anko

2023 年 6 月 6 日

1　代数多様体

K 完全体
$\overline{K}$ K の代数閉包
$G_{\overline{K}/K}$ $\overline{K}/K$ のガロア群

1.1　代数幾何学の基本

Definition 1.1. 環 A について A 係数あるいは A 上の形式的べき級数 (formal power series) とは, 形式的無限和

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in A)$$

のことである. A 係数の形式的べき級数全体の集合を $A[\![t]\!]$ と書く.

Proposition 1.2. A を環としたとき, $f(t) \in A[\![x]\!]$ の定数項が A の単元であることと $f(t)$ が $A[\![t]\!]$ の単元であることは同値である. 特に A が体のとき定数項が 0 でなければ $f(t)$ は単元である.

Proof. $g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n + \cdots \in A[\![t]\!]$ が $f(t)g(t) = 1$ を満たすとき b_n の条件を書き下ろすと,

$$a_0 b_0 = 1 \tag{1}$$
$$a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \tag{2}$$
$$\vdots \tag{3}$$
$$a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = 0 \tag{4}$$
$$\vdots \tag{5}$$

である. 1 つ目の式から $f(t)$ が単元ならば a_0 が単元であることはわかる. 逆に a_0 が単元であれば $b_0 = a_0^{-1}$ とし, 帰納的に

$$b_n = -a_0^{-1}(a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1})$$

を定めることができる. したがって $f(t)$ は単元である. ■

Proposition 1.3. 単元 $b_0 \in A$ を用いて $a_0 = b_0^2$ と表されており, さらに $\frac{1}{2} \in A$ であれば $\sqrt{f(t)} \in \mathbb{A}[\![t]\!]$ である.

Proof. $g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n + \cdots \in A[\![t]\!]$ が $g(t)^2 = f(t)$ を満たすとき $a_0 = b_0^2$ とし, a_n は b_n を用いて次のように表される.

$$a_n = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \cdots + b_n b_0 = 2b_0 b_n + (b_1 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_1) \tag{6}$$

$$b_n = \frac{1}{2b_0}(a_n - (b_1 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_1)) \tag{7}$$

これより帰納的に b_n を定められる. ■

Definition 1.4. $f(t) \in A[\![t]\!]$ に対して $a_n \neq 0$ となる最小の n を $f(t)$ の位数 (order) と呼び, $\mathrm{ord}(f(t))$ と表す.

Theorem 1.5. k を体とするとき, $k[\![t]\!]$ のイデアル I は整数 $n > 0$ を用いて (t^n) と表される. 特に $k[\![t]\!]$ は単項イデアル整域であり, (t) は唯一の極大イデアルである.

Proof. 0 でないイデアル $I \subset k[\![t]\!]$ に対して, 非負整数 n を

$$n = \min\{\mathrm{ord}(f(t)) \mid f(t) \in I\}$$

■

1.2 アフィン多様体

Definition 1.6. n 次元アフィン空間は

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\overline{K}) = \{P = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \overline{K}\}$$

同様に $\mathbb{A}^n$ の K 有理点の集合を

$$\mathbb{A}^n(K) = \{P = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{A}^n : x_i \in K\}$$

ガロア群 $\sigma \in G_{\overline{K}/K}$ を $P \in \mathbb{A}^n$ に作用することを

$$P^\sigma = (x_1^\sigma, \cdots, x_n^\sigma)$$

と定義する.

Theorem 1.7 (ヒルベルト基底定理)**.** 環 R に対して R がネーター環 $\iff$ $R[X]$ がネーター環が成り立つ. すべてのイデアルは有限生成

1.3 特異

Weierstrass 方程式

$$E : y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 \tag{8}$$

$\mathrm{char}(\overline{K}) \neq 2$ のとき Weierstrass 方程式を簡約化できます。

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{1}{2}(y - a_1 x - a_3)\right) \tag{9}$$

上のように置換すると次のようになります。

$$\left(\frac{1}{2}(y-a_1x-a_3)\right)^2+a_1x\left(\frac{1}{2}(y-a_1x-a_3)\right)+a_3=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6 \tag{10}$$

$$y^2=4x^3+(a_1^2+4a_2)x^2+(2a_1a_3+4a_4)x+(4a_6+a_3^2) \tag{11}$$

$$y^2=4x^3+b_2x^2+2b_4x+b_6 \tag{12}$$

さらに $\mathrm{char}(\overline{K})\neq 2,3$ のときより簡約化できます。

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{x-3b_2}{36},\frac{y}{108}\right) \tag{13}$$

上のように置換すると次のようになります。

$$\left(\frac{y}{108}\right)^2=4\left(\frac{x-3b_2}{36}\right)^3+b_2\left(\frac{x-3b_2}{36}\right)^2+2b_4\left(\frac{x-3b_2}{36}\right)+b_6 \tag{14}$$

$$y^2=(x-3b_2)^3+9b_2(x-3b_2)^2+648b_4(x-3b_2)+108^2b_6 \tag{15}$$

$$y^2=(x^3-9b_2x^2+27b_2^2x-27b_2^3)+9b_2(x^2-6b_2x+9b_2^2)+648b_4(x-3b_2)+108^2b_6 \tag{16}$$

$$y^2=x^3+(-27b_2^2+648b_4)x+(54b_2^3-3\cdot 648b_2b_4+108^2b_6) \tag{17}$$

$$y^2=x^3-27(b_2^2-24b_4)x-54(-b_2^3+36b_2b_4-216b_6) \tag{18}$$

$$y^2=x^3-27c_4x-54c_6 \tag{19}$$

こうして Weierstrass 方程式は標数に応じて次のように書き表されます。

$$E:\begin{cases} y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6 & \\ y^2=4x^3+b_2x^2+2b_4x+b_6 & (\mathrm{char}(\overline{K})\neq 2) \\ y^2=x^3-27c_4x-54c_6 & (\mathrm{char}(\overline{K})\neq 2,3) \end{cases} \tag{20}$$

1.4 ヤコビアン