैं कि $\displaystyle\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$\cos x = t$, प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $\sin x\, dx = -dt$

तब $\displaystyle\int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$

अथवा $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

(ii) $\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + C$

हम पाते हैं कि $\displaystyle\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

$\sin x = t$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $\cos x\, dx = dt$

तब $$\int \cot x\, dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log |t| + C$$

$$= \log |\sin x| + C$$

(iii) $\int \sec x\, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

हमें ज्ञात है कि, $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$

$\sec x + \tan x = t$ प्रतिस्थापित करने पर $\sec x\,(\tan x + \sec x)\, dx = dt$

इसलिए $\int \sec x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

हम पाते हैं कि, $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}\, dx$

$\operatorname{cosec} x + \cot x = t$ प्रतिस्थापित कीजिए
ताकि $-\operatorname{cosec} x\,(\cot x + \operatorname{cosec} x)\, dx = dt$

इसलिए $$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log |t| = -\log |\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$= -\log \left|\frac{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}\right| + C$$

$$= \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

उदाहरण 6 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए:

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin (x + a)}\, dx$ (iii) $\int \frac{1}{1 + \tan x}\, dx$

हल

(i) यहाँ $$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\,(\sin x)\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x\,(\sin x)\, dx$$

$t = \cos x$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $dt = -\sin x\, dx$

इसलिए $\int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x)\, dx = -\int (1-t^2)\, t^2\, dt$

$$= -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

(ii) $x + a = t$ प्रतिस्थापित करने पर $dx = dt$

इसलिए $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}\, dx = \int \frac{\sin(t-a)}{\sin t}\, dt$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t}\, dt$$

$$= \cos a \int dt - \sin a \int \cot t\, dt$$

$$= (\cos a)\, t - (\sin a)\left[\log|\sin t| + C_1\right]$$

$$= (\cos a)\,(x+a) - (\sin a)\left[\log|\sin(x+a)| + C_1\right]$$

$$= x\cos a + a\cos a - (\sin a)\log|\sin(x+a)| - C_1 \sin a$$

अतः $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}\, dx = x\cos a - \sin a \log|\sin(x+a)| + C$

जहाँ $C = -C_1 \sin a + a\cos a$, एक अन्य स्वेच्छ अचर है।

(iii) $\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx \qquad \ldots (1)$$

अब $\quad I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ पर विचार कीजिए।

अब $\quad \cos x + \sin x = t$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $(-\sin x + \cos x)\, dx = dt$

इसलिए $\quad I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_2 = \log|\cos x + \sin x| + C_2$

I को (1) में रखने पर हम पाते हैं

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

प्रश्नावली 7.2

1 से 37 तक के प्रश्नों में प्रत्येक फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\frac{2x}{1+x^2}$ **2.** $\frac{(\log x)^2}{x}$ **3.** $\frac{1}{x + x\log x}$

4. $\sin x \sin(\cos x)$ **5.** $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$

6. $\sqrt{ax+b}$ **7.** $x\sqrt{x+2}$ **8.** $x\sqrt{1+2x^2}$

9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ **10.** $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x>0$

12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$ **13.** $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$ **14.** $\frac{1}{x(\log x)^m}, x>0, m \neq 1$

15. $\frac{x}{9-4x^2}$ **16.** e^{2x+3} **17.** $\frac{x}{e^{x^2}}$

18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ **19.** $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **20.** $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

21. $\tan^2(2x-3)$ **22.** $\sec^2(7-4x)$ **23.** $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\dfrac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$ **25.** $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1 - \tan x)^2}$ **26.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\dfrac{1}{1+\cot x}$

33. $\dfrac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$ **35.** $\dfrac{(1+\log x)^2}{x}$

36. $\dfrac{(x+1)\left(x+\log x\right)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3\sin\left(\tan^{-1}x^4\right)}{1+x^8}$

प्रश्न 38 एवं 39 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

38. $\displaystyle\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e^{10}\, dx}{x^{10}+10^x}$ बराबर है:

(A) $10^x - x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + C$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + C$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है:

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x - \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x - \cot 2x + C$

7.3.2 *त्रिकोणमितीय सर्व-समिकाओं के उपयोग द्वारा समाकलन (Integration using trigonometric identities)*

जब समाकल्य में कुछ त्रिकोणमितीय फलन निहित होते हैं, तो हम समाकलन ज्ञात करने के लिए कुछ ज्ञात सर्वसमिकाओं का उपयोग करते हैं जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों के द्वारा समझाया गया है।

उदाहरण 7 निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए

(i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$

हल

(i) सर्वसमिका $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ को स्मरण कीजिए जिससे

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$ प्राप्त होता है।

इसलिए $$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) सर्वसमिका $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$, को स्मरण कीजिए

तब $$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) सर्वसमिका $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ से हम पाते हैं कि

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

इसलिए $$\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

विकल्पत: $$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$$

$\cos x = t$ रखने पर $-\sin x\, dx = dt$

इसलिए $$\int \sin^3 x\, dx = -\int \left(1-t^2\right) dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

टिप्पणी त्रिकोणमितीय सर्व-समिकाओं का उपयोग करते हुए यह दर्शाया जा सकता है कि दोनों उत्तर समतुल्य हैं।

प्रश्नावली 7.3

1 से 22 तक के प्रश्नों में प्रत्येक फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\sin^2(2x+5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3(2x+1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

13. $\dfrac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$ **14.** $\dfrac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}$ **15.** $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\tan^4 x$ **17.** $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ **18.** $\dfrac{\cos 2x+2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{1}{\sin x\cos^3 x}$ **20.** $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x+\sin x)^2}$ **21.** $\sin^{-1}(\cos x)$

22. $\dfrac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

प्रश्न 23 एवं 24 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

23. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ बराबर है:

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)}dx$ बराबर है:

(A) $-\cot(ex^x) + C$ (B) $\tan(xe^x) + C$

(C) $\tan(e^x) + C$ (D) $\cot(e^x) + C$

7.4 कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन (Integrals of Some Particular Functions)

इस परिच्छेद में हम निम्नलिखित महत्वपूर्ण समाकलन सूत्रों की व्याख्या करेंगे और बहुत से दूसरे संबंधित प्रामाणिक समाकलनों को ज्ञात करने में उनका प्रयोग करेंगे।

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ **(2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$ **(4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$ (6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

अब हम उपर्युक्त परिणामों को सिद्ध करते हैं।

(1) हम जानते हैं कि $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

इसलिए $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(2) उपर्युक्त (1) के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

इसलिए $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\log|a-x| + \log|a+x|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

टिप्पणी (1) में उपयोग की गई विधि की व्याख्या परिच्छेद 7.5 में की जाएगी।

(3) $x = a\tan\theta$ रखने पर $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

इसलिए $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2}$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(4) मान लीजिए $x = a\sec\theta$ तब $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

इसलिए $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}$$

$$= \int\sec\theta\, d\theta = \log\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,$$ जहाँ $C = C_1 - \log|a|$

(5) मान लीजिए कि $x = a\sin\theta$ तब $dx = a\cos\theta\, d\theta$

इसलिए $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(6) मान लीजिए कि $x = a\tan\theta$ तब $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

इसलिए $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}}$$

$$= \int\sec\theta\, d\theta = \log\left|(\sec\theta+\tan\theta)\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C,$$ जहाँ $C = C_1 - \log|a|$

इन प्रामाणिक सूत्रों के प्रयोग से अब हम कुछ और सूत्र प्राप्त करते हैं जो अनुप्रयोग की दृष्टि से उपयोगी हैं और दूसरे समाकलनों का मान ज्ञात करने के लिए इनका सीधा प्रयोग किया जा सकता है।

(7) समाकलन $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, ज्ञात करने के लिए हम

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] \text{लिखते हैं।}$$

अब $x+\frac{b}{2a}=t$ रखने पर $dx = dt$ एवं $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$ लिखते हुए हम पाते हैं कि $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ के चिह्न पर निर्भर करते हुए यह समाकलन $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$ के रूप में परिवर्तित हो जाता है और इस प्रकार इसका मान ज्ञात किया जा सकता है।

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, के प्रकार के समाकलन को ज्ञात करने के लिए (7) की भाँति आगे बढ़ते हुए प्रामाणिक सूत्रों का उपयोग करके समाकलन ज्ञात किया जा सकता है।

(9) $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$, जहाँ p, q, a, b, c अचर हैं, के प्रकार के समाकलन ज्ञात करने के लिए हम ऐसी दो वास्तविक संख्याएँ A तथा B ज्ञात करते हैं ताकि

$$px + q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+\mathrm{B} = \mathrm{A}\,(2ax+b)+\mathrm{B}$$

A तथा B, ज्ञात करने के लिए हम दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचरों को समान करते हैं। A तथा B के ज्ञात हो जाने पर समाकलन ज्ञात प्रामाणिक रूप में परिवर्तित हो जाता है।

(10) $\int\frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, के प्रकार के समाकलन का मान ज्ञात करने के लिए हम (9) की भाँति आगे बढ़ते हैं और समाकलन को ज्ञात प्रामाणिक रूपों में परिवर्तित करते हैं।

आइए उपर्युक्त विधियों को कुछ उदाहरणों की सहायता से समझते हैं।

उदाहरण 8 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int\frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

हल

(i) यहाँ $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$ [7.4 (1) से]

(ii) $\int \frac{dx}{2x-x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$x - 1 = t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t) + C$$ [7.4 (5) से]

$$= \sin^{-1}(x-1) + C$$

उदाहरण 9 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

हल

(i) यहाँ $x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 13 = (x-3)^2 + 4$

इसलिए $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}dx$

मान लीजिए $x - 3 = t$ तब $dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + C$$ [7.4 (3) से]

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C$$

(ii) दिया हुआ समाकलन 7.4(7) के रूप का है। हम समाकल्य के हर को निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं

$$3x^2 + 13x - 10 = 3\left(x^2 + \frac{13x}{3} - \frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2\right]$$ (पूर्ण वर्ग बनाने पर)

इसलिए $$\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

अब $x+\frac{13}{6}=t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$

$$= \frac{1}{3\times 2\times \frac{17}{6}} \log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right| + C_1 \qquad \text{[7.4 (i) से]}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right| + C_1 = \frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C, \text{ where } C = C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

(iii) यहाँ $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}} \quad \text{(पूर्ण वर्ग बनाने पर)}$$

अब $x-\frac{1}{5}=t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + C \qquad [7.4\ (4)\ \text{से}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}} \right| + C$$

उदाहरण 10 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$

हल

(i) सूत्र 7.4(9) का उपयोग करते हुए हम अभिव्यक्त करते हैं

$$x + 2 = A \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 6x + 5\right) + B = A\,(4x + 6) + B$$

दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचरों को समान करने पर हम पाते हैं:

$4A = 1$ तथा $6A + B = 2$ अथवा $A = \frac{1}{4}$ और $B = \frac{1}{2}$

इसलिए $$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5} dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \quad \text{(मान लीजिए)} \qquad \dots (1)$$

I_1 में, $2x^2 + 6x + 5 = t$, रखने पर $(4x + 6)\, dx = dt$

इसलिए $$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C_1 = \log |2x^2 + 6x + 5| + C_1 \qquad \dots (2)$$

और $$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

अब $x + \frac{3}{2} = t$, रखने पर $dx = dt$, हम पाते हैं

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\tan^{-1}2t + \mathrm{C}_2 \qquad [7.4\ (3)\ \text{से}]$$

$$= \tan^{-1}2\left(x+\frac{3}{2}\right) + \mathrm{C}_2 = \tan^{-1}(2x+3) + \mathrm{C}_2 \qquad \ldots (3)$$

(2) और (3) का उपयोग (1) में करने पर हम पाते हैं

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx = \frac{1}{4}\log\left|2x^2+6x+5\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3) + \mathrm{C},$$

जहाँ $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1}{4} + \frac{\mathrm{C}_2}{2}$

(ii) यह समाकलन 7.4 (10) के रूप में है। आइए $x+3$ को निम्नलिखित रूप में अभिव्यक्त करते हैं

$$x+3 = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(5-4x-x^2) + \mathrm{B} = \mathrm{A}(-4-2x) + \mathrm{B}$$

दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचरों को समान करने पर हम पाते हैं

$-2\mathrm{A} = 1$ और $-4\mathrm{A} + \mathrm{B} = 3$,

अर्थात् $\mathrm{A} = -\frac{1}{2}$ और $\mathrm{B} = 1$

इसलिए $$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \qquad \ldots (1)$$

I_1, में $5-4x-x^2 = t$, रखने पर $(-4-2x)\,dx = dt$

इसलिए $$\mathrm{I}_1 = \int\frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + \mathrm{C}_1$$

$$= 2\sqrt{5-4x-x^2} + \mathrm{C}_1 \qquad \ldots (2)$$

अब $$\mathrm{I}_2 = \int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$ पर विचार कीजिए

$x+2 = t$ रखने पर $dx = dt$

इसलिए $\quad \mathrm{I}_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{3} + \mathrm{C}_2$ [7.4 (5) से]

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + \mathrm{C}_2 \qquad \text{... (3)}$$

समीकरणों (2) एवं (3) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम

$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + \mathrm{C}$ प्राप्त करते हैं, जहाँ $\mathrm{C} = \mathrm{C}_2 - \frac{\mathrm{C}_1}{2}$

प्रश्नावली 7.4

प्रश्न 1 से 23 तक के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\frac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\frac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\frac{x^2}{1-x^6}$

7. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\frac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\frac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

प्रश्न 24 एवं 25 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

24. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ बराबर है :

(A) $x \tan^{-1}(x+1) + C$ (B) $\tan^{-1}(x+1) + C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x + C$ (D) $\tan^{-1}x + C$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

स्मरण कीजिए कि एक परिमेय फलन $\frac{P(x)}{Q(x)}$, दो बहुपदों के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ $P(x)$ एवं $Q(x)$, x में बहुपद हैं तथा $Q(x) \neq 0$. यदि $P(x)$ की घात $Q(x)$ की घात से कम है, तो परिमेय फलन उचित परिमेय फलन कहलाता है अन्यथा विषम परिमेय फलन कहलाता है। विषम परिमेय फलनों को लम्बी भाग विधि द्वारा उचित परिमेय फलन के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। इस प्रकार यदि $\frac{P(x)}{Q(x)}$ विषम परिमेय फलन है, तो $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, जहाँ $T(x)$ x में एक बहुपद है और $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ एक उचित परिमेय फलन है। हम जानते हैं कि एक बहुपद का समाकलन कैसे किया जाता है, अत: किसी भी परिमेय फलन का समाकलन किसी उचित परिमेय फलन के समाकलन की समस्या के रूप में परिवर्तित हो जाता है। यहाँ पर हम जिन परिमेय फलनों के समाकलन पर विचार करेंगे, उनके हर रैखिक और द्विघात गुणनखंडों में विघटित होने वाले होंगे।

मान लीजिए कि हम $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ का मान ज्ञात करना चाहते हैं जहाँ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ एक उचित परिमेय फलन है। एक विधि, जिसे आंशिक भिन्नों में वियोजन के नाम से जाना जाता है, की सहायता से दिए हुए समाकल्य को साधारण परिमेय फलनों के योग के रूप मे लिखा जाना संभव है। इसके पश्चात् पूर्व ज्ञात विधियों की सहायता से समाकलन सरलतापूर्वक किया जा सकता है। निम्नलिखित सारणी 7.2 निर्दिष्ट करती है, कि विभिन्न प्रकार के परिमेय फलनों के साथ किस प्रकार के सरल आंशिक भिन्नों को संबद्ध किया जा सकता है।

सारणी 7.2

क्रमांक	परिमेय फलन का रूप	आंशिक भिन्नों का रूप
1.	$\dfrac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$
2.	$\dfrac{px+q}{(x-a)^2}$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$
4.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}$
5.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$ जहाँ $x^2 + bx + c$ का और आगे गुणनखंड नहीं किया जा सकता।	$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,

उपर्युक्त सारणी में A, B एवं C वास्तविक संख्याएँ हैं जिनको उचित विधि से ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 11 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समाकल्य एक उचित परिमेय फलन है इसलिए आंशिक भिन्नों के रूप [सारणी 7.2 (i)], का उपयोग करते हुए, हम

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}, \text{ लिखते हैं} \qquad \ldots (1)$$

जहाँ A और B वास्तविक संख्याएँ हैं जिनको हमें उचित विधि से ज्ञात करना है। हम पाते हैं

$$1 = A\,(x + 2) + B\,(x + 1)$$

x के गुणांकों एवं अचर पदों को समान करने पर हम पाते हैं

$$A + B = 0$$

एवं

$$2A + B = 1$$

इन समीकरणों को हल करने पर हमें $A = 1$ और $B = -1$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार समाकल्य निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-1}{x+2}$

इसलिए $$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + C = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

टिप्पणी उपर्युक्त समीकरण (1) एक सर्वसमिका है अर्थात् एक ऐसा कथन जो x के सभी स्वीकार्य सभी मानों के लिए सत्य है। कुछ लेखक संकेत $\equiv$ का उपयोग यह दर्शाने के लिए करते हैं कि दिया हुआ कथन एक सर्वसमिका है और संकेत $=$ का उपयोग यह दर्शाने के लिए करते हैं कि दिया हुआ कथन एक समीकरण है अर्थात् यह दर्शाने के लिए कि दिया हुआ कथन x के निश्चित मानों के लिए सत्य है।

उदाहरण 12 $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ समाकल्य $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ एक उचित परिमेय फलन नहीं है इसलिए हम $x^2 + 1$ को $x^2 - 5x + 6$ से भाग करते हैं और हम पाते हैं कि

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}$$

मान लीजिए कि $$\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

ताकि $$5x - 5 = A(x-3) + B(x-2)$$

दोनों पक्षों से x के गुणांकों एवं अचर पदों को समान करने पर हम पाते हैं $A + B = 5$ और $3A + 2B = 5$.

इन समीकरणों को हल करने पर हम

$A = -5$ और $B = 10$ प्राप्त करते हैं।

अतः $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

इसलिए $$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2} dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + C$$

उदाहरण 13 $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समाकल्य सारणी 7.2(4) में दिए हुए समाकल्य के रूप का है। अतः हम

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$ लिखते हैं

ताकि $3x - 2 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2$

$$= A(x^2 + 4x + 3) + B(x + 3) + C(x^2 + 2x + 1)$$

दोनों पक्षों से x^2 के गुणांकों, x के गुणांकों एव अचर पदों की तुलना करने पर पाते हैं कि $A + C = 0$, $4A + B + 2C = 3$ और $3A + 3B + C = -2$ इन समीकरणों को हल करने पर हम $A = \frac{11}{4}, B = \frac{-5}{2}$ और $C = \frac{-11}{4}$ पाते हैं। इस प्रकार समाकल्य निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

इसलिए $$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

उदाहरण 14 $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ को लीजिए और $x^2 = y$ रखिए

तब $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$$ के रूप में लिखिए

ताकि $$y = A(y+4) + B(y+1)$$

दोनों पक्षों से y के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करने पर हम पाते हैं $A + B = 1$ और $4A + B = 0$, जिससे प्राप्त होता है

$$A = -\frac{1}{3} \quad \text{और} \quad B = \frac{4}{3}$$

अतः
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

इसलिए
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

उपर्युक्त उदाहरण में केवल आंशिक भिन्न वाले भाग के लिए प्रतिस्थापन किया गया था न कि समाकलन वाले भाग के लिए। अब हम एक ऐसे उदाहरण की चर्चा करते हैं जिसमें समाकलन के लिए प्रतिस्थापन विधि एवं आंशिक भिन्न विधि दोनों को संयुक्त रूप से प्रयुक्त किया गया है।

उदाहरण 15 $\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \sin\phi$

तब
$$dy = \cos\phi\ d\phi$$

इसलिए
$$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y-2)\,dy}{5-(1-y^2)-4y}$$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\,dy = \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = I \qquad \text{(मान लीजिए)}$$

अब हम
$$\frac{3y-2}{(y-2)^2} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{(y-2)^2}$$ लिखते हैं [सारणी 7.2 (2) से]

इसलिए
$$3y - 2 = A(y-2) + B$$

दोनों पक्षों से y के गुणांक एवं अचर पदों की तुलना करने पर हम पाते हैं, $A = 3$ एवं $B - 2A = -2$, जिससे हमें $A = 3$ एवं $B = 4$ प्राप्त होता है।

इसलिए अभीष्ट समाकलन निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$I = \int [\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2}]\,dy = 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= 3\log|y-2| + 4\left(-\frac{1}{y-2}\right) + C = 3\log|\sin\phi - 2| + \frac{4}{2-\sin\phi} + C$$

$$= 3\log(2-\sin\phi) + \frac{4}{2-\sin\phi} + C$$ (क्योंकि $2 - \sin\phi$ हमेशा धनात्मक है)

उदाहरण 16 $\int \frac{x^2+x+1\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ समाकल्य एक उचित परिमेय फलन है। परिमेय फलन को आंशिक भिन्नों में विघटित करते हैं [सारणी 2.2(5)]।

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

इसलिए $x^2 + x + 1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x+2)$

दोनों पक्षों से x^2 के गुणांकों, x के गुणांकों एवं अचर पदों की तुलना करने पर हम $A + B = 1$, $2B + C = 1$ और $A + 2C = 1$ प्राप्त करते हैं।

इन समीकरणों को हल करने पर हम $A = \frac{3}{5}, B = \frac{2}{5}, C = \frac{1}{5}$ पाते हैं।

इस प्रकार समाकल्य निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

इसलिए $$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}\,dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\log|x+2| + \frac{1}{5}\log|x^2+1| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + C$$

प्रश्नावली 7.5

1 से 21 तक के प्रश्नों में परिमेय फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\dfrac{1}{x^2-9}$ **3.** $\dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **5.** $\dfrac{2x}{x^2+3x+2}$

6. $\dfrac{1-x^2}{x(1-2x)}$ **7.** $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ **8.** $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

9. $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ **10.** $\dfrac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$ **11.** $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$

12. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ **13.** $\dfrac{2}{(1-x)(1+x^2)}$ **14.** $\dfrac{3x-1}{(x+2)^2}$

15. $\dfrac{1}{x^4-1}$ **16.** $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$ [संकेत: अंश एवं हर को x^{n-1} से गुणा कीजिए और $x^n = t$ रखिए]

17. $\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [संकेत: $\sin x = t$ रखिए]

18. $\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ **19.** $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ **20.** $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

21. $\dfrac{1}{(e^x-1)}$ [संकेत: $e^x = t$ रखिए]

प्रश्न 22 एवं 23 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ बराबर है :

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right| + C$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right| + C$ (D) $\log|(x-1)(x-2)| + C$

23. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ बराबर है:

(A) $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (B) $\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

(C) $-\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (D) $\frac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + C$

7.6 खंडशः समाकलन (Integration by Parts)

इस परिच्छेद में हम समाकलन की एक और विधि की चर्चा करेंगे जो कि दो फलनों के गुणनफल का समाकलन करने में बहुत उपयोगी है।

यदि एकल चर x (मान लीजिए) में u और v दो अवकलनीय फलन है तो अवकलन के गुणनफल नियम के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

अथवा
$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \quad \ldots (1)$$

मान लीजिए कि $u = f(x)$ और $\frac{dv}{dx} = g(x)$ तब

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ और } v = \int g(x)\,dx$$

इसलिए समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int [\int g(x)\,dx\; f'(x)]\,dx$$

अर्थात्
$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int [f'(x)\int g(x)\,dx]\,dx$$

यदि हम f को प्रथम फलन और g को दूसरा फलन मान लें तो इस सूत्र को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

"दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = (प्रथम फलन) × (द्वितीय फलन का समाकलन) — [(प्रथम फलन का अवकलन गुणांक) × (द्वितीय फलन का समाकलन)] का समाकलन"

उदाहरण 17 $\int x \cos x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $f(x) = x$ (प्रथम फलन) और $g(x) = \cos x$ (द्वितीय फलन) रखिए। तब खंडशः समाकलन से प्राप्त होता है कि

$$\int x \cos x\, dx = x \int \cos x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(x) \int \cos x\, dx]\, dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$$

मान लीजिए कि हम $f(x) = \cos x$ एवं $g(x) = x$ लेते हैं तब

$$\int x \cos x\, dx = \cos x \int x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(\cos x) \int x\, dx]\, dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int \sin x \frac{x^2}{2}\, dx$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि समाकलन $\int x \cos x\, dx$, तुलनात्मक दृष्टि से x की अधिक घात वाले अधिक कठिन समाकलन में परिवर्तित हो जाता है। इसलिए प्रथम फलन एवं द्वितीय फलन का उचित चयन महत्वपूर्ण है।

टिप्पणी

1. यह वर्णनीय हैं, कि खंडशः समाकलन दो फलनों के गुणनफल की सभी स्थितियों में प्रयुक्त नहीं है, उदाहरणतया $\int \sqrt{x} \sin x\, dx$ की स्थिति में यह विधि काम नहीं करती है। इसका कारण यह है कि ऐसा कोई फलन अस्तित्व मे ही नहीं है जिसका अवकलज $\sqrt{x} \sin x$ है।
2. ध्यान दीजिए कि द्वितीय फलन का समाकलन ज्ञात करते समय हमने कोई समाकलन अचर नहीं जोड़ा था। यदि हम द्वितीय फलन $\cos x$ के समाकलन को $\sin x + k$, के रूप में लिखते हैं, जहाँ k कोई अचर है, तब

$$\int x \cos x\, dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k)\, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \int \sin x\, dx - \int k\, dx$$

$$= x(\sin x + k) + \cos x - kx + C = x \sin x + \cos x + C$$

यह दर्शाता है कि खंडशः समाकलन विधि के प्रयोग से अंतिम परिणाम ज्ञात करने के लिए द्वितीय फलन के समाकलन में अचर का जोड़ना व्यर्थ है।

3. सामान्यतः यदि कोई फलन x की घात के रूप में है अथवा x का बहुपद है तो हम इसे प्रथम फलन के रूप मे लेते हैं। तथापि ऐसी स्थिति में जहाँ दूसरा फलन प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अथवा लघुगणकीय फलन है, तो हम उनको प्रथम फलन के रूप मे लेते हैं।

उदाहरण 18 $\int \log x \, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल प्रारम्भ करने के लिए हम ऐसे फलन का अनुमान लगाने में असमर्थ हैं जिसका अवकलज $\log x$ है। हम $\log x$ को प्रथम फलन एवं अचर फलन 1 को द्वितीय फलन लेते हैं। दूसरे फलन का समाकलन x है।

अतः
$$\int (\log x \cdot 1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int 1\, dx\right] dx$$
$$= \log x \,.\, x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx = x \log x - x + C$$

उदाहरण 19 $\int x\, e^x dx$ ज्ञात कीजिए।

हल x प्रथम फलन एवं e^x को द्वितीय फलन के रूप में लीजिए

दूसरे फलन का समाकलन $= e^x$

इसलिए $\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int 1 \,.\, e^x dx = xe^x - e^x + C$

उदाहरण 20 $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए प्रथम फलन $= \sin^{-1} x$, और द्वितीय फलन $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1.088 mm

अब हम द्वितीय फलन का समाकलन ज्ञात करते हैं अर्थात् $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ज्ञात करते हैं।

$t = 1 - x^2$ रखिए

तब $dt = -2x\, dx$

इसलिए
$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

अतः
$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x \left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx$$
$$= -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + x + C = x - \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + C$$

विकल्पतः $\sin^{-1} x = \theta$ प्रतिस्थापित करने पर और तब खंडशः समाकलन का उपयोग करते हुए भी इस समाकलन को हल किया जा सकता है।

उदाहरण 21 $\int e^x \sin x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल e^x को प्रथम फलन एवं $\sin x$ को द्वितीय फलन के रूप में लीजिए। तब खंडशः समाकलन से हम पाते हैं कि

$$I = \int e^x \sin x\, dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + I_1 \text{ (मान लीजिए)} \quad \dots (1)$$

I_1 में e^x एवं $\cos x$ को क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय फलन मानते हुए हम पाते हैं कि

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

I_1 का मान (1) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \text{ अथवा } 2I = e^x (\sin x - \cos x)$$

अतः $$I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

विकल्पतः $\sin x$ को प्रथम फलन एवं e^x को द्वितीय फलन लेने पर भी उपर्युक्त समाकलन को ज्ञात किया जा सकता है।

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$ के प्रकार का समाकलन

हमें ज्ञात है कि $$I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$$

$$= I_1 + \int e^x f'(x)\, dx, \text{ जहाँ } I_1 = \int e^x f(x)\, dx \quad \dots (1)$$

I_1 में $f(x)$ एवं e^x को क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय फलन लेते हुए एवं खंडशः समाकलन द्वारा हम पाते हैं $I_1 = f(x)\, e^x - \int f'(x)\, e^x dx + C$

I_1 को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + C = e^x f(x) + C$$

अतः $$\int e^x \left(f(x) + f'(x)\right) dx = e^x f(x) + C$$

उदाहरण 22 ज्ञात कीजिए

(i) $\int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$

हल

(i) यहाँ $I = \int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

अब $f(x) = \tan^{-1} x$, लीजिए, तब $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

अतः दिया हुआ समाकल्य $e^x\,[f(x) + f'(x)]$ के रूप में है।

इसलिए $$I = \int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx = e^x \tan^{-1} x + C$$

(ii) मान लीजिए कि $$I = \int \frac{(x^2+1)\,e^x}{(x+1)^2}\, dx = \int e^x\, [\frac{x^2-1+1+1)}{(x+1)^2}]\, dx$$

$$= \int e^x\, [\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx = \int e^x\, [\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx$$

मान लीजिए कि $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ तब $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

अतः दिया हुआ समाकल्य $e^x\,[f(x) + f'(x)]$ के रूप में है।

इसलिए $$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\, e^x\, dx = \frac{x-1}{x+1}\, e^x + C$$

प्रश्नावली 7.6

1 से 22 तक के प्रश्नों के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2 e^x$ **4.** $x \log x$

5. $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$ **7.** $x \sin^{-1} x$ **8.** $x \tan^{-1} x$

9. $x \cos^{-1} x$ **10.** $(\sin^{-1} x)^2$ **11.** $\frac{x \cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x \sec^2 x$

13. $\tan^{-1} x$ **14.** $x (\log x)^2$ **15.** $(x^2 + 1) \log x$

16. $e^x (\sin x + \cos x)$ **17.** $\frac{x\, e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\frac{(x-3)\, e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x} \sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

प्रश्न 23 एवं 24 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

23. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$ बराबर है:

(A) $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$ (B) $\frac{1}{3} e^{x^2} + C$

(C) $\frac{1}{2} e^{x^3} + C$ (D) $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

24. $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ बराबर है:

(A) $e^x \cos x + C$ (B) $e^x \sec x + C$

(C) $e^x \sin x + C$ (D) $e^x \tan x + C$

7.6.2 कुछ अन्य प्रकार के समाकलन *(Integrals of some more types)*

यहाँ हम खंडशः समाकलन विधि पर आधारित कुछ विशिष्ट प्रकार के प्रामाणिक समाकलनों की चर्चा करेंगे। जैसे कि

(i) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) मान लीजिए कि $I = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

अचर फलन 1 को द्वितीय फलन मानते हुए और खंडशः समाकलन द्वारा हम पाते हैं

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

अथवा $$2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

अथवा $$I = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

इसी प्रकार दूसरे दो समाकलनों में अचर फलन 1 को द्वितीय फलन लेकर एवं खंडशः समाकलन विधि द्वारा हम पाते हैं

(ii) $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

(iii) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

विकल्पतः समाकलनों (i), (ii) एवं (iii) में क्रमशः $x = a\sec\theta$, $x = a\tan\theta$ और $x = a\sin\theta$, प्रतिस्थापन करने पर भी इन समाकलनों को ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 23 $\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि $\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\, dx$

अब $x + 1 = y$ रखने पर $dx = dy$, तब

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \int \sqrt{y^2+2^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{y^2+4} + \frac{4}{2} \log \left| y + \sqrt{y^2+4} \right| + C \quad \text{[7.6.2 (ii)के उपयोग से]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2 \log \left| x+1+\sqrt{x^2+2x+5} \right| + C$$

उदाहरण 24 $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\, dx$

अब $x + 1 = y$ रखने पर $dx = dy$

इस प्रकार $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{4-y^2}\, dy$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{y}{2} + C \quad \text{[7.6.2 (iii)के उपयोग से]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + 2 \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

प्रश्नावली 7.7

1 से 9 तक के प्रश्नों के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\sqrt{4-x^2}$ **2.** $\sqrt{1-4x^2}$ **3.** $\sqrt{x^2+4x+6}$

4. $\sqrt{x^2+4x+1}$ **5.** $\sqrt{1-4x-x^2}$ **6.** $\sqrt{x^2+4x-5}$

7. $\sqrt{1+3x-x^2}$ **8.** $\sqrt{x^2+3x}$ **9.** $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

प्रश्न 10 एवं 11 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

10. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ बराबर है:

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right|+C$ (B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

(C) $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ (D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$

11. $\int \sqrt{x^2-8x+7}\, dx$ बराबर है

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

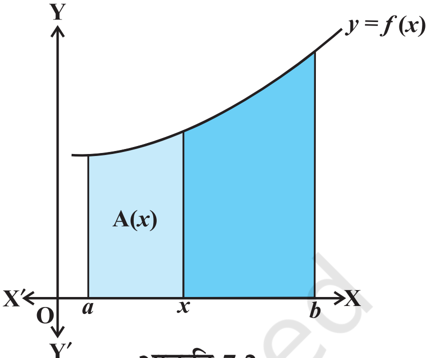
7.7 निश्चित समाकलन (Definite Integral)

