微分方程式

Anko

2023 年 7 月 17 日

目次

1　特殊関数

定義.
複素平面上で $\mathrm{Re}\, z > 1$ を満たす領域内にある閉曲線 C 上の点 z に対して次の関数は一様収束し正則な関数となる.

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

命題 1.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$
$$\Gamma(1) = 1 \tag{3}$$
$$\Gamma(n+1) = n! \tag{4}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

◇

命題 2 (スターリングの公式 (Stirling's formula))**.**

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \qquad (x \gg 1) \tag{6}$$

◇

命題 3.
ガウスの公式 (Gauss's formula)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

◇

命題 4.
ワイエルシュトラスの公式 (Weierstrass' formula) γ はオイラーの定数 (Euler's constant) と

する.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{9}$$

$$\gamma := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \log n \right) = 0.577216 \cdots \tag{10}$$

◇

定義.

ベータ関数 (Beta function)

$$B(z, \zeta) := \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\zeta - 1} \, \mathrm{d}t \tag{11}$$

命題 5.

$$B(z, \zeta) = B(\zeta, z) \tag{12}$$

$$B(z, \zeta) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1} \theta \cos^{2\zeta - 1} \theta \, \mathrm{d}\theta \tag{13}$$

$$B(z, \zeta) = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{(1+u)^{z+\zeta}} \, \mathrm{d}\theta \tag{14}$$

$$B(z, \zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \tag{15}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{16}$$

◇

定義 (ルジャンドル微分方程式)**.**

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{17}$$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \tag{18}$$

定義 (ルジャンドルの陪微分方程式).
ルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \tag{19}$$

これを満たす独立な 2 つの解 $P_n^m(x)$ と $Q_n^m(x)$ を第一種および第二種ルジャンドル陪関数はルジャンドル関数で表される。

定義.
ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{20}$$

定義.
ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{21}$$

定義.
ラゲール多項式

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{z^n}{n!} \tag{22}$$

命題 6.

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) \tag{23}$$

$$L_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n!)^2}{(l!)^2 (n-l)!} x^l \tag{24}$$

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{25}$$

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{26}$$

$$L_n(0) = n! \tag{27}$$

◇

定義.
次の級数展開の右辺に現れる $H_n(x)$ をエルミート多項式 (Hermite polynomials) という.

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \tag{28}$$

また, 左辺の関数はエルミート多項式の母関数 (generating function) という.

命題 7.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \tag{29}$$

◇

定義.
超幾何関数

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{30}$$

命題 8.

$$e^x = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right) \tag{31}$$

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1, 1, 2; -x) \tag{32}$$

◇

1.1 境界値問題

定義.
ラプラス方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{33}$$

ポアソン方程式 (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \tag{34}$$

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{35}$$

熱伝導方程式 (heat conduction equation)
κ を熱伝導率 (thermal conductivity)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \tag{36}$$

命題 9.
ラプラス方程式を満たし

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{37}$$

次の境界条件を満たす関数 $u(x, y)$ を求める。

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0 \tag{38}$$

◇

証明
これは変数分離法が使えないと思う。

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{39}$$

ラプラス方程式

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{40}$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{41}$$
$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \tag{42}$$
$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \tag{43}$$
$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{44}$$
$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \tag{45}$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \tag{46}$$

□

定理 10 (ガウス積分)**.**

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{47}$$
$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(2n-1)!!\frac{a^{2n+1}}{2^{n+1}} \tag{48}$$
$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2}a^{2n+2} \tag{49}$$
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-k^2/4} e^{ikx}\,\mathrm{d}k = 2\sqrt{\pi}e^{-x^2} \tag{50}$$

◇

証明

まず積分値を I とおく。

$$I := \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{51}$$

ここで I^2 を変数変換して計算する。

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right) \tag{52}$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{53}$$
$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \tag{54}$$
$$= 2\pi\left[-\frac{e^{-\alpha r^2}}{2\alpha}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{a} \tag{55}$$

よって

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{56}$$

また

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x && (57)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x && (58)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) && (59)\\
&= \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \alpha^{-(2n+1)/2} && (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x && (61)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x && (62)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{2\alpha} && (63)\\
&= \frac{n!}{2} \alpha^{-(n+1)} && (64)
\end{aligned}$$

□