相対論的量子力学 レポート課題 1

宇佐見大希

2023 年 7 月 11 日

問題 1.

α^i と β を次を満たすエルミート行列とする。

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \qquad \beta^2 = 1, \qquad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \tag{1}$$

$\diamond$

(1) γ^0, γ^i を次のように定義する。

$$\gamma^0 := \beta, \qquad \gamma^i := \beta\alpha^i \tag{2}$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \qquad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{3}$$

証明

α^i, β がエルミート行列であることと式 (1) より次の式が成り立つ。

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \tag{4}$$

$$\beta^\dagger = \beta \tag{5}$$

$$\alpha^i\alpha^j = -\alpha^j\alpha^i \qquad (i \neq j) \tag{6}$$

$$\alpha^i\beta = -\beta\alpha^i \tag{7}$$

これらよりガンマ行列のエルミート共役が分かる。

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \tag{8}$$

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^i\beta = -\beta\alpha^i = -\gamma^i \tag{9}$$

次に $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を示す。$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}$ より $\mu \leq \nu$ を示せばよい。
$\mu > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \beta\alpha^\mu\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta\alpha^\mu && (10)\\
&= -\beta^2(\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu) && (11)\\
&= -2\delta^{\mu\nu} && (12)
\end{aligned}$$

$\mu = 0$ かつ $\mu < \nu$ のとき

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \beta\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta && (13)\\
&= \beta^2\alpha^\nu - \beta^2\alpha^\nu && (14)\\
&= 0 && (15)
\end{aligned}$$

$\mu = \nu = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\beta^2 && (16)\\
&= 2 && (17)
\end{aligned}$$

よって $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ と書ける。 □

(2) γ^5 を次のように定義する。

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{18}$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \qquad (\gamma^5)^2 = 1, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \tag{19}$$

証明

$$\begin{aligned}
(\gamma^5)^\dagger &= -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 && (20)\\
&= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 && (21)\\
&= (-1)^6 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 && (22)\\
&= \gamma^5 && (23)\\
(\gamma^5)^2 &= -(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger && (24)\\
&= -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 && (25)\\
&= 1 && (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^5\} &= i(\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu) && (27)\\ &= i((-1)^\mu + (-1)^{3-\mu})\gamma^0 \cdots (\gamma^\mu)^2 \cdots \gamma^3 && (28)\\ &= 0 && (29)\end{aligned}$$

□

(3) Σ^i を次のように定義する。

$$\Sigma^i := \frac{i}{2}\sum_{j,k}\varepsilon^{ijk}\gamma^j\gamma^k \tag{30}$$

このとき次の式を示せ。

$$(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i, \qquad \{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij} \tag{31}$$

証明

$$\begin{aligned}(\Sigma^i)^\dagger &= -\frac{i}{2}\sum_{j,k}(\varepsilon^{ijk}\gamma^j\gamma^k)^\dagger && (32)\\ &= -\frac{i}{2}\sum_{j,k}\varepsilon^{ijk}\gamma^k\gamma^j && (33)\\ &= -\frac{i}{2}\sum_{j,k}-\varepsilon^{ikj}\gamma^k\gamma^j && (34)\\ &= \Sigma^i && (35)\end{aligned}$$

次に $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ を示す。
$i = j$ のとき、ある k, l が存在して

$$\begin{aligned}\{\Sigma^i, \Sigma^j\} &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{a,b}\varepsilon^{iab}\gamma^a\gamma^b\right)^2 && (36)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k\right)^2 && (37)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\gamma^k\gamma^l\gamma^k\gamma^l - \gamma^k\gamma^l\gamma^l\gamma^k - \gamma^l\gamma^k\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k\gamma^l\gamma^k\right) && (38)\\ &= 2 && (39)\end{aligned}$$

$i \neq j$ のとき a, b, c, d のいづれか 2 つ 1 組は同じであるから

$$\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = -\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{c,d}(\varepsilon^{iab}\gamma^a\gamma^b\varepsilon^{jcd}\gamma^c\gamma^d + \varepsilon^{jcd}\gamma^c\gamma^d\varepsilon^{iab}\gamma^a\gamma^b) \tag{40}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{c,d}\varepsilon^{iab}\varepsilon^{jcd}(1 + (-1)^3)\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d \tag{41}$$

$$= 0 \tag{42}$$

よって $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ である。 □

(4) $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ と任意の $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^2 = \boldsymbol{v}^2 \tag{43}$$

証明

$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Sigma})^2 = (v^i\Sigma^i)(v^j\Sigma^j)^\dagger \tag{44}$$

$$= v^i\Sigma^i\Sigma^j(v^j)^\dagger \tag{45}$$

$$= \delta^{ij}v^i(v^j)^\dagger \tag{46}$$

$$= \boldsymbol{v}^2 \tag{47}$$

□

(5) α^i, β の具体例を 1 つ挙げて性質を満たすことを確認せよ。

証明

□

問題 2.