पिछले परिच्छेदों में हमने अनिश्चित समाकलनों के बारे में अध्ययन किया है और कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलनों सहित अनिश्चित समाकलनों को ज्ञात करने की कुछ विधियों पर चर्चा की है। इस परिच्छेद में हम किसी फलन के निश्चित समाकलन का अध्ययन करेंगे। निश्चित समाकलन का एक अद्वितीय मान होता है। एक निश्चित समाकलन को $\int_a^b f(x)\, dx$, से निर्दिष्ट किया जाता है जहाँ b, समाकलन की उच्च सीमा तथा a, समाकलन की निम्न सीमा कहलाती हैं। निश्चित समाकलन का परिचय, या तो योगों की सीमा के रूप में कराया जाता है अथवा यदि अंतराल $[a, b]$ में इसका कोई प्रतिअवकलज F है तो निश्चित समाकलन का मान अंतिम बिंदुओं पर F के मानों के अंतर अर्थात् $F(b) - F(a)$ के बराबर होता है, के रूप में कराया जाता है। निश्चित समाकलन के इन दोनों रूपों की हम अलग-अलग चर्चा करेंगे।

7.8 कलन की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Calculus)

7.8.1 क्षेत्रफल फलन *(Area function)*

हमने $\int_a^b f(x)\,dx$ को वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष, एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित किया है। मान लीजिए $[a, b]$ में x कोई बिंदु है तब $\int_a^x f(x)\,dx$ आकृति 7.2 में हल्का छायांकित क्षेत्र के क्षेत्रफल को निरूपित करता है [यहाँ यह मान लिया गया है कि $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) > 0$ है। निम्नलिखित कथन सामान्यत: अन्य फलनों के लिए भी सत्य है। इस छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल x के मान पर निर्भर है।



आकृति 7.2

दूसरे शब्दों में इस छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल x का एक फलन है। हम x के इस फलन को $A(x)$ से निर्दिष्ट करते हैं। इस फलन $A(x)$ को हम क्षेत्रफल फलन कहते हैं और यह हमें निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है।

$$\mathbf{A}(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

इस परिभाषा पर आधारित दो आधारभूत प्रमेय हैं। तथापि हम यहाँ पर केवल इनकी व्याख्या करेंगे क्योंकि इनकी उपपत्ति इस पाठ्यपुस्तक की सीमा के बाहर है।

7.8.2 प्रमेय 1 समाकलन गणित की प्रथम आधारभूत प्रमेय *(First fundamental theorem of integral calculus)*

मान लीजिए कि बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक संतत फलन है और $A(x)$ क्षेत्रफल फलन है। तब सभी $x \in [a, b]$ के लिए $A'(x) = f(x)$

7.8.3 समाकलन गणित की द्वितीय आधारभूत प्रमेय *(Second fundamental theorem of integral calculus)*

हम नीचे एक ऐसे महत्वपूर्ण प्रमेय की व्याख्या करते हैं जिसकी सहायता से हम प्रतिअवकलज का उपयोग करते हुए निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करते हैं।

प्रमेय 2 मान लीजिए कि बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक संतत फलन है और f का प्रतिअवकलज F है। तब $\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

टिप्पणी

1. शब्दों में हम प्रमेय 2 को इस प्रकार व्यक्त करते हैं कि $\int_a^b f(x)\,dx =$ (f के प्रति अवकलज F का उच्च सीमा b पर मान) – (उसी प्रति अवकलज का निम्न सीमा a पर मान)।

2. यह प्रमेय अत्यंत उपयोगी है क्योंकि यह हमें योगफल की सीमा ज्ञात किए बिना निश्चित समाकलन को ज्ञात करने की आसान विधि प्रदान करती है।

3. एक निश्चित समाकलन ज्ञात करने में जटिल संक्रिया एक ऐसे फलन का प्राप्त करना है जिसका अवकलज दिया गया समाकल्य है। यह अवकलन और समाकलन के बीच संबंध को और मजबूत करता है।

4. $\int_a^b f(x)\,dx$ में, $[a, b]$ पर फलन f का सुपरिभाषित एवं संतत होना आवश्यक है। उदाहरणत: निश्चित समाकलन $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ की चर्चा करना भ्रांतिमूलक हैं क्योंकि बंद अंतराल $[-2, 3]$ के भाग $-1 < x < 1$ के लिए $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ द्वारा अभिव्यक्त फलन f परिभाषित नही है। $\int_a^b f(x)\,dx$ ज्ञात करने के चरण (**Steps for calculating** $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$)

(i) अनिश्चित समाकलन $\int f(x)\,dx$ ज्ञात कीजिए। मान लीजिए यह $F(x)$ है। समाकलन अचर C को लेने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यदि हम $F(x)$ के स्थान पर $F(x) + C$ पर विचार करें तो पाते हैं कि

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + C]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

इस प्रकार निश्चित समाकलन का मान ज्ञात करने में स्वेच्छ अचर विलुप्त हो जाता है।

(ii) $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ज्ञात कीजिए, जो कि $\int_a^b f(x)\,dx$ का मान है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 25 निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ (iii) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\,dt$

हल

(i) मान लीजिए $I = \int_2^3 x^2\,dx$ है। क्योंकि $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$

इसलिए द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं कि

$$I = F(3) - F(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

(ii) मान लीजिए कि $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx$ सर्वप्रथम हम समाकल्य का प्रतिअवकलज ज्ञात करते हैं।

$30 - x^{\frac{3}{2}} = t$ रखने पर $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx = dt$ अथवा $\sqrt{x}\, dx = -\frac{2}{3} dt$

इस प्रकार $\int \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right] = F(x)$

इसलिए कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं:

$$I = F(9) - F(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)} - \frac{1}{30-8}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) मान लीजिए $I = \int_1^2 \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)}$

आंशिक भिन्न का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

इसलिए $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)} = -\log|x+1| + 2\log|x+2| = F(x)$

अतः कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं कि

$$I = F(2) - F(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) मान लीजिए, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$. अब $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt$ पर विचार कीजिए

$\sin 2t = u$ रखने पर $2\cos 2t\, dt = du$ अथवा $\cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\, du$

अतः $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = F(t) \text{ मान लीजिए}$$

इसलिए कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{8}\left[\sin^4 \frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

प्रश्नावली 7.8

1 से 20 तक के प्रश्नों में निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_{-1}^{1}(x+1)\, dx$ **2.** $\int_{2}^{3}\frac{1}{x}\, dx$ **3.** $\int_{1}^{2}(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)\, dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\, dx$ **5.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\, dx$ **6.** $\int_{4}^{5}e^x dx$ **7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\, dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{cosec} x\, dx$ **9.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-1}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\, dx$ **13.** $\int_{2}^{3}\frac{x\, dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{5x^2+1}\, dx$ **15.** $\int_{0}^{1}x\, e^{x^2}\, dx$

16. $\int_{1}^{2}\frac{5x^2}{x^2+4x+3}$ **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x + x^3 + 2)\, dx$

18. $\int_{0}^{\pi}\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right) dx$ **19.** $\int_{0}^{2}\frac{6x+3}{x^2+4}\, dx$

20. $\int_{0}^{1}\left(x\, e^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right) dx$

प्रश्न 21 एवं 22 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

21. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ बराबर है:

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

22. $\int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2}$ बराबर है:

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

पिछले परिच्छेदों में हमने अनिश्चित समाकलन ज्ञात करने की अनेक विधियों की चर्चा की है। अनिश्चित समाकलन ज्ञात करने की महत्वपूर्ण विधियों में एक विधि प्रतिस्थापन विधि है।

प्रतिस्थापन विधि से $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, का मान ज्ञात करने के लिए आवश्यक चरण निम्नलिखित है:

1. समाकलन के बारे में सीमाओं के बिना विचार कीजिए और $y = f(x)$ अथवा $x = g(y)$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि दिया हुआ समाकलन एक ज्ञात रूप में परिवर्तित हो जाए।
2. समाकलन अचर की व्याख्या किए बिना नए समाकल्य का नए चर के सापेक्ष समाकलन कीजिए।
3. नए चर के स्थान पर पुनः प्रतिस्थापन कीजिए और उत्तर को मूल चर के रूप में लिखिए।
4. चरण (3) से प्राप्त उत्तर का समाकलन की दी हुई सीमाओं पर मान ज्ञात कीजिए और उच्च सीमा वाले मान से निम्न सीमा वाले मान का अंतर ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी इस विधि को तीव्रतर बनाने के लिए हम निम्नलिखित प्रकार आगे बढ़ सकते हैं। चरण (1) एवं (2) को करने के बाद चरण (3) को करने की आवश्यकता नहीं है। यहाँ समाकलन को नए चर के रूप में रखा जाता है और समाकलन की सीमाओं को नए चर के अनुसार परिवर्तित कर लेते हैं ताकि हम सीधे अंतिम चरण की क्रिया कर सकें।

आइए इसे हम उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण 26 $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $t = x^5 + 1$, रखने पर $dt = 5x^4\,dx$

इसलिए $$\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

अत: $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

विकल्पत: सर्वप्रथम हम समाकलन का रूपांतरण करते हैं और तब रूपांतरित समाकलन का नयी सीमाओं के अनुसार मान ज्ञात करते हैं।

मान लीजिए $t = x^5 + 1$. तब $dt = 5\,x^4\,dx$ नोट कीजिए कि

जब $x = -1$ तो $t = 0$ और जब $x = 1$ तो $t = 2$

अत: जैसे-जैसे x, -1 से 1 तक परिवर्तित होता है वैसे-वैसे t, 0 से 2 तक परिवर्तित होता है।

इसलिए $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

उदाहरण 27 $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $t = \tan^{-1}x$, तब $dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$. जब $x = 0$ तो $t = 0$ और जब $x = 1$ तो $t = \frac{\pi}{4}$

अत: जैसे-जैसे x, 0 से 1 तक परिवर्तित होता है वैसे-वैसे t, 0 से $\frac{\pi}{4}$ तक परिवर्तित होता है।

इसलिए $$\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$$

प्रश्नावली 7.9

1 से 8 तक के प्रश्नों समाकलनों का मान प्रतिस्थापन का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए।

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi} \cos^5 \phi \, d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\, dx$ ($x + 2 = t^2$ रखिए) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$ **7.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) e^{2x} dx$

प्रश्न 9 एवं 10 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

9. समाकलन $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$ का मान है:

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10. यदि $f(x) = \int_0^x t \sin t \, dt$, तब $f'(x)$ है:

(A) $\cos x + x \sin x$ (B) $x \sin x$ (C) $x \cos x$ (D) $\sin x + x \cos x$

7.10 निश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some Properties of Definite Integrals)

निश्चित समाकलनों के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मों को हम नीचे सूचीबद्ध करते हैं। ये गुण धर्म निश्चित समाकलनों का मान आसानी से ज्ञात करने में उपयोगी होंगे।

P_0 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P_1 : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, विशिष्टतया $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ a, b, c$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

P_3 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

P_4 : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (ध्यान दीजिए कि P_4, P_3 की एक विशिष्ट स्थिति है)

P_5 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$, यदि $f(2a-x) = -f(x)$

P_7 : (i) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि f एक सम फलन है अर्थात् यदि $f(-x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, यदि f एक विषम फलन है अर्थात् यदि $f(-x) = -f(x)$

एक-एक करके हम इन गुणधर्मों की उपपत्ति करते हैं।

P_0 की उपपत्ति $x = t$ प्रतिस्थापन करने पर सीधे प्राप्त होती है।

P_1 की उपपत्ति मान लीजिए कि f का प्रतिअवकलज F है। तब कलन की द्वितीय आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं कि $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$,

यहाँ हम प्रेक्षित करते हैं कि यदि $a = b$, तब $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 की उपपत्ति मान लीजिए कि f का प्रतिअवकलज F है, तब

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{... (1)}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a) \quad \text{... (2)}$$

और

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c) \quad \text{... (3)}$$

(2) और (3) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

इससे गुणधर्म P_2 सिद्ध होता है।

P_3 की उपपत्ति मान लीजिए कि $t = a + b - x$. तब $dt = -\,dx$. जब $x = a$ तब, $t = b$ और जब $x = b$ तब $t = a$. इसलिए

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \quad (P_1 \text{ से})$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx \quad (P_0 \text{ से})$$

P_4 की उपपत्ति $t = a - x$ रखिए और P_3 की तरह आगे बढ़िए। अब $dt = -\,dx$, जब $x = a$, $t = 0$

P_5 की उपपत्ति P_2, का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

दाएँ पक्ष के दूसरे समाकलन में $t = 2a - x$ प्रतिस्थापित कीजिए, तब $dt = -\,dx$ और जब $x = a$, तब $t = a$ और जब $x = 2a$, तब $t = 0$ और $x = 2a - t$ भी प्राप्त होता है।
इसलिए दूसरा समाकलन

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx$$ प्राप्त होता है।

अतः $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

P_6 की उपपत्ति P_5, का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

अब यदि $f(2a - x) = f(x)$, तो (1) निम्नलिखित रूप में परिवर्तित हो जाता है

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

और यदि $f(2a - x) = -f(x)$, तब (1) निम्नलिखित रूप में परिवर्तित हो जाता हैं

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

P_7 की उपपत्ति

P_2 का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

दायें पक्ष के प्रथम समाकलन में $t = -x$ रखने पर
$dt = -\,dx$ जब $x = -a$ तब $t = a$ और जब $x = 0$, तब $t = 0$ और $x = -t$ भी प्राप्त होता है।

इसलिए $$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (P_0 \text{ से}) \qquad \ldots (1)$$

(i) अब यदि f एक सम फलन है तब $f(-x) = f(x)$ तो (1) से प्राप्त होता है कि

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(ii) यदि f विषम फलन है तब $f(-x) = -f(x)$ तो (1) से प्राप्त होता है कि

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

उदाहरण 28 $\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि $[-1, 0]$ पर $x^3 - x \geq 0$ और $[0, 1]$ पर $x^3 - x \leq 0$ और $[1, 2]$ पर $x^3 - x \geq 0$ तब हम लिख सकते हैं कि

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx \qquad (P_2 \text{ से})$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

उदाहरण 29 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम प्रेक्षित करते हैं कि $\sin^2 x$ एक सम फलन है।

इसलिए
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx \qquad [P_7\ (1)\text{से}]$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cos 2x)}{2}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

उदाहरण 30 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin (\pi - x)\, dx}{1+\cos^2 (\pi - x)}$ (P_4 से)

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - \mathrm{I}$$

अथवा $$2\,\mathrm{I} = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

अथवा $$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x = t$ रखने पर $-\sin x\, dx = dt$

जब $x = 0$ तब $t = 1$ और जब $x = \pi$ तब $t = -1$ है। इसलिए हम पाते हैं कि

$$\mathrm{I} = \frac{-\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} \quad (P_1 \text{ से})$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \text{ क्योंकि } \frac{1}{1+t^2} \text{ एक समफलन है} \quad (P_7 \text{ से})$$

$$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi \left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right] = \pi \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

उदाहरण 31 $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x\, dx$ और $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$

तब $f(-x) = \sin^5 (-x) \cos^4 (-x) = -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$, अर्थात् f एक विषम फलन है इसलिए $\mathrm{I} = 0$ [P_7 (ii) से]

उदाहरण 32 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ ... (1)

तब $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx \quad (P_4 \text{ से})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx \quad \ldots (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

अतः $$I = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 33 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\,dx}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$ ... (1)

तब $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}\,dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}} \quad (P_3 \text{ से})$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \quad \ldots (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि $2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

अतः $$I = \frac{\pi}{12}$$

उदाहरण 34 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx$

तब $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx \quad (P_4 \text{ से})$$

I, के दोनों मानों को जोड़ने पर हम पाते हैं

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2)\, dx \quad (\log 2 \text{ जोड़ने एवं घटाने पर})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx \qquad (\text{क्यों?})$$

प्रथम समाकलन में $2x = t$ रखने पर $2\, dx = dt$ जब $x = 0$ तो $t = 0$ और जब $x = \frac{\pi}{2}$ तो $t = \pi$

इसलिए
$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad [P_6 \text{ से क्योंकि } \sin(\pi - t) = \sin t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad (\text{चर } t \text{ को } x \text{ में परिवर्तित करने पर})$$

$$= I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

अतः $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{-\pi}{2}\log 2$

प्रश्नावली 7.10

निश्चित समाकलनों के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए 1 से 19 तक के प्रश्नों में समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x\, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$ **5.** $\int_{-5}^{5} |x + 2|\, dx$ **6.** $\int_2^{8} |x - 5|\, dx$

7. $\int_0^1 x(1-x)^n\, dx$ **8.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\, dx$ **9.** $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log \sin x - \log \sin 2x)\, dx$ **11.** $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x}$ **13.** $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$ **14.** $\int_0^{2\pi} \cos^5 x\, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin x \cos x}\, dx$ **16.** $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\, dx$ **17.** $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}\, dx$

18. $\int_0^4 |x-1|\, dx$

19. दर्शाइए कि $\int_0^a f(x)g(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$, यदि f और g को $f(x) = f(a-x)$ एवं $g(x) + g(a-x) = 4$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

प्रश्न 20 एवं 21 में सही उत्तर का चयन कीजिए।

20. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)\, dx$ का मान है:

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) –2

विविध उदाहरण

उदाहरण 35 $\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल $t = 1 + \sin 6x$, रखने पर $dt = 6\cos 6x\, dx$

इसलिए $$\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + C$$

उदाहरण 36 $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम प्राप्त करते हैं कि $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \int \frac{(1 - \frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4} dx$

अब $1 - \frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$, रखने पर $\frac{3}{x^4} dx = dt$

इसलिए
$$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{4}} dt$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15} \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + C$$

उदाहरण 37 $\int \frac{x^4 \, dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ज्ञात कीजिए।

हल हम प्राप्त करते हैं कि $\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \qquad \text{... (1)}$$

अब $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$ के रूप में अभिव्यक्त करते हैं ... (2)

इसलिए
$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$
$$= (A + B)x^2 + (C - B)x + A - C$$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि $A + B = 0, C - B = 0$ और

$A - C = 1$, जिससे प्राप्त होता है कि $A = \frac{1}{2}, B = C = -\frac{1}{2}$

A, B एवं C का मान (2) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad \text{... (3)}$$

(3) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

इसलिए

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

उदाहरण 38 $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$ ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}dx$$

आइए, प्रथम समाकलन में 1 को द्वितीय फलन के रूप में लेते हैं। तब खंडशः समाकलन से हम पाते हैं कि

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x}x\,dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \dots (1)$$

पुनः $\int \frac{dx}{\log x}$, पर विचार कीजिए, 1 को द्वितीय फलन के रूप में लीजिए और खंडशः विधि द्वारा समाकलन कीजिए, इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left\{-\frac{1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx\right] \qquad \dots (2)$$

(2) को (1), में रखने पर हम पाते हैं

$$I = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + C$$

उदाहरण 39 $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $\mathrm{I} = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx = \int \sqrt{\tan x}\,(1 + \cot x)\, dx$

अब $\tan x = t^2$, रखने पर $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

अथवा $$dx = \frac{2t\, dt}{1+t^4}$$

तब $$\mathrm{I} = \int t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{2t}{(1+t^4)}\, dt$$

$$= 2\int \frac{(t^2+1)}{t^4+1}\, dt = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$$

पुनः $t - \frac{1}{t} = y$, रखने पर $\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = dy$

तब $$\mathrm{I} = 2\int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}} + \mathrm{C} = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}} + \mathrm{C}$$

$$= \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}\right) + \mathrm{C} = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + \mathrm{C}$$

उदाहरण 40 $\int \frac{\sin 2x \cos 2x\, dx}{\sqrt{9-\cos^4(2x)}}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}\, dx$

अब $\cos^2(2x) = t$ रखने पर $4\sin 2x \cos 2x\, dx = -\, dt$

इसलिए $$\mathrm{I} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + \mathrm{C} = -\frac{1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right] + \mathrm{C}$$

उदाहरण 41 $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)| dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x, -1 \le x \le 1 \text{ के लिए} \\ -x \sin \pi x, 1 \le x \le \frac{3}{2} \text{ के लिए} \end{cases}$

इसलिए
$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|\, dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x \, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x \, dx$$

दायें पक्ष के दोनों समाकलनों का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|\, dx = \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

उदाहरण 42 $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\, dx}{a^2 \cos^2 (\pi - x) + b^2 \sin^2 (\pi - x)}$

(P_4 के उपयोग से)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \mathrm{I}$$

अतः
$$2\mathrm{I} = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

अथवा
$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$
(P_6 के उपयोग से)

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2+\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2+cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2+b^2\tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{cosec}^2 x\,dx}{a^2\cot^2 x + b^2}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{1}\frac{dt}{a^2+b^2+t^2} - \int_1^{0}\frac{dt}{a^2u^2+b^2}\right]$$ (रखिए $\tan x = t$ और $\cot x = u$)

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^1 - \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{au}{b}\right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} + \tan^{-1}\frac{a}{b}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab}$$

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1 से 24 तक के प्रश्नों के फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\dfrac{1}{x-x^3}$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

3. $\dfrac{1}{x\sqrt{ax-x^2}}$ [संकेत : $x = \dfrac{a}{t}$ रखिए] **4.** $\dfrac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$ [संकेत: $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)}$, $x = t^6$ रखिए]

6. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ **7.** $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$ **8.** $\dfrac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ **10.** $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$ **11.** $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ **13.** $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ **14.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\; e^{\log \sin x}$ **16.** $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$ **17.** $f'(ax+b)[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+\alpha)}}$ **19.** $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **20.** $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$

21. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$ **22.** $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

23. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

24 से 31 तक के प्रश्नों में निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

24. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ **25.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ **26.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ **28.** $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **29.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$

31. $\int_1^4\left(|x-1|+|x-2|+|x-3|\right)dx$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए (प्रश्न 32 से 39 तक)।

32. $\int_1^3\dfrac{dx}{x^2(x+1)}=\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{2}{3}$ **33.** $\int_0^1 x\,e^x dx=1$

34. $\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **35.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\dfrac{2}{3}$

36. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\tan^3 x\,dx=1-\log 2$ **37.** $\int_0^1\sin^{-1}x\,dx=\dfrac{\pi}{2}-1$

38 से 40 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए।

38. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ बराबर है:

(A) $\tan^{-1}(e^x) + C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x}) + C$

(C) $\log(e^x - e^{-x}) + C$ (D) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

39. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$ बराबर है:

(A) $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + C$ (B) $\log|\sin x + \cos x| + C$

(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

40. यदि $f(a + b - x) = f(x)$, तो $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ बराबर है:

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\, dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\, dx$

(C) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\, dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx$

सारांश

- समाकलन, अवकलन का व्युत्क्रम प्रक्रम है। अवकलन गणित में हमें एक फलन दिया हुआ होता है और हमें इस फलन का अवकलज अथवा अवकल ज्ञात करना होता है परंतु समाकलन गणित में हमें एक ऐसा फलन ज्ञात करना होता है जिसका अवकल दिया हुआ होता है। अत: समाकलन एक ऐसा प्रक्रम है जो कि अवकलन का व्युत्क्रम है।

  मान लीजिए कि $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. तब हम $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ लिखते हैं। ये समाकलन अनिश्चित समाकलन अथवा व्यापक समाकलन कहलाते हैं। C समाकलन अचर कहलाता है। इन सभी समाकलनों में एक अचर का अंतर होता है।

- अनिश्चित समाकलन के कुछ गुणधर्म निम्नलिखित है।

  1. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

  2. किसी भी वास्तविक संख्या k, के लिए $\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$

     अधिक व्यापकत:, यदि $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, फलन हैं तथा $k_1, k_2, ..., k_n$, वास्तविक संख्याएँ हैं तो

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x)]\, dx$$
$$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + ... + k_n \int f_n(x)\, dx$$

- **कुछ प्रामाणिक समाकलन**

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$. विशिष्टत: $\int dx = x + C$

(ii) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ (iii) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(iv) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ (v) $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

(vi) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(vii) $\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x + C$ (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$ (x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$ (xii) $\int e^x dx = e^x + C$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ (xiv) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

- **आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन**

स्मरण कीजिए कि एक परिमेय फलन $\frac{P(x)}{Q(x)}$, दो बहुपदों का अनुपात है जिसमें $P(x)$ और $Q(x)$, x के बहुपद हैं और $Q(x) \neq 0$. यदि बहुपद $P(x)$ की घात बहुपद $Q(x)$, की घात से अधिक है तो हम $P(x)$ को $Q(x)$ से विभाजित करते हैं ताकि $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ के रूप में लिखा जा सके जहाँ $T(x)$, एक बहुपद है और $P_1(x)$ की घात $Q(x)$ की घात से कम है। बहुपद होने के कारण $T(x)$ का समाकलन आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ को निम्नलिखित प्रकार की आंशिक भिन्नों के योगफल के रूप में व्यक्त करते हुए इसका समाकलन ज्ञात किया जा सकता है।

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$, $a \neq b$

2. $$\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

3. $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

4. $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$$

5. $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c},$$

जहाँ $x^2 + bx + c$ के आगे और गुणनखंड नहीं किए जा सकते।

◆ **प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन**

समाकलन के चर में परिवर्तन दिए हुए समाकलन को किसी एक आधारभूत समाकलन में परिवर्तित कर देता है। यह विधि जिसमें हम एक चर को किसी दूसरे चर में परिवर्तित करते हैं प्रतिस्थापन विधि कहलाती है। जब समाकल्य में कुछ त्रिकोणमितीय फलन सम्मिलित हों तो हम समाकलन ज्ञात करने के लिए कुछ सुपरिचित सर्व समिकाओं का उपयोग करते हैं। प्रतिस्थापन विधि का उपयोग करते हुए हम निम्नलिखित प्रामाणिक समाकलनों को प्राप्त करते हैं:

(i) $\int \tan x \, dx = \log|\sec x| + C$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

◆ **कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन**

(i) $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(ii) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$ (iii) $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$

◆ **खंडशः समाकलन**

दिए हुए फलनों f_1 तथा f_2, के लिए हम प्राप्त करते हैं कि

$\int f_1(x).f_2(x)\,dx = f_1(x)\int f_2(x)\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}f_1(x).\int f_2(x)\,dx\right]dx$, अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = प्रथम फलन × द्वितीय फलन का समाकलन – {प्रथम फलन का अवकल गुणांक × द्वितीय फलन का समाकलन} का समाकलन . प्रथम फलन एवं द्वितीय फलन के चयन में सावधानी रखनी चाहिए। स्पष्टतया हमें ऐसे फलन को द्वितीय फलन के रूप में लेना चाहिए जिसका समाकलन हमें भलि-भाँति ज्ञात है।

◆ $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx = \int e^x f(x)\,dx + C$

◆ **कुछ विशिष्ट प्रकार के समाकलन**

(i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

(ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

(iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(iv) $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ अथवा $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ के प्रकार के समाकलनों को प्रामाणिक रूप में निम्नलिखित विधि द्वारा परिवर्तित किया जा सकता है:

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int\frac{px+q\,dx}{ax^2+bx+c}$ अथवा $\int\frac{px+q\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ के प्रकार के समाकलनों को प्रामाणिक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है:

$px + q = A\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B = A\,(2ax + b) + B$, A तथा B का मान ज्ञात करने के लिए दोनों पक्षों से गुणांकों की तुलना की जाती है।

- हमने $\int_a^b f(x)\,dx$ को, वक्र $y = f(x)$, $a \le x \le b$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a$ और $x = b$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित किया है। मान लीजिए $[a, b]$ में x एक बिंदु है तब $\int_a^x f(x)\,dx$ क्षेत्रफल फलन $A(x)$ को निरूपित करता है। क्षेत्रफल फलन की संकल्पना हमें कलन की आधारभूत प्रमेय की ओर निम्नलिखित रूप में प्रेरित करती है।
- **समाकलन गणित की प्रथम आधारभूत प्रमेय** मान लीजिए कि क्षेत्रफल फलन $A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, $\forall\, x \ge a$, द्वारा परिभाषित है जहाँ फलन f अंतराल $[a, b]$ पर संतत फलन माना गया है। तब $A'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$
- **समाकलन गणित की द्वितीय आधारभूत प्रमेय**

  मान लीजिए किसी बंद अंतराल $[a, b]$ पर f, x का संतत फलन है और F एक दूसरा फलन है जहाँ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, f के प्रान्त के सभी x के लिए है, तब

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x) + C\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

  यह परिसर $[a, b]$ पर f का निश्चित समाकलन कहलाता है जहाँ a तथा b समाकलन की सीमाएँ कहलाती हैं a निम्न सीमा कहलाती है और b को उच्च सीमा कहते हैं।

12082CH08

अध्याय 8

समाकलनों के अनुप्रयोग (Application of Integrals)

❖ *One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF* ❖

8.1 भूमिका (Introduction)

A.L. Cauchy
(1789-1857)

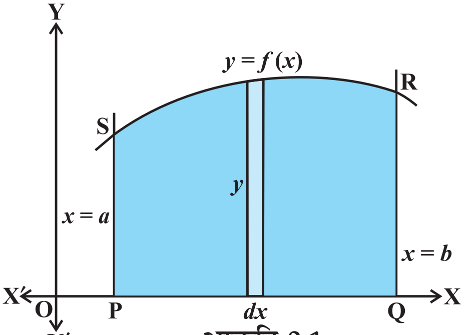
ज्यामिति में, हमने त्रिभुजों आयतों, समलंब चतुर्भुजों एवं वृत्तों सहित विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल के परिकलन के लिए सूत्रों का अध्ययन किया है। वास्तविक जीवन की अनेक समस्याओं के लिए गणित के अनुप्रयोग में इस प्रकार के सूत्र मूल होते हैं। प्रारंभिक ज्यामिति के सूत्रों की सहायता से हम अनेक साधारण आकृतियों के क्षेत्रफल का परिकलन कर सकते हैं। यद्यपि ये सूत्र वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्रफल के परिकलन के लिए अपर्याप्त हैं इसके लिए हमें समाकलन गणित की कुछ संकल्पनाओं की आवश्यकता होगी।

पिछले अध्याय में हमने योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलनों का परिकलन करते समय वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a, x = b$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने का अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम साधारण वक्रों के अंतर्गत, सरल रेखाओं एवं वृत्तों, परवलयों, तथा दीघवृत्तों (केवल मानक रूप) की चापों के बीच घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए समाकलनों के एक विशिष्ट अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे। उपरोक्त वक्रों से घिरे क्षेत्रफल को भी ज्ञात करेंगे।

8.2 साधारण वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल (Area Under Simple Curves)

पिछले अध्याय में हमने, योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन एवं कलन की आधारभूत प्रमेय का उपयोग करते हुए निश्चित समाकलन का परिकलन कैसे किया जाए, का अध्ययन किया है। अब हम वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं कोटियाँ $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने

की आसान एवं अंतर्ज्ञान से प्राप्त विधि की चर्चा करते हैं। आकृति 8.1 से हम वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल को बहुत सी पतली एवं उर्ध्वाधर बहुत सी पट्टियों से निर्मित मान सकते हैं। y उँचाई एवं dx चौड़ाई वाली एक स्वेच्छ पट्टी पर विचार कीजिए, इसमें $d\text{A}$ (प्रारंभिक पट्टी का क्षेत्रफल) $= ydx$, जहाँ $y = f(x)$ है।



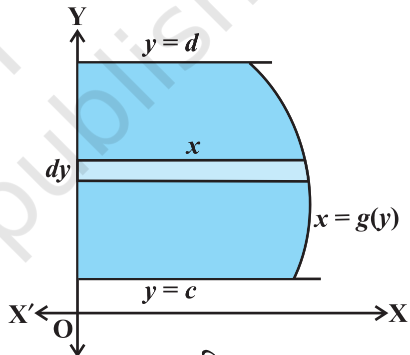
आकृति 8.1

यह क्षेत्रफल प्रारंभिक क्षेत्रफल कहलाता है जो कि क्षेत्र के भीतर किसी स्वेच्छ स्थिति पर स्थापित है एवं a तथा b के मध्य x के किसी मान से विनिर्दिष्ट है। वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a, x = b$ एवं x–अक्ष से घिरे क्षेत्र के कुल क्षेत्रफल A को, क्षेत्र PQRSP में सभी पतली पट्टियों के क्षेत्रफलों के योगफल के परिणाम के रूप में देख सकते हैं। सांकेतिक भाषा में हम इसे इस प्रकार अभिव्यक्त करते हैं:

$$\text{A} = \int_a^b d\text{A} = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)\, dx$$

वक्र $x = g(y)$, y-अक्ष एवं रेखाएँ $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाता है।

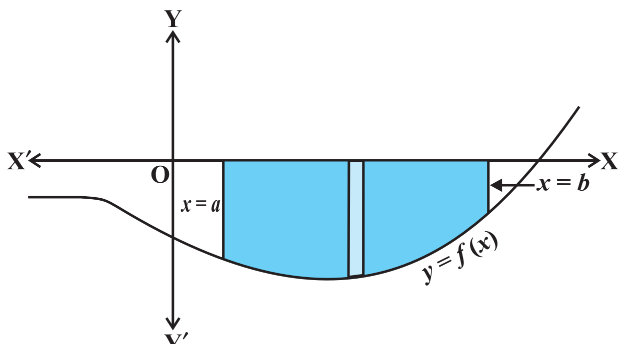
$$\text{A} = \int_c^d xdy = \int_c^d g(y)\, dy$$



