ベクトル解析

Anko

2023 年 8 月 22 日

目次

1　ベクトル空間

1.1　ベクトルの定義

定義 (Einstein の縮約記法)**.**
同じ項で添字が重なる場合にはその添字について和を取る。

定義 (ベクトル空間)**.**
体 K 上の加群を K 上のベクトル空間といい、ベクトル空間の元をベクトルという。
$\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}_i = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$

定義 (ベクトル空間における内積と外積)**.**
ベクトル $\boldsymbol{A} = A_i\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{B} = B_j\boldsymbol{e}_j$ における内積と外積を定義する。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_i\boldsymbol{e}_i\cdot B_j\boldsymbol{e}_j = g_{ij}A_iB_j \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\boldsymbol{e}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\boldsymbol{e}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\boldsymbol{e}_3 \tag{2}$$

定理 1.
内積と外積について Einstein の縮約記法を用いて次のように書ける。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_i\boldsymbol{e}_i\cdot B_j\boldsymbol{e}_j = A_iB_i \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}A_jB_k \tag{4}$$

◇

証明
内積については自明。外積について次のように求められる。

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_1 = \varepsilon_{1jk}A_jB_k = A_2B_3 - A_3B_2 \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_2 = \varepsilon_{2jk}A_jB_k = A_3B_1 - A_1B_3 \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_3 = \varepsilon_{3jk}A_jB_k = A_1B_2 - A_2B_1 \tag{7}$$

□

2　ベクトル解析

定義 (Kronecker のデルタ)**.**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{8}$$

定義 (レビ・チビタの完全反対称テンソル (Levi-Civita antisymmetric tensor))**.**

$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k}$ は $\mu_1 \cdots \mu_k$ が順列のとき $1 \cdots k$ の偶置換なら 1、奇置換なら -1 とする。順列ではないときは 0 とする。

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} := \begin{cases} \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix} & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が順列のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{9}$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が偶置換のとき}) \\ -1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が奇置換のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{10}$$

定理 2.

$f_{ij} = f_{ji}$ と対称性があるとき $\varepsilon_{ijk} f_{ij} = 0$ となる。 ◇

証明

i, j を交換しても等しいことから

$$\varepsilon_{ijk} f_{ij} = \varepsilon_{jik} f_{ji} = -\varepsilon_{ijk} f_{ij} = 0 \tag{11}$$

となる。 □

定義.

ベクトル $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i$ について勾配 $\nabla \boldsymbol{A}$ と発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$、回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を次のように定義する。

$$\nabla \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i \partial_i A_i \tag{12}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial_i A_i \tag{13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \tag{14}$$

ただし

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{15}$$

定理 3 (勾配・発散・回転の線形性)**.**

それぞれ線形性が成り立つ。

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \tag{16}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B} \tag{17}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{18}$$

$\diamond$

証明

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \boldsymbol{e}_i \partial_i (f+g) && (19)\\
&= \boldsymbol{e}_i \partial_i f + \boldsymbol{e}_i \partial_i g && (20)\\
&= \nabla f + \nabla g && (21)\\
\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \partial_i (A_i + B_i) && (22)\\
&= \partial_i A_i + \partial_i B_i && (23)\\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B} && (24)\\
\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (A_k + B_k) && (25)\\
&= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k && (26)\\
&= \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B} && (27)
\end{aligned}$$

$\square$

定理 4 (スカラー倍の勾配・発散・回転).

スカラー倍はそれぞれ次のようになる。

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{28}$$

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = f(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\nabla f) \tag{29}$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{A}) = f(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\nabla f) \tag{30}$$

◇

証明

$$\nabla(fg) = \boldsymbol{e}_i\partial_i(fg) \tag{31}$$

$$= f\boldsymbol{e}_i\partial_i g + g\boldsymbol{e}_i\partial_i f \tag{32}$$

$$= f\nabla g + g\nabla f \tag{33}$$

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = \partial_i(fA_i) \tag{34}$$

$$= f\partial_i A_i + A_i\partial_i f \tag{35}$$

$$= f(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\nabla f) \tag{36}$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) \tag{37}$$

$$= f\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k + \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}A_k\partial_j f \tag{38}$$

$$= f\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k - \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ikj}A_k\partial_j f \tag{39}$$

$$= f(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\nabla f) \tag{40}$$

□

定理 5 (ベクトルの内積・外積の勾配・発散・回転).

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \tag{41}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{42}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{43}$$

◇

証明

$$
\begin{align}
\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{e}_i\partial_i(A_jB_j) \tag{44}\\
&= \boldsymbol{e}_i((A_j\partial_iB_j + B_j\partial_iA_j) - (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i)) \tag{45}\\
&= \boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + \boldsymbol{e}_i(A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) \tag{46}\\
&= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + \boldsymbol{e}_i(A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) \tag{47}\\
&= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}\partial_lB_m + \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}B_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m + \boldsymbol{e}_iA_j\partial_jB_i + \boldsymbol{e}_iB_j\partial_jA_i \tag{48}\\
&= \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \tag{49}\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k) \tag{50}\\
&= \varepsilon_{ijk}(B_k\partial_iA_j + A_j\partial_iB_k) \tag{51}\\
&= B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j - A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k \tag{52}\\
&= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{53}\\
\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m \tag{54}\\
&= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) \tag{55}\\
&= \boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) \tag{56}\\
&= \boldsymbol{e}_i(B_j\partial_jA_i + A_i\partial_jB_j) - \boldsymbol{e}_i(B_i\partial_jA_j + A_j\partial_jB_i) \tag{57}\\
&= \boldsymbol{e}_iA_i\partial_jB_j - \boldsymbol{e}_iB_i\partial_jA_j + \boldsymbol{e}_iB_j\partial_jA_i - \boldsymbol{e}_iA_j\partial_jB_i \tag{58}\\
&= \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{59}
\end{align}
$$

□

定理 6 (有名定理)**.**

$$
\begin{align}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= 0 \tag{60}\\
\nabla\times(\nabla f) &= \boldsymbol{0} \tag{61}\\
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{62}
\end{align}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k) && (63)\\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 && (64)\\
\nabla \times (\nabla f) &= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0 && (65)\\
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l A_m) && (66)\\
&= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m && (67)\\
&= \boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m && (68)\\
&= \boldsymbol{e}_i\partial_j\partial_i A_j - \boldsymbol{e}_i\partial_j^2 A_i && (69)\\
&= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} && (70)
\end{aligned}
$$

□

定理 7 (Gauss の定理)**.**

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{71}$$

◇