ベクトル解析

anko9801

Definition 0.0.1 (Kronecker のデルタ).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

Definition 0.0.2 (Levi-Civita テンソル). ε_{ijk} は $1, -1, 0$ の値を取る . $\varepsilon_{xyz} = 1$ であり , 任意の 2 つの添字の交換に対して符号を変え , また任意の 2 つの添字の値が等しければ 0 となる .

$$\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{zxy} = \varepsilon_{yzx} = -\varepsilon_{xzy} = -\varepsilon_{yxz} = -\varepsilon_{zyx} = 1 \tag{2}$$

Definition 0.0.3 (Einstein の縮約記法). 同じ項で添字が重なる場合はその添字について和を取る .

$$A_i B_i = \sum_i A_i B_i \tag{3}$$

Theorem 0.0.4 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$

Proof.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z &(4)\\ &= A_i B_i &(5) \end{aligned}$$

よって示された . ■

Theorem 0.0.5 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$

Proof.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i &= A_j B_k - A_k B_j &(6)\\ &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k &(7) \end{aligned}$$

よって示された . ■

Definition 0.0.6 $(\nabla \mathbf{A})_i = \partial_i A_i$

Definition 0.0.7 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i$

Definition 0.0.8 $(\nabla\times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$

Theorem 0.0.9

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \tag{8}$$
$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{9}$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \tag{10}$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \tag{11}$$
$$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f) \tag{12}$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{13}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \tag{14}$$
$$\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f) \tag{15}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{16}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \tag{17}$$
$$\nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0} \tag{18}$$

Proof. 上の 3 つの定理を用いてそれぞれの式を証明する．ベクトルのときは各要素について考える．

$$(\nabla(f+g))_i = \partial_i(f+g) = \partial_i f + \partial_i g = (\nabla f + \nabla g)_i \tag{19}$$
$$(\nabla(fg))_i = \partial_i(fg) = f\partial_i g + g\partial_i f = (f\nabla g + g\nabla f)_i \tag{20}$$

右辺を計算すると

$$(\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A})_i \tag{21}$$
$$= \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}\partial_l B_m + \varepsilon_{ijk}B_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m + A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i \tag{22}$$
$$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\big(A_j\partial_l B_m + B_j\partial_l A_m\big) + \big(A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i\big) \tag{23}$$
$$= \big(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\big)\big(A_j\partial_l B_m + B_j\partial_l A_m\big) + \big(A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i\big) \tag{24}$$
$$= \big(A_j\partial_i B_j + B_j\partial_i A_j\big) - \big(A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i\big) + \big(A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i\big) \tag{25}$$
$$= \partial_i\big(A_j B_j\big) \tag{26}$$
$$= (\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}))_i \tag{27}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \partial_i(A_i + B_i) = \partial_i A_i + \partial_i B_i \tag{28}$$
$$= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \tag{29}$$
$$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = \partial_i(fA_i) = f\partial_i A_i + A_i\partial_i f \tag{30}$$
$$= f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f) \tag{31}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \partial_i\big(\varepsilon_{ijk}A_jB_k\big) && (32)\\
&= \varepsilon_{ijk}\big(B_k\partial_iA_j + A_j\partial_iB_k\big) && (33)\\
&= B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j - A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k && (34)\\
&= \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) && (35)\\
(\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}))_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(A_k+B_k) && (36)\\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_jA_k + \varepsilon_{ijk}\partial_jB_k && (37)\\
&= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} && (38)\\
(\nabla\times(f\mathbf{A}))_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) && (39)\\
&= f\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k + \varepsilon_{ijk}A_k\partial_jf && (40)\\
&= f\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k - \varepsilon_{ikj}A_k\partial_jf && (41)\\
&= \big(f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)\big)_i && (42)\\
\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m && (43)\\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\big(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m\big) && (44)\\
&= \big(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\big)\big(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m\big) && (45)\\
&= \big(B_j\partial_jA_i + A_i\partial_jB_j\big) - \big(B_i\partial_jA_j + A_j\partial_jB_i\big) && (46)\\
&= A_i\partial_jB_j - B_i\partial_jA_j + B_j\partial_jA_i - A_j\partial_jB_i && (47)\\
&= \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} && (48)\\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= \partial_i\big(\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k\big) && (49)\\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k && (50)\\
&= 0 && (51)\\
(\nabla\times(\nabla f))_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_kf && (52)\\
&= 0 && (53)
\end{aligned}
$$

これより全て証明できた．■