आकृति 8.2

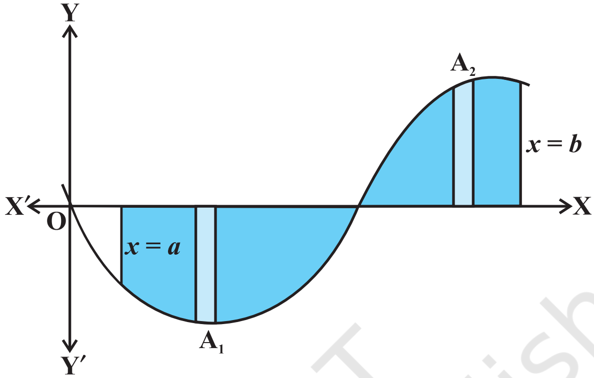
यहाँ हम क्षैतिज पट्टियों पर विचार करते हैं जैसा कि आकृति 8.2 में दर्शाया गया है।

टिप्पणी यदि चर्चित वक्र की स्थिति x-अक्ष के नीचे है, तो जैसा कि आकृति 8.3 में दर्शाया गया है, जहाँ $x = a$ से $x = b$ तक $f(x) < 0$ इसलिए दिए हुए वक्र, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a, x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ऋणात्मक हो जाता है, परंतु हम क्षेत्रफल के केवल संख्यात्मक मान की ही चर्चा करते हैं। इसलिए यदि क्षेत्रफल ऋणात्मक है तो हम इसके निरपेक्ष मान, अर्थात् $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$ को लेते हैं।



आकृति 8.3

सामान्यतः ऐसा हो सकता है कि वक्र का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर है तथा कुछ भाग x-अक्ष के नीचे है, जैसा कि आकृति 8.4 में दर्शाया गया है। यहाँ $A_1 < 0$ तथा $A_2 > 0$ है, इसलिए वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A सूत्र $A = |A_1| + A_2$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



आकृति 8.4

उदाहरण 1 वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

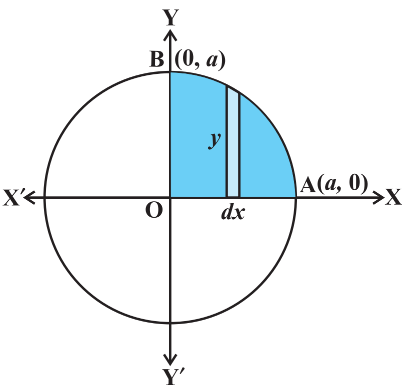
हल आकृति 8.5 में दिए हुए वृत्त से घिरे हुए क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल

$= 4$ (दिए हुए वक्र, x-अक्ष एवं कोटियों $x = 0$ तथा $x = a$ से घिरे क्षेत्र AOBA का क्षेत्रफल)

[क्योंकि वृत्त x-अक्ष एवं y-अक्ष दोनों के परितः सममित है]

$$= 4\int_0^a y\,dx \text{ (उर्ध्वाधर पट्टियाँ लेते हुए)}$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$



आकृति 8.5

क्योंकि $x^2 + y^2 = a^2$ से $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ प्राप्त होता है।

जैसा कि क्षेत्र AOBA प्रथम चतुर्थांश में सम्मिलित है इसलिए y को धनात्मक लिया जाता है। समाकलन करने पर दिए हुए वृत्त से घिरा क्षेत्रफल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है:

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2$$

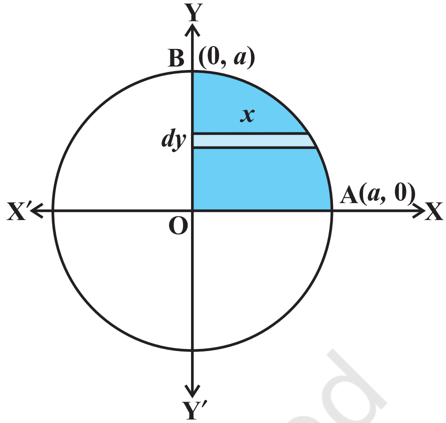
विकल्पतः जैसा कि आकृति 8.6 में दर्शाया गया है क्षैतिज पट्टियों की चर्चा करते हुए वृत्त द्वारा घिरे क्षेत्र का कुल क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a x dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \qquad \text{(क्यों?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$



आकृति 8.6

उदाहरण 2 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल का ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 8.7 में दीर्घवृत्त से घिरे क्षेत्र ABA′B′A का क्षेत्रफल

$$= 4\left(\begin{array}{l}\text{दिए हुए वक्र, } x-\text{अक्ष, कोटियों } x=0, x=a \text{ द्वारा प्रथम चतुर्थांश में}\\ \text{घिरे क्षेत्र } AOBA \text{ का क्षेत्रफल}\end{array}\right)$$

(क्योंकि दीर्घवृत्त x-अक्ष एवं y-अक्ष दोनों के परितः सममित है)

$$= 4\int_0^a y dx \quad \text{(उर्ध्वाधर पट्टियाँ लेते हुए)}$$

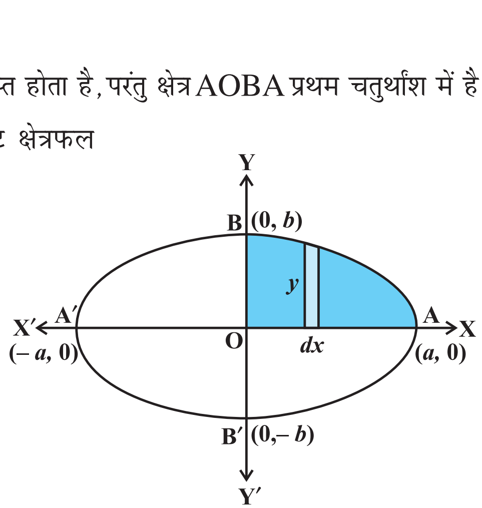
अब $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ प्राप्त होता है, परंतु क्षेत्र AOBA प्रथम चतुर्थांश में है इसलिए y धनात्मक लिया जाता है, इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ है।}$$



आकृति 8.7

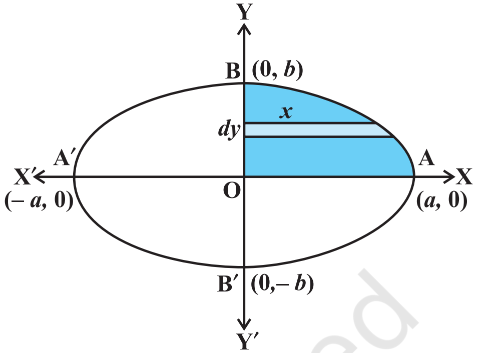
विकल्पत: जैसा कि आकृति 8.8 में दर्शाया गया है क्षैतिज पट्टियों की चर्चा करते हुए दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^b x\,dy = 4\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\,dy \quad \text{(क्यों?)}$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

$$= \frac{4a}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ है।}$$



आकृति 8.8

प्रश्नावली 8.1

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3 एवं 4 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

3. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

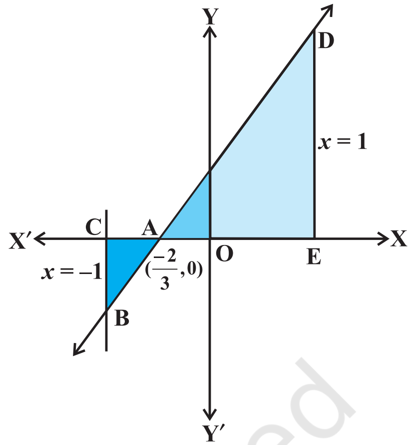
(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

4. वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 3 रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.9

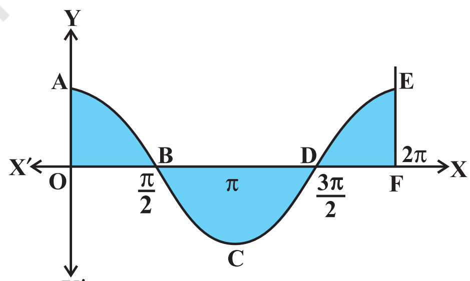
हल जैसा कि आकृति 8.9 में दर्शाया गया है, रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष को $x = \frac{-2}{3}$ पर मिलती है और $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ के लिए इसका आलेख x-अक्ष के नीचे है तथा $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ के लिए इसका आलेख x-अक्ष से ऊपर है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र ACBA का क्षेत्रफल + क्षेत्र ADEA का क्षेत्रफल

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$

उदाहरण 4 $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.10

हल आकृति 8.10 से, अभीष्ट क्षेत्रफल
= क्षेत्र OABO का क्षेत्रफल + क्षेत्र BCDB का क्षेत्रफल + क्षेत्र DEFD का क्षेत्रफल

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4$$

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. दिए हुए वक्रों एवं रेखाओं से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

(i) $y = x^2$; $x = 1$, $x = 2$ एवं x-अक्ष

(ii) $y = x^4$; $x = 1$, $x = 5$ एव x-अक्ष

2. $y = |x+3|$ का ग्राफ़ खींचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x+3|\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4 से 5 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए:

4. वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2$, $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

5. वक्र $y = x\,|x|$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[**संकेत** : $y = x^2$ यदि $x > 0$ एवं $y = -x^2$ यदि $x < 0$]

सारांश

- वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष एवं रेखाओं $x = a$ तथा $x = b\ (b > a)$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र : क्षेत्रफल $= \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ है।
- वक्र $x = \phi(y)$, y-अक्ष एवं रेखाओं $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र : क्षेत्रफल $= \int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$ है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

समाकलन गणित का प्रारंभ गणित के प्रारंभिक विकास काल से ही हुआ है। यह प्राचीन यूनानी गणितज्ञों द्वारा विकसित निःशेषता विधि पर आधारित है। इस विधि का प्रारंभ समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल और ठोस वस्तुओं के आयतन की गणना से हुआ। इस तरह से निःशेषता विधि, समाकलन विधि की प्रारंभिक स्थिति के रूप में समझी जा सकती है। निःशेषता विधि का सर्वोत्कृष्ट विकास प्रारंभिक काल में यूडोक्स (Eudoxus (440 ई. पू.) और आर्किमिडीज (Archimedes (300 ई. पू.) के कार्यों से प्राप्त हुआ है।

कलन के सिद्धांत का क्रमबद्ध विकास ईसा के पश्चात् 17वीं शताब्दी में हुआ। सन् 1665 में न्यूटन ने कलन पर अपना कार्य प्रवाहन सिद्धांत (Theory of fluxion) के रूप में प्रारंभ किया।

उन्होंने इस सिद्धांत का प्रयोग वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्शी और वक्रता-त्रिज्या ज्ञात करने में किया। न्यूटन ने व्युत्क्रम फलन की धारणा से परिचय कराया और इसको प्रतिअवकलज (अनिश्चित समाकलन) या स्पर्शियों की व्युत्क्रम विधि (Inverse Method of tangents) का नामकरण किया।

1684–86, के बीच में लैवनिज़ (Leibnitz) ने एक प्रपत्र एकटा इरोडिटोरियम (Acta Eruditorum) में प्रकाशित किया और इसे कैलक्यूलस सम्मैटोरियस (Calculous Summatorius) नाम दिया, क्योंकि यह अनंत छोटे क्षेत्रफलों के योगफल से संबंधित था, वहीं पर उन्होंने इसे योगफल के प्रतीक '∫' द्वारा व्यक्त किया। सन् 1696 ई. में उन्होंने जे. बरनौली (J.Bernoulli) के सुझाव को मानकर अपने प्रपत्र को कैलक्यूलस इंटेग्राली (Calculus Integrali) नाम में परिवर्तित कर दिया। यह न्यूटन द्वारा स्पर्शियों की व्युत्क्रम विधि के संगत था।

न्यूटन और लैवनिज़ दोनों ने पूर्णत: स्वतंत्र मार्ग अपनाया जो मूलत: भिन्न थे। तथापि उन दोनों के सिद्धांतों के संगत प्रतिफल तत्सम पाए गए। लैवनिज़ ने निश्चित समाकलन की धारणा का प्रयोग किया।
यह निश्चित है कि उन्होंने ही सर्वप्रथम प्रतिअवकलज और निश्चित समाकलन के बीच के संबंध को स्पष्टतया सराहा।

निष्कर्ष यह है कि समाकलन गणित के आधारभूत धारणाओं, सिद्धांतों तथा अवकलन गणित से इसके प्रारंभिक संबंधों का विकास पी.डी. फर्मा, न्यूटन, और लैवनिज़ के कार्यों द्वारा 17वीं शताब्दी के अंत में हुआ। तथापि इसका औचित्य, सीमा की संकल्पना के आधार पर 19वीं शताब्दी के प्रारंभ में ए.एल.कोशी (A.L.Cauchy) के द्वारा किया गया। अंत में ली सोफी (Lie Sophie) का निम्नलिखित उद्धरण वर्णनीय है। "It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to Archimedes were introduced in Science by the investigations of Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to Newton and Leibnitz".

अध्याय 9

12082CH09

अवकल समीकरण
Differential Equations

❖ *He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain – D. HILBERT* ❖

9.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI एवं इस पुस्तक के अध्याय 5 में हमने चर्चा की थी, कि एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष किसी फलन f का अवकलज कैसे ज्ञात किया जाता है अर्थात् किसी फलन f की परिभाषित प्रांत के प्रत्येक x के लिए, $f'(x)$ कैसे ज्ञात किया जाता है। इसके अतिरिक्त समाकल गणित के अध्याय में हमने चर्चा की थी, कि यदि किसी फलन f का अवकलज फलन g है तो फलन f कैसे ज्ञात किया जाए। इसको निम्न रूप में सूत्रबद्ध किया जा सकता है:

Henri Poincare
(1854-1912)

किसी दिए हुए फलन g के लिए फलन f ज्ञात कीजिए ताकि

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ जहाँ } y = f(x) \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) के रूप वाले समीकरण को अवकल समीकरण कहते हैं। इसकी औपचारिक परिभाषा बाद में दी जाएगी।

अवकल समीकरणों का उपयोग मुख्य रूप से भौतिकी, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान, मानव विज्ञान, भूविज्ञान, अर्थशास्त्र आदि विभिन्न क्षेत्रों में किया जाता है। अतः सभी अत्याधुनिक वैज्ञानिक अन्वेषणों के लिए अवकल समीकरणों के गहन अध्ययन की अत्यंत आवश्यकता है। इस अध्याय में, हम अवकल समीकरण की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं, अवकल समीकरण के व्यापक एवं विशिष्ट हल, अवकल समीकरण का निर्माण, प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरण को हल करने की कुछ विधियाँ और विभिन्न क्षेत्रों में अवकल समीकरणों के कुछ उपयोगों के बारे में अध्ययन करेंगे।

9.2 आधारभूत संकल्पनाएँ (Basic Concepts)

हम पहले से ही निम्नलिखित प्रकार के समीकरणों से परिचित हैं

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \text{... (2)}$$

$$x + y = 7 \quad \text{... (3)}$$

आइए निम्नलिखित समीकरण पर विचार करें

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{... (4)}$$

हम पाते हैं कि समीकरणों (1), (2) एवं (3) में केवल स्वतंत्र और/अथवा आश्रित चर (एक या अधिक) शामिल हैं जब कि समीकरण (4) में चर के साथ-साथ स्वतंत्र चर (x) के सापेक्ष आश्रित चर (y) का अवकलज भी शामिल है। इस प्रकार का समीकरण अवकल समीकरण कहलाता है।

सामान्यत: एक ऐसा समीकरण, जिसमें स्वतंत्र चर (चरों) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हों, अवकल समीकरण कहलाता है।

एक ऐसा अवकल समीकरण, जिसमें केवल एक स्वतंत्र चर के सापेक्ष, आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हों, सामान्य अवकल समीकरण कहलाता है। उदाहरणतया

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \quad \text{... (5)}$$

एक सामान्य अवकल समीकरण है।

नि:सन्देह ऐसे भी अवकल समीकरण होते हैं जिनमें एक से अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष अवकलज शामिल होते हैं, इस प्रकार के अवकल समीकरण आंशिक अवकल समीकरण कहलाते हैं। लेकिन इस स्तर पर हम अपने आप को केवल सामान्य अवकल समीकरणों के अध्ययन तक सीमित रखेंगे। इससे आगे हम सामान्य अवकल समीकरण के लिए अवकल समीकरण शब्द का ही उपयोग करेंगे।

टिप्पणी

1. हम अवकलजों के लिए निम्नलिखित संकेतों के उपयोग को वरीयता देंगे

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2. उच्च कोटि वाले अवकलजों के लिए, इतने अधिक डैशों (dashes) को उच्च प्रत्यय के रूप में प्रयुक्त करना असुविधाजनक होगा इसलिए nवें कोटि वाले अवकलज $\frac{d^ny}{dx^n}$ के लिए हम संकेत y_n का उपयोग करेंगे।

9.2.1 *अवकल समीकरण की कोटि (Order of a differential equation)*

किसी अवकल समीकरण की कोटि उस अवकल समीकरण में सम्मिलित स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि द्वारा परिभाषित होती है।

निम्नलिखित अवकल समीकरणों पर विचार कीजिए:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \text{... (6)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \text{... (7)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \qquad \text{...(8)}$$

समीकरण (6), (7) एवं (8) में क्रमश: प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय कोटि के उच्चतम अवकलज उपस्थित हैं इसलिए इन समीकरणों की कोटि क्रमश: 1, 2 एवं 3 है।

9.2.2 *अवकल समीकरण की घात (Degree of a differential equation)*

किसी अवकल समीकरण की घात का अध्ययन करने के लिए मुख्य बिंदु यह है कि वह अवकल समीकरण, अवकलजों y', y'', y''' इत्यादि में बहुपद समीकरण होना चाहिए। निम्नलिखित समीकरणों पर विचार कीजिए:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{... (9)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0 \qquad \text{... (10)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{... (11)}$$

हम प्रेक्षित करते हैं कि समीकरण (9) y''', y'' एवं y' में बहुपद समीकरण है। समीकरण (10) y' में बहुपद समीकरण है (यद्यपि यह y में बहुपद नहीं है) इस प्रकार के अवकल समीकरणों की घात को परिभाषित किया जा सकता है। परंतु समीकरण (11) y' में बहुपद समीकरण नहीं है और इस प्रकार के अवकल समीकरण की घात को परिभाषित नहीं किया जा सकता है।

यदि एक अवकल समीकरण अवकलजों का बहुपद समीकरण है तो उस अवकल समीकरण की घात से हमारा तात्पर्य है उस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकलज की उच्चतम घात (धनात्मक पूर्णांक)

उपरोक्त परिभाषा के संदर्भ में हम प्रेक्षित कर सकते हैं कि समीकरणों (6), (7), (8) एवं (9) में से प्रत्येक की घात 1 है, समीकरण (10) की घात 2 है जब कि अवकल समीकरण (11) की घात परिभाषित नहीं है।

टिप्पणी किसी अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) हमेशा धनात्मक पूर्णांक होते हैं।

उदाहरण 1 निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

हल

(i) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{dy}{dx}$ है। इसलिए इसकी कोटि 1 है। यह y' में बहुपद समीकरण है एवं $\frac{dy}{dx}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(ii) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है । इसलिए इसकी कोटि 2 है। यह अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}$ एवं $\frac{dy}{dx}$ में बहुपद समीकरण है और $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(iii) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलज y''' है। इसलिए इसकी कोटि 3 है। इस समीकरण का बायाँ पक्ष अवकलजों में बहुपद नहीं है इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

प्रश्नावली 9.1

1 से 10 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ **2.** $y' + 5y = 0$ **3.** $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ **5.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$ **7.** $y''' + 2y'' + y' = 0$

8. $y' + y = e^x$ **9.** $y'' + (y')^2 + 2y = 0$ **10.** $y'' + 2y' + \sin y = 0$

11. अवकल समीकरण

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ की घात है:

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) परिभाषित नहीं है

12. अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है:

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) परिभाषित नहीं है

9.3. अवकल समीकरण का व्यापक एवं विशिष्ट हल (General and Particular Solutions of a Differential Equation)

पिछली कक्षाओं में हमने निम्नलिखित प्रकार के समीकरणों को हल किया है:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$\sin^2 x - \cos x = 0 \quad \text{... (2)}$$

समीकरणों (1) तथा (2) का हल एक ऐसी वास्तविक अथवा सम्मिश्र संख्या है जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करती है अर्थात् जब इस संख्या को समीकरण में अज्ञात x के स्थान पर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है तो दायाँ पक्ष और बायाँ पक्ष आपस में बराबर हो जाते हैं।

अब अवकल समीकरण $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{... (3)}$$

पर विचार करते हैं।

प्रथम दो समीकरणों के विपरीत इस अवकल समीकरण का हल एक ऐसा फलन ϕ है जो इस समीकरण को संतुष्ट करेगा अर्थात् जब इस फलन ϕ को अवकल समीकरण में अज्ञात y (आश्रित चर) के स्थान पर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है तो बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाते हैं।

वक्र $y = \phi(x)$ अवकल समीकरण का हल वक्र (समाकलन वक्र) कहलाता है। निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए

$$y = \phi(x) = a \sin(x + b) \quad \text{... (4)}$$

जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$. यदि इस फलन और इसके अवकलजों को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाते हैं। इसलिए यह फलन अवकल समीकरण (3) का हल है।

मान लीजिए कि a और b को कुछ विशिष्ट मान $a = 2$ एवं $b = \frac{\pi}{4}$ दे दिए जाते हैं तो हमें निम्नलिखित फलन प्राप्त होता है:

$$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{... (5)}$$

यदि इस फलन और इसके अवकलजों को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो पुनः बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाते हैं। इसलिए ϕ_1 भी समीकरण (3) का एक हल है।

फलन ϕ में दो स्वेच्छ अचर (प्राचल) a, b सम्मिलित हैं तथा यह फलन दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल कहलाता है। जबकि फलन ϕ_1 में कोई भी स्वेच्छ अचर सम्मिलित नहीं है लेकिन प्राचलों a तथा b के विशिष्ट मान उपस्थित हैं और इसलिए इसको अवकल समीकरण का विशिष्ट हल कहा जाता है।

ऐसा हल, जिसमें स्वेच्छ अचर उपस्थित हो अवकल समीकरण का व्यापक हल कहलाता है।

ऐसा हल, जो स्वेच्छ अचरों से मुक्त है अर्थात् व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने पर प्राप्त हल, अवकल समीकरण का विशिष्ट हल कहलाता है।

उदाहरण 2 सत्यापित कीजिए कि फलन $y = e^{-3x}$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ का एक हल है।

हल दिया हुआ फलन $y = e^{-3x}$ है। इसके दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते है:

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{-3x} \quad \text{... (1)}$$

अब समीकरण (1) का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ और y का मान, दिए गए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर पर हम पाते हैं कि

बायाँ पक्ष $= 9e^{-3x} + (-3e^{-3x}) - 6.e^{-3x} = 9\ e^{-3x} - 9\ e^{-3x} = 0 =$ दायाँ पक्ष

इसलिए दिया हुआ फलन दिए हुए अवकल समीकरण का एक हल है।

उदाहरण 3 सत्यापित कीजिए कि फलन $y = a\cos x + b\sin x$, जिसमें $a, b \in \mathbf{R}$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है।

हल दिया हुआ फलन है

$$y = a\cos x + b\sin x \quad \dots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर हम देखते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin x + b\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos x - b\sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ एवं y का मान दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त करते हैं:

बायाँ पक्ष $= (-a\cos x - b\sin x) + (a\cos x + b\sin x) = 0 =$ दायाँ पक्ष

इसलिए दिया हुआ फलन, दिए हुए अवकल समीकरण का हल है।

प्रश्नावली 9.2

1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न में सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (स्पष्ट अथवा अस्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है:

1. $y = e^x + 1$: $y'' - y' = 0$
2. $y = x^2 + 2x + C$: $y' - 2x - 2 = 0$
3. $y = \cos x + C$: $y' + \sin x = 0$
4. $y = \sqrt{1+x^2}$: $y' = \frac{xy}{1+x^2}$
5. $y = Ax$: $xy' = y \ (x \neq 0)$
6. $y = x\sin x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ ($x \neq 0$ और $x > y$ अथवा $x < -y$)
7. $xy = \log y + C$: $y' = \frac{y^2}{1-xy} \ (xy \neq 1)$
8. $y - \cos y = x$: $(y\sin y + \cos y + x)\, y' = y$
9. $x + y = \tan^{-1}y$: $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}\ x \in (-a, a) : x + y \dfrac{dy}{dx} = 0\ (y \neq 0)$

11. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है:

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है:

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4. प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ (Methods of Solving First order, First Degree Differential Equations)

इस परिच्छेद में हम प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की तीन विधियों की चर्चा करेंगे।

9.4.1 *पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण (Differential equations with variables separable)*

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप का होता है:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y) \qquad \text{... (1)}$$

यदि $\mathrm{F}(x, y)$ को गुणनफल $g(x), h(y)$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है जहाँ $g(x)$, x का फलन है और $h(y)$, y का एक फलन है तो समीकरण (1) पृथक्करणीय चर वाला समीकरण कहलाता है। ऐसा होने पर समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{dx} = h(y) \cdot g(x) \qquad \text{... (2)}$$

यदि $h(y) \neq 0$, तो चरों को पृथक् करते हुए समीकरण (2) को

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx \qquad \text{... (3)}$$

के रूप में लिखा जा सकता है। समीकरण (3) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \qquad \text{... (4)}$$

इस प्रकार समीकरण (4), दिए हुए अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित रूप में प्रदान करता है:

$$\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C} \qquad \text{... (5)}$$

यहाँ $\mathrm{H}(y)$ एवं $\mathrm{G}(x)$ क्रमशः $\dfrac{1}{h(y)}$ एवं $g(x)$ के प्रतिअवकलज हैं और C स्वेच्छ अचर है।

उदाहरण 4 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2-y}$, $(y \neq 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया है कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \ (y \neq 2) \qquad \text{... (1)}$$

समीकरण (1) में चरों को पृथक् करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$(2-y)\, dy = (x+1)\, dx \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int (2-y)\, dy = \int (x+1)\, dx$$

अथवा $$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

अथवा $$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,C_1 = 0$$

अथवा $$x^2 + y^2 + 2x - 4y + C = 0 \qquad \text{... (3)}$$

जहाँ $$C = 2C_1$$

समीकरण (3) अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 5 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि $1+y^2 \neq 0$, इसलिए चरों को पृथक् करते हुए दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{... (1)}$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का समाकलन करते हुए हम पाते हैं:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

अथवा $$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$$

यह समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 6 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, यदि $y = 1$ जब $x = 0$ हो

हल यदि $y \neq 0$, दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{y^2} = -4x\, dx \qquad \text{... (1)}$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम पाते हैं:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int x\,dx$$

अथवा $$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

अथवा $$y = \frac{1}{2x^2 - C} \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) में $y = 1$ और $x = 0$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $C = -1$ प्राप्त होता है।

C का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर दिए हुए अवकल समीकरण का विशिष्ट हल $y = \frac{1}{2x^2 + 1}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 7 बिंदु (1, 1) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण कीजिए जिसका अवकल समीकरण $x\,{}^{*}dy = (2x^2 + 1)\,{}^{*}dx\ (x \neq 0)$ है।

हल दिए हुए अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप मे अभिव्यक्त किया जा सकता है:

$$dy = \left(\frac{2x^2 + 1}{x}\right)dx$$

अथवा $$dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

अथवा $$y = x^2 + \log|x| + C \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) दिए हुए अवकल समीकरण के हल वक्रों के कुल को निरूपित करता है परंतु हम इस कुल के एक ऐसे विशिष्ट सदस्य का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं जो बिंदु (1, 1) से गुजरता हो।

---

* लैबनीज द्वारा प्रदत्त संकेत $\frac{dy}{dx}$ अत्यंत लचीला है, तथा बहुत सी गणना एवं औपचारिक रूपांतरणों में प्रयुक्त होता है, जहाँ हम dx और dy को साधारण संख्याओं की तरह व्यवहार में लाते हैं। dx और dy को पृथक्-पृथक् सत्ता मानकर हम बहुत सी गणनाओं की सुस्पषट व्याख्या कर सकते हैं। संदर्भ: Introduction to calculus and Analysis, volume-I page 172, By Richard Courant, Fritz John Spinger — Verlog New York.

इसलिए समीकरण (2) में $x = 1,\ y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $C = 0$ प्राप्त होता है। C का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर हमें अभीष्ट वक्र का समीकरण $y = x^2 + \log|x|$ के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 बिंदु $(-2, 3)$, से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{2x}{y^2}$ है।

हल हम जानते हैं कि किसी वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{dy}{dx}$ के बराबर होती है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \text{... (1)}$$

चरों को पृथक् करते हुए समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$y^2\, dy = 2x\, dx \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

अथवा $$\frac{y^3}{3} = x^2 + C \qquad \text{... (3)}$$

समीकरण (3) में $x = -2, y = 3$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $C = 5$ प्राप्त होता है।
C का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें अभीष्ट वक्र का समीकरण

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + 5 \quad \text{अथवा} \quad y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण 9 किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। कितने वर्षों में Rs 1000 की राशि दुगुनी हो जाएगी?

हल मान लीजिए किसी समय t पर मूलधन P है। दी हुई समस्या के अनुसार

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times P$$

अथवा $$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{20} \qquad \text{... (1)}$$

समीकरण (1) में चरों को पृथक् करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dP}{P} = \frac{dt}{20} \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\log P = \frac{t}{20} + C_1$$

अथवा $$P = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{C_1}$$

अथवा $$P = C\, e^{\frac{t}{20}} \quad (\text{जहाँ } e^{C_1} = C) \qquad \ldots (3)$$

अब $P = 1000$, जब $t = 0$

P और t का मान समीकरण (3) में रखने पर हम $C = 1000$ प्राप्त करते हैं। इसलिए समीकरण (3) से हम प्राप्त करते हैं :

$$P = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

मान लीजिए t वर्षों में मूलधन दुगुना हो जाता है, तब

$$2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}} \Rightarrow t = 20 \log_e 2$$

प्रश्नावली 9.3

1 से 10 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4 - y^2} \; (-2 < y < 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y = 1 \; (y \neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$

7. $y \log y \, dx - x \, dy = 0$

8. $x^5 \dfrac{dy}{dx} = -\, y^5$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

10. $e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$

11 से 14 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

11. $(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x; \; y = 1$ यदि $x = 0$

12. $x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}=1$; $y = 0$ यदि $x = 2$

13. $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=a$ $(a \in \mathrm{R})$; $y = 1$ यदि $x = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x$; $y = 2$ यदि $x = 0$

15. बिंदु (0, 0) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y' = e^x \sin x$ है।

16. अवकल समीकरण $xy\dfrac{dy}{dx}=(x+2)(y+2)$ के लिए बिंदु (1, –1) से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए।

17. बिंदु (0, –2) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता और उस बिंदु के y निर्देशांक का गुणनफल उस बिंदु के x निर्देशांक के बराबर है।

18. एक वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, स्पर्श बिंदु को, बिंदु (– 4, –3). से मिलाने वाले रेखाखंड की प्रवणता की दुगुनी है। यदि यह वक्र बिंदु (–2, 1) से गुज़रता हो तो इस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन, जिसे हवा भरकर फुलाया जा रहा है, स्थिर गति से बदल रहा है यदि आरंभ में इस गुब्बारे की त्रिज्या 3 ईकाई है और 3 सेकेंड बाद 6 ईकाई है, तो t सेकेंड बाद उस गुब्बारे की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

20. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि $r\%$ वार्षिक की दर से होती है। यदि 100 रुपये 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं, तो r का मान ज्ञात कीजिए। $(\log_e 2 = 0.6931)$.

21. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में Rs 1000 जमा कराए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जाएगी? $(e^{0.5} = 1.648)$

22. किसी जीवाणु समूह में जीवाणुओं की संख्या 1, 00, 000 है। 2 घंटो में इनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है। कितने घंटों में जीवाणुओं की संख्या 2, 00, 000 हो जाएगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर उनके उपस्थित संख्या के समानुपाती है।

23. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ का व्यापक हल है:

(A) $e^x + e^{-y} = C$ (B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{-x} + e^y = C$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = C$

9.4.2 समघातीय अवकल समीकरण (*Homogenous differential equations*)

x एवं y के निम्नलिखित फलनों पर विचार कीजिए

$F_1(x, y) = y^2 + 2xy, \qquad F_2(x, y) = 2x - 3y,$

$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right), \qquad F_4(x, y) = \sin x + \cos y$

यदि उपरोक्त फलनों में x और y को किसी शून्येतर अचर λ के लिए क्रमशः λx एवं λy से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो हम प्राप्त करते हैं:

$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$

$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x - 3y) = \lambda F_2(x, y)$

$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 F_3(x, y)$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$, किसी भी n के लिए

यहाँ हम प्रेक्षित करते हैं कि फलनों F_1, F_2, F_3 को $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ के रूप में लिखा जा सकता है परंतु फलन F_4 को इस रूप में नहीं लिखा जा सकता है। इससे हम निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त करते हैं।

फलन $F(x, y)$, n घात वाला समघातीय फलन कहलाता है। यदि किसी शून्येतर अचर λ के लिए $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$

हम नोट करते हैं कि उपरोक्त उदाहरणों में F_1, F_2, F_3 क्रमशः 2, 1, 0 घात वाले समघातीय फलन हैं जबकि F_4 समघातीय फलन नहीं है।

हम यह भी प्रेक्षित करते हैं कि

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

अथवा
$$F_1(x, y) = y^2\left(1 + \frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2 - \frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

अथवा
$$F_2(x, y) = y^1\left(2\frac{x}{y} - 3\right) = y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_3(x, y) = x^\circ \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^\circ\, h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_4(x, y) \neq x^n h_6\left(\frac{y}{x}\right), n \in \mathbf{N} \text{ के किसी भी मान के लिए}$$

अथवा $$F_4(x, y) \neq y^n h_7\left(\frac{x}{y}\right), n \in \mathbf{N}$$

इसलिए एक फलन F (x, y), n घात वाला समघातीय फलन कहलाता है यदि

$$F(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{अथवा} \quad y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$$

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ के रूप वाला अवकल समीकरण समघातीय कहलाता है यदि F (x, y) शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots (1)$$

के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम $\frac{y}{x} = v$ अर्थात्

$$y = v\,x \qquad \ldots (2)$$

प्रतिस्थापित करते हैं

समीकरण (2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (3) से $\frac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

अर्थात् $$x\,\frac{dv}{dx} = g(v) - v \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (4) में चरों को पृथक् करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad \ldots (5)$$

समीकरण (5) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{1}{x}dx + C \qquad \ldots (6)$$

यदि v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो समीकरण (6), अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल प्रदान करता है।

टिप्पणी यदि समघातीय अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} = F(x, y)$ के रूप में है। जहाँ F (x, y) शून्य घात वाला समघातीय फलन है तो हम $\frac{x}{y} = v$ अर्थात, $x = vy$ प्रतिस्थापित करते हैं और फिर उपरोक्त चर्चा के अनुसार $\frac{dx}{dy} = F(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप में लिखकर व्यापक हल ज्ञात करने के लिए आगे बढ़ते हैं।

उदाहरण 10 दर्शाइए कि अवकल समीकरण $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{x - y} \qquad \dots (1)$$

मान लीजिए $$F(x, y) = \frac{x + 2y}{x - y}$$

अब $$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x + 2y)}{\lambda(x - y)} = \lambda^{\circ} \cdot F(x, y)$$

इसलिए F(x, y) शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

अतः दिया हुआ अवकल समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है।

विकल्पतः

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1 + \frac{2y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \dots (2)$$

समीकरण (2) का दायाँ पक्ष $g\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में है इसलिए यह शून्य घात वाला एक समघातीय फलन है। इसलिए समीकरण (1) एक समघातीय अवकल समीकरण है।

इसको हल करने के लिए हम प्रतिस्थापन करते हैः

$$y = vx \qquad \dots (3)$$

समीकरण (3) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \dots (4)$$

समीकरण (1) में y एवं $\frac{dy}{dx}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

अर्थात् $$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

अर्थात् $$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

अर्थात् $$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv = \frac{-dx}{x} \qquad \dots (5)$$

समीकरण (5) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

अथवा $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log|x| + C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

v को $\frac{y}{x}$, से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

अथवा $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

अथवा $$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)x^2\right|=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C_1$$

अथवा $$\log\left|(y^2+xy+x^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+2C_1$$

अथवा $$\log\left|(x^2+xy+y^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

यह अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 11 दर्शाइए कि अवकल समीकरण $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots (1)$$

यहाँ $\frac{dy}{dx}=F(x, y)$ के रूप का अवकल समीकरण है।

यहाँ $F(x, y)=\dfrac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ है।

x को λx से एवं y को λy से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\mathrm{F}(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda\left[y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x\right]}{\lambda\left(x\cos\frac{y}{x}\right)} = \lambda^0\,[\mathrm{F}(x, y)]$$

$\mathrm{F}(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है, इसलिए दिया हुआ अवकल समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है। इसको हल करने के लिए हम प्रतिस्थापन करते हैं:

$$y = vx \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (1) में y एवं $\frac{dy}{dx}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v}$$

अथवा $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v} - v$$

अथवा $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

अथवा $$\cos v\, dv = \frac{dx}{x}$$

इसलिए $$\int \cos v\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

अथवा $$\sin v = \log|x| + \log|\mathrm{C}|$$

अथवा $$\sin v = \log|\mathrm{C}x|$$

v को $\frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|\mathrm{C}x|$$

यह अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल है।

उदाहरण 12 दर्शाइए कि अवकल समीकरण $2y\, e^{\frac{x}{y}} dx + (y - 2x\, e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$ समघातीय है और यदि, $x = 0$ जब $y = 1$ दिया हुआ हो तो इस समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x\, e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\, e^{\frac{x}{y}}} \qquad \ldots (1)$$

मान लीजिए $\mathrm{F}(x, y) = \dfrac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$ तब $\mathrm{F}(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^{\circ}\,[\mathrm{F}(x, y)]$

अत: $\mathrm{F}(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

इसलिए, दिया हुआ अवकल समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है।

इसका हल ज्ञात करने के लिए, हम $x = vy$ प्रतिस्थापन करते हैं।

समीकरण (2) का y के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

समीकरण (1) में x एवं $\dfrac{dx}{dy}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\, e^{v} - 1}{2e^{v}}$$

अथवा $$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\, e^{v} - 1}{2e^{v}} - v$$

अथवा $$y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^{v}}$$

अथवा $$2e^{v}\, dv = \frac{-dy}{y}$$

अथवा $$\int 2e^v . dv = -\int \frac{dy}{y}$$

अथवा $$2\, e^v = -\log |y| + C$$

v को $\frac{x}{y}$ से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$2\, e^{\frac{x}{y}} + \log |y| = C \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (3) में, $x = 0$ एवं $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$2\, e^0 + \log |1| = C \Rightarrow C = 2$$

C का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$2\, e^{\frac{x}{y}} + \log |y| = 2$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशिष्ट हल है।

उदाहरण 13 दर्शाइए कि वक्रों का कुल, जिनके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$ है, $x^2 - y^2 = cx$ द्वारा प्रदत्त है।

हल हम जानते हैं कि एक वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होती है।

इसलिए $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \text{ या } \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \qquad \ldots (1)$$

स्पष्टतः समीकरण (1) समघातीय अवकल समीकरण है।

इसको हल करने के लिए हम $y = vx$ प्रतिस्थापन करते हैं।

$y = vx$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{ या } v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v}$$

अतः $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{2v} \text{ या } \frac{2v}{1 - v^2} dv = \frac{dx}{x} \text{ या } \frac{2v}{v^2 - 1} dv = -\frac{dx}{x}$$

इसलिए $$\int \frac{2v}{v^2-1}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

अथवा $$\log|v^2-1| = -\log|x| + \log|C_1|$$

अथवा $$\log|(v^2-1)(x)| = \log|C_1|$$

अथवा $$(v^2-1)\,x = \pm\ C_1$$

v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x = \pm C_1$$

अथवा $(y^2 - x^2) = \pm\ C_1\ x$ या $x^2 - y^2 = Cx$

प्रश्नावली 9.4

1 से 10 तक के प्रत्येक प्रश्न में दर्शाइए कि दिया हुआ अवकल समीकरण समघातीय है और इनमें से प्रत्येक को हल कीजिए:

1. $(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$

2. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

3. $(x - y)\,dy - (x + y)\,dx = 0$

4. $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

5. $x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

7. $\left\{x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}y\,dx = \left\{y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right\}x\,dy$

8. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

9. $y\,dx + x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0$

10. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

11 से 15 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

11. $(x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0;\ y = 1$ यदि $x = 1$

12. $x^2\,dy + (xy + y^2)\,dx = 0;\ y = 1$ यदि $x = 1$

13. $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)-y\right]dx+x\,dy=0;\ y=\frac{\pi}{4}$ यदि $x = 1$

14. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+\text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right)=0$; $y = 0$ यदि $x = 1$

15. $2xy+y^2-2x^2\frac{dy}{dx}=0$; $y = 2$ यदि $x = 1$

16. $\frac{dx}{dy}=h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौन सा प्रतिस्थापन किया जाता है:

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

17. निम्नलिखित में से कौन सा समघातीय अवकल समीकरण है?

(A) $(4x + 6y + 5)\, dy - (3y + 2x + 4)\, dx = 0$

(B) $(xy)\, dx - (x^3 + y^3)\, dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

(D) $y^2\, dx + (x^2 - xy - y^2)\, dy = 0$

9.4.3 *रैखिक अवकल समीकरण (Linear differential equations)*

$$\frac{dy}{dx}+\text{P}y=\text{Q},$$

के रूप वाला अवकल समीकरण, जिसमें P एवं Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं, प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है। प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

$$\frac{dy}{dx}+y=\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}\right)y=e^x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{y}{x\log x}\right)=\frac{1}{x}$$

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का दूसरा रूप सेकेंड $\frac{dx}{dy}+\text{P}_1x=\text{Q}_1$ है, जिसमें P_1 और Q_1 अचर अथवा केवल y के फलन हैं। इस प्रकार के अवकल समीकरण के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं: $\frac{dx}{dy}+x=\cos y$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{-2x}{y}=y^2e^{-y}$$

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+\text{P}\,y=\text{Q} \qquad \text{... (1)}$$

को हल करने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों को x के फलन $g(x)$ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$g\ (x)\ \frac{dy}{dx}\ +\text{P}.\,g\ (x)\ y=\text{Q}\,.\,g\ (x) \qquad \text{... (2)}$$

$g\ (x)$ का चयन इस प्रकार कीजिए ताकि समीकरण का बायाँ पक्ष $y\,.\,g\ (x)$ का अवकलज बन जाए:

अर्थात् $$g\ (x)\ \frac{dy}{dx}\ +\text{P}.\,g\ (x)\ y=\frac{d}{dx}\ [y\,.\,g\ (x)]$$

अथवा $$g\ (x)\ \frac{dy}{dx}\ +\text{P}.\,g\ (x)\ y=g\ (x)\ \frac{dy}{dx}\ +y\ g'\,(x)$$

$\Rightarrow$ $$\text{P}.\,g\ (x)\ =\ g'\,(x)$$

अथवा $$\text{P}=\frac{g'(x)}{g\,(x)}$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\int \text{P}dx=\int\frac{g'(x)}{g\,(x)}\,dx$$

अथवा $$\int \text{P}.dx=\log\big(g\,(x)\big)$$

अथवा $$\text{g}\ (x)=\ e^{\int \text{P}\,dx}$$

समीकरण (1) को $g(x)=e^{\int pdx}$ से गुणा करने पर उस समीकरण का बायाँ पक्ष x तथा y के किसी फलन का अवकलज बन जाता है। यह फलन $g(x)=e^{\int pdx}$ दिए हुए अवकल समीकरण का **समाकलन गुणक (I.F.)** कहलाता है।

समीकरण (2) में $g\,(x)$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$e^{\int pdx}\frac{dy}{dx}+\text{P}\,e^{\int pdx}y=\text{Q}.\ e^{\int pdx}$$

अथवा $$\frac{d}{dx}\Big(y\ e^{\int \text{P}dx}\Big)=\text{Q}\,e^{\int \text{P}dx}$$

दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx} = \int \left(\mathrm{Q} \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}\right) dx$$

अथवा $$y = e^{-\int \mathrm{P}\,dx} \cdot \int \left(\mathrm{Q} \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}\right) dx + \mathrm{C}$$

यह अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण को हल करने के लिए सम्मिलित चरण:

(i) दिए हुए अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ के रूप में लिखिए जिसमें P, Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं।

(ii) समाकलन गुणक (I.F.) = $e^{\int \mathrm{P}\,dx}$ ज्ञात कीजिए।

(iii) दिए हुए अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित रूप में लिखिए:

$$y \,.\, (\mathrm{I.F.}) = \int (\mathrm{Q} \times \mathrm{I.F.})\,dx + \mathrm{C}$$

यदि प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$ के रूप में है जिसमें P_1 और Q_1 अचर अथवा केवल y के फलन हैं, तब I.F. = $e^{\int \mathrm{P}_1\,dy}$ और

$$x \,.\, (\mathrm{I.F.}) = \int (\mathrm{Q}_1 \times \mathrm{I.F.})\,dy + \mathrm{C}$$ अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण 14 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q} \text{ है, जहाँ } \mathrm{P} = -1 \text{ और } \mathrm{Q} = \cos x$$

इसलिए $\mathrm{I.F.} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$

समीकरण के दोनों पक्षों को I.F. से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}\cos x$$

अथवा $$\frac{d}{dx}\left(y e^{-x}\right) = e^{-x}\cos x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y\,e^{-x} = \int e^{-x}\cos x\,dx + \text{C} \qquad \text{... (1)}$$

मान लीजिए कि $\quad \text{I} = \int e^{-x}\cos x\,dx$

$$= \cos x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int(-\sin x)\,(-e^{-x})\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \int \sin x\,e^{-x}\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \left[\sin x(-e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\,dx\right]$$

$$= -\cos x\,e^{-x} + \sin x\,e^{-x} - \int \cos x\,e^{-x}\,dx$$

अथवा $\quad \text{I} = -\,e^{-x}\cos x + \sin x\,e^{-x} - \text{I}$

अथवा $\quad 2\text{I} = (\sin x - \cos x)\,e^{-x}$

अथवा $\quad \text{I} = \dfrac{(\sin x - \cos x)\,e^{-x}}{2}$

समीकरण (1) में I का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y\,e^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)e^{-x} + \text{C}$$

अथवा $\quad y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \text{C}e^{x}$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 15 अवकल समीकरण $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2\ (x \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण है:

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \qquad \text{... (1)}$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों को x से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

यह, $\dfrac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ $\text{P} = \dfrac{2}{x}$ एवं $\text{Q} = x$ है।

इसलिए $\quad \text{I.F.} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2 \qquad \left[\text{जैसा कि } e^{\log f(x)} = f(x)\right]$

इसलिए दिए हुए समीकरण का हल है:

$$y \,.\, x^2 = \int (x)\,(x^2)\,dx + \mathrm{C} = \int x^3 dx + \mathrm{C}$$

अथवा $$y = \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}\,x^{-2}$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 16 अवकल समीकरण $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

यह, $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$, के रूप वाला रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ $\mathrm{P}_1 = -\frac{1}{y}$ एवं $\mathrm{Q}_1 = 2y$ है। इसलिए $\mathrm{I.F.} = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$

अतः दिए हुए अवकल समीकरण का हल है:

$$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right)dy + \mathrm{C}$$

अथवा $$\frac{x}{y} = \int 2dy + \mathrm{C}$$

अथवा $$\frac{x}{y} = 2y + \mathrm{C}$$

अथवा $$x = 2y^2 + \mathrm{C}y$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 17 अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \; (x \neq 0)$$

का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$

हल दिया हुआ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ

$P = \cot x$ और $Q = 2x + x^2 \cot x$ है। इसलिए

$$\text{I.F.} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

अतः अवकल समीकरण का हल है:

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = \int 2x \sin x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = \sin x \left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x \left(\frac{2x^2}{2}\right) dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

अथवा $$y \sin x = x^2 \sin x + C \qquad \dots (1)$$

समीकरण (1) में $y = 0$ एवं $x = \frac{\pi}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

अथवा $$C = \frac{-\pi^2}{4}$$

समीकरण (1) में C का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

अथवा $$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} \; (\sin x \neq 0)$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का विशिष्ट हल है।

उदाहरण 18 बिन्दु (0, 1) से गुजरने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए, यदि इस वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, उस बिंदु के x निर्देशांक (भुज) तथा x निर्देशांक और y निर्देशांक (कोटि) के गुणनफल के योग के बराबर है।

हल हम जानते हैं कि वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ के बराबर होती है। इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} - xy = x \qquad \dots (1)$$

समीकरण (1), $\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}$ के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ $\mathrm{P}=-x$ एवं $\mathrm{Q}=x$ है। इसलिए

$$\text{I.F.} = e^{\int -x\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

अतः दिए हुए समीकरण का हल है:

$$y.e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)dx + \mathrm{C} \qquad \dots (2)$$

मान लीजिए $\mathrm{I} = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$

मान लीजिए $\frac{-x^2}{2} = t$, तब $-x\,dx = dt$ या $x\,dx = -dt$

इसलिए $\mathrm{I} = -\int e^t\,dt = -e^t = -e^{\frac{-x^2}{2}}$

समीकरण (2) में I का मान प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$y\,e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + \mathrm{C}$$

अथवा
$$y = -1 + \mathrm{C}\,e^{\frac{x^2}{2}} \qquad \dots (3)$$

समीकरण (3) वक्रों के कुल का समीकरण है परंतु हम इस कुल के ऐसे सदस्य का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं जो बिंदु (0,1) से गुजरता हो। समीकरण (3) में $x = 0$ एवं $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं:

$$1 = -1 + \mathrm{C}\,.\,e^0 \text{ अथवा } \mathrm{C} = 2$$

समीकरण (3) में C का मान प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$y = -1 + 2\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

यह वक्र का अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्नावली 9.5

1 से 12 तक के प्रश्नों में, प्रत्येक अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ **2.** $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ **3.** $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

4. $\frac{dy}{dx} + (\sec x)\,y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$ **5.** $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2\log x$

7. $x\log x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{2}{x}\log x$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx\ (x \neq 0)$

9. $x\dfrac{dy}{dx}+y-x+xy\cot x=0\ \ (x\neq 0)$

10. $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=1$

11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$

12. $(x+3y^2)\dfrac{dy}{dx}=y\ \ (y>0)$.

13 से 15 तक के प्रश्नों में प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दिए हुए प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाला विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए:

13. $\dfrac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x;\ y=0$ यदि $x=\dfrac{\pi}{3}$

14. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+2xy=\dfrac{1}{1+x^2};\ y=0$ यदि $x=1$

15. $\dfrac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x;\ y=2$ यदि $x=\dfrac{\pi}{2}$

16. मूल बिंदु से गुज़रने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु के निर्देशांकों के योग के बराबर है।

17. बिंदु $(0, 2)$ से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु के निर्देशांकों का योग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के परिमाण से 5 अधिक है।

18. अवकल समीकरण $x\dfrac{dy}{dx}-y=2x^2$ का समाकलन गुणक है:

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) x

19. अवकल समीकरण $(1-y^2)\dfrac{dx}{dy}+yx = ay(-1<y<1)$ का समाकलन गुणक है:

(A) $\dfrac{1}{y^2-1}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\dfrac{1}{1-y^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 19 सत्यापित कीजिए कि फलन $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, जहाँ c_1, c_2 स्वेच्छ अचर है, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + \left(a^2 + b^2\right) y = 0 \text{ का हल है।}$$

हल दिया हुआ फलन है:

$$y = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right] \qquad \dots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[-bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx\right] + \left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right]e^{ax}.a$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] \qquad \dots (2)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का x, के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)(-\sin bx . b) + (ac_2 - bc_1)(\cos bx . b)]$$

$$+ [(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]\, e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

दिए गए अवकल समीकरण में $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ एवं y का मान प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं:

बायाँ पक्ष $$= e^{ax}[a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

$$- 2ae^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]$$

$$+ (a^2 + b^2)e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$= e^{ax}\left[\begin{array}{l}\left(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2\right)\sin bx \\ + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx\end{array}\right]$$

$$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0 \cos bx] = e^{ax} \times 0 = 0 = \text{दायाँ पक्ष}$$

इसलिए दिया हुआ फलन दिए हुए अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण 20 अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=3x+4y$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। दिया हुआ है कि $y=0$ यदि $x=0$

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dy}{dx}=e^{(3x+4y)}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=e^{3x}\cdot e^{4y} \qquad \text{... (1)}$$

चरों को पृथक् करने पर हम पाते हैं,

$$\frac{dy}{e^{4y}}=e^{3x}dx$$

इसलिए $$\int e^{-4y}dy=\int e^{3x}dx$$

अथवा $$\frac{e^{-4y}}{-4}=\frac{e^{3x}}{3}+C$$

अथवा $$4\,e^{3x}+3\,e^{-4y}+12\,C=0 \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) में $x=0$ एवं $y=0$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं:

$$4+3+12\,C=0 \text{ अथवा } C=\frac{-7}{12}$$

समीकरण (2) में C का मान प्रतिस्थापित करने पर हम,

$$4\,e^{3x}+3\,e^{-4y}-7=0,$$ प्राप्त करते हैं

यह दिए हुए अवकल समीकरण का एक विशिष्ट हल है।

उदाहरण 21 अवकल समीकरण

$$(x\,dy-y\,dx)\,y\sin\left(\frac{y}{x}\right)=(y\,dx+x\,dy)\,x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$ को हल कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$$\left[x\,y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy=\left[xy\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=\frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

दायें पक्ष पर अंश एवं हर दोनों को x^2 से भाग देने पर हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \quad ...(1)$$

स्पष्टत: समीकरण (1), $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का समघातीय अवकल समीकरण है, इसलिए इस समीकरण को हल करने के लिए हम

$$y = vx \quad ...(2)$$

प्रतिस्थापित करते हैं।

अथवा $$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

अथवा $$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v\cos v+v^2\sin v}{v\sin v-\cos v}$$ [समीकरण (1) और (2) का प्रयोग करने पर]

अथवा $$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v-\cos v}$$

अथवा $$\left(\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}\right)dv = \frac{2\,dx}{x}$$

इसलिए $$\int\left(\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}\right)dv=2\int\frac{1}{x}\,dx$$

अथवा $$\int\tan v\,dv-\int\frac{1}{v}\,dv=2\int\frac{1}{x}\,dx$$

अथवा $$\log|\sec v|-\log|v|=2\log|x|+\log|C_1|$$

अथवा $$\log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right|=\log|C_1|$$

अथवा $$\frac{\sec v}{v\,x^2}=\pm C_1 \quad ...(3)$$

समीकरण (3) में v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = C, \text{ जहाँ } C = \pm C_1$$

अथवा $$\sec\left(\frac{y}{x}\right) = C\,xy$$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 22 अवकल समीकरण

$(\tan^{-1}y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \quad \ldots (1)$$

समीकरण (1), $\frac{dx}{dy} + P_1\, x = Q_1$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहाँ

$$P_1 = \frac{1}{1+y^2} \text{ एवं } Q_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \text{ है। इसलिए}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1}y}$$

इसलिए दिए हुए अवकल समीकरण का हल है:

$$x\,e^{\tan^{-1}y} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy + C \quad \ldots (2)$$

मान लीजिए $$I = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy$$

$\tan^{-1} y = t$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि $\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy = dt$

अतः $\mathrm{I} = \int t\, e^t dt,\ \mathrm{I} = t\, e^t - \int 1 \,.\, e^t\, et,\ \mathrm{I} = t\, e^t - e^t = e^t\,(t-1)$

अथवा $\mathrm{I} = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1)$

समीकरण (2) में I का मान प्रतिस्थापित करने पर हम

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1) + \mathrm{C} \text{ पाते हैं}$$

अथवा $x = (\tan^{-1} y - 1) + \mathrm{C}\, e^{-\tan^{-1} y}$

यह दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए।

(i) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 5x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ (ii) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$

(iii) $\dfrac{d^4 y}{dx^4} - \sin\left(\dfrac{d^3 y}{dx^3}\right) = 0$

2. निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक के लिए सत्यापित कीजिए कि दिया हुआ फलन (अस्पष्ट अथवा स्पष्ट) संगत अवकल समीकरण का हल है।

(i) $xy = a\, e^x + b\, e^{-x} + x^2$: $x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(ii) $y = e^x\,(a \cos x + b \sin x)$: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(iii) $y = x \sin 3x$: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 9\,y - 6\cos 3x = 0$

(iv) $x^2 = 2y^2 \log y$: $(x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

3. सिद्ध कीजिए कि $x^2 - y^2 = c\,(x^2 + y^2)^2$ जहाँ c एक प्राचल है, अवकल समीकरण $(x^3 - 3x\, y^2)\, dx = (y^3 - 3x^2 y)\, dy$ का व्यापक हल है।

4. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, जबकि $x \neq 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

5. दर्शाइए कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0$ का व्यापक हल $(x + y + 1) = A\,(1 - x - y - 2xy)$ है, जिसमें A एक प्राचल है।

6. बिंदु $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$ है।

7. अवकल समीकरण $(1 + e^{2x})\, dy + (1 + y^2)\, e^x\, dx = 0$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 1$ यदि $x = 0$.

8. अवकल समीकरण $y\, e^{\frac{x}{y}} dx = \left(x\, e^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy\ (y \neq 0)$ का हल ज्ञात कीजिए।

9. अवकल समीकरण $(x - y)\,(dx + dy) = dx - dy$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = -1$, यदि $x = 0$ (संकेत: $x - y = t$ रखें)।

10. अवकल समीकरण $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy}=1\ (x \neq 0)$ का हल ज्ञात कीजिए।

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\cot x = 4x\,\text{cosec}\, x\ (x \neq 0)$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x=\frac{\pi}{2}$.

12. अवकल समीकरण $(x+1)\frac{dy}{dx}=2\,e^{-y}-1$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = 0$.

13. अवकल समीकरण $\frac{y\,dx - x\,dy}{y}=0$ का व्यापक हल है:

(A) $xy = C$ (B) $x = Cy^2$ (C) $y = Cx$ (D) $y = Cx^2$

14. $\frac{dx}{dy}+P_1 x=Q_1$ के रूप वाले अवकल समीकरण का व्यापक हल है:

(A) $y\, e^{\int P_1\, dy} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\, dy}\right) dy + C$

(B) $y \,.\, e^{\int P_1\, dx} = \int\left(Q_1 e^{\int P_1\, dx}\right) dx + C$

(C) $x\, e^{\int P_1\, dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dy} \right) dy + C$

(D) $x\, e^{\int P_1\, dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dx} \right) dx + C$

15. अवकल समीकरण $e^x\, dy + (y\, e^x + 2x)\, dx = 0$ का व्यापक हल है:
(A) $x\, e^y + x^2 = C$ (B) $x\, e^y + y^2 = C$ (C) $y\, e^x + x^2 = C$ (D) $y\, e^y + x^2 = C$

सारांश

- एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर (चरों) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज (अवकलजों) सम्मिलित हों, अवकल समीकरण कहलाता है।
- किसी अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम अवकलज की कोटि, उस अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।
- यदि कोई अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण हैं तो उस अवकल समीकरण की घात परिभाषित होती है।
- किसी अवकल समीकरण की घात (यदि परिभाषित हो) उस अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम कोटि अवकलज की उच्चतम घात (केवल धनात्मक पूर्णांक) होती है।
- एक दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करने वाला फलन उस अवकल समीकरण का हल कहलाता है। एक ऐसा हल जिसमें उतने ही स्वेच्छ अचर हों, जितनी उस अवकल समीकरण की कोटि है, व्यापक हल कहलाता है और स्वेच्छ अचरों से मुक्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।
- एक ऐसा अवकल समीकरण, जिसको $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ अथवा $\dfrac{dx}{dy} = g(x, y)$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, जहाँ $f(x, y)$ एवं $g(x, y)$ शून्य घात वाले समघातीय फलन हैं, समघातीय अवकल समीकरण कहलाता है।
- $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$, के रूप वाला अवकल समीकरण, जिसमें P तथा Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं, प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

अवकल समीकरण विज्ञान की प्रमुख भाषाओं में से एक है। रोचक तथ्य यह है कि अवकल समीकरणों का अस्तित्व नवंबर 11, 1675 Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646-1716) ने सर्वप्रथम सर्वसमिका, $\int y\, dy = \dfrac{1}{2} y^2$, को लिखित रूप में प्रस्तुत किया तथा

उनसे दोनों प्रतीकों $\int$ और dy से परिचित कराया। वस्तुतः Leibnitz ऐसी वक्र को ज्ञात करने की समस्या में मग्न थे जिसकी स्पर्श रेखा निर्दिष्ट हों, इस समस्या ने सन् 1691 में उन्हें 'चरों के पृथक्करणीय विधि' के अन्वेषण का मार्गदर्शन कराया। एक वर्ष पश्चात् उन्होंने 'प्रथम कोटि के समघातीय समीकरणों के हल करने की विधि' का सूत्रीकरण किया। वे आगे बढ़े और अल्प समय में उन्होंने 'प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधि' का अन्वेषण किया। कितना आश्चर्यजनक है कि उपर्युक्त सभी विधियों की खोज अकेले एक व्यक्ति द्वारा अवकल समीकरणों के जन्म के पच्चीस वर्षों के अल्पावधि के अंतर्गत संपन्न हुई।

प्रारंभ में केवल समीकरणों के 'हल' करने की प्रविधि को अवकल समीकरणों के 'समाकलन' के रूप में निर्दिशट किया गया था। यह शब्द सन् 1690 में प्रथमतः James Bernoulli, (1654-1705) द्वारा प्रचलन में लाया गया। शब्द 'हल' का सर्वप्रथम प्रयोग Joseph Louis Lagrange (1736-1813), द्वारा सन् 1774 में किया गया। यह घटना अवकल समीकरणों के जन्म से लगभग 100 वर्षों बाद घटित हुई। ये Jules Henri Poincare (1854-1912), थे, जिन्होंने शब्द 'हल' के प्रयोग के लिए अकाट्य तर्क प्रस्तुत किया, फलतः आधुनिक शब्दावली में शब्द हल को अपना उचित स्थान प्राप्त हुआ। 'चरों के पृथ्क्करणीय विधि का नामकरण John Bernoulli (1667-1748), James Bernoulli के अनुज द्वारा किया गया। मई 20, 1715 को Leibnitz को लिखे अपने पत्र में, उन्होने निम्नलिखित अवकल समीकरण के हल की खोज किए

$$x^2 y'' = 2y$$

के हल तीन प्रकार की वक्रों नामतः परवलय, अतिपरवलय और घनीय वक्रों के एक समूह का मार्गदर्शन कराते हैं। यह दर्शाता है कि ऐसे सरल दिखाई पड़ने वाले अवकल समीकरणों के हल कैसे नाना रूप धारण करते हैं। 20वीं शताब्दी के उतरार्ध में 'अवकल समीकरणों के गुणात्मक विश्लेषण' शीर्षक के अंतर्गत अवकल समीकरणों के हलों की जटिल प्रकृति के आविष्कार हेतु ध्यान आकर्षित किया गया। आजकल इसने लगभग सभी अविष्कारों हेतु अत्यंत प्रविधि के रूप में प्रमुख स्थान प्राप्त कर लिया है।

12082CH10

अध्याय 10

सदिश बीजगणित (Vector Algebra)

❖ *In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. – HERMAN HANKEL* ❖

10.1 भूमिका (Introduction)

अपने दैनिक जीवन में हमें अनेक प्रश्न मिलते हैं जैसे कि आपकी ऊँचाई क्या है? एक फुटबाल के खिलाड़ी को अपनी ही टीम के दूसरे खिलाड़ी के पास गेंद पहुँचाने के लिए गेंद पर किस प्रकार प्रहार करना चाहिए? अवलोकन कीजिए कि प्रथम प्रश्न का संभावित उत्तर 1.6 मीटर हो सकता है। यह एक ऐसी राशि है जिसमें केवल एक मान परिमाण जो एक वास्तविक संख्या है, सम्मिलित है। ऐसी राशियाँ अदिश कहलाती है। तथापि दूसरे प्रश्न का उत्तर एक ऐसी राशि है (जिसे बल कहते हैं) जिसमें मांसपेशियों की शक्ति परिमाण के साथ-साथ दिशा (जिसमें दूसरा खिलाड़ी स्थित है) भी सम्मिलित है। ऐसी राशियाँ सदिश कहलाती है। गणित, भौतिकी एवं अभियांत्रिकी में ये दोनों प्रकार की राशियाँ नामतः अदिश राशियाँ, जैसे कि लंबाई, द्रव्यमान, समय, दूरी, गति, क्षेत्रफल, आयतन, तापमान, कार्य, धन, वोल्टता, घनत्व, प्रतिरोधक इत्यादि एवं सदिश राशियाँ जैसे कि विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, भार, संवेग, विद्युत क्षेत्र की तीव्रता इत्यादि बहुधा मिलती हैं।

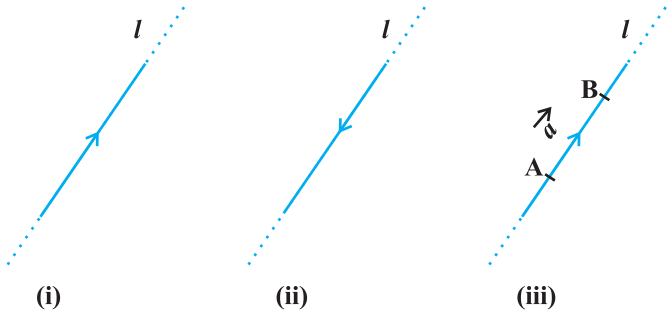
W.R. Hamilton (1805-1865)

इस अध्याय में हम सदिशों की कुछ आधारभूत संकल्पनाएँ, सदिशों की विभिन्न संक्रियाएँ और इनके बीजीय एवं ज्यामितीय गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे। इन दोनों प्रकार के गुणधर्मों का सम्मिलित रूप सदिशों की संकल्पना का पूर्ण अनुभूति देता है और उपर्युक्त चर्चित क्षेत्रों में इनकी विशाल उपयोगिता की ओर प्रेरित करता है।

10.2 कुछ आधारभूत संकल्पनाएँ (Some Basic Concepts)

