ベクトル解析

Anko

2023 年 7 月 29 日

目次

1 記法・記号 2
2 ベクトル空間 3
3 ベクトル解析 4

1　記法・記号

定義 (Kronecker のデルタ)**.**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1}$$

定義 (レビ・チビタの完全反対称テンソル (Levi-Civita antisymmetric tensor))**.**
$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k}$ は $\mu_1 \cdots \mu_k$ が順列のとき $1 \cdots k$ の偶置換なら 1、奇置換なら -1 とする。順列ではないときは 0 とする。

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} := \begin{cases} \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix} & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が順列のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{2}$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が偶置換のとき}) \\ -1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が奇置換のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{3}$$

定義 (Einstein の縮約記法)**.**
同じ項で添字が重なる場合はその添字について和を取る.

$$A_i B_i = \sum_{i=x,y,z} A_i B_i \tag{4}$$

2　ベクトル空間

定義 (ベクトル空間)**.**
体 K 上の加群を K 上のベクトル空間といい、ベクトル空間の元をベクトルという。

定義 (ベクトル空間における内積と外積)**.**
ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ における内積と外積を定義する。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \tag{6}$$

定理 1.
内積と外積について Einstein の縮約記法を用いて次のように書ける。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i B_i \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{8}$$

◇

証明
内積については自明。外積について次のように求められる。

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k = A_2 B_3 - A_3 B_2 \tag{9}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_2 = \varepsilon_{2jk} A_j B_k = A_3 B_1 - A_1 B_3 \tag{10}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_3 = \varepsilon_{3jk} A_j B_k = A_1 B_2 - A_2 B_1 \tag{11}$$

□

3　ベクトル解析

定義.
ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ について勾配 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}$ と発散 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$、回転 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \partial_i A_i \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \tag{14}$$

定理 2 (勾配・発散・回転の線形性)**.**
それぞれ線形性が成り立つ。

$$\boldsymbol{\nabla}(f+g) = \boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{17}$$

◇

証明

$$(\boldsymbol{\nabla}(f+g))_i = \partial_i(f+g) \tag{18}$$

$$= \partial_i f + \partial_i g \tag{19}$$

$$= (\boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g)_i \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \partial_i(A_i + B_i) \tag{21}$$

$$= \partial_i A_i + \partial_i B_i \tag{22}$$

$$= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \tag{23}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}))_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(A_k + B_k) \tag{24}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k \tag{25}$$

$$= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{26}$$

□

定理 3 (スカラー倍の勾配・発散・回転).
スカラー倍はそれぞれ次のようになる。

$$\boldsymbol{\nabla}(fg) = f\boldsymbol{\nabla}g + g\boldsymbol{\nabla}f \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f) \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}f) \tag{29}$$

◇

証明

$$(\boldsymbol{\nabla}(fg))_i = \partial_i(fg) \tag{30}$$

$$= f\partial_i g + g\partial_i f \tag{31}$$

$$= (f\boldsymbol{\nabla}g + g\boldsymbol{\nabla}f)_i \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) = \partial_i(fA_i) \tag{33}$$

$$= f\partial_i A_i + A_i\partial_i f \tag{34}$$

$$= f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f) \tag{35}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}))_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) \tag{36}$$

$$= f\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k + \varepsilon_{ijk}A_k\partial_j f \tag{37}$$

$$= f\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k - \varepsilon_{ikj}A_k\partial_j f \tag{38}$$

$$= (f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}f))_i \tag{39}$$

□

定理 4 (ベクトルの内積・外積の勾配・発散・回転).

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \tag{42}$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}))_i &= \partial_i(A_j B_j) && (43)\\
&= (A_j\partial_i B_j + B_j\partial_i A_j) - (A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i) + (A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i) && (44)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(A_j\partial_l B_m + B_j\partial_l A_m) + (A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i) && (45)\\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(A_j\partial_l B_m + B_j\partial_l A_m) + (A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i) && (46)\\
&= \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}\partial_l B_m + \varepsilon_{ijk}B_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m + A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i && (47)\\
&= (\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A})_i && (48)\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_j B_k) && (49)\\
&= \varepsilon_{ijk}(B_k\partial_i A_j + A_j\partial_i B_k) && (50)\\
&= B_k\varepsilon_{kij}\partial_i A_j - A_j\varepsilon_{jik}\partial_i B_k && (51)\\
&= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) && (52)\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}))_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}A_l B_m && (53)\\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(B_m\partial_j A_l + A_l\partial_j B_m) && (54)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(B_m\partial_j A_l + A_l\partial_j B_m) && (55)\\
&= (B_j\partial_j A_i + A_i\partial_j B_j) - (B_i\partial_j A_j + A_j\partial_j B_i) && (56)\\
&= A_i\partial_j B_j - B_i\partial_j A_j + B_j\partial_j A_i - A_j\partial_j B_i && (57)\\
&= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} && (58)
\end{aligned}
$$

□

定理 5 (有名定理)**.**

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= 0 && (59)\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) &= \boldsymbol{0} && (60)\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} && (61)
\end{aligned}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k) && (62)\\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k && (63)
\end{aligned}
$$

このとき対称性から i, j を交換しても等しい。

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = \varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i A_k \tag{64}$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = -\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k \tag{65}$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 \tag{66}$$

よって

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0 \tag{67}$$

他も同様にして

$$(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f))_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0 \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}))_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l A_m) && (69)\\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m && (70)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m && (71)\\
&= \partial_j\partial_i A_j - \partial_j^2 A_i && (72)\\
&= (\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A})_i && (73)
\end{aligned}$$

□

定理 6 (Gauss の定理)**.**

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{74}$$

◇