数学基礎論ノート

anko9801

1. 公理的集合論

1.1. 論理

1.1.1. 論理式

1.1.2. ZFC 公理系

Axiom 1 (外延性). $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$

Axiom 3 (内包性図式). 変数 y を自由変数として用いない任意の論理式 φ を用いて次のように表せられる . $\exists y \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$. つまり $\{x \in z : \varphi\}$ は存在する .

Theorem 1.1.1 $\exists y \forall x (x \notin y)$

Proof. 内包性より $\{x \in z : x \neq x\}$ が存在 , つまり $\exists y \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \in z \wedge x \neq x)$ ■

上の集合 y を空集合 0 と呼ぶ . 多分これは真のクラスも含まれる .

Theorem 1.1.2 $\neg \exists z \forall x (x \in z)$

Proof. $\forall x (x \in z)$ となる z が存在すると仮定すると , 内包性より $\{x \in z : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$ が存在 , つまり $\exists y \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \notin x)$ となる . しかし x に y を代入することで $y \in y \longleftrightarrow y \notin y$.
よって矛盾 . ■

Axiom 4 (対). $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$

Axiom 5 (和集合). $\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)$

Axiom 6 (置換図式). $\forall x \in A \exists ! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi(x, y)$

Definition 1.1.3 (順序対). $\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Definition 1.1.4 (和集合). $\bigcup \mathcal{F} := \{x : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y)\}$

Definition 1.1.5 (共通部分). $\bigcap \mathcal{F} := \{x : \forall Y \in \mathcal{F}(x \in Y)\}$

Definition 1.1.6 (直積集合). $A \times B := \{\langle x,y \rangle : x \in A \wedge y \in B\}$

Proof. 置換公理と内包性公理より , 各 $y \in B$ に対し ,

$$\forall x \in A \exists! z(z = \langle x,y \rangle) \tag{1}$$

$$\mathrm{prod}(A,y) := \{z : \exists x \in A(z = \langle x,y \rangle)\} \tag{2}$$

また , 次のように定義できる .

$$\forall y \in B \exists! z(z = \mathrm{prod}(A,y)) \tag{3}$$

$$\mathrm{prod}'(A,B) := \{\mathrm{prod}(A,y) : y \in B\} \tag{4}$$

$A \times B := \bigcup \mathrm{prod}'(A,B)$ と置くことで定義の正当性が分かる . ■

Definition 1.1.7 (関係). 任意の要素が順序対となる集合 .

Definition 1.1.8 (定義域 , 値域). 関係 R に対し , 定義域 $\mathrm{dom}(R)$ と値域 $\mathrm{ran}(R)$ は次のように定義する .

$$\mathrm{dom}(R) = \{x : \exists y(\langle x,y \rangle \in R)\} \tag{5}$$

$$\mathrm{ran}(R) = \{y : \exists x(\langle x,y \rangle \in R)\} \tag{6}$$

Definition 1.1.9 (関数). 関係 f が $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \exists! y \in \mathrm{ran}(f)(\langle x,y \rangle \in f)$ を満たすとき f を関数と呼ぶ . また , 関数 f について $A = \mathrm{dom}(f), B \supset \mathrm{ran}(f)$ を満たすとき , $f : A \to B$ と書く .

Definition 1.1.10 (関数の制限).

Definition 1.1.11 (狭義全順序). 集合 A 関係 R に対し , 次を満たす組 $\langle A,R \rangle$ を狭義全順序と呼ぶ .

$$\text{推移律} \quad \forall x,y,z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz) \tag{7}$$

$$\text{三分律} \quad \forall x,y \in A(x = y \vee xRy \vee yRx) \tag{8}$$

$$\text{非反射律} \quad \forall x \in A(\neg(xRx)) \tag{9}$$

Theorem 1.1.12 $\langle A,R \rangle$ が狭義全順序ならば , 任意の $B \subset A$ について $\langle B,R \rangle$ は狭義全順序となる .

Definition 1.1.13 (同型写像). 集合と関係の対 $\langle A,R \rangle, \langle B,S \rangle$ について全単射 $f : A \to B$ が存在し $\forall x,y \in A(xRy \longleftrightarrow f(x)Sf(y))$ となるとき $\langle A,R \rangle \cong \langle B,S \rangle$ と書き , f を同型写像

と呼ぶ .

Definition 1.1.14 (整列順序). 全順序 $\langle A, R\rangle$ について A の空でない任意の部分集合に必ず R- 最小の要素があるとき , $\langle A, R\rangle$ が整列順序であるという .