मान लीजिए कि किसी तल अथवा त्रि-विमीय अंतरिक्ष में l कोई सरल रेखा है। तीर के निशानों की सहायता से इस रेखा को दो दिशाएँ प्रदान की जा सकती हैं। इन दोनों में से निश्चित दिशा वाली कोई

भी एक रेखा दिष्ट रेखा कहलाती है [आकृति 10.1 (i), (ii)]।



आकृति 10.1

अब प्रेक्षित कीजिए कि यदि हम रेखा '*l*' को रेखाखंड AB तक प्रतिबंधित कर देते हैं तब दोनों मे से किसी एक दिशा वाली रेखा '*l*' पर परिमाण निर्धारित हो जाता है। इस प्रकार हमें एक दिष्ट रेखाखंड प्राप्त होता है (आकृति 10.1(iii))। अतः एक दिष्ट रेखाखंड में परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं।

परिभाषा 1 एक ऐसी राशि जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, सदिश कहलाती है।

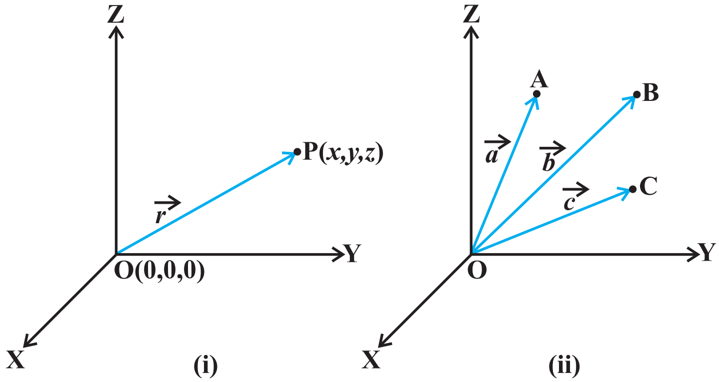
ध्यान दीजिए कि एक दिष्ट रेखाखंड सदिश होता है (आकृति 10.1(iii)), जिसे $\overrightarrow{AB}$ अथवा साधारणतः $\vec{a}$, के रूप में निर्दिष्ट करते हैं और इसे सदिश '$\overrightarrow{AB}$' अथवा सदिश '$\vec{a}$' के रूप में पढ़ते हैं।

वह बिंदु A जहाँ से सदिश $\overrightarrow{AB}$ प्रारंभ होता है, प्रारंभिक बिंदु कहलाता है और वह बिंदु B जहाँ पर सदिश $\overrightarrow{AB}$, समाप्त होता है अंतिम बिंदु कहलाता है। किसी सदिश के प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदुओं के बीच की दूरी सदिश का परिमाण (अथवा लंबाई) कहलाता है और इसे $|\overrightarrow{AB}|$ अथवा $|\vec{a}|$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है। तीर का निशान सदिश की दिशा को निर्दिष्ट करता है।

टिप्पणी क्योंकि लंबाई कभी भी ऋणात्मक नहीं होती है इसलिए संकेतन $|\vec{a}| < 0$ का कोई अर्थ नहीं है।

स्थिति सदिश (Position Vector)

कक्षा XI से, त्रि-विमीय दक्षिणावर्ती समकोणिक निर्देशांक पद्धति को स्मरण कीजिए (आकृति 10.2 (i))। अंतरिक्ष में मूल बिंदु O(0, 0, 0) के सापेक्ष एक ऐसा बिंदु P लीजिए जिसके निर्देशांक (x, y, z) है। तब सदिश $\overrightarrow{OP}$ जिसमें O और P क्रमशः प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदु हैं, O के



आकृति 10.2

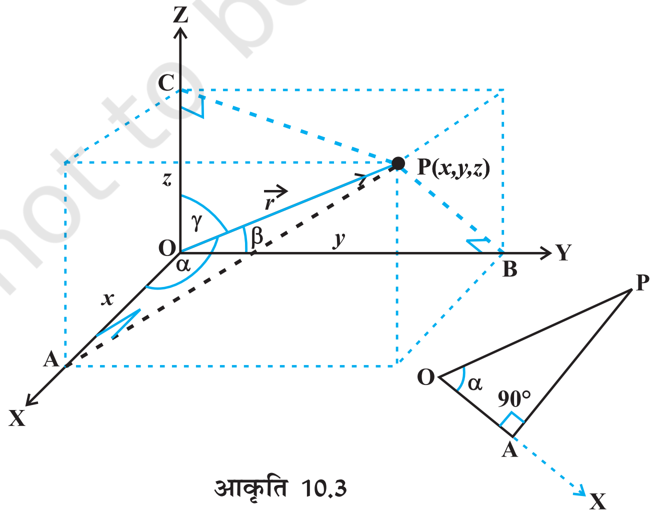
सापेक्ष बिंदु P का स्थिति सदिश कहलाता है। दूरी सूत्र (कक्षा XI से) का उपयोग करते हुए $\overrightarrow{OP}$ (अथवा $\vec{r}$) का परिमाण निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है:

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

व्यवहार में मूल बिंदु O के सापेक्ष, बिंदुओं A, B, C इत्यादि के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ से निर्दिष्ट किए जाते हैं [आकृति 10.2(ii)]।

दिक्-कोसाइन (Direction Cosines)

एक बिंदु $P(x, y, z)$ का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ (अथवा $\vec{r}$) लीजिए जैसा कि आकृति 10.3 में दर्शाया गया है। सदिश $\vec{r}$ द्वारा x, y एवं z-अक्ष की धनात्मक दिशाओं के साथ बनाए गए क्रमशः कोण



आकृति 10.3

$\alpha, \beta,$ एवं γ दिशा कोण कहलाते हैं। इन कोणों के कोसाइन मान अर्थात् $\cos\alpha, \cos\beta$ एवं $\cos\gamma$ सदिश $\vec{r}$ के दिक्-कोसाइन कहलाते हैं और सामान्यत: इनको क्रमश: l, m एवं n से निर्दिष्ट किया जाता है।

आकृति 10.3, से हम देखते हैं कि त्रिभुज OAP एक समकोण त्रिभुज है और इस त्रिभुज से हम $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\left(r \text{ को } |\vec{r}| \text{ के लिए प्रयोग किया गया है}\right)$ प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार समकोण त्रिभुजों OBP एवं OCP से हम $\cos\beta = \frac{y}{r}$ एवं $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ लिख सकते हैं। इस प्रकार बिंदु P के निर्देशांकों को (lr, mr, nr) के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। दिक्-कोसाइन के समानुपाती संख्याएँ lr, mr एवं nr सदिश $\vec{r}$ के दिक्-अनुपात कहलाते हैं और इनको क्रमश: a, b तथा c से निर्दिष्ट किया जाता है।

टिप्पणी हम नोट कर सकते हैं कि $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ परंतु सामान्यत: $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$

10.3 सदिशों के प्रकार (Types of Vectors)

शून्य सदिश [Zero (null) Vector] एक सदिश जिसके प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदु संपाती होते हैं, शून्य सदिश कहलाता है और इसे $\vec{0}$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है। शून्य सदिश को कोई निश्चित दिशा प्रदान नहीं की जा सकती क्योंकि इसका परिमाण शून्य होता है अथवा विकल्पत: इसको कोई भी दिशा धारण किए हुए माना जा सकता है। सदिश $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ शून्य सदिश को निरूपित करते हैं।

मात्रक सदिश (Unit Vector) एक सदिश जिसका परिमाण एक (अथवा 1 इकाई) है मात्रक सदिश कहलाता है। किसी दिए हुए सदिश $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश को $\hat{a}$ से निर्दिष्ट किया जाता है।

सह-आदिम सदिश (Co-initial Vectors) दो अथवा अधिक सदिश जिनका एक ही प्रारंभिक बिंदु है, सह आदिम सदिश कहलाते हैं।

संरेख सदिश (Collinear Vectors) दो अथवा अधिक सदिश यदि एक ही रेखा के समांतर है तो वे संरेख सदिश कहलाते हैं।

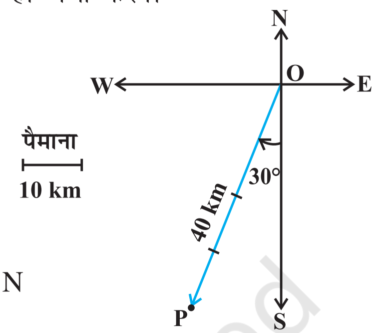
समान सदिश (Equal Vectors) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते हैं यदि उनके परिमाण एवं दिशा समान हैं। इनको $\vec{a} = \vec{b}$ के रूप में लिखा जाता है।

ऋणात्मक सदिश (Negative of a Vector) एक सदिश जिसका परिमाण दिए हुए सदिश (मान लीजिए $\overrightarrow{AB}$) के समान है परंतु जिसकी दिशा दिए हुए सदिश की दिशा के विपरीत है, दिए हुए सदिश का ऋणात्मक कहलाता है। उदाहरणत: सदिश $\overrightarrow{BA}$, सदिश $\overrightarrow{AB}$ का ऋणात्मक है और इसे $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ के रूप में लिखा जाता है।

टिप्पणी उपर्युक्त परिभाषित सदिश इस प्रकार है कि उनमें से किसी को भी उसके परिमाण एवं दिशा को परिवर्तित किए बिना स्वयं के समांतर विस्थापित किया जा सकता है। इस प्रकार के सदिश स्वतंत्र सदिश कहलाते हैं। इस पूरे अध्याय में हम स्वतंत्र सदिशों की ही चर्चा करेंगे।

उदाहरण 1 दक्षिण से 30° पश्चिम में, 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।

हल सदिश $\overrightarrow{OP}$ अभीष्ट विस्थापन को निरूपित करता है (आकृति 10.4 देखिए)।



आकृति 10.4

उदाहरण 2 निम्नलिखित मापों को अदिश एवं सदिश के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।

(i) 5 s (ii) $1000\ cm^3$ (iii) 10 N

(iv) 30 km/h (v) $10\ g/cm^3$

(vi) 20 m/s उत्तर की ओर

हल

(i) समय-अदिश (ii) आयतन-अदिश (iii) बल-सदिश

(iv) गति-अदिश (v) घनत्व-अदिश (vi) वेग-सदिश

उदाहरण 3 आकृति 10.5 में कौन से सदिश

(i) संरेख हैं

(ii) समान हैं

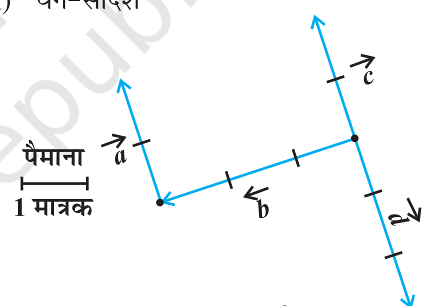
(iii) सह-आदिम हैं

हल

(i) संरेख सदिश : $\vec{a}, \vec{c}$ तथा $\vec{d}$

(ii) समान सदिश : $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$

(iii) सह-आदिम सदिश : $\vec{b}, \vec{c}$ तथा $\vec{d}$



आकृति 10.5

प्रश्नावली 10.1

1. उत्तर से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।

2. निम्नलिखित मापों को अदिश एवं सदिश के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।

(i) 10 kg (ii) 2 मीटर उत्तर-पश्चिम (iii) 40°

(iv) 40 वाट (v) 10^{-19} कूलंब (vi) $20\ m/s^2$

3. निम्नलिखित को अदिश एवं सदिश राशियों के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए।

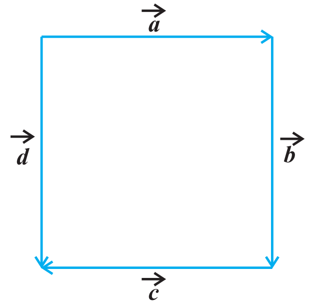
(i) समय कालांश (ii) दूरी (iii) बल

(iv) वेग (v) कार्य

4. आकृति 10.6 (एक वर्ग) में निम्नलिखित सदिशों को पहचानिए।

(i) सह-आदिम (ii) समान

(iii) संरेख परंतु असमान



आकृति 10.6

5. निम्नलिखित का उत्तर सत्य अथवा असत्य के रूप में दीजिए।

(i) $\vec{a}$ तथा $-\vec{a}$ संरेख हैं।

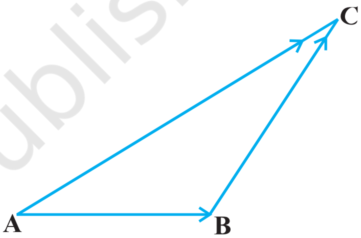
(ii) दो संरेख सदिशों का परिमाण सदैव समान होता है।

(iii) समान परिमाण वाले दो सदिश संरेख होते हैं।

(iv) समान परिमाण वाले दो संरेख सदिश समान होते हैं।

10.4 सदिशों का योगफल (Addition of Vectors)

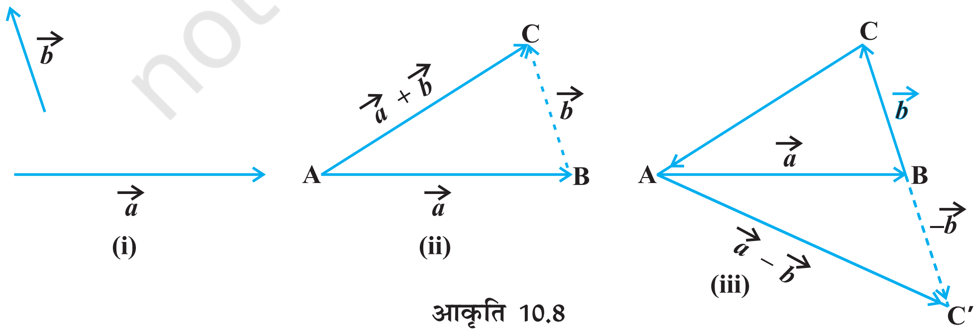
सदिश $\overrightarrow{AB}$ से साधारणतः हमारा तात्पर्य है बिंदु A से बिंदु B तक विस्थापन। अब एक ऐसी स्थिति की चर्चा कीजिए जिसमें एक लड़की बिंदु A से बिंदु B तक चलती है और उसके बाद बिंदु B से बिंदु C तक चलती है (आकृति 10.7)। बिंदु A से बिंदु C तक लड़की द्वारा किया गया कुल विस्थापन सदिश, $\overrightarrow{AC}$ से प्राप्त होता है और इसे $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।



आकृति 10.7

यह सदिश योग का त्रिभुज नियम कहलाता है।

सामान्यतः, यदि हमारे पास दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं [आकृति 10.8 (i)], तो उनका योग ज्ञात करने के लिए उन्हें इस स्थिति में लाया जाता है, ताकि एक का प्रारंभिक बिंदु दूसरे के अंतिम बिंदु के संपाती हो जाए [आकृति 10.8(ii)]।



आकृति 10.8

उदाहरणतः आकृति 10.8 (ii) में, हमने सदिश $\vec{b}$ के परिमाण एवं दिशा को परिवर्तित किए बिना इस प्रकार स्थानांतरित किया है ताकि इसका प्रारंभिक बिंदु, $\vec{a}$ के अंतिम बिंदु के संपाती है तब त्रिभुज ABC की तीसरी भुजा AC द्वारा निरूपित सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ हमें सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का योग (अथवा परिणामी) प्रदान करता है, अर्थात् त्रिभुज ABC में हम पाते हैं कि $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [आकृति 10.8 (ii)]।

अब पुनः क्योंकि $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$, इसलिए उपर्युक्त समीकरण से हम पाते हैं कि

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

इसका तात्पर्य यह है कि किसी त्रिभुज की भुजाओं को यदि एक क्रम में लिया जाए तो यह शून्य परिणामी की ओर प्रेरित करता है क्योंकि प्रारंभिक एवं अंतिम बिंदु संपाती हो जाते हैं [आकृति 10.8(iii)]।

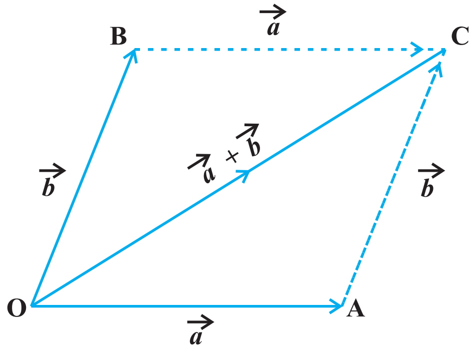
अब एक सदिश $\overrightarrow{BC'}$ की रचना इस प्रकार कीजिए ताकि इसका परिमाण सदिश $\overrightarrow{BC}$, के परिमाण के समान हो, परंतु इसकी दिशा $\overrightarrow{BC}$ की दिशा के विपरीत हो आकृति 10.8(iii) अर्थात् $\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$ तब त्रिभुज नियम का अनुप्रयोग करते हुए [आकृति 10.8(iii)] से हम पाते हैं कि

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{BC}) =\vec{a}-\vec{b}$

सदिश $\overrightarrow{AC'}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के अंतर को निरूपित करता है।

अब किसी नदी के एक किनारे से दूसरे किनारे तक पानी के बहाव की दिशा के लंबवत् जाने वाली एक नाव की चर्चा करते हैं। तब इस नाव पर दो वेग सदिश कार्य कर रहे हैं, एक इंजन द्वारा नाव को दिया गया वेग और दूसरा नदी के पानी के बहाव का वेग। इन दो वेगों के युगपत प्रभाव से नाव वास्तव में एक भिन्न वेग से चलना शुरू करती है। इस नाव की प्रभावी गति एवं दिशा (अर्थात् परिणामी वेग) के बारे में यथार्थ विचार लाने के लिए हमारे पास सदिश योगफल का निम्नलिखित नियम है।

यदि हमारे पास एक समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं से निरूपित किए जाने वाले (परिमाण एवं दिशा सहित) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है (आकृति 10.9) तब समांतर चतुर्भुज की इन दोनों भुजाओं के उभयनिष्ठ बिंदु से गुजरने वाला विकर्ण इन दोनों सदिशों के योग $\vec{a}+\vec{b}$ को परिमाण एवं दिशा सहित निरूपित करता है। यह सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम कहलाता है।



आकृति 10.9

> **टिप्पणी** त्रिभुज नियम का उपयोग करते हुए आकृति 10.9 से हम नोट कर सकते हैं कि $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ या $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (क्योंकि $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$) जो कि समांतर चतुर्भुज नियम है। अतः हम कह सकते हैं कि सदिश योग के दो नियम एक दूसरे के समतुल्य हैं।

सदिश योगफल के गुणधर्म (Properties of vector addition)

गुणधर्म 1 दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए

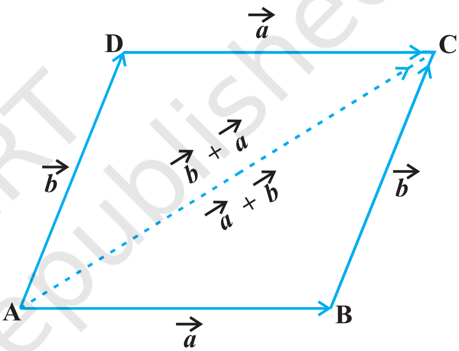
$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(क्रमविनिमयता)}$$

उपपत्ति समांतर चतुर्भुज ABCD को लीजिए (आकृति 10.10) मान लीजिए $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, तब त्रिभुज ABC में त्रिभुज नियम का उपयोग करते हुए हम पाते हैं कि $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$

अब, क्योंकि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान एवं समांतर है, इसलिए आकृति 10.10 में $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ और $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ है। पुनः त्रिभुज ADC में त्रिभुज नियम के प्रयोग से $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$=\vec{b}+\vec{a}$

अतः $\quad \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

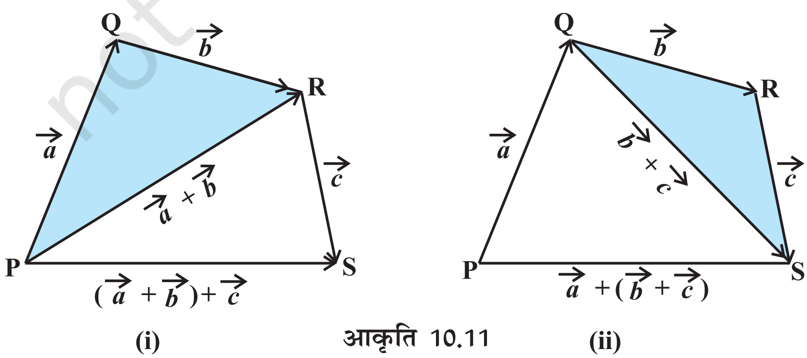


आकृति 10.10

गुणधर्म 2 तीन सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ के लिए

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{(साहचर्य गुण)}$$

उपपत्ति मान लीजिए, सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ को क्रमशः $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ एवं $\overrightarrow{RS}$ से निरूपित किया गया है जैसा कि आकृति 10.11(i) और (ii) में दर्शाया गया है।



आकृति 10.11

तब $$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$$

और $$\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{QS}$$

इसलिए $$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}$$

और $$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$$

अतः $$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

टिप्पणी सदिश योगफल के साहचर्य गुणधर्म की सहायता से हम तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ का योगफल कोष्ठकों का उपयोग किए बिना $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ के रूप में लिखते हैं।

नोट कीजिए कि किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए हम पाते हैं:

$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

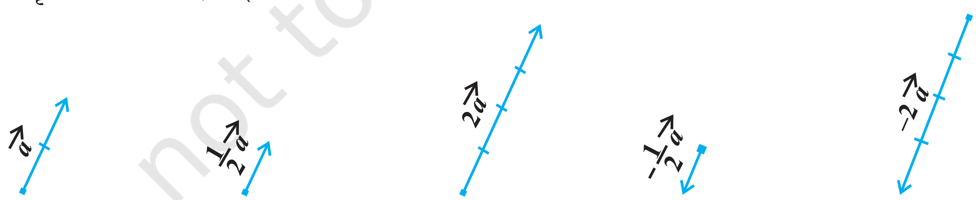
यहाँ शून्य सदिश $\vec{0}$ सदिश योगफल के लिए योज्य सर्वसमिका कहलाता है।

10.5 एक अदिश से सदिश का गुणन (Multiplication of a Vector by a Scalar)

मान लीजिए कि $\vec{a}$ एक दिया हुआ सदिश है और λ एक अदिश है। तब सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ, से गुणनफल जिसे $\lambda\vec{a}$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है, सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ से गुणन कहलाता है। नोट कीजिए कि $\lambda\vec{a}$ भी सदिश $\vec{a}$ के संरेख एक सदिश है। λ के मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के अनुसार $\lambda\vec{a}$ की दिशा, $\vec{a}$ के समान अथवा विपरीत होती है। $\lambda\vec{a}$ का परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का $|\lambda|$ गुणा होता है, अर्थात्

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

एक अदिश से सदिश के गुणन का ज्यामितीय चाक्षुषीकरण [रूप की कल्पना (visualisation)] आकृति 10.12 में दी गई है।



आकृति 10.12

जब $\lambda = -1$, तब $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$ जो एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $\vec{a}$ के समान है और दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत है। सदिश $-\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ का ऋणात्मक (अथवा योज्य प्रतिलोम) कहलाता है और हम हमेशा $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$ पाते हैं।

और यदि $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|}$, दिया हुआ है कि $\vec{a} \neq 0$, अर्थात् $\vec{a}$ एक शून्य सदिश नहीं है तब

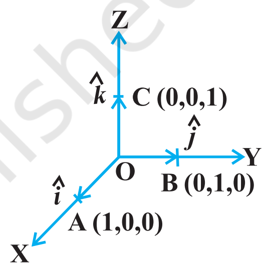
$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

इस प्रकार $\lambda\vec{a}$, $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश को निरूपित करता है। हम इसे

$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \text{ के रूप में लिखते हैं।}$$

टिप्पणी किसी भी अदिश k के लिए $k\vec{0} = \vec{0}$

10.5.1 एक सदिश के घटक (*Components of a vector*)



आकृति 10.13

आईए बिंदुओं A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) और C(0, 0, 1) को क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष एवं z-अक्ष पर लेते हैं। तब स्पष्टतः

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ और } |\overrightarrow{OC}| = 1$$

सदिश $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ जिनमें से प्रत्येक का परिमाण 1 हैं क्रमशः OX, OY और OZ अक्षों के अनुदिश मात्रक सदिश कहलाते हैं और इनको क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है (आकृति 10.13)।

अब एक बिंदु P(x, y, z) का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ लीजिए जैसा कि आकृति 10.14 में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि बिंदु P_1 से तल XOY पर खींचे गए लंब का पाद बिंदु P_1 है। इस प्रकार हम देखते हैं कि P_1P, z-अक्ष के समांतर है। क्योंकि $\hat{i}$, $\hat{j}$ एवं $\hat{k}$ क्रमशः x, y एवं z-अक्ष के अनुदिश मात्रक सदिश है और P के निर्देशांकों की परिभाषा के अनुसार हम पाते हैं कि $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$. इसी प्रकार $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ और $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$. इस प्रकार हम पाते हैं कि

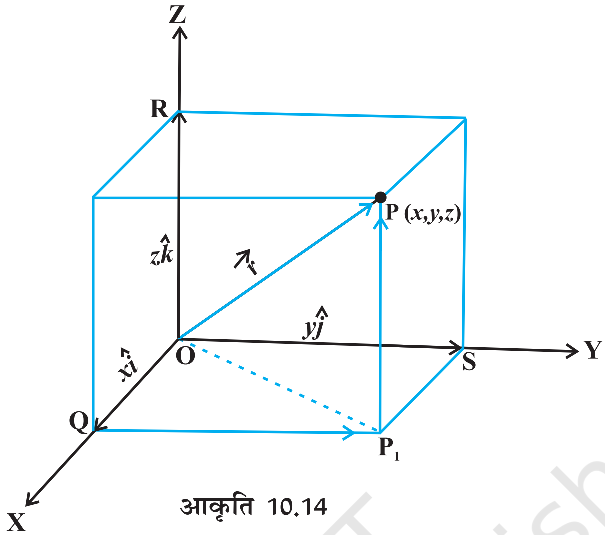
$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

और

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

इस प्रकार O के सापेक्ष P का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ (अथवा $\vec{r}$) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है।

किसी भी सदिश का यह रूप घटक रूप कहलाता है। यहाँ x, y एवं z, $\vec{r}$ के अदिश घटक कहलाते हैं और $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ एवं $z\hat{k}$ क्रमागत अक्षों के अनुदिश $\vec{r}$ के सदिश घटक कहलाते हैं। कभी-कभी x, y एवं z को समकोणिक घटक भी कहा जाता है।



आकृति 10.14

किसी सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, की लंबाई पाइथागोरस प्रमेय का दो बार प्रयोग करके तुरंत ज्ञात की जा सकती है। हम नोट करते हैं कि समकोण त्रिभुज OQP_1 में (आकृति 10.14)

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

और समकोण त्रिभुज OP_1P, में हम पाते हैं कि

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

अत: किसी सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ की लंबाई $|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ के रूप में प्राप्त होती है।

यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ घटक रूप में क्रमशः $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ द्वारा दिए गए हैं तो

(i) सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को योग

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है।

(ii) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का अंतर

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है।

(iii) सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान होते हैं यदि और केवल यदि

$a_1 = b_1, a_2 = b_2$ और $a_3 = b_3$

(iv) किसी अदिश λ से सदिश $\vec{a}$ का गुणन

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$ द्वारा प्रदत्त है।

सदिशों का योगफल और किसी अदिश से सदिश का गुणन सम्मिलित रूप में निम्नलिखित वितरण-नियम से मिलता है

मान लीजिए कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ कोई दो सदिश हैं और k एवं m दो अदिश हैं तब

(i) $k\vec{a} + m\vec{a} = (k+m)\vec{a}$ (ii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ (iii) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

टिप्पणी

1. आप प्रेक्षित कर सकते हैं कि λ के किसी भी मान के लिए सदिश $\lambda\vec{a}$ हमेशा सदिश $\vec{a}$ के संरेख है। वास्तव में दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख तभी होते हैं यदि और केवल यदि एक ऐसे शून्येतर अदिश λ का अस्तित्व हैं ताकि $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ हो। यदि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ घटक रूप में दिए हुए हैं, अर्थात् $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, तब दो सदिश संरेख होते हैं यदि और केवल यदि

$$b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda a_2,\ b_3 = \lambda a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

2. यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तब a_1, a_2, a_3 सदिश $\vec{a}$ के दिक्-अनुपात कहलाते हैं।
3. यदि l, m, n किसी सदिश के दिक्-कोसाइन हैं तब

$$l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} = (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}$$

दिए हुए सदिश की दिशा में मात्रक सदिश है जहाँ α, β एवं γ दिए हुए सदिश द्वारा क्रमशः x, y एवं z अक्ष के साथ बनाए गए कोण हैं।

उदाहरण 4 x, y और z के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ समान हैं।

हल ध्यान दीजिए कि दो सदिश समान होते हैं यदि और केवल यदि उनके संगत घटक समान है। अतः दिए हुए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान होंगे यदि और केवल यदि $x = 2, y = 2, z = 1$

उदाहरण 5 मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ तब क्या $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ है ? क्या सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान हैं ?