共変微分 D_μ を次のように定義する。

$$D_\mu := \partial_\mu - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x) \tag{48}$$

⋄

(1)

証明

$$D_\mu D_\nu = \left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x)\right)\left(\partial_\nu - \frac{q}{i\hbar}A_\nu(x)\right) \tag{49}$$

$$= \partial_\mu\partial_\nu - \frac{q}{i\hbar}\partial_\mu A_\nu(x) - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x)\partial_\nu - \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu(x)A_\nu(x) \tag{50}$$

$$(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = D_\mu\sigma^\mu D_\nu\sigma^\nu \tag{51}$$

$$= (\sigma^\mu)^2 D_\mu^2 + \sigma^\mu\sigma^\nu D_i D_j + \sigma^j\sigma^i D_j D_i \tag{52}$$

$$= \left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x)\right)\sigma^\mu\left(\partial_\nu - \frac{q}{i\hbar}A_\nu(x)\right)\sigma^\nu \tag{53}$$

□

(2) 荷電粒子に対するクライン・ゴルドン方程式

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2]\phi(x) = 0 \tag{54}$$

が非相対論的極限 $mc^2 \to \infty$

問題 3.

中心力ポテンシャル $V(r)$ を持つハミルトニアン $\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 + V(r)$ を考える. ◇

(1) $\hat{H}$ と軌道角運動量 $\hat{L} = \boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ との交換関係を求めよ。

証明

$$[\hat{H}, \hat{L}^i] = [c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 + V(r), \varepsilon^{ijk}r^j\hat{p}^k] \tag{55}$$

$$= \varepsilon^{ijk}\Big(c[\alpha^\mu\hat{p}^\mu, r^j\hat{p}^k] + mc^2[\beta, r^j\hat{p}^k] + [V(r), r^j\hat{p}^k]\Big) \tag{56}$$

$$= \varepsilon^{ijk}\Big(c\alpha^\mu(p^\mu r^j p^k - r^j p^k p^\mu) + mc^2(\beta r^j p^k - r^j p^k\beta) + (Vr^j p^k - r^j p^k V)\Big) \tag{57}$$

$$= \varepsilon^{ijk}\Big(c\alpha^\mu(-i\hbar\delta^{\mu j})p^k + 0 + r^j(-i\hbar\partial^k V)\Big) \tag{58}$$

$$= -i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j p^k - i\hbar\varepsilon^{ijk}r^j(\partial^k V) \tag{59}$$

□

(2) $\Sigma^i := -\dfrac{i}{2}\sum_{j,k}\varepsilon^{ijk}\alpha^j\alpha^k$ とするとき、$\hat{H}$ とスピン角運動量 $\hat{\boldsymbol{S}} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ との交換関係を求めよ。

証明

$$
\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{S}^i] &= \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 + V(r), -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\alpha^j\alpha^k\right] && (60)\\
&= -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\Big(c[\alpha^\mu, \alpha^j\alpha^k]p^\mu + mc^2[\beta, \alpha^j\alpha^k] + [V(r), \alpha^j\alpha^k]\Big) && (61)\\
&= -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\Big(c(\alpha^\mu\alpha^j\alpha^k - \alpha^j\alpha^k\alpha^\mu)p^\mu + mc^2(\beta\alpha^j\alpha^k - \alpha^j\alpha^k\beta) + 0\Big) && (62)\\
&= -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\Big(c((-\alpha^j\alpha^\mu + 2\delta^{\mu j})\alpha^k - \alpha^j(-\alpha^\mu\alpha^k + 2\delta^{k\mu}))p^\mu + 0 + 0\Big) && (63)\\
&= -\frac{i\hbar c}{2}\varepsilon^{ijk}(\alpha^k p^j - \alpha^j p^k) && (64)\\
&= i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j p^k && (65)
\end{aligned}
$$

□

(3) 全角運動量が保存量となることを示せ。

証明

$$
[\hat{H}, \hat{J}^i] = [\hat{H}, \hat{L}^i + \hat{S}^i] = -i\hbar\varepsilon^{ijk}r^j(\partial^k V(r)) \tag{66}
$$

□

問題 4.

$\boldsymbol{\sigma}$ をパウリ行列として、任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ に対する 2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ を考える。 ◇

(1) $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2$ を求めよ。

証明

$$
(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2 = \boldsymbol{p}^2 \tag{67}
$$

□