Definition 1.1.15 (切片). $\mathrm{pred}(A, x, R) := \{y \in A : yRx\}$

Theorem 1.1.16 次の *3* つの命題は互いに背反である .

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle && (10)\\ &\text{(b)} \quad \exists y \in B(\langle A, R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, y, S), S\rangle) && (11)\\ &\text{(c)} \quad \exists x \in A(\langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle) && (12)\end{aligned}$$

Proof. 次のように f を定める .

$$f = \{\langle v, w\rangle : v \in A \wedge w \in B \wedge \langle \mathrm{pred}(A, v, R), R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, w, S), S\rangle\} \quad (13)$$

わからず ■

Axiom 9 (選択公理). $\forall A \exists R$(R は A を整列順序づけする)

1.1.3. 順序数

Definition 1.1.17 (推移的). 集合 x の任意の要素が同時に x の部分集合でもあるとき x が推移的であると呼ぶ .

Definition 1.1.18 (順序数). 推移的な集合 x が $\in$ によって整列順序づけされるとき , x を順序数と呼ぶ .

Theorem 1.1.19

1. x が順序数で $y \in x$ なら , y も順序数で $y = \mathrm{pred}(x, y)$.
2. x と y が順序数で $y \cong x$ なら , $x = y$.
3. x と y が順序数なら , $x \in y, y \in x, y = x$ のどれか *1* つだけが成立する .
4. x と y と z が順序数で $x \in y, y \in z$ であれば , $x \in z$ である .
5. C が順序数の空でない集合であれば , $\exists x \in C \forall y \in C(x \in y \vee x = y)$.

Proof. ■

1.1.4. クラスと再帰的定義

やろうと思ったけどかなり骨折れる . 重要な部分だけ証明する .

1.1.5. 基数

Definition 1.1.20 (集合のサイズの比較).

1. $A \precsim B$ とは A から B への 1 対 1 関数があるということである .
2. $A \approx B$ とは A から B の上への 1 対 1 関数があるということである .
3. $A \prec B$ とは $A \precsim B$ かつ $B \not\precsim A$ ということである .

Theorem 1.1.21 (シュレーダーとベルンシュタインの定理).

$$A \precsim B, B \precsim A \to A \approx B \tag{14}$$

Proof. $A \precsim B, B \precsim A$ より 1 対 1 関数 $f : A \to B$ と $g : B \to A$ が存在する . $A_0 = A, B_0 = B, A_{n+1} = g''B_n, B_{n+1} = f''A_n, A' = \bigcap_n A_n \cup \bigcup_n A_{2n} \backslash A_{2n+1}$ とおく . このとき次のように $h : A \to B$ を定義する .

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \left(x \in A'\right) \\ g^{-1}(x) & \text{(else)} \end{cases} \tag{15}$$

関数 $h(x)$ が全単射であることを示す . まず $h(x)$ の単射性 $\forall x, y. h(x) = h(y) \implies x = y$ を示す . $x, y \in A'$ のとき , f の単射性より成り立つ . $x, y \notin A'$ のとき , g^{-1} の単射性より成り立つ . また $x \in A', y \notin A'$ と仮定すると , 前提より $f(x) = g^{-1}(y) \iff (g \circ f)(x) = y$. ここで $x \in \bigcap_n A_n$ とすると , $y = (g \circ f)(x) \in \bigcap_n A_n$ より矛盾 . $x \in A_{2n} \backslash A_{2n+1}$ とすると , $y = (g \circ f)(x) \in A_{2n+2} \backslash A_{2n+3}$ ∎

1.1.6. 実数

1.1.7. 実数

1.1.8. メタ理論の形式化

2. 圏論

2.1.

2.1.1. a

Definition 2.1.22 (圏 (category)). 圏 C とは対象 (object) の集まり $\mathrm{Ob}(C)$ と射 (morphism) の集まり $\mathrm{Mor}(C)$ の組であって次を満たすものをいう．

1. 各 $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対し，ドメイン (domain) とコドメイン (codomain)
2. 射の合成についてモノイドを成している．

Definition 2.1.23 (関手 (functor)). 圏 C, D に対し，関手 $F\colon C \to D$ とは $\mathrm{Ob}(C) \ni a \mapsto F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$, $\mathrm{Mor}(C) \ni f \mapsto F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ とし，射の合成についてモノイド準同型を成すものである．

3.