हल यहाँ $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ और $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

इसलिए $|\vec{a}| = |\vec{b}|$। परंतु दिए हुए सदिश समान नहीं हैं क्योंकि इनके संगत घटक भिन्न हैं।

उदाहरण 6 सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ द्वारा प्राप्त होता है।

अब $$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

इसलिए $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

उदाहरण 7 सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई है।

हल दिए हुए सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

इसलिए $\vec{a}$ के अनुदिश और 7 परिमाण वाला सदिश $7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

उदाहरण 8 सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए सदिशों का योगफल

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \text{ जहाँ } \vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} \text{ है।}$$

और $$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

अतः अभीष्ट मात्रक सदिश

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} \text{ है।}$$

उदाहरण 9 सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के दिक्-अनुपात लिखिए और इसकी सहायता से दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

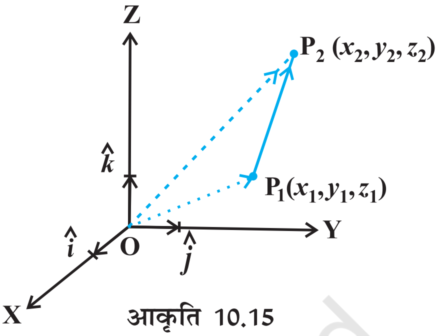
हल ध्यान दीजिए कि सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के दिक्-अनुपात a, b, c सदिश के, क्रमागत घटक x, y, z होते हैं। इसलिए दिए हुए सदिश के लिए हम पाते हैं कि $a = 1, b = 1$ और $c = -2$ है। पुनः यदि l, m और n दिए हुए सदिश के दिक्-कोसाइन हैं तोः

$$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \text{ (क्योंकि } |\vec{r}| = \sqrt{6})$$

अतः दिक्-कोसाइन $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ हैं।

10.5.2 दो बिंदुओं को मिलाने वाला सदिश (Vector joining two points)

यदि $P_1(x_1, y_1, z_1)$ और $P_2(x_2, y_2, z_2)$ दो बिंदु हैं तब P_1 को P_2 से मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ है (आकृति 10.15)। P_1 और P_2 को मूल बिंदु O से मिलाने पर और त्रिभुज नियम का प्रयोग करने पर हम त्रिभुज OP_1P_2 से पाते हैं कि $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$



आकृति 10.15

सदिश योगफल के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए उपर्युक्त समीकरण निम्नलिखित रूप से लिखा जाता है।

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

अर्थात्

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ का परिमाण $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण10 बिंदुओं P(2, 3, 0) एवं Q(– 1, – 2, – 4) को मिलाने वाला एवं P से Q की तरफ दिष्ट सदिश ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि सदिश P से Q की तरफ दिष्ट है, स्पष्टत: P प्रारंभिक बिंदु है और Q अंतिम बिंदु है, इसलिए P और Q को मिलाने वाला अभीष्ट सदिश $\overrightarrow{PQ}$, निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

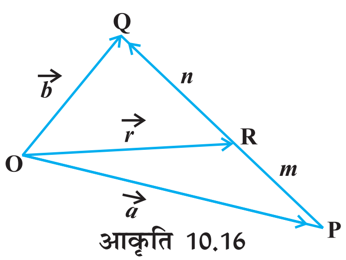
$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

अर्थात्

$$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

10.5.3 खंड सूत्र (Section Formula)

मान लीजिए मूल बिंदु O के सापेक्ष P और Q दो बिंदु हैं जिनको स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ से निरूपित किया गया है। बिंदुओं P एवं Q को मिलाने वाला रेखा खंड किसी तीसरे बिंदु R द्वारा दो प्रकार से विभाजित किया जा सकता है। अंत: (आकृति 10.16) एवं बाह्य (आकृति 10.17)। यहाँ हमारा उद्देश्य मूल बिंदु O के सापेक्ष बिंदु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR}$ ज्ञात करना है। हम दोनों स्थितियों को एक-एक करके लेते हैं।



आकृति 10.16

स्थिति 1 जब R, PQ को अंत: विभाजित करता है (आकृति 10.16)। यदि R, $\overrightarrow{PQ}$ को इस प्रकार विभाजित करता है कि $m\overrightarrow{RQ} = n\overrightarrow{PR}$, जहाँ m और n धनात्मक अदिश हैं तो हम कहते हैं

कि बिंदु R, $\overrightarrow{PQ}$ को $m:n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है। अब त्रिभुजों ORQ एवं OPR से

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

और
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a}$$

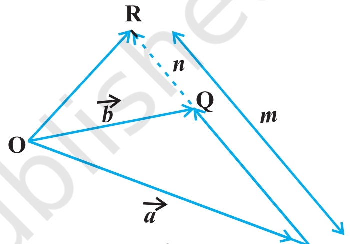
इसलिए
$$m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a}) \quad \text{(क्यों?)}$$

अथवा
$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} \qquad \text{(सरल करने पर)}$$

अतः बिंदु R जो कि P और Q को $m:n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$ के रूप में प्राप्त होता है।

स्थिति II जब R, PQ को बाह्य विभाजित करता है (आकृति 10.17)। यह सत्यापन करना हम पाठक के लिए एक प्रश्न के रूप में छोड़ते हैं कि रेखाखंड PQ को $m:n$ के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु R $\left(\text{i.e., } \frac{PR}{QR} = \frac{m}{n}\right)$ का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ के रूप में प्राप्त होता है।



आकृति 10.17

टिप्पणी यदि R, PQ का मध्य बिंदु है तो $m = n$ और इसलिए स्थिति I से $\overrightarrow{PQ}$ के मध्य बिंदु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ के रूप में होगा।

उदाहरण 11 दो बिंदु P और Q लीजिए जिनके स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ और $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ हैं। एक ऐसे बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए जो P एवं Q को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में (i) अंतः (ii) बाह्य विभाजित करता है।

हल

(i) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

उदाहरण 12 दर्शाइए कि बिंदु $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$, $B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$, $C(3\hat{i}-4j-4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल हम पाते हैं कि

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i}+(-3+1)\hat{j}+(-5-1)\hat{k} = -\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i}+(-4+3)\hat{j}+(-4+5)\hat{k} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

और $$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i}+(-1+4)\hat{j}+(1+4)\hat{k} = -\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

इसके अतिरिक्त ध्यान दीजिए कि

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6+35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

अतः दिया हुआ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्नावली 10.2

1. निम्नलिखित सदिशों के परिमाण का परिकलन कीजिए:

$$\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}; \quad \vec{b} = 2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

3. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

4. x और y के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $2\hat{i}+3\hat{j}$ और $x\hat{i}+y\hat{j}$ समान हों।

5. एक सदिश का प्रारंभिक बिंदु (2, 1) है और अंतिम बिंदु (–5, 7) है। इस सदिश के अदिश एवं सदिश घटक ज्ञात कीजिए।

6. सदिश $\vec{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

7. सदिश $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

8. सदिश $\overrightarrow{PQ}$, के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदु P और Q क्रमशः (1, 2, 3) और (4, 5, 6) हैं।

9. दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, के लिए, सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

10. सदिश $5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

11. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ और $-4\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ संरेख हैं।

12. सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ की दिक् cosine ज्ञात कीजिए।

13. बिंदुओं A (1, 2, –3) एवं B(–1, –2, 1) को मिलाने वाले एवं A से B की तरफ़ दिष्ट सदिश की दिक् cosine ज्ञात कीजिए।

14. दर्शाइए कि सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ अक्षों OX, OY एवं OZ के साथ बराबर झुका हुआ है।

15. बिंदुओं P $(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ और Q $(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2:1 के अनुपात में (i) अंत: (ii) बाह्य, विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

16. दो बिंदुओं P(2, 3, 4) और Q(4, 1, –2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

17. दर्शाइए कि बिंदु A, B और C, जिनके स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते हैं।

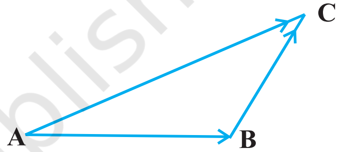
18. त्रिभुज ABC (आकृति 10.18), के लिए निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य नहीं है।

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$



आकृति 10.18

19. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो संरेख सदिश हैं तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही नहीं है:

(A) $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, किसी अदिश λ के लिए

(B) $\vec{a}=\pm\vec{b}$

(C) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के क्रमागत घटक समानुपाती नहीं हैं।

(D) दोनों सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ की दिशा समान है परंतु परिमाण विभिन्न हैं।

10.6 दो सदिशों का गुणनफल (Product of Two Vectors)

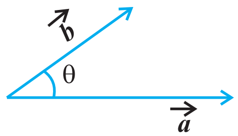
अभी तक हमने सदिशों के योगफल एवं व्यवकलन के बारे में अध्ययन किया है। अब हमारा उद्देश्य सदिशों का गुणनफल नामक एक दूसरी बीजीय संक्रिया की चर्चा करना है। हम स्मरण कर सकते हैं कि दो संख्याओं का गुणनफल एक संख्या होती है, दो आव्यूहों का गुणनफल एक आव्यूह होता है परंतु फलनों की स्थिति में हम उन्हें दो प्रकार से गुणा कर सकते हैं नामत: दो फलनों का बिंदुवार गुणन एवं दो फलनों का संयोजन। इसी प्रकार सदिशों का गुणन भी दो तरीके से परिभाषित किया जाता है। नामत: अदिश गुणनफल जहाँ परिणाम एक अदिश होता है और सदिश गुणनफल जहाँ परिणाम एक सदिश होता है। सदिशों के इन दो प्रकार के गुणनफलों के आधार पर ज्यामिती, यांत्रिकी एवं अभियांत्रिकी में इनके विभिन्न अनुप्रयोग हैं। इस परिच्छेद में हम इन दो प्रकार के गुणनफलों की चर्चा करेंगे।

10.6.1 दो सदिशों का अदिश गुणनफल [Scalar (or dot) product of two vectors]

परिभाषा 2 दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल $\vec{a}\cdot\vec{b}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और इसे $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ के रूप मे परिभाषित किया जाता है।

जहाँ θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$, के बीच का कोण है और $0 \le \theta \le \pi$ (आकृति 10.19)।

यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$, तो θ परिभाषित नहीं है और इस स्थिति में हम $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ परिभाषित करते हैं।



आकृति 10.19

प्रेक्षण

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ एक वास्तविक संख्या है।
2. मान लीजिए कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो शून्येतर सदिश हैं तब $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ यदि और केवल यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ परस्पर लंबवत् हैं अर्थात् $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
3. यदि $\theta = 0$, तब $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

   विशिष्टतः $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, क्योंकि इस स्थिति में $\theta = 0$ है।
4. यदि $\theta = \pi$, तब $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

   विशिष्टतः $\vec{a}\cdot(-\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$, जैसा कि इस स्थिति में θ, π के बराबर है।
5. प्रेक्षण 2 एवं 3 के संदर्भ में परस्पर लंबवत् मात्रक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ एवं $\hat{k}$, के लिए हम पाते हैं कि

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

तथा
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

6. दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ अथवा } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

7. अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय है अर्थात्

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \text{(क्यों ?)}$$

अदिश गुणनफल के दो महत्वपूर्ण गुणधर्म (Two important properties of scalar product)

गुणधर्म 1 (अदिश गुणनफल की योगफल पर वितरण नियम) मान लीजिए $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश हैं तब $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

गुणधर्म 2 मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिश हैं और λ एक अदिश है, तो

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

यदि दो सदिश घटक रूप में $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ एवं $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, दिए हुए हैं तब उनका अदिश गुणनफल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})\\ &\quad + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})\end{aligned}$$

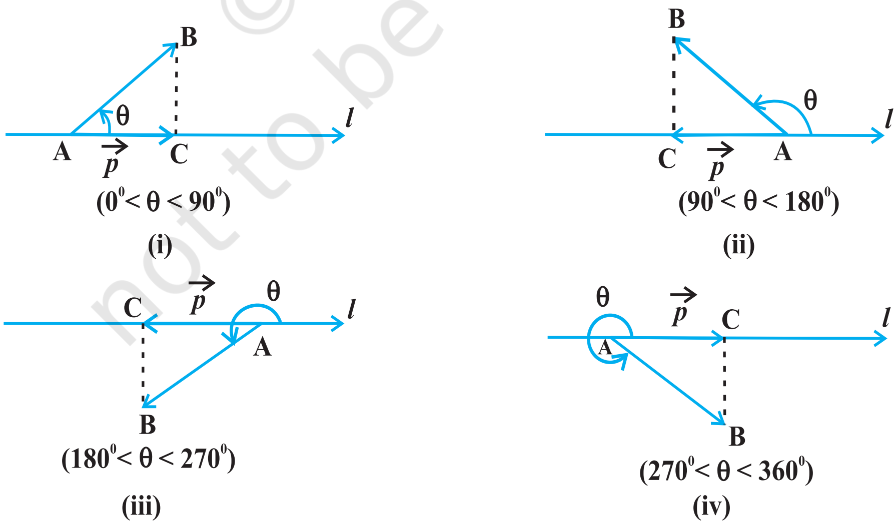
(उपर्युक्त गुणधर्म 1 और 2 का उपयोग करने पर)

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$ (प्रक्षेण 5 का उपयोग करने पर)

इस प्रकार $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

10.6.2 *एक सदिश का किसी रेखा पर साथ प्रक्षेप (Projection of a vector on a line)*

मान लीजिए कि एक सदिश $\overrightarrow{AB}$ किसी दिष्ट रेखा l (मान लीजिए) के साथ वामावर्त दिशा में θ कोण बनाता है। (आकृति 10.20 देखिए) तब $\overrightarrow{AB}$ का l पर प्रक्षेप एक सदिश $\vec{p}$ (मान लीजिए) है जिसका परिमाण $|\overrightarrow{AB}||\cos\theta|$ है और जिसकी दिशा का l की दिशा के समान अथवा विपरीत होना इस बात पर निर्भर है कि $\cos\theta$ धनात्मक है अथवा ऋणात्मक। सदिश $\vec{p}$ को प्रक्षेप सदिश कहते हैं और इसका परिमाण $|\vec{p}|$, निर्दिष्ट रेखा l पर सदिश $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप कहलाता है। उदाहरणतः निम्नलिखित में से प्रत्येक आकृति में सदिश $\overrightarrow{AB}$ का रेखा l पर प्रक्षेप सदिश $\overrightarrow{AC}$ है। [आकृति 10.20 (i) से (iv) तक]



आकृति 10.20

प्रेक्षण

1. रेखा l के अनुदिश यदि $\hat{p}$ मात्रक सदिश है तो रेखा l पर सदिश $\vec{a}$ का प्रक्षेप $\vec{a}.\hat{p}$ से प्राप्त होता है।
2. एक सदिश $\vec{a}$ का दूसरे सदिश $\vec{b}$, पर प्रक्षेप $\vec{a}\cdot\hat{b}$, अथवा $\vec{a}\cdot\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$, अथवा $\dfrac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ से प्राप्त होता है।
3. यदि $\theta = 0$, तो $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप सदिश स्वयं $\overrightarrow{AB}$ होगा और यदि $\theta = \pi$ तो $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप सदिश $\overrightarrow{BA}$ होगा।
4. यदि $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ अथवा $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ तो $\overrightarrow{AB}$ का प्रक्षेप सदिश शून्य सदिश होगा।

टिप्पणी यदि α, β और γ सदिश $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ के दिक्-कोण हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन निम्नलिखित रूप में प्राप्त की जा सकती है।

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \text{and} \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

यह भी ध्यान दीजिए कि $|\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{a}|\cos\beta$ और $|\vec{a}|\cos\gamma$ क्रमशः OX, OY तथा OZ के अनुदिश $\vec{a}$ के प्रक्षेप हैं अर्थात् सदिश $\vec{a}$ के अदिश घटक a_1, a_2 और a_3 क्रमशः x, y, एवं z अक्ष के अनुदिश $\vec{a}$ के प्रक्षेप है। इसके अतिरिक्त यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है तब इसको दिक्-कोसाइन की सहायता से

$$\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 13 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः 1 और 2 है तथा $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, इन सदिशों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1, |\vec{a}| = 1$ और $|\vec{b}| = 2$. अतः

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

उदाहरण 14 सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ निम्न द्वारा प्रदत्त है

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ से प्राप्त होता है।}$$

अब $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 1-1-1=-1$

इसलिए, हम पाते हैं कि $\quad \cos\theta = \frac{-1}{3}$

अतः अभीष्ट कोण $\quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ है।

उदाहरण 15 यदि $\vec{a}=5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$, तो दर्शाइए कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ लंबवत् है।

हल हम जानते हैं कि दो शून्येतर सदिश लंबवत् होते हैं यदि उनका अदिश गुणनफल शून्य है।

यहाँ $\quad \vec{a}+\vec{b} = (5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}) = 6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$

और $\quad \vec{a}-\vec{b} = (5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}) = 4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$

इसलिए $\quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = (6\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k})\cdot(4\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}) = 24-8-16=0$

अतः $\quad \vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ लंबवत् सदिश हैं।

उदाहरण 16 सदिश $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ का, सदिश $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

$$\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}(2\,.\,1+3\,.\,2+2\,.\,1) = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6} \text{ है।}$$

उदाहरण 17 यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ और $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ तो $|\vec{a}-\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2\\ &= (2)^2-2(4)+(3)^2\end{aligned}$$

इसलिए $\quad |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

उदाहरण 18 यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=8$, तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है, इसलिए $|\vec{a}|=1$. यह भी दिया हुआ है कि

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$$

अथवा $\quad \vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{x}-\vec{a}\cdot\vec{a} = 8$

अथवा $\quad |\vec{x}|^2-1 = 8$ अर्थात् $|\vec{x}|^2=9$

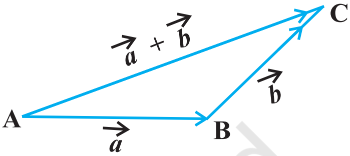
इसलिए $\quad |\vec{x}| = 3$ (क्योंकि सदिश का परिमाण सदैव शून्येतर होता है)

उदाहरण 19 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$, के लिए सदैव $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ (Cauchy-Schwartz असमिका)।

हल दी हुई असमिका सहज रूप में स्पष्ट है यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$. वास्तव में इस स्थिति में हम पाते हैं कि $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$. इसलिए हम कल्पना करते हैं कि $|\vec{a}| \ne 0 \ne |\vec{b}|$ तब हमें

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$$ मिलता है।

इसलिए $\quad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$



आकृति 10.21

उदाहरण 20 दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (त्रिभुज-असमिका)

हल दी हुई असमिका, दोनों स्थितियों $\vec{a} = 0$ या $\vec{b} = 0$ में सहज रूप से स्पष्ट है (क्यों ?)। इसलिए मान लीजिए कि $|\vec{a}| \ne \vec{0} \ne |\vec{b}|$ तब

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \qquad \text{(अदिश गुणनफल क्रम विनिमय है)}$$

$$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \qquad \text{(क्योंकि } x \le |x|\ \forall x \in \mathbf{R}\text{)}$$

$$\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \qquad \text{(उदाहरण 19 से)}$$

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

अतः $\quad |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

टिप्पणी यदि त्रिभुज-असमिका में समिका धारण होती है (उपर्युक्त उदाहरण 20 में) अर्थात्

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|, \text{ तब}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

बिंदु A, B और C संरेख दर्शाता है।

उदाहरण 21 दर्शाइए कि बिंदु $A(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$, $B(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ और $C(7\hat{i} - \hat{k})$ संरेख है।

हल हम प्राप्त करते हैं:

$$\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-5)\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (-1-5)\hat{k} = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14} \text{ और } |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$$

इसलिए $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

अतः बिंदु A, B और C संरेख हैं।

टिप्पणी उदाहरण 21 में ध्यान दीजिए कि $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ परंतु फिर भी बिंदु A, B और C त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण नहीं करते हैं।

प्रश्नावली 10.3

1. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

2. सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

3. सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

4. सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ का, सदिश $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

5. दर्शाइए कि दिए हुए निम्नलिखित तीन सदिशों में से प्रत्येक मात्रक सदिश है,

$$\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}),\ \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}),\ \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

यह भी दर्शाइए कि ये सदिश परस्पर एक दूसरे के लंबवत् हैं।

6. यदि $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 8$ और $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ हो तो $|\vec{a}|$ एवं $|\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

7. $(3\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 7\vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि इनके परिमाण समान है और इन के बीच का कोण $60°$ है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

9. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, के लिए $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 12$ हो तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ पर लंब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

11. दर्शाइए कि दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$, $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ पर लंब है।

12. यदि $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ और $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, तो सदिश $\vec{b}$ के बारे में क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

13. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ तो $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $\vec{a}=\vec{0}$ अथवा $\vec{b}=\vec{0}$, तब $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ परंतु विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है। एक उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

15. यदि किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B, C क्रमशः (1, 2, 3), (–1, 0, 0), (0, 1, 2) हैं तो $\angle$ABC ज्ञात कीजिए। [$\angle$ABC, सदिशों $\overrightarrow{BA}$ एवं $\overrightarrow{BC}$ के बीच का कोण है]

16. दर्शाइए कि बिंदु A(1, 2, 7), B(2, 6, 3) और C(3, 10, –1) संरेख हैं।

17. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों की रचना करते हैं।

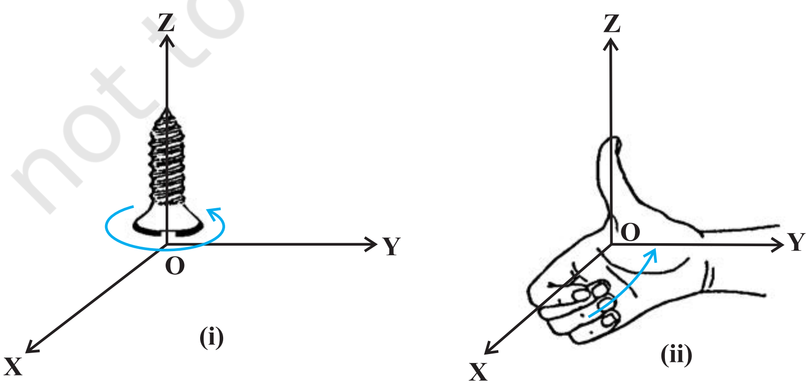
18. यदि शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण 'a' है और λ एक शून्यतेर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = 1/|\lambda|$

10.6.3 दो सदिशों का सदिश गुणनफल [Vector (or cross) product of two vectors]

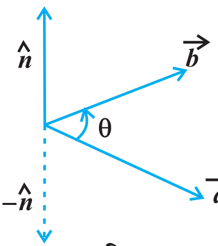
परिच्छेद 10.2 में हमने त्रि-विमीय दक्षिणावर्ती समकोणिक निर्देशांक पद्धति की चर्चा की थी। इस पद्धति में धनात्मक x-अक्ष को वामावर्त घुमाकर धनात्मक y-अक्ष पर लाया जाता है तो धनात्मक z-अक्ष की दिशा में एक दक्षिणावर्ती (प्रामाणिक) पेंच अग्रगत हो जाती है [आकृति 10.22(i)]।

एक दक्षिणावर्ती निर्देशांक पद्धति में जब दाएँ हाथ की उँगलियों को धनात्मक x-अक्ष की दिशा से दूर धनात्मक y-अक्ष की तरफ़ कुंतल किया जाता है तो अँगूठा धनात्मक z-अक्ष की ओर संकेत करता [आकृति 10.22 (ii)] है।



आकृति 10.22

परिभाषा 3 दो शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$, का सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b}$ से निर्दिष्ट किया जाता है और $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ θ, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है और $0 \le \theta \le \pi$ है। यहाँ $\hat{n}$ एक मात्रक सदिश है जो कि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$, दोनों पर लंब है। इस प्रकार $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते हैं (आकृति 10.23) अर्थात् दक्षिणावर्ती पद्धति को $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की तरफ़ घुमाने पर यह $\hat{n}$ की दिशा में चलती है।

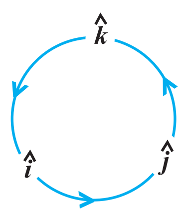


आकृति 10.23

यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$, तब θ परिभाषित नहीं है और इस स्थिति में हम $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ परिभाषित करते हैं।

प्रेक्षण:

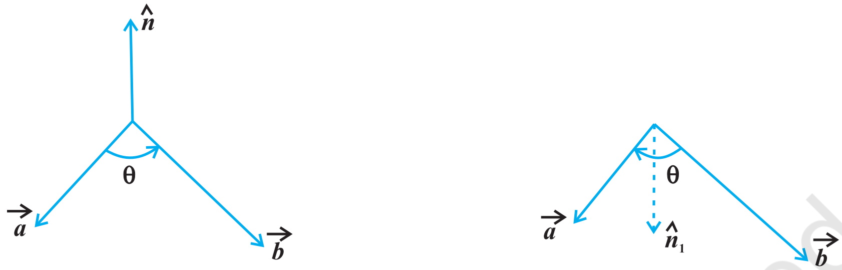
1. $\vec{a}\times\vec{b}$ एक सदिश है।
2. मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो शून्येतर सदिश हैं तब $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ यदि और केवल यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ एक दूसरे के समांतर (अथवा संरेख) हैं अर्थात्
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$
विशिष्टत: $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ और $\vec{a}\times(-\vec{a}) = \vec{0}$, क्योंकि प्रथम स्थिति में θ = 0 तथा द्वितीय स्थिति में θ = π, जिससे दोनों ही स्थितियों में sin θ का मान शून्य हो जाता है।
3. यदि $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ तो $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$
4. प्रेक्षण 2 और 3 के संदर्भ में परस्पर लंबवत् मात्रक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के लिए (आकृति 10.24), हम पाते हैं कि
$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$
$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$



आकृति 10.24

5. सदिश गुणनफल की सहायता से दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है
$$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
6. यह सर्वदा सत्य है कि सदिश गुणनफल क्रम विनिमय नहीं होता है क्योंकि $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ वास्तव में $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, जहाँ $\vec{a}, \vec{b}$ और $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते

हैं अर्थात् θ, $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की तरफ चक्रीय क्रम होता है। आकृति 10.25(i) जबकि $\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1$, जहाँ $\vec{b}$, $\vec{a}$ और $\hat{n}_1$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते हैं अर्थात् θ, $\vec{b}$ से $\vec{a}$ की ओर चक्रीय क्रम होता है आकृति 10.25(ii)।



(i) **आकृति 10.25** (ii)

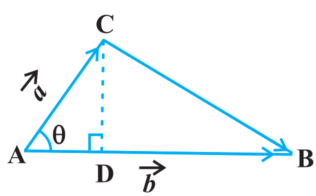
अतः यदि हम यह मान लेते हैं कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों एक ही कागज़ के तल में हैं तो $\hat{n}$ और $\hat{n}_1$ दोनों कागज़ के तल पर लंब होंगे परंतु $\hat{n}$ कागज़ से ऊपर की तरफ़ दिष्ट होगा और $\hat{n}_1$ कागज़ से नीचे की तरफ़ दिष्ट होगा अर्थात् $\hat{n}_1 = -\hat{n}$

इस प्रकार
$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$
$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1 = -\vec{b}\times\vec{a}$$

7. प्रेक्षण 4 और 6 के संदर्भ में

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \text{ और } \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \text{ है।}$$

8. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ त्रिभुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ के रूप में प्राप्त होता है।



आकृति 10.26

त्रिभुज के क्षेत्रफल की परिभाषा के अनुसार हम आकृति 10.26 से पाते हैं कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}AB\cdot CD$.

परंतु $AB = |\vec{b}|$ (दिया हुआ है) और $CD = |\vec{a}|\sin\theta$

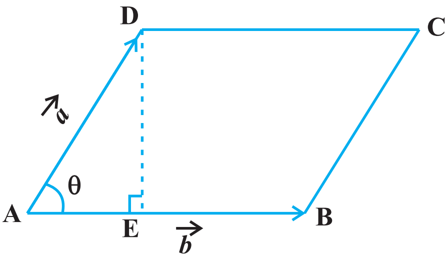
अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

9. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ के रूप में प्राप्त होता है।

आकृति 10.27 से हम पाते हैं कि समांतर चतुर्भज ABCD का क्षेत्रफल = AB . DE.

परंतु $AB = |\vec{b}|$ (दिया हुआ है), और $DE = |\vec{a}| \sin\theta$ अतः

समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $|\vec{b}||\vec{a}| \sin\theta = |\vec{a} \times \vec{b}|$



आकृति 10.27

अब हम सदिश गुणनफल के दो महत्वपूर्ण गुणों को अभिव्यक्त करेंगे।

गुणधर्म सदिश गुणनफल का योगफल पर वितरण नियम (Distributivity of vector product over addition) यदि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश हैं और λ एक अदिश है तो

(i) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

मान लीजिए दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ घटक रूप में क्रमशः $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

दिए हुए हैं तब उनका सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ द्वारा दिया जा सकता है।

व्याख्या हम पाते हैं

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i} \times \hat{i}) + a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) + a_1b_3(\hat{i} \times \hat{k}) + a_2b_1(\hat{j} \times \hat{i})$$

$$+ a_2b_2(\hat{j} \times \hat{j}) + a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k})$$

$$+ a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) + a_3b_2(\hat{k} \times \hat{j}) + a_3b_3(\hat{k} \times \hat{k}) \quad \text{(गुणधर्म 1 से)}$$

$$= a_1b_2(\hat{i} \times \hat{j}) - a_1b_3(\hat{k} \times \hat{i}) - a_2b_1(\hat{i} \times \hat{j})$$

$$+ a_2b_3(\hat{j} \times \hat{k}) + a_3b_1(\hat{k} \times \hat{i}) - a_3b_2(\hat{j} \times \hat{k})$$

(क्योंकि $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ और $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{k}\times\hat{i},\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{i}\times\hat{j}$ और $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{j}\times\hat{k}$)

$$= a_1b_2\hat{k}-a_1b_3\hat{j}-a_2b_1\hat{k}+a_2b_3\hat{i}+a_3b_1\hat{j}-a_3b_2\hat{i}$$

(क्योंकि $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ और $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$)

$$= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

उदाहरण 22 यदि $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$, तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2-15)-(-4-9)\hat{j}+(10-3)\hat{k} = -17\hat{i}+13\hat{j}+7\hat{k}$$

अतः $$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-17)^2+(13)^2+(7)^2} = \sqrt{507}$$

उदाहरण 23 सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ और $(\vec{a}-\vec{b})$ में से प्रत्येक के लंबवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ हैं।

हल हम पाते हैं कि $\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ और $\vec{a}-\vec{b}=-\hat{j}-2\hat{k}$

एक सदिश, जो $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ दोनो पर लंब है, निम्नलिखित द्वारा प्रदत्त है

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k} \quad (=\vec{c}, \text{ मान लीजिए})$$

अब $$|\vec{c}| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

अतः अभीष्ट मात्रक सदिश

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k} \text{ है।}$$

टिप्पणी किसी तल पर दो लंबवत् दिशाएँ होती हैं। अतः $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ पर दूसरा लंबवत् मात्रक सदिश $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ होगा। परंतु यह $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ का एक परिणाम है।

उदाहरण 24 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष बिंदु A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) और C(2, 3, 1) हैं।

हल हम पाते हैं कि $\overrightarrow{AB}=\hat{j}+2\hat{k}$ और $\overrightarrow{AC}=\hat{i}+2\hat{j}$. दिए हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ है।

अब $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = -4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

इसलिए $$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ है।

उदाहरण 25 उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा दी गई हैं।

हल किसी समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं तो उसका क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्राप्त होता है।

अब $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

इसलिए $$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

इस प्रकार आवश्यक क्षेत्रफल $\sqrt{42}$ है।

प्रश्नावली 10.4

1. यदि $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

2. सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - \vec{b}$ की लंब दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ है।

3. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, $\hat{i}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ और $\hat{k}$ के साथ एक न्यून कोण θ बनाता है तो θ का मान ज्ञात कीजिए और इसकी सहायता से $\vec{a}$ के घटक भी ज्ञात कीजिए।

4. दर्शाइए कि $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

5. λ और μ ज्ञात कीजिए, यदि $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$

6. दिया हुआ है कि $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ और $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

7. मान लीजिए सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ क्रमशः $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ के रूप में दिए हुए हैं तब दर्शाइए कि $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

8. यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$ तब $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ होता है। क्या विलोम सत्य है? उदाहरण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

9. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) और C(1, 5, 5) हैं।

10. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ द्वारा निर्धारित हैं।

11. मान लीजिए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3$ और $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, तब $\vec{a} \times \vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है:

(A) π/6 (B) π/4 (C) π/3 (D) π/2

12. एक आयत के शीर्षों A, B, C और D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः

$$-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k},\ \hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k},\ \hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$$ और $$-\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k},$$ हैं का क्षेत्रफल है:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1

(C) 2 (D) 4

विविध उदाहरण

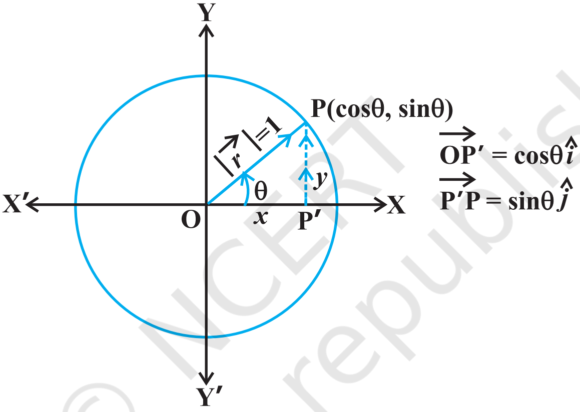
उदाहरण 26 XY-तल में सभी मात्रक सदिश लिखिए।

हल मान लीजिए कि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, XY-तल में एक मात्रक सदिश है (आकृति 10.28)। तब आकृति के अनुसार हम पाते हैं कि $x = \cos\theta$ और $y = \sin\theta$ (क्योंकि $|\vec{r}| = 1$). इसलिए हम सदिश $\vec{r}$ को,

$$\vec{r}\,(=\overrightarrow{OP}) = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \qquad \dots (1)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

स्पष्टतः $\qquad |\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$



आकृति 10.28

जैसे-जैसे θ, 0 से 2π, तक परिवर्तित होता है बिंदु P (आकृति 10.28) वामावर्त दिशा में वृत $x^2 + y^2 = 1$ का अनुरेखण करता है और इसमें सभी संभावित दिशाएँ सम्मिलित हैं। अतः (1) से XY-तल में प्रत्येक मात्रक सदिश प्राप्त होता है।

उदाहरण 27 यदि बिंदुओं A, B, C और D, के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ और $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ है, तो सरल रेखाओं AB तथा CD के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। निगमन कीजिए कि AB और CD संरेख हैं।

हल नोट कीजिए कि यदि θ, AB और CD, के बीच का कोण है तो θ, $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ के बीच का भी कोण है।

अब $\qquad \overrightarrow{AB}$ = B का स्थिति सदिश – A का स्थिति सदिश

$$= (2\hat{i}+5\hat{j}) - (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$

इसलिए $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

इसी प्रकार $\overrightarrow{CD} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ और $|\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$

अतः $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{1(-2)+4(-8)+(-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

क्योंकि $0 \le \theta \le \pi$, इससे प्राप्त होता है कि $\theta = \pi$. यह दर्शाता है कि AB तथा CD एक दूसरे के संरेख हैं।

विकल्पतः $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, इससे कह सकते कि $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ संरेख सदिश हैं।

उदाहरण 28 मान लीजिए $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ और इनमें से प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लंबवत् हैं तो, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है कि $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = 0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0$

अब $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$$

$$+\ \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}.\vec{c}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

$$= 9 + 16 + 25 = 50$$

इसलिए $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

उदाहरण 29 तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ प्रतिबंध $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ को संतुष्ट करते हैं। यदि $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4$ और $|\vec{c}| = 2$ तो राशि $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$, इसलिए हम पाते हैं कि

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

अथवा $$\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

इसलिए $$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = -|\vec{a}|^2 = -9 \qquad \dots (1)$$

पुनः $$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

अथवा $$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -\left|\vec{b}\right|^2 = -16 \qquad \ldots (2)$$

इसी प्रकार $$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -4 \qquad \ldots (3)$$

(1), (2) और (3) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) = -29$$

या $$2\mu = -29, \text{ i.e., } \mu = \frac{-29}{2}$$

उदाहरण 30 यदि परस्पर लंबवत् मात्रक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$, की दक्षिणावर्ती पद्धति के सापेक्ष $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, तो $\vec{\beta}$ को $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ के रूप में अभिव्यक्त कीजिए जहाँ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\alpha}$ के समांतर है और $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ के लंबवत् है।

हल मान लीजिए कि $\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha}$, λ एक अदिश है अर्थात् $\vec{\beta}_1 = 3\lambda\hat{i} - \lambda\hat{j}$

अब $$\vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1 = (2-3\lambda)\hat{i} + (1+\lambda)\hat{j} - 3\hat{k}$$

क्योंकि $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ पर लंब है इसलिए $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2 = 0$

अर्थात् $$3(2-3\lambda) - (1+\lambda) = 0$$

अथवा $$\lambda = \frac{1}{2}$$

इसलिए $$\vec{\beta}_1 = \frac{3}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} \quad \text{और} \quad \vec{\beta}_2 = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j} - 3\hat{k}$$

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. XY-तल में, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ वामावर्त दिशा में 30° का कोण बनाने वाला मात्रक सदिश लिखिए।

2. बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले सदिश के अदिश घटक और परिमाण ज्ञात कीजिए।

3. एक लड़की पश्चिम दिशा में 4 km चलती है। उसके पश्चात् वह उत्तर से 30° पश्चिम की दिशा में 3 km चलती है और रूक जाती है। प्रस्थान के प्रारंभिक बिंदु से लड़की का विस्थापन ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, तब क्या यह सत्य है कि $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $x(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ एक मात्रक सदिश है।

6. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के परिणामी के समांतर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है।

