フーリエ解析

Anko

2023 年 7 月 17 日

1　フーリエ解析

1.1　フーリエ級数

定義 (内積).
関数の正規直交関数系による展開区間 $[a, b]$ 上の

定義 (複素フーリエ級数).
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上 関数 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ に対し区間 $[-\pi, \pi]$ において定義された実数値関数 $f(x)$ が連続かつ区分的に C^1 級かつ周期的である $(f(-\pi) = f(\pi))$ ならば $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{1}$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

例

定理 1 (Bessel の不等式).

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \le \|f\|_2^2 \tag{3}$$

◇

定理 2 (平均値の定理).
区間 $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ について $a < c < b$ となる c が存在して

次のようになる。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{4}$$

◇

命題 3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{5}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{m,n} \tag{6}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{m,n} \tag{7}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta_{n,0} \tag{8}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{9}$$

◇

証明

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\,\mathrm{d}x && (10)\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} && (11)\\
&= 0 && (12)\\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\,\mathrm{d}x && (13)\\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} && (14)\\
&= \pi\delta_{m,n} && (15)\\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,\mathrm{d}x && (16)\\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} && (17)\\
&= \pi\delta_{m,n} && (18)
\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [x]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \tag{19}$$

$$= 2\pi\delta_{n,0} \tag{20}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[-\dfrac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [0]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \tag{21}$$

$$= 0 \tag{22}$$

□

定義 (2π の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{23}$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \tag{25}$$

定義 (2π の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{26}$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

証明

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) && (28)\\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})\right) && (29)\\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right) && (30)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} && (31)
\end{aligned}
$$

ただし c_n は次のように定める。

$$
c_n := \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n > 0) \\ \dfrac{a_0}{2} & (n = 0) \\ \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n < 0) \end{cases} \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}e^{-inx}\,\mathrm{d}x && (33)\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,\mathrm{d}x && (34)\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m 2\pi\delta_{m,n} && (35)\\
&= c_n && (36)
\end{aligned}
$$

□

定義 (一般の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) && (37)\\
a_n &:= \frac{1}{l}\int_{-l}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x && (38)\\
b_n &:= \frac{1}{l}\int_{-l}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x && (39)
\end{aligned}
$$

定義 (一般の周期をもつ関数の複素フーリエ級数)**.**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \tag{40}$$

$$c_n := \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x \tag{41}$$

定理 4.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{42}$$

◇

補題 5 (コーシーの不等式)**.**

実数の数列 $\{p_n\}_n, \{q_n\}_n$ について次の不等式が成立する。

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2\right) \geq \left(\sum_{n=1}^{N} p_n q_n\right)^2 \tag{43}$$

◇

証明

x について次の 2 次関数の判別式を考えることで求まる。

$$\sum_{n=1}^{N} (p_n x + q_n)^2 \geq 0 \tag{44}$$

□

定理 6 (ワイエルシュトラスの M テスト)**.**

区間 $[a, b]$ で定義された関数列の無限級数 $s(x)$ の各項の絶対値が上界 M_n をもち、 M_n の総和が収束するならばもとの級数は $[a, b]$ で一様収束する。

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{45}$$

◇

証明

□