

フーリエ解析

Anko

2023 年 12 月 2 日

目次

1	フーリエ解析	2
1.1	フーリエ級数	2

1 フーリエ解析

1.1 フーリエ級数

定義 (内積).

関数の正規直交関数系による展開区間 $[a, b]$ 上の

定義 (複素フーリエ級数).

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上 関数 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し区間 $[-\pi, \pi]$ において定義された実数値関数 $f(x)$ が連続かつ区分的に C^1 級かつ周期的である ($f(-\pi) = f(\pi)$) ならば $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad (1.1)$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.2)$$

例

定理 1.1 (Bessel の不等式).

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad (1.3)$$

◇

定理 1.2 (平均値の定理).

区間 $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ について $a < c < b$ となる c が存在して次のようになる。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (1.4)$$

◇

命題 1.3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad (1.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n} \quad (1.6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{m,n} \quad (1.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 2\pi \delta_{n,0} \quad (1.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0 \quad (1.9)$$

◇

証明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx \quad (1.10)$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (1.11)$$

$$= 0 \quad (1.12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \quad (1.13)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \quad (1.14)$$

$$= \pi \delta_{m,n} \quad (1.15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx \quad (1.16)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \quad (1.17)$$

$$= \pi \delta_{m,n} \quad (1.18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \begin{cases} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [x]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \quad (1.19)$$

$$= 2\pi\delta_{n,0} \quad (1.20)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = \begin{cases} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [0]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \quad (1.21)$$

$$= 0 \quad (1.22)$$

□

定義 (2π の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.23)$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (1.24)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (1.25)$$

定義 (2π の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.26)$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.27)$$

証明

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.28)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \right) \quad (1.29)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \quad (1.30)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.31)$$

ただし c_n は次のように定める。

$$c_n := \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & (n > 0) \\ \frac{a_0}{2} & (n = 0) \\ \frac{a_n + ib_n}{2} & (n < 0) \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} e^{-inx} dx \quad (1.33)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \quad (1.34)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m 2\pi \delta_{m,n} \quad (1.35)$$

$$= c_n \quad (1.36)$$

□

定義 (一般の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.37)$$

$$a_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (1.38)$$

$$b_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (1.39)$$

定義 (一般の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad (1.40)$$

$$c_n := \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \quad (1.41)$$

定理 1.4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (1.42)$$

◇

補題 1.5 (コーシーの不等式).

実数の数列 $\{p_n\}_n, \{q_n\}_n$ について次の不等式が成立する。

$$\left(\sum_{n=1}^N p_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N q_n^2 \right) \geq \left(\sum_{n=1}^N p_n q_n \right)^2 \quad (1.43)$$

◇

証明

x について次の 2 次関数の判別式を考えることで求まる。

$$\sum_{n=1}^N (p_n x + q_n)^2 \geq 0 \quad (1.44)$$

□

定理 1.6 (ワイエルシュトラスの M テスト).

区間 $[a, b]$ で定義された関数列の無限級数 $s(x)$ の各項の絶対値が上界 M_n をもち、 M_n の総和が収束するならばもとの級数は $[a, b]$ で一様収束する。

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1.45)$$

◇

証明

□

定理 1.7.

$f(x) = x^n$ を $[-1, 1]$ で Fourier 変換を行うことで ζ 関数の値がわかる ◇

証明

偶関数のとき $f(x) = x^{2n}$ となる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x)) \quad (1.46)$$

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^{2m} dx = \frac{2}{2m+1} \quad (1.47)$$

$$a_n = \int_{-1}^1 x^{2m} \cos(n\pi x) dx \quad (1.48)$$

$$= 2 \int_0^1 x^{2m} \cos(n\pi x) dx \quad (1.49)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \left[(x^{2m})^{(k)} (\cos(n\pi x))^{(-k-1)} \right]_0^1 \quad (1.50)$$

k が偶数のとき $\sin(n\pi x)$ があるから $x = 0, 1$ 両方で 0 となる。また $k \neq 2m$ のとき $x = 0$ で 0 となる。これより k が奇数 $(2s-1)$ かつ $x = 1$ のときのみを考えればよい。

$$a_n = -2 \sum_{s=1}^m \left[\frac{(2m)!}{(2m-k)!} x^{2m-k} \frac{(-1)^s}{(n\pi)^{k+1}} \cos(n\pi x) \right]_0^1 \quad (1.51)$$

$$= -2 \sum_{s=1}^m \frac{(2m)!}{(2m-2s+1)!} \frac{(-1)^{s+n}}{(n\pi)^{2s}} \quad (1.52)$$

$$x^{2m} = \frac{1}{2m+1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^m \frac{(2m)!}{(2m-2s+1)!} \frac{(-1)^{s+n}}{(n\pi)^{2s}} \cos(n\pi x) \quad (1.53)$$

$m = 1$ のとき

$$x^2 = \frac{1}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2} \quad (1.54)$$

$$0^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (1.55)$$

$$1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1.56)$$

$$\eta(2) = \frac{\pi^2}{12} \quad (1.57)$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.58)$$

$$\frac{1}{L} \int_L^{-L} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1.59)$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad (1.60)$$

奇関数 $f(x) = x^{2m-1}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin(n\pi x)) \quad (1.61)$$

$$b_n = \int_{-1}^1 x^{2m-1} \sin(n\pi x) dx \quad (1.62)$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \left[(x^{2m-1})^{(k)} (\sin(n\pi x))^{(-k-1)} \right]_{-1}^1 \quad (1.63)$$

k が奇数のとき \sin でどちらも 0 $k = 2s$

$$b_n = \sum_{s=0}^{m-1} \left[\frac{(2m-1)!}{(2m-1-k)!} x^{2m-1-k} \frac{(-1)^{s+1}}{(n\pi)^{k+1}} \cos(n\pi x) \right]_{-1}^1 \quad (1.64)$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(2m-1)!}{(2m-1-2s)!} \frac{(-1)^{s+1}}{(n\pi)^{2s+1}} \left((-1)^n - (-1)^{2m-1-2s+n} \right) \quad (1.65)$$

$$= 2 \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(2m-1)!}{(2m-1-2s)!} \frac{(-1)^{s+n+1}}{(n\pi)^{2s+1}} \quad (1.66)$$

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(2m-1)!}{(2m-1-2s)!} \frac{(-1)^{s+n+1}}{(n\pi)^{2s+1}} \sin(n\pi x) \quad (1.67)$$

$m = 2$ のとき

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{2}{n\pi} + \frac{12}{(n\pi)^3} \right) \sin(n\pi x) \quad (1.68)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{2}{n\pi} + \frac{12}{(n\pi)^3} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad (1.69)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{(2n-1)\pi} + \frac{12}{((2n-1)\pi)^3} \right) (-1)^n \quad (1.70)$$

$$= \frac{2}{\pi} \varepsilon(1) - \frac{12}{\pi^3} \varepsilon(3) \quad (1.71)$$

$$(1.72)$$

パーバセル

$$\zeta(6) \quad (1.73)$$

□