7. यदि $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, तो सदिश $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ के समांतर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

8. दर्शाइए कि बिंदु A(1, – 2, – 8), B(5, 0, –2) और C(11, 3, 7) संरेख है और B द्वारा AC को विभाजित करने वाला अनुपात ज्ञात कीजिए।

9. दो बिंदुओं P $(2\vec{a}+\vec{b})$ और Q$(\vec{a}-3\vec{b})$ को मिलाने वाली रेखा को 1:2 के अनुपात मे बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि बिंदु P रेखाखंड RQ का मध्य बिंदु है।

10. एक समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ और $\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ हैं। इसके विकर्ण के समांतर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

11. दर्शाइए कि OX, OY एवं OZ अक्षों के साथ बराबर झुके हुए सदिश की दिक्-कोसाइन कोज्याएँ $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ है।

12. मान लीजिए $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ और $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$. एक ऐसा सदिश $\vec{d}$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लंब है और $\vec{c}\cdot\vec{d}=15$

13. सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ का, सदिशों $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ और $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल की दिशा में मात्रक सदिश के साथ अदिश गुणनफल 1 के बराबर है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$, c समान परिमाणों वाले परस्पर लंबवत् सदिश हैं तो दर्शाइए कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ बराबर झुका हुआ है।

15. सिद्ध कीजिए कि $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$, यदि और केवल यदि $\vec{a},\vec{b}$ लंबवत् हैं। यह दिया हुआ है कि $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$

16 से 19 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए।

16. यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ होगा यदि:

(A) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ (B) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

(C) $0<\theta<\pi$ (D) $0\leq\theta\leq\pi$

17. मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो मात्रक सदिश हैं और उनके बीच का कोण θ है तो $\vec{a}+\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि:

(A) $\theta=\frac{\pi}{4}$ (B) $\theta=\frac{\pi}{3}$ (C) $\theta=\frac{\pi}{2}$ (D) $\theta=\frac{2\pi}{3}$

18. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान है

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

19. यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ जब θ बराबर है:

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

सारांश

- एक बिंदु $P(x, y, z)$ की स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}(=\vec{r})=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ है और परिमाण $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ है।
- एक सदिश के अदिश घटक इसके दिक्-अनुपात कहलाते हैं और क्रमागत अक्षों के साथ इसके प्रक्षेप को निरूपित करते हैं।
- एक सदिश का परिमाण (r), दिक्-अनुपात a, b, c और दिक्-कोसाइन (l, m, n) निम्नलिखित रूप में संबंधित हैं:

$$l=\frac{a}{r},\quad m=\frac{b}{r},\quad n=\frac{c}{r}$$

- त्रिभुज की तीनों भुजाओं को क्रम में लेने पर उनका सदिश योग $\vec{0}$ है।
- दो सह-आदिम सदिशों का योग एक ऐसे समांतर चतुर्भुज के विकर्ण से प्राप्त होता है जिसकी संलग्न भुजाएँ दिए हुए सदिश हैं।
- एक सदिश का अदिश λ से गुणन इसके परिमाण को $|\lambda|$ के गुणज में परिवर्तित कर देता है और λ का मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के अनुसार इसकी दिशा को समान अथवा विपरीत रखता है।
- दिए हुए सदिश $\vec{a}$ के लिए सदिश $\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश है।
- बिदुओं P और Q जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं, को मिलाने वाली रेखा को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु R का स्थिति सदिश (i) $\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ अंतः विभाजन पर (ii) $\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ बाह्य विभाजन पर, के रूप में प्राप्त होता है।

- दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो उनका अदिश गुणनफल $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ के रूप में प्राप्त होता है। यदि $\vec{a}\cdot\vec{b}$ दिया हुआ है तो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण 'θ', $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ से प्राप्त होता है।
- यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो उनका सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ के रूप में प्राप्त होता है। जहाँ $\hat{n}$ एक ऐसा मात्रक सदिश है जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को सम्मिलित करने वाले तल के लंबवत् है तथा $\vec{a}, \vec{b}$ और $\hat{n}$ दक्षिणावर्ती समकोणिक निर्देशांक पद्धति को निर्मित करते हैं।
- यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ और λ एक अदिश है तो

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

और $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

सदिश शब्द का व्युत्पन्न लैटिन भाषा के एक शब्द वेक्टस (vectus) से हुआ है जिसका अर्थ है हस्तगत करना। आधुनिक सदिश सिद्धांत के भ्रूणीय विचार की तिथि सन् 1800 के आसपास मानी जाती है, जब Caspar Wessel (1745–1818 ई.) और Jean Robert Argand (1768-1822ई.) ने इस बात का वर्णन किया कि एक निर्देशांक तल में किसी दिष्ट रेखाखंड की सहायता से एक सम्मिश्र संख्या $a + ib$ का ज्यामितीय अर्थ निर्वचन कैसे किया जा सकता है। एक आयरिश गणितज्ञ, William Rowen Hamilton (1805-1865 ई.) ने अपनी पुस्तक, "*Lectures on Quaternions*" (1853 ई.) में दिष्ट रेखाखंड के लिए सदिश शब्द का प्रयोग सबसे पहले किया था। चतुष्टयीयों (quaternians) [कुछ निश्चित बीजीय नियमों का पालन करते हुए $a + b\,\hat{i} + c\,\hat{j} + d\,\hat{k}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के रूप वाले चार वास्तविक संख्याओं का

समुच्चय] की हैमिल्टन विधि सदिशों को त्रि-विमीय अंतरिक्ष में गुणा करने की समस्या का एक हल था। तथापि हम यहाँ इस बात का जिक्र अवश्य करेंगे कि सदिश की संकल्पना और उनके योगफल का विचार बहुत- दिनों पहले से Plato (384-322 ईसा पूर्व) के एक शिष्य एवं यूनानी दार्शानिक और वैज्ञानिक Aristotle (427-348 ईसा पूर्व) के काल से ही था। उस समय इस जानकारी की कल्पना थी कि दो अथवा अधिक बलों की संयुक्त क्रिया उनको समांतर चतुर्भुज के नियमानुसार योग करने पर प्राप्त की जा सकती है। बलों के संयोजन का सही नियम, कि बलों का योग सदिश रूप में किया जा सकता है, की खोज Sterin Simon(1548-1620ई.) द्वारा लंबवत् बलों की स्थिति में की गई। सन् 1586 में उन्होंने अपनी शोधपुस्तक, "*DeBeghinselen der Weeghconst"* (वजन करने की कला के सिद्धांत) में बलों के योगफल के ज्यामितीय सिद्धांत का विश्लेषण किया था जिसके कारण यांत्रिकी के विकास में एक मुख्य परिवर्तन हुआ। परंतु इसके बाद भी सदिशों की व्यापक संकल्पना के निर्माण में 200 वर्ष लग गए।

सन् 1880 में एक अमेरिकी भौतिक शास्त्री एवं गणितज्ञ Josaih Willard Gibbs (1839-1903 ई.) और एक अंग्रेज अभियंता Oliver Heaviside (1850-1925 ई.) ने एक चतुष्टयी के वास्तविक (अदिश) भाग को काल्पनिक (सदिश) भाग से पृथक् करते हुए सदिश विश्लेषण का सृजन किया था। सन् 1881 और 1884 में Gibbs ने "*Entitled Element of Vector Analysis*" नामक एक शोध पुस्तिका छपवाई। इस पुस्तक में सदिशों का एक क्रमबद्ध एवं संक्षिप्त विवरण दिया हुआ था। तथापि सदिशों के अनुप्रयोग का निरूपण करने की कीर्ति D. Heaviside और P.G. Tait (1831-1901 ई.) को प्राप्त है जिन्होंने इस विषय के लिए सार्थक योगदान दिया है।

12082CH11

अध्याय 11

त्रि-विमीय ज्यामिति
(Three Dimensional Geometry)

❖ *The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN* ❖

11.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI में, वैश्लेषिक ज्यामिति का अध्ययन करते समय द्वि-विमीय और त्रि-विमीय विषयों के परिचय में हमने स्वयं को केवल कार्तीय विधि तक सीमित रखा है। इस पुस्तक के पिछले अध्याय में हमने सदिशों की मूल संकल्पनाओं का अध्ययन किया है। अब हम सदिशों के बीजगणित का त्रि-विमीय ज्यामिति में उपयोग करेंगे। त्रि-विमीय ज्यामिति में इस उपागम का उद्देश्य है कि यह इसके अध्ययन को अत्यंत सरल एवं सुरुचिपूर्ण (सुग्राहय) बना देता है।*

Leonhard Euler
(1707-1783)

इस अध्याय में हम दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के दिक्-कोज्या व दिक्-अनुपात का अध्ययन करेंगे और विभिन्न स्थितियों में अंतरिक्ष में रेखाओं और तलों के समीकरणों, दो रेखाओं, दो तलों व एक रेखा और एक तल के बीच का कोण, दो विषमतलीय रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी व एक तल की एक बिंदु से दूरी के विषय में भी विचार विमर्श करेंगे। उपरोक्त परिणामों में से अधिकांश परिणामों को सदिशों के रूप में प्राप्त करते हैं। तथापि हम इनका कार्तीय रूप में भी अनुवाद करेंगे जो कालांतर में स्थिति का स्पष्ट ज्यामितीय और विश्लेषणात्मक चित्रण प्रस्तुत कर सकेगा।

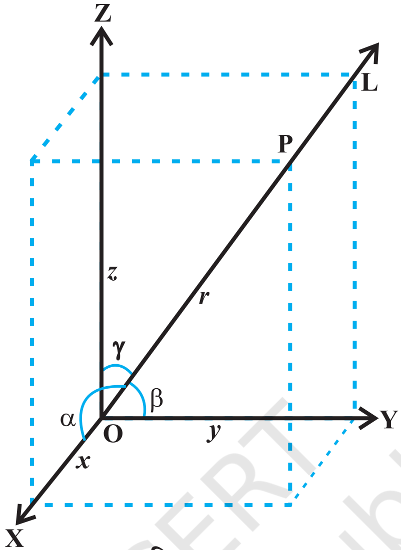
11.2 रेखा के दिक्-कोसाइन और दिक्-अनुपात (Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

अध्याय 10 में, स्मरण कीजिए, कि मूल बिंदु से गुजरने वाली सदिश रेखा L द्वारा x, y और z-अक्षों के साथ क्रमश α, β और γ बनाए गए कोण दिक्-कोण कहलाते हैं तब इन कोणों की कोसाइन नामत: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ रेखा L के दिक्-कोसाइन (direction cosines or dc's) कहलाती हैं।

---

* For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools"***, NCERT, 2005

यदि हम L की दिशा विपरीत कर देते हैं तो दिक्-कोण, अपने संपूरकों में अर्थात् π-α, π-β और π-γ से बदल जाते हैं। इस प्रकार, दिक्-कोसाइन के चिह्न बदल जाते हैं।



आकृति 11.1

ध्यान दीजिए, अंतरिक्ष में दी गई रेखा को दो विपरीत दिशाओं में बढ़ा सकते हैं और इसलिए इसके दिक्-कोसाइन के दो समूह हैं। इसलिए अंतरिक्ष में ज्ञात रेखा के लिए दिक्-कोसाइन के अद्वितीय समूह के लिए, हमें ज्ञात रेखा को एक सदिश रेखा लेना चाहिए। इन अद्वितीय दिक्-कोसाइन को l, m और n के द्वारा निर्दिष्ट किए जाते हैं।

टिप्पणी अंतरिक्ष में दी गई रेखा यदि मूल बिंदु से नहीं गुजरती है तो इसकी दिक्-कोसाइन को ज्ञात करने के लिए, हम मूल बिंदु से दी गई रेखा के समांतर एक रेखा खींचते हैं। अब मूल बिंदु से इनमें से एक सदिश रेखा के दिक्-अनुपात ज्ञात करते हैं क्योंकि दो समांतर रेखाओं के दिक्-अनुपातों के समूह समान (वही) होते हैं।

एक रेखा के दिक्-कोसाइन के समानुपाती संख्याओं को रेखा के दिक्-अनुपात (direction ratios or *dr's*) कहते हैं। यदि एक रेखा के दिक्-कोसाइन l, m, n व दिक्-अनुपात a, b, c हों तब किसी शून्येतर $\lambda \in \mathbf{R}$ के लिए $a = \lambda l$, $b=\lambda m$ और $c = \lambda n$

टिप्पणी	कुछ लेखक दिक्-अनुपातों को दिक्-संख्याएँ भी कहते हैं।

मान लीजिए एक रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c और रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n है। तब

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (मान लीजिए), } k \text{ एक अचर है।}$$

इसलिए $l = ak, m = bk, n = ck$ ... (1)

परंतु $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

इसलिए $k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$

या $$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

अतः (1) से, रेखा की दिक्-कोसाइन ($d.c.$'s)

$$l = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

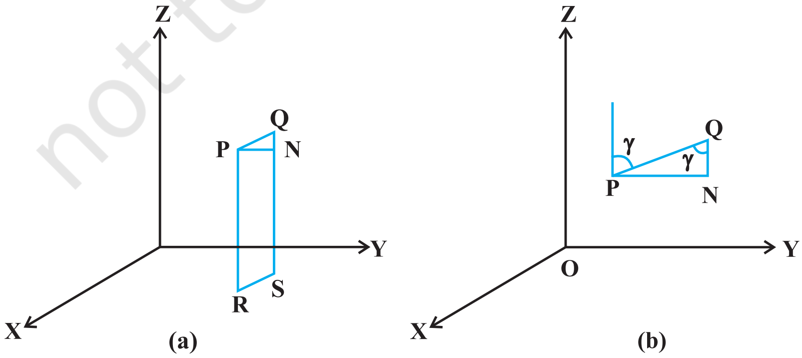
किसी रेखा के लिए यदि रेखा के दिक्-अनुपात क्रमशः a, b, c है, तो $ka, kb, kc; k \neq 0$ भी दिक्-अनुपातों का एक समूह है। इसलिए एक रेखा के दिक्-अनुपातों के दो समूह भी समानुपाती होंगे। अतः किसी एक रेखा के दिक्-अनुपातों के असंख्य समूह होते हैं।

11.2.1 *दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन (Direction cosines of a line passing through two points)*

क्योंकि दो दिए बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा अद्वितीय होती है। इसलिए दो दिए गए बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ से गुजरने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन को निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं (आकृति 11.3 (a))।

मान लीजिए कि रेखा PQ की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं और यह x, y और z-अक्ष के साथ कोण क्रमशः α, β, γ बनाती हैं।

मान लीजिए P और Q से लंब खींचिए जो XY-तल को R तथा S पर मिलते हैं। P से एक अन्य लंब खींचिए जो QS को N पर मिलता है। अब समकोण त्रिभुज PNQ में, $\angle PQN = \gamma$ (आकृति 11.2 (b)) इसलिए



आकृति 11.2

$$\cos\gamma = \frac{\text{NQ}}{\text{PQ}} = \frac{z_2 - z_1}{\text{PQ}}$$

इसी प्रकार $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{\text{PQ}}$ और $\cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{\text{PQ}}$

अत: बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड PQ कि दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{\text{PQ}}, \frac{y_2 - y_1}{\text{PQ}}, \frac{z_2 - z_1}{\text{PQ}} \text{ हैं।}$$

जहाँ $$\text{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

टिप्पणी बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड के दिक्-अनुपात निम्न प्रकार से लिए जा सकते हैं।

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, \text{ या } x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$$

उदाहरण 1 यदि एक रेखा x, y तथा z-अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमश: 90°, 60° तथा 30° का कोण बनाती है तो दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n है। तब $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $n = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 2 यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात 2, –1, –2 हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल दिक्-कोसाइन निम्नवत् हैं

$$\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$$

अर्थात् $$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

उदाहरण 3 दो बिंदुओं (– 2, 4, – 5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{\text{PQ}}, \frac{y_2 - y_1}{\text{PQ}}, \frac{z_2 - z_1}{\text{PQ}}$$

हैं, जहाँ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

यहाँ P और Q क्रमशः (– 2, 4, – 5) और (1, 2, 3) हैं।

इसलिए $$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-4)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

इसलिए दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोसाइन हैं:

$$\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$$

उदाहरण 4 x, y और z-अक्षों की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल x-अक्ष क्रमशः x, y और z-अक्ष के साथ 0°, 90° और 90° के कोण बनाता है। इसलिए x-अक्ष की दिक्–कोसाइन cos 0°, cos 90°, cos 90° अर्थात् 1,0,0 हैं।
इसी प्रकार y-अक्ष और z-अक्ष की दिक्–कोसाइन क्रमशः 0, 1, 0 और 0, 0, 1 हैं।

उदाहरण 5 दर्शाइए कि बिंदु A (2, 3, – 4), B (1, – 2, 3) और C (3, 8, – 11) संरेख हैं।

हल A और B को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात
1 –2, –2 –3, 3 + 4 अर्थात् – 1, – 5, 7 हैं।
B और C को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात 3 –1, 8 + 2, – 11 – 3, अर्थात्, 2, 10, – 14 हैं।

स्पष्ट है कि AB और BC के दिक्–अनुपात समानुपाती हैं। अतः AB और BC समांतर हैं, परंतु AB और BC दोनों में B उभयनिष्ठ है। अतः A, B, और C संरेख बिंदु हैं।

प्रश्नावली 11.1

1. यदि एक रेखा x, y और z-अक्ष के साथ क्रमशः 90°, 135°, 45° के कोण बनाती है तो इसकी दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।
2. एक रेखा की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों के साथ समान कोण बनाती है।
3. यदि एक रेखा के दिक्–अनुपात –18, 12, – 4, हैं तो इसकी दिक्–कोसाइन क्या हैं?
4. दर्शाइए कि बिंदु (2, 3, 4), (– 1, – 2, 1), (5, 8, 7) संरेख हैं।
5. एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष बिंदु (3, 5, – 4), (– 1, 1, 2) और (– 5, – 5, – 2) हैं।

11.3 अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण (Equation of a Line in Space)

कक्षा XI में द्वि–विमीय तल में रेखाओं का अध्ययन करने के पश्चात् अब हम अंतरिक्ष में एक रेखा के सदिश तथा कार्तीय समीकरणों को ज्ञात करेंगे।

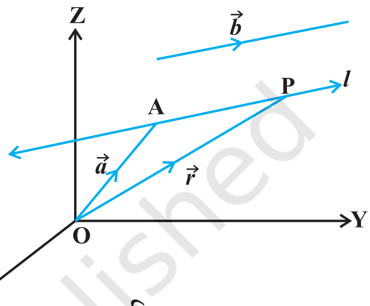
एक रेखा अद्वितीयत: निर्धारित होती है, यदि

(i) यह दिए बिंदु से दी गई दिशा से होकर जाती है, या

(ii) यह दो दिए गए बिंदुओं से होकर जाती है।

11.3.1 *दिए गए बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का समीकरण (Equation of a line through a given point A and parallel to a given vector $\vec{b}$)*

समकोणिक निर्देशांक्ष निकाय के मूल बिंदु O के सापेक्ष मान लीजिए कि बिंदु A का सदिश $\vec{a}$ है। मान लीजिए कि बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा l है। मान लीजिए कि l पर स्थित किसी स्वेच्छ बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है (आकृति 11.3)।



आकृति 11.3

तब $\overrightarrow{AP}$ सदिश $\vec{b}$ के समांतर है अर्थात् $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{b}$, जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

परंतु $$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

अर्थात् $$\lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$$

विलोमत: प्राचल λ के प्रत्येक मान के लिए यह समीकरण रेखा के किसी बिंदु P की स्थिति प्रदान करता है। अत: रेखा का सदिश समीकरण है:

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \quad \ldots (1)$$

टिप्पणी यदि $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ है तो रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c है और विलोमत: यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c हों तो $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ रेखा के समांतर होगा। यहाँ b को $|\vec{b}|$ न समझा जाए।

सदिश रूप से कार्तीय रूप व्युत्पन्न करना (Derivation of Cartesian Form from Vector Form)

मान लीजिए कि दिए बिंदु A के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) हैं और रेखा की दिक्-कोसाइन a, b, c हैं मान लीजिए किसी बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं। तब

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,;\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

और $$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करके $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$, के गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$x = x_1 + \lambda a;\ y = y_1 + \lambda b;\ z = z_1 + \lambda c \quad \ldots (2)$$

ये रेखा के प्राचल समीकरण हैं। (2) से प्राचल λ का विलोपन करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \quad \ldots (3)$$

यह रेखा का कार्तीय समीकरण है।

टिप्पणी यदि रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं, तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$ हैं।

उदाहरण 6 बिंदु (5, 2, – 4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है, कि

$$\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k} \text{ और } \vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$$

इसलिए, रेखा का सदिश समीकरण है:

$$\vec{r}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}) \quad [(1) \text{ से}]$$

चूँकि रेखा पर स्थित किसी बिंदु $P(x, y, z)$ की स्थिति सदिश $\vec{r}$ है, इसलिए

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k})$$

$$=(5+3\lambda)\hat{i}+(2+2\lambda)\hat{j}+(-4-8\lambda)\hat{k}$$

λ का विलोपन करने पर हम पाते हैं कि

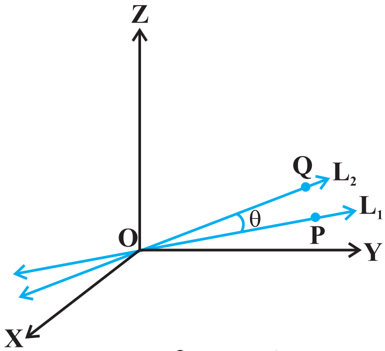
$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{-8}$$

जो रेखा के समीकरण का कार्तीय रूप है।

11.4 दो रेखाओं के मध्य कोण (Angle between two lines)

मान लीजिए कि L_1 और L_2 मूल बिंदु से गुजरने वाली दो रेखाएँ हैं जिनके दिक्-अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2, है। पुनः मान लीजिएकि L_1 पर एक बिंदु P तथा L_2 पर एक बिंदु Q है। आकृति 11.4 में दिए गए सदिश OP और OQ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि OP और OQ के बीच न्यून कोण θ है। अब स्मरण कीजिए कि सदिशों OP और OQ के घटक क्रमशः a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 हैं। इसलिए उनके बीच का कोण θ

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \right|$$ द्वारा प्रदत्त है।



आकृति 11.4

पुन: $\sin\theta$ के रूप में, रेखाओं के बीच का कोण

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ से प्रदत्त है

$$= \sqrt{1-\frac{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2}{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1\,b_2-a_2\,b_1)^2+(b_1\,c_2-b_2\,c_1)^2+(c_1\,a_2-c_2\,a_1)^2}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2}\;\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \qquad \ldots (2)$$

टिप्पणी उस स्थिति में जब रेखाएँ L_1 और L_2 मूल बिंदु से नहीं गुजरती है तो हम L_1 और L_2 के समांतर, मूल बिंदु से गुजरने वाली रेखाएँ क्रमशः L'_1 व L'_2 लेते हैं। यदि रेखाओं L_1 और L_2 के दिक्-अनुपातों के बजाय दिक्-कोसाइन दी गई हो जैसे L_1 के लिए l_1, m_1, n_1 और L_2 के लिए l_2, m_2, n_2 तो (1) और (2) निम्नलिखित प्रारूप लेंगे।

$$\cos\theta = |l_1\,l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \text{ (क्योंकि } l_1^2+m_1^2+n_1^2=1=l_2^2+m_2^2+n_2^2) \qquad \ldots (3)$$

और $$\sin\theta = \sqrt{(l_1\,m_2-l_2\,m_1)^2-(m_1\,n_2-m_2\,n_1)^2+(n_1\,l_2-n_2\,l_1)^2} \qquad \ldots (4)$$

दिक्-अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 वाली रेखाएँ

(i) लंबवत् है, यदि $\theta = 90°$, अर्थात् (1) से $\boldsymbol{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$

(ii) समांतर है, यदि $\theta = 0$, अर्थात् (2) से $\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

अब हम दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करेंगे जिनके समीकरण दिए गए हैं। यदि उन रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ के बीच न्यून कोण θ है

तब $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

कार्तीय रूप में यदि रेखाओं: $$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \qquad \ldots (1)$$

और $$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \qquad \ldots (2)$$

के बीच का कोण θ है जहाँ रेखाएँ (1) व (2) के दिक्-अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 है तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

उदाहरण 7 दिए गए रेखा-युग्म

$$\vec{r} = 3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$$

और $$\vec{r} = 5\hat{i}-2\hat{j}+\mu(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $\vec{b}_1 = \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$

दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, इसलिए

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

अतः $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

उदाहरण 8 रेखा-युग्मः

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

और $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

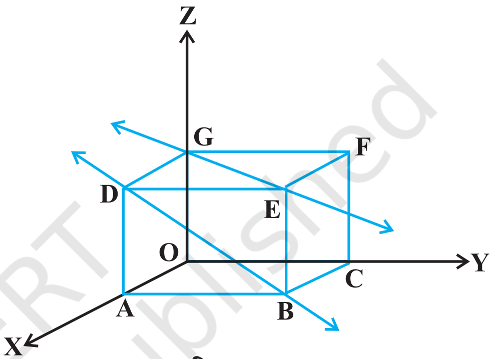
हल पहली रेखा के दिक्-अनुपात 3, 5, 4 और दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात 1, 1, 2 हैं। यदि उनके बीच का कोण θ हो तब

$$\cos\theta = \left|\frac{3.1+5.1+4.2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

अत: अभीष्ट कोण $\cos^{-1}\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ है।

11.5 दो रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी (Shortest Distance between two lines)

अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी शून्य है। और अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ समांतर है तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी, उनके बीच लंबवत् दूरी होगी अर्थात् एक रेखा के एक बिंदु से दूसरी रेखा पर खींचा गया लंब।



आकृति 11.5

इसके अतिरिक्त अंतरिक्ष में, ऐसी भी रेखाएँ होती है जो न तो प्रतिच्छेदी और न ही समांतर होती है। वास्तव में ऐसी रेखाओं के युग्म असमतलीय होते हैं और इन्हें विषमतलीय रेखाएँ (skew lines) कहते हैं। उदाहरणतया हम आकृति 11.5 में x, y और z-अक्ष के अनुदिश क्रमश: 1, 3, 2 इकाई के आकार वाले कमरे पर विचार करते हैं।

रेखा GE छत के विकर्ण के अनुदिश है और रेखा DB, A के ठीक ऊपर छत के कोने से गुजरती हुई दीवार के विकर्ण के अनुदिश है। ये रेखाएँ विषमतलीय हैं क्योंकि वे समांतर नहीं है और कभी मिलती भी नहीं हैं।

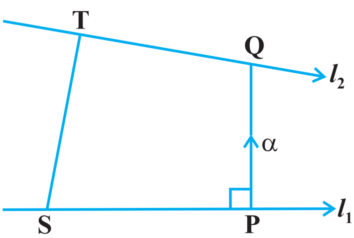
दो रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी से हमारा अभिप्राय एक ऐसे रेखाखंड से है जो एक रेखा पर स्थित एक बिंदु को दूसरी रेखा पर स्थित अन्य बिंदु को मिलाने से प्राप्त हों ताकि इसकी लंबाई न्यूनतम हो। न्यूनतम दूरी रेखाखंड दोनों विषमतलीय रेखाओं पर लंब होगा।

11.5.1 *दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की दूरी (Distance between two skew lines)*

अब हम रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी निम्नलिखित विधि से ज्ञात करते हैं। मान लीजिए l_1 और l_2 दो विषमतलीय रेखाएँ है जिनके समीकरण (आकृति 11.6) निम्नलिखित हैं:

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\,\vec{b}_1 \qquad \ldots (1)$$

और $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\,\vec{b}_2 \qquad \ldots (2)$$



आकृति 11.6

रेखा l_1 पर कोई बिंदु S जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ और l_2 पर कोई बिंदु T जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है, लीजिए। तब न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण, ST का न्यूनतम दूरी की दिशा में प्रक्षेप की माप के समान होगा (अनुच्छेद 10.6.2)।

यदि l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी सदिश $\overrightarrow{PQ}$ है तो यह दोनों $\vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ पर लंब होगी। $\overrightarrow{PQ}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{n}$ इस प्रकार होगी कि

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \qquad \ldots (3)$$

तब
$$\overrightarrow{PQ} = d$$

जहाँ d, न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण है। मान लीजिए $\overrightarrow{ST}$ और $\overrightarrow{PQ}$ के बीच का कोण θ है, तब

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

परंतु
$$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\hat{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\ ST}\right| \quad (\text{क्योंकि } \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{ST\,|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \quad ((3) \text{ के द्वारा})$$

इसलिए अभीष्ट न्यूनतम दूरी

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

या
$$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ है।}$$

कार्तीय रूप (Cartesian Form)

रेखाओं:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

और $$l_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

के बीच की न्यूनतम दूरी है:

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

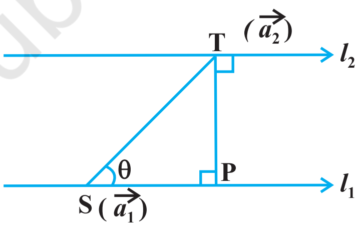
11.5.2 *समांतर रेखाओं के बीच की दूरी (Distance between parallel lines)*

यदि दो रेखाएँ l_1 यदि l_2 समांतर हैं तो वे समतलीय होती हैं। माना दी गई रेखाएँ क्रमशः

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b} \qquad \dots (1)$$

और $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b} \qquad \dots (2)$$

हैं, जहाँ l_1 पर बिंदु S का स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ और l_2 पर बिंदु T का स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है (आकृति 11.7)



आकृति 11.7

क्योंकि l_1, और l_2 समतलीय है। यदि बिंदु T से l_1 पर डाले गए लंब का पाद P है तब रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की दूरी $= |TP|$

मान लीजिए कि सदिशों $\overrightarrow{ST}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है। तब,

$$\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = (|\vec{b}||\overrightarrow{ST}| \sin\theta)\hat{n} \qquad \dots (3)$$

जहाँ रेखाओं l_1 और l_2 के तल पर लंब इकाई सदिश $\hat{n}$ है।

परंतु $$\overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

इसलिए (3) से हम पाते हैं कि

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\, PT\, \hat{n} \qquad (\text{क्योंकि } PT = ST \sin\theta)$$

अर्थात् $$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\, PT \cdot 1 \qquad (\text{as } |\hat{n}| = 1)$$

इसलिए ज्ञात रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी

$$d = |\overrightarrow{PT}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ है।}$$

उदाहरण 9 रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण है :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\,(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \ldots (1)$$

और $$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\,(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \qquad \ldots (2)$$

हल समीकरण (1) व (2) की $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$, से तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ और } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

इसलिए $$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

और $$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

इस प्रकार $$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$$

इसलिए दी गई रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

उदाहरण 10 निम्नलिखित दी गई रेखाओं l_1 और l_2:

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu\,(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दोनों रेखाएँ समातंर हैं। (क्यों?) हमें प्राप्त है कि

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ और } \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

इसलिए रेखाओं के बीच की दूरी

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 11.2

1. दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली तीन रेखाएँ परस्पर लंबवत् हैं।

2. दर्शाइए कि बिंदुओं (1, – 1, 2), (3, 4, – 2) से होकर जाने वाली रेखा बिंदुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लंब है।

3. दर्शाइए कि बिंदुओं (4, 7, 8), (2, 3, 4) से होकर जाने वाली रेखा, बिंदुओं (– 1, – 2, 1), (1, 2, 5) से जाने वाली रेखा के समांतर है।

4. बिंदु (1, 2, 3) से गुज़रने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ के समांतर है।

5. बिंदु जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i}-j+4\hat{k}$ से गुज़रने व सदिश $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (– 2, 4, – 5) से जाती है और $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ के समांतर है।

7. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए:

(i) $r = 2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})$ और

$r = 7\hat{i}-6\hat{k}+\mu(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

(ii) $r = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})$ और

$r = 2\hat{i}-\hat{j}-56\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

9. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-3}$ और $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$

10. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ परस्पर लंब हों।

11. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ परस्पर लंब हैं।

12. रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

13. रेखाओं $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

14. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

15. रेखाएँ, जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम ज्ञात कीजिए:

$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$ और $\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए, जिनके दिक्-अनुपात a, b, c और $b-c, c-a, a-b$ हैं।

2. x-अक्ष के समांतर तथा मूल-बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ परस्पर लंब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

4. रेखाओं $\vec{r}=6\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r}=-4\hat{i}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

5. बिंदु (1, 2, – 4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ पर लंब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

सारांश

- **एक रेखा की दिक्-कोसाइन** रेखा द्वारा निर्देशांक्षों की धन दिशा के साथ बनाए कोणों की कोसाइन होती है।
- यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं तो $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन

  $\dfrac{x_2 - x_1}{PQ}, \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}, \dfrac{z_2 - z_1}{PQ}$ हैं

  जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- **एक रेखा का दिक्-अनुपात** वे संख्याएँ हैं जो रेखा की दिक्-कोसाइन के समानुपाती होती हैं।
- यदि एक रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n और दिक्-अनुपात a, b, c हैं तो

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,;\, m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,;\, n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **विषमतलीय रेखाएँ** अंतरिक्ष की वे रेखाएँ जो न तो समांतर हैं और न ही प्रतिच्छेदी हैं। यह रेखाएँ विभिन्न तलों में होती हैं।
- **विषमतलीय रेखाओं के बीच का कोण** वह कोण है जो एक किसी बिंदु (वरीयता मूल बिंदु की) से विषमतलीय रेखाओं में से प्रत्येक के समांतर खींची गई दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच में है।
- यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दिक्-कोसाइन वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ है तब

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

- यदि a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दिक्-अनुपातों वाली दो रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ है तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

- एक ज्ञात बिंदु जिसकी स्थिति सदिश $\vec{a}$ है से गुज़रने वाली और सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ है।

- बिंदु (x_1, y_1, z_1) से जाने वाली रेखा जिसकी दिक्-कोसाइन l, m, n हैं, का समीकरण $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ है।
- दो बिंदुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है से जाने वाली रेखा के समीकरण का सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ है।
- यदि दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$, के बीच का न्यूनकोण θ है तो

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

- यदि दो रेखाओं $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ और $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ के बीच का कोण θ है तब $\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$.
- दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी वह रेखाखंड है जो दोनों रेखाओं पर लंब हैं।
- दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ के बीच न्यूनतम दूरी

$$\left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$ है।

- दो रेखाओं $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ और $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ के बीच न्यूनतम दूरी

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$ है।

- दो समांतर रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$ के बीच की दूरी

$$\left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$$ है।

12082CH12

अध्याय 12

रैखिक प्रोग्रामन Linear Programming

❖ *The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. — G POLYA* ❖

12.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हम रैखिक समीकरणों और दिन प्रति दिन की समस्याओं में उनके अनुप्रयोग पर विचार–विमर्श कर चुके हैं। कक्षा XI में हमने दो चर राशियों वाले रैखिक असमिकाओं और रैखिक असमिकाओं के निकायों के आलेखीय निरूपण से हल निकालने के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। गणित में कई अनुप्रयोगों में असमिकाओं/समीकरणों के निकाय सम्मिलित हैं। इस अध्याय में हम रैखिक असमिकाओं/समीकरणों के निकायों का नीचे दी गई कुछ वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने में उपयोग करेंगे।

L. Kantorovich

एक फर्नीचर व्यापारी दो वस्तुओं जैसे मेज़ और कुर्सियों का व्यवसाय करता है। निवेश के लिए उसके पास Rs 50,000 और रखने के लिए केवल 60 वस्तुओं के लिए स्थान है। एक मेज़ पर Rs 2500 और एक कुर्सी पर Rs 500 की लागत आती है। वह अनुमान लगाता है कि एक मेज़ को बेचकर वह Rs 250 और एक कुर्सी को बेचने से Rs 75 का लाभ कमा सकता है। मान लीजिए कि वह सभी वस्तुओं को बेच सकता है जिनको कि वह खरीदता है तब वह जानना चाहता है कि कितनी मेज़ों एवं कुर्सियों को खरीदना चाहिए ताकि उपलब्ध निवेश राशि पर उसका सकल लाभ अधिकतम हो।

इस प्रकार की समस्याओं जिनमें सामान्य प्रकार की समस्याओं में लाभ का अधिकतमीकरण और लागत का न्यूनतमीकरण खोजने का प्रयास किया जाता है, इष्टतमकारी समस्याएँ कहलाती हैं। अतः इष्टतमकारी समस्या में अधिकतम लाभ, न्यूनतम लागत या संसाधनों का न्यूनतम उपयोग सम्मिलित है।

रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ एक विशेष लेकिन एक महत्त्वपूर्ण प्रकार की इष्टतमकारी समस्या है और उपरोक्त उल्लिखित इष्टतमकारी समस्या भी एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या है। उद्योग, वाणिज्य, प्रबंधन विज्ञान आदि में विस्तृत सुसंगतता के कारण रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ अत्यधिक महत्त्व की हैं।

इस अध्याय में, हम कुछ रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ और उनका आलेखी विधि द्वारा हल निकालने का अध्ययन करेंगे। यद्यपि इस प्रकार समस्याओं का हल निकालने के लिए अन्य विधियाँ भी हैं।

12.2 रैखिक प्रोग्रामन समस्या और उसका गणितीय सूत्रीकरण (Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

हम अपना विचार विमर्श उपरोक्त उदाहरण के साथ प्रारंभ करते हैं जो कि दो चर राशियों वाली समस्या के गणितीय सूत्रीकरण अथवा गणितीय प्रतिरूप का मार्गदर्शन करेगा। इस उदाहरण में हमने ध्यानपूर्वक देखा कि

(i) व्यापारी अपनी धन राशि को मेज़ों या कुर्सियों या दोनों के संयोजनों में निवेश कर सकता है। इसके अतिरिक्त वह निवेश के विभिन्न योजनात्मक विधियों से विभिन्न लाभ कमा सकेगा।

(ii) कुछ अधिक महत्त्वपूर्ण स्थितियाँ या व्यवरोधों का भी समावेश है जैसे उसका निवेश अधिकतम Rs 50,000 तक सीमित है तथा उसके पास अधिकतम 60 वस्तुओं को रखने के लिए स्थान उपलब्ध है।

मान लीजिए कि वह कोई कुर्सी नहीं खरीदता केवल मेज़ों के खरीदने का निश्चय करता है, इसलिए वह $50{,}000 \div 2500$, या 20 मेज़ों को खरीद सकता है। इस स्थिति में उसका सकल लाभ Rs (250×20) या **Rs 5000** होगा।

मान लीजिए कि वह कोई मेज़ न खरीदकर केवल कुर्सियाँ ही खरीदने का चयन करता है। तब वह अपनी उपलब्ध Rs 50,000 की राशि में $50{,}000 \div 500$, अर्थात् 100 कुर्सियाँ ही खरीद सकता है। परंतु वह केवल 60 नगों को ही रख सकता है। अत: वह 60 कुर्सियाँ मात्र खरीदने के लिए बाध्य होगा। जिससे उसे सकल लाभ Rs 60×75 अर्थात् **Rs 4500** ही होगा।

ऐसी और भी बहुत सारी संभावनाएँ हैं। उदाहरण के लिए वह 10 मेज़ों और 50 कुर्सियाँ खरीदने का चयन कर सकता है, क्योंकि उसके पास 60 वस्तुओं को रखने का स्थान उपलब्ध है। इस स्थिति में उसका सकल लाभ Rs $(10 \times 250 + 50 \times 75)$, अर्थात् **Rs 6250** इत्यादि।

अत: हम ज्ञात करते हैं कि फर्नीचर व्यापारी विभिन्न चयन विधियों के द्वारा अपनी धन राशि का निवेश कर सकता है और विभिन्न निवेश योजनाओं को अपनाकर विभिन्न लाभ कमा सकेगा।

अब समस्या यह है कि उसे अपनी धन राशि को अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए किस प्रकार निवेश करना चाहिए? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें समस्या का गणितीय सूत्रीकरण करने का प्रयास करना चाहिए।

12.2.1 *समस्या का गणितीय सूत्रीकरण (Mathematical Formulation of the Problem)*

मान लीजिए कि मेज़ों की संख्या x और कुर्सियों की संख्या y है जिन्हें फर्नीचर व्यापारी खरीदता है। स्पष्टत: x और y ऋणेतर हैं, अर्थात्

$$x \ge 0 \quad \text{(ऋणेतर व्यवरोध)} \qquad \ldots (1)$$
$$y \ge 0 \qquad \ldots (2)$$

क्योंकि मेज़ों और कुर्सियों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

व्यापारी (व्यवसायी) पर अधिकतम धन राशि (यहाँ यह Rs 50,000 है) का निवेश करने का व्यवरोध है और व्यवसायी के पास केवल अधिकतम वस्तुओं (यहाँ यह 60 है) को रखने के लिए स्थान का भी व्यवरोध है।

गणितीय रूप में व्यक्त करने पर

$$2500x + 500y \leq 50{,}000 \quad \text{(निवेश व्यवरोध)}$$

या $$5x + y \leq 100 \qquad \ldots (3)$$

और $$x + y \leq 60 \quad \text{(संग्रहण व्यवरोध)} \qquad \ldots (4)$$

व्यवसायी इस प्रकार से निवेश करना चाहता है उसका लाभ Z (माना) अधिकतम हो और जिसे x और y के फलन के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

$Z = 250x + 75y$ (उद्देशीय फलन कहलाता है)

प्रदत्त समस्या का अब गणितीय रूप में परिवर्तित हो जाती है:

$Z = 250x + 75y$ का अधिकतमीकरण कीजिए

जहाँ व्यवरोध निम्नलिखित है

$$5x + y \leq 100$$

$$x + y \leq 60$$

$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

इसलिए हमें रैखिक फलन Z का अधिकतमीकरण करना है जबकि ऋणेतर चरों वाली रैखिक असमिकाओं के रूप कुछ विशेष स्थितियों के व्यवरोध व्यक्त किए गए हैं। कुछ अन्य समस्याएँ भी हैं जिनमें रैखिक फलन का न्यूनतमीकरण किया जाता है जबकि ऋणेतर चर वाली रैखिक असमिकाओं के रूप में कुछ विशेष स्थितियों के व्यवरोध व्यक्त किए जाते है। ऐसी समस्याओं को रैखिक प्रोग्रामन समस्या कहते हैं।

अत: एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या वह समस्या है जो कि x और y जैसे कुछ अनेक चरों के एक रैखिक फलन Z (जो कि उद्देश्य फलन कहलाता है) का इष्टतम सुसंगत/अनुकूलतम सुसंगत मान (अधिकतम या न्यूनतम मान) ज्ञात करने से संबंधित है। प्रतिबंध यह है कि चर ऋणेतर पूर्णांक हैं और ये रैखिक असमिकाओं के समुच्चय रैखिक व्यवरोधों को संतुष्ट करते हैं। रैखिक पद से तात्पर्य है कि समस्या में सभी गणितीय संबंध रैखिक हैं जबकि प्रोग्रामन से तात्पर्य है कि विशेष प्रोग्राम या विशेष क्रिया योजना ज्ञात करना।

आगे बढ़ने से पूर्व हम अब कुछ पदों (जिनका प्रयोग ऊपर हो चुका है) को औपचारिक रूप से परिभाषित करेंगे जिनका कि प्रयोग हम रैखिक प्रोग्राम समस्याओं में करेंगे:

उद्देश्य फलन रैखिक फलन $Z = ax + by$, जबकि a, b अचर है जिनका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण होना है एक रैखिक उद्देश्य फलन कहलाता है।

उपरोक्त उदाहरण में $Z = 250x + 75y$ एक रैखिक उद्देश्य फलन है। चर x और y निर्णायक चर कहलाते हैं।

व्यवरोध एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के चरों पर रैखिक असमिकाओं या समीकरण या प्रतिबंध व्यवरोध कहलाते हैं। प्रतिबंध $x \geq 0, y \geq 0$ ऋणेतर व्यवरोध कहलाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में (1) से (4) तक असमिकाओं का समुच्चय व्यवरोध कहलाते हैं।

इष्टतम सुसंगत समस्याएँ निश्चित व्यवरोधों के अधीन असमिकाओं के समुच्चय द्वारा निर्धारित समस्या जो चरों (यथा दो चर x और y) में रैखिक फलन को अधिकतम या न्यूनतम करे, इष्टतम सुसंगत समस्या कहलाती है। रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ एक विशिष्ट प्रकार की इष्टतम सुसंगत समस्या है। सुसंगत समस्या व्यापारी द्वारा मेज़ों तथा कुर्सियों की खरीद में प्रयुक्त एक इष्टतम सुसंगत समस्या तथा रैखिक प्रोग्रामन की समस्या का एक उदाहरण है।

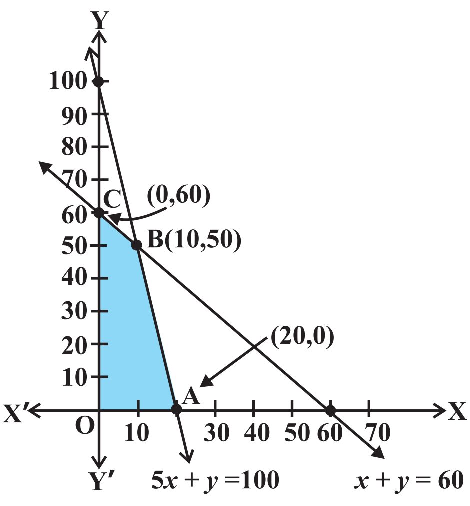
अब हम विवेचना करेंगे कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या को किस प्रकार हल किया जाता है। इस अध्याय में हम केवल आलेखीय विधि से ही संबंधित रहेंगे।

12.2.2 *रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने की आलेखीय विधि (Graphical Method of Solving Linear Programming Problems)*

कक्षा XI, में हम सीख चुके है कि किस प्रकार दो चरों x और y से संबंधित रैखिक असमीकरण निकायों का आरेख खींचते हैं तथा आरेखीय विधि द्वारा हल ज्ञात करते हैं। अब हमें अनुच्छेद 12.2 में विवेचन की हुई मेज़ों और कुर्सियों में निवेश की समस्या का उल्लेख करेंगे। अब हम इस समस्या को आरेख द्वारा हल करेंगे। अब हमें रैखिक असमीकरणों के रूप प्रदत्त व्यवरोधों का आरेख खींचें:

$$5x + y \leq 100 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \leq 60 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0 \quad \ldots (3)$$
$$y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

इस निकाय का आरेख (छायांकित क्षेत्र) में असमीकरणों (1) से (4) तक के द्वारा नियत सभी अर्धतलों के उभयनिष्ठ बिंदुओं से निर्मित हैं। इस क्षेत्र में प्रत्येक बिंदु व्यापारी (व्यवसायी) को मेज़ों और कुर्सियों में निवेश करने के लिए सुसंगत विकल्प प्रस्तुत करता है। इसलिए यह क्षेत्र समस्या का सुसंगत क्षेत्र कहलाता है (आकृति 12.1)। इस क्षेत्र का प्रत्येक बिंदु समस्या का सुसंगत हल कहलाता है।



आकृति 12.1

अत: हम निम्न को परिभाषित करते हैं:

सुसंगत क्षेत्र प्रदत्त समस्या के लिए एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के ऋणेतर व्यवरोध $x, y \geq 0$ सहित सभी व्यवरोधों द्वारा नियत उभयनिष्ठ क्षेत्र सुसंगत क्षेत्र (या हल क्षेत्र) कहलाता है आकृति 12.1 में क्षेत्र OABC (छायांकित) समस्या के लिए सुसंगत क्षेत्र है। सुसंगत क्षेत्र के अतिरिक्त जो क्षेत्र है उसे असुसंगत क्षेत्र कहते हैं।

सुसंगत हल समूह सुसंगत क्षेत्र के अंत: भाग तथा सीमा के सभी बिंदु व्यवरोधों के सुसंगत हल कहलाते हैं। आकृति 12.1 में सुसंगत क्षेत्र OABC के अंत: भाग तथा सीमा के सभी बिंदु समस्या के सुसंगत हल प्रदर्शित कहते हैं। उदाहरण के लिए बिंदु (10, 50) समस्या का एक सुसंगत हल है और इसी प्रकार बिंदु (0, 60), (20, 0) इत्यादि भी हल हैं।

सुसंगत हल के बाहर का कोई भी बिंदु असुसंगत हल कहलाता हैं उदाहरण के लिए बिंदु (25, 40) समस्या का असुसंगत हल है।

इष्टतम/अनुकूलतम (सुसंगत) हल: सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) दे, एक इष्टतम हल कहलाता है।

अब हम देखते हैं कि सुसंगत क्षेत्र OABC में प्रत्येक बिंदु (1) से (4) तक में प्रदत्त सभी व्यवरोधों को संतुष्ट करता है और ऐसे अनंत बिंदु हैं। यह स्पष्ट नहीं है कि हम उद्देश्य फलन $Z = 250x + 75y$ के अधिकतम मान वाले बिंदु को किस प्रकार ज्ञात करने का प्रयास करें। इस स्थिति को हल करने के लिए हम निम्न प्रमेयों का उपयोग करेंगे जो कि रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने में मूल सिद्धांत (आधारभूत) है। इन प्रमेयों की उपपति इस पुस्तक के विषय-वस्तु से बाहर है।

प्रमेय 1 माना कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए R सुसंगत क्षेत्र* (उत्तल बहुभुज) है और माना कि $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। जब Z का एक इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम) हो जहाँ व्यवरोधों से संबंधित चर x और y रैखिक असमीकरणों द्वारा व्यक्त हो तब यह इष्टतम मान सुसंगत क्षेत्र के कोने (शीर्ष) पर अवस्थित होने चाहिए।

प्रमेय 2 माना कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए R सुसंगत क्षेत्र है तथा $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। यदि R परिबद्ध क्षेत्र हो तब उद्देश्य फलन Z, R में दोनों अधिकतम और न्यूनतम मान रखता है और इनमें से प्रत्येक R के कोनीय (corner) बिंदु (शीर्ष) पर स्थित होता है।

टिप्पणी यदि R अपरिबद्ध है तब उद्देश्य फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान का अस्तित्व नहीं भी हो सकता है। फिर भी यदि यह विद्यमान है तो R के कोनीय बिंदु पर होना चाहिए, (प्रमेय 1 के अनुसार)

उपरोक्त उदाहरण में परिबद्ध (सुसंगत) क्षेत्र के कोनीय बिंदु O, A, B और C हैं और बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करना सरल है यथा (0, 0), (20, 0), (10, 50) और (0, 60) क्रमशः कोनीय बिंदु हैं। अब हमें इन बिंदुओं पर, Z का मान ज्ञात करना है।

वह इस प्रकार है:

सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष	Z के संगत मान	
O (0,0)	0	
C (0,60)	4500	
B (10,50)	**6250** ←	अधिकतम
A (20,0)	5000	

हम निरीक्षण करते हैं कि व्यवसायी को निवेश योजना (10, 50) अर्थात् 10 मेज़ों और 50 कुर्सियों के खरीदने में अधिकतम लाभ होगा।

इस विधि में निम्न पदों का समाविष्ट हैं:

1. रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत क्षेत्र ज्ञात कीजिए और उसके कोनीय बिंदुओं (शीर्ष) को या तो निरीक्षण से अथवा दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु को दो रेखाओं की समीकरणों को हल करके उस बिंदु को ज्ञात कीजिए।
2. उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का मान प्रत्येक कोनीय बिंदु पर ज्ञात कीजिए। माना कि M और m, क्रमशः इन बिंदुओं पर अधिकतम तथा न्यूनतम मान प्रदर्शित करते हैं।
3. (i) जब सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है, M और m, Z के अधिकतम और न्यूनतम मान हैं।

   (ii) ऐसी स्थिति में जब सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध हो तो हम निम्नलिखित विधि का उपयोग करते हैं।
4. (a) M को Z का अधिकतम मान लेते हैं यदि $ax + by > M$ द्वारा प्राप्त अर्ध-तल का कोई बिंदु सुसंगत क्षेत्र में न पड़े अन्यथा Z कोई अधिकतम मान नहीं है।

   (b) इसी प्रकार, m, को Z का न्यूनतम मान लेते हैं यदि $ax + by < m$ द्वारा प्राप्त खुले अर्धतल और सुसंगत क्षेत्र में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अन्यथा Z का कोई न्यूनतम मान नहीं है।

हम अब कुछ उदाहरणों के द्वारा कोनीय विधि के पदों को स्पष्ट करेंगे:

उदाहरण 1 आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए:

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + y \leq 50 \qquad \ldots (1)$$

* सुसंगत क्षेत्र का कोनीय बिंदु क्षेत्र का ही कोई बिंदु होता है जो दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु है।

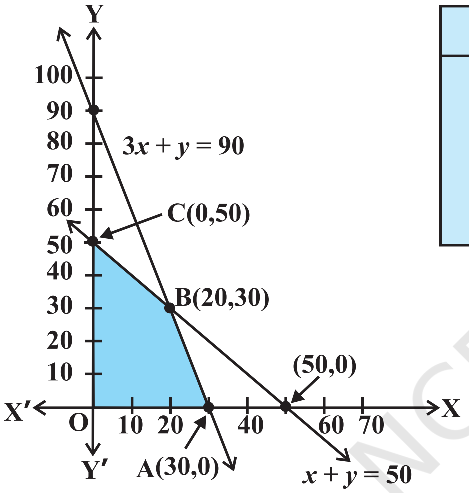
** एक रैखिक समीकरण निकाय का सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध कहा जाता है यदि यह एक वृत के अंतर्गत परिबद्ध किया जा सकता है अन्यथा इसे अपरिबद्ध कहते हैं। अपरिबद्ध से तात्पर्य है कि सुसंगत क्षेत्र किसी भी दिशा में असीमित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

$$3x + y \leq 90 \qquad \text{... (2)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \qquad \text{... (3)}$$

$Z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए:

हल आकृति 12.2 में छायांकित क्षेत्र (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय के द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र है। हम निरीक्षण करते है कि सुसंगत क्षेत्र OABC परिबद्ध है। इसलिए हम Z का अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करेंगे।



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान
(0, 0)	0
(30, 0)	**120** ← अधिकतम
(20, 30)	110
(0, 50)	50

आकृति 12. 2

कोनीय बिंदुओं O, A, B और C के निर्देशांक क्रमश: (0, 0), (30, 0), (20, 30) और (0, 50) हैं। अब प्रत्येक कोनीय बिंदु पर Z का मान ज्ञात करते हैं।

अत: बिंदु (30, 0) पर Z का अधिकतम मान 120 है।

उदाहरण 2 आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

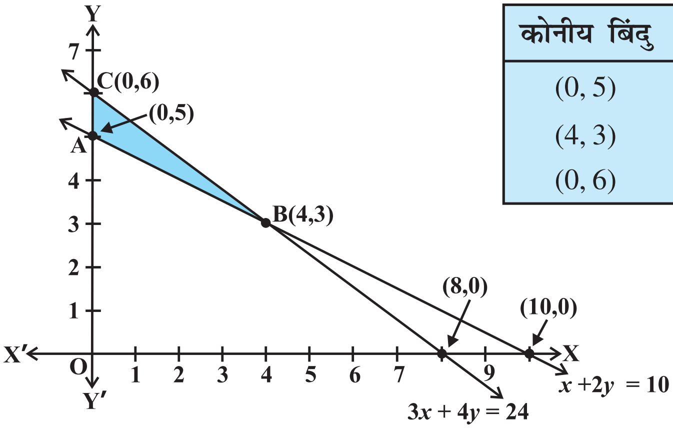
$$x + 2y \geq 10 \qquad \text{... (1)}$$

$$3x + 4y \leq 24 \qquad \text{... (2)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \qquad \text{... (3)}$$

$Z = 200\,x + 500\,y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए

हल आकृति 12.3 में छायांकित क्षेत्र, (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र ABC है जो परिबद्ध है। कोनीय बिंदुओं A, B और C के निर्देशांक क्रमश: (0, 5), (4, 3) और (0, 6) हैं। हम इन बिंदुओं पर $Z = 200x + 500y$ का मान ज्ञात करते हैं



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान
(0, 5)	2500
(4, 3)	**2300** ← न्यूनतम
(0, 6)	3000

आकृति 12.3

अत: बिंदु (4, 3) पर Z का न्यूनतम मान Rs 2300 प्राप्त होता है।

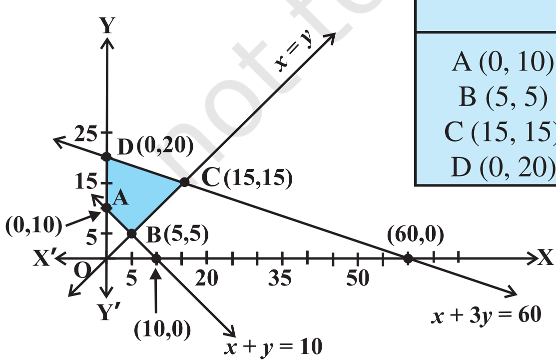
उदाहरण 3 आलेखीय विधि से निम्न समस्या को हल कीजिए:

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 3y \le 60 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \ge 10 \quad \ldots (2)$$
$$x \le y \quad \ldots (3)$$
$$x \ge 0, y \ge 0 \quad \ldots (4)$$

$Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

हल सबसे पहले हम (1) से (4) तक की रैखिक असमिकाओं के निकाय के सुसंगत क्षेत्र का आलेख खींचते हैं। सुसंगत क्षेत्र ABCD को आकृति 12.4 में दिखाया गया है। क्षेत्र परिबद्ध है। कोनीय



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान $Z = 3x + 9y$
A (0, 10)	90
B (5, 5)	**60** ← न्यूनतम
C (15, 15)	**180** } ← अधिकतम (बहु इष्टतम हल)
D (0, 20)	**180**

आकृति 12.4

बिंदुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (0, 10), (5, 5), (15, 15) और (0, 20) हैं। अब हम Z के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करते हैं।

सारणी से हम सुसंगत क्षेत्र बिंदु B (5, 5) पर Z का न्यूनतम मान 60 प्राप्त करते हैं।

Z का अधिकतम मान सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं प्रत्येक C (15, 15) और D (0, 20) पर 120 प्राप्त होता है।

टिप्पणी निरीक्षण कीजिए कि उपरोक्त उदाहरण में, समस्या कोनीय बिंदुओं C और D, पर समान इष्टतम हल रखती है, अर्थात् दोनों बिंदु वही अधिकतम मान 180 उत्पन्न करते हैं। ऐसी स्थितियों में दो कोनीय बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड CD पर प्रत्येक बिंदु तथा C और D भी एक ही अधिकतम मान देते हैं। वही उस स्थिति में भी सत्य है यदि दो बिंदु वही न्यूनतम मान उत्पन्न करते हैं।

उदाहरण 4 आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = -50x + 20y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत ज्ञात कीजिए:

$$2x - y \geq -5 \quad \ldots (1)$$

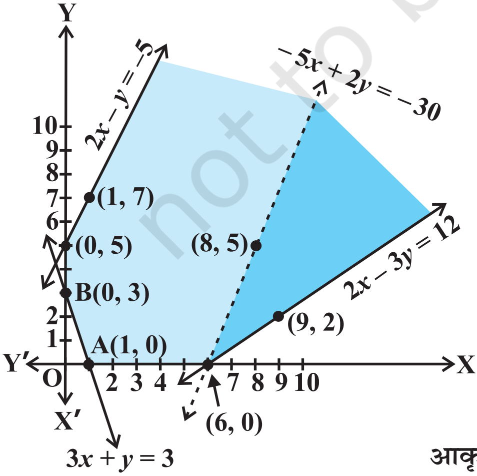
$$3x + y \geq 3 \quad \ldots (2)$$

$$2x - 3y \leq 12 \quad \ldots (3)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

हल सबसे पहले हम (1) से (4) तक के असमीकरण निकाय द्वारा सुसंगत क्षेत्र का आलेख खींचते है। आकृति 12.5 में सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) दिखाया गया है। निरीक्षण कीजिए कि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है।

अब हम कोनीय बिंदुओं पर Z का मान भी ज्ञात करेंगे:



कोनीय बिंदु	$Z = -50x + 20y$
(0, 5)	100
(0, 3)	**60**
(1, 0)	**–50**
(6, 0)	**–300** ⟵ सबसे कम

आकृति 12. 5

इस सारणी से हम ज्ञात करते हैं कि कोनीय बिंदु (6, 0) पर Z का सबसे कम मान –300 है। क्या हम कह सकते हैं कि Z का न्यूनतम मान –300 है? ध्यान दीजिए कि यदि क्षेत्र परिबद्ध होता तो यह Z का सबसे कम मान (प्रमेय 2 से) होता। लेकिन हम यहाँ देखते हैं कि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। इसलिए –300, Z का न्यूनतम मान हो भी सकता है और नहीं भी। इस समस्या का निष्कर्ष ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित असमीकरण का आलेख खींचते हैं:

$$-50x + 20y < -300$$

अर्थात्
$$-5x + 2y < -30$$

और जाँच कीजिए कि आलेख द्वारा प्राप्त खुले अर्धतल व सुसंगत क्षेत्र में उभयनिष्ठ बिंदु हैं या नहीं है। यदि इसमें उभयनिष्ठ बिंदु हैं, तब Z का न्यूनतम मान –300 नहीं होगा। अन्यथा, Z का न्यूनतम मान – 300 होगा।

जैसा कि आकृति 12.5 में दिखाया गया है। इसलिए, $Z = -50x + 20y$, का प्रदत्त व्यवरोधों के परिप्रेक्ष्य में न्यूनतम मान नहीं है।

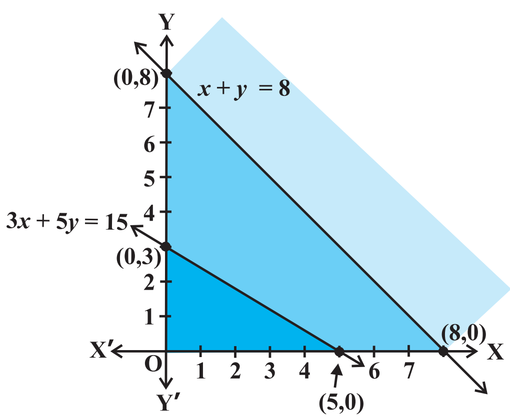
उपरोक्त उदाहरण मे क्या आप जाँच कर सकते हैं कि $Z = -50x + 20y$, (0, 5) पर अधिकतम मान 100 रखता है? इसके लिए, जाँच कीजिए कि क्या $-50x + 20y > 100$ का आरेख सुसंगत क्षेत्र के साथ उभयनिष्ठ बिंदु रखता है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत, $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:

$$x + y \geq 8 \quad \ldots (1)$$
$$3x + 5y \leq 15 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

हल असमिकाओं (1) से (3) का आलेख खींचिए (आकृति 12.6)। क्या कोई सुसंगत क्षेत्र है? यह ऐसा क्यों है?

आकृति 12.6 से आप ज्ञात कर सकते है कि ऐसा कोई बिंदु नहीं है जो सभी व्यवरोधों को एक साथ संतुष्ट कर सके। अत:, समस्या का सुसंगत हल नहीं है।



आकृति 12.6

टिप्पणी उदाहरणों से जिनका विवेचन हम अब तक कर चुके हैं जिसके आधार पर हम कुछ रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं की सामान्य विशेषताओं का उल्लेख करते हैं।

(1) सुसंगत क्षेत्र सदैव उत्तल बहुभुज होता है।

(2) उद्देश्य फलन का अधिकतम (या न्यूनतम) हल सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष पर

(कोने पर) स्थित होता है। यदि उद्देश्य फलन के दो कोनीय बिंदु (शीर्ष) एक ही अधिकतम (या न्यूनतम) मान प्रदान करते हैं तो इन बिंदुओं के मिलाने वाली रेखाखंड का प्रत्येक बिंदु भी समान अधिकतम (या न्यूनतम) मान देगा।

प्रश्नावली 12.1

ग्राफ़ीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल कीजिए:

1. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + y \le 4, x \ge 0, y \ge 0$

2. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -3x + 4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \le 8, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$

3. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 3y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$3x + 5y \le 15, 5x + 2y \le 10, x \ge 0, y \ge 0$

4. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए;
$x + 3y \ge 3, x + y \ge 2, x, y \ge 0$

5. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \le 10, 3x + y \le 15, x, y \ge 0$

6. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए:
$2x + y \ge 3, x + 2y \ge 6, x, y \ge 0$

दिखाइए कि Z का न्यूनतम मान दो बिंदुओं से अधिक बिंदुओं पर घटित होता है।

7. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 10y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \le 120, x + y \ge 60, x - 2y \ge 0, x, y \ge 0$

8. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए:
$x + 2y \ge 100, 2x - y \le 0, 2x + y \le 200; x, y \ge 0$

9. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x \ge 3, x + y \ge 5, x + 2y \ge 6, y \ge 0$

10. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए:
$x - y \le -1, -x + y \le 0, x, y \ge 0$

ऐतिहासिक टिप्पणी

द्वितीय विश्व युद्ध में, जब युद्ध संचालन की योजना बनी, जिससे कि शत्रुओं को न्यूनतम व्यय पर अधिकतम हानि पहुँचे, रैखिक प्रोग्रामन विधि अस्तित्व में आई।
रैखिक प्रोग्रामन के क्षेत्र में प्रथम प्रोग्रामन का सूत्रपात रूसी गणितज्ञ L.Kantoro Vich तथा अमेरिकी अर्थशास्त्री F.L.Hitch Cock ने 1941 में किए। दोनों ने स्वतंत्र रूप से कार्य किया।

इस प्रोग्रामन को परिवहन-समस्या के नाम से जाना गया। सन् 1945 में अंग्रेज अर्थशास्त्री G.Stigler ने रैखिक प्रोग्रामन समस्या, के अंतर्गत इष्टतम आहार संबंधी समस्या का वर्णन किया। सन् 1947 में G.B. Dantzig ने एक दक्षता पूर्ण विधि जो सिंपलेक्स विधि के नाम से प्रसिद्ध है, का सुझाव दिया जो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को सीमित प्रक्रमों में हल करने की सशक्त विधि है।

रैखिक प्रोग्रामन विधि पर प्रारभिक कार्य करने के कारण सन् 1975 में L.Katorovich और अमेरिकी गणितय अर्थशास्त्री T.C.Koopmans को अर्थ शास्त्र में नोबेल पुरस्कार प्रदान किया गया। परिकलन तथा आवश्यक सॉफ्टवेयर के आगमन के साथ कई क्षेत्रों की जटिल समस्याओं में रैखिक प्रोग्रामन प्रविधि के अनुप्रयोग में उत्तरोतर वृद्धि हो रही है।