

相対論的量子力学 レポート課題 1

宇佐見大希

2023 年 7 月 13 日

問題 1.

α^i と β を次を満たすエルミート行列とする。

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad (1)$$

◇

(1) γ^0, γ^i を次のように定義する。

$$\gamma^0 := \beta, \quad \gamma^i := \beta\alpha^i \quad (2)$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (3)$$

証明

α^i, β がエルミート行列であることと式 (1) より次の式が成り立つ。

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \quad (4)$$

$$\beta^\dagger = \beta \quad (5)$$

$$\alpha^i \alpha^j = -\alpha^j \alpha^i \quad (i \neq j) \quad (6)$$

$$\alpha^i \beta = -\beta \alpha^i \quad (7)$$

これらよりガンマ行列のエルミート共役が分かる。

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \quad (8)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \beta = -\beta \alpha^i = -\gamma^i \quad (9)$$

次に $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を示す。 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}$ より $\mu \leq \nu$ を示せばよい。
 $\mu > 0$ のとき

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \beta\alpha^\mu\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta\alpha^\mu \quad (10)$$

$$= -\beta^2(\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu) \quad (11)$$

$$= -2\delta^{\mu\nu} \quad (12)$$

$\mu = 0$ かつ $\mu < \nu$ のとき

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \beta\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta \quad (13)$$

$$= \beta^2\alpha^\nu - \beta^2\alpha^\nu \quad (14)$$

$$= 0 \quad (15)$$

$\mu = \nu = 0$ のとき

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\beta^2 \quad (16)$$

$$= 2 \quad (17)$$

よって $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ と書ける。 \square

(2) γ^5 を次のように定義する。

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (18)$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (19)$$

証明

$$(\gamma^5)^\dagger = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 \quad (20)$$

$$= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \quad (21)$$

$$= (-1)^6 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (22)$$

$$= \gamma^5 \quad (23)$$

$$(\gamma^5)^2 = -(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger \quad (24)$$

$$= -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \quad (25)$$

$$= 1 \quad (26)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = i(\gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu) \quad (27)$$

$$= i((-1)^\mu + (-1)^{3-\mu}) \gamma^0 \dots (\gamma^\mu)^2 \dots \gamma^3 \quad (28)$$

$$= 0 \quad (29)$$

□

(3) Σ^i を次のように定義する。

$$\Sigma^i := \frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \gamma^j \gamma^k \quad (30)$$

このとき次の式を示せ。

$$(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i, \quad \{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij} \quad (31)$$

証明

$$(\Sigma^i)^\dagger = -\frac{i}{2} \sum_{j,k} (\varepsilon^{ijk} \gamma^j \gamma^k)^\dagger \quad (32)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \gamma^k \gamma^j \quad (33)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{j,k} -\varepsilon^{ikj} \gamma^k \gamma^j \quad (34)$$

$$= \Sigma^i \quad (35)$$

次に $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ を示す。

$i = j$ のとき、ある k, l が存在して

$$\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} \varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b \right)^2 \quad (36)$$

$$= -\frac{1}{2} (\gamma^k \gamma^l - \gamma^l \gamma^k)^2 \quad (37)$$

$$= -\frac{1}{2} (\gamma^k \gamma^l \gamma^k \gamma^l - \gamma^k \gamma^l \gamma^l \gamma^k - \gamma^l \gamma^k \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k \gamma^l \gamma^k) \quad (38)$$

$$= 2 \quad (39)$$

$i \neq j$ のとき a, b, c, d のいずれか 2 つ 1 組は同じであるから

$$\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = -\frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} (\varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b \varepsilon^{jcd} \gamma^c \gamma^d + \varepsilon^{jcd} \gamma^c \gamma^d \varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b) \quad (40)$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \varepsilon^{iab} \varepsilon^{jcd} (1 + (-1)^3) \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \quad (41)$$

$$= 0 \quad (42)$$

よって $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ である。 \square

(4) $\Sigma = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ と任意の $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$(\mathbf{v} \cdot \Sigma)^2 = \mathbf{v}^2 \quad (43)$$

証明

$$(\mathbf{v} \cdot \Sigma)^2 = (v^i \Sigma^i)(v^j \Sigma^j)^\dagger \quad (44)$$

$$= v^i \Sigma^i \Sigma^j (v^j)^\dagger \quad (45)$$

$$= \delta^{ij} v^i (v^j)^\dagger \quad (46)$$

$$= \mathbf{v}^2 \quad (47)$$

\square

(5) α^i, β の具体例を 1 つ挙げて性質を満たすことを確認せよ。

証明

次のディラック表示を用いる。

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

このとき

$$(\alpha^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \alpha^i \quad (49)$$

$$\beta^\dagger = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} = \beta \quad (50)$$

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$= (\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i) \otimes I \quad (52)$$

$$= \left((\delta^{ij} I + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k) + (\delta^{ji} I + i\varepsilon^{jik} \sigma^k) \right) \otimes I \quad (53)$$

$$= 2\delta^{ij} \quad (54)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}^2 = 1 \quad (55)$$

$$\{\alpha^i, \beta\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$= (\sigma^i \sigma^0 - \sigma^0 \sigma^i) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$= 0 \quad (58)$$

□

問題 2.

共変微分 D_μ を次のように定義する。

$$D_\mu := \partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \quad (59)$$

◇

(1) $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)$ に対して

$$(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{D}^2 + \frac{q}{\hbar} \mathbf{B}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (60)$$

を示せ。

証明

$$D_\mu D_\nu^\dagger = \left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \right) \left(\partial_\nu + \frac{q}{i\hbar} A_\nu(x) \right) \quad (61)$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu + \frac{q}{i\hbar} \partial_\mu A_\nu(x) - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \partial_\nu + \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu(x) A_\nu(x) \quad (62)$$

$$(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \sum_{i,j} (D_i \sigma^i) (D_j \sigma^j)^\dagger \quad (63)$$

$$= \sum_{i,j} \left(\delta^{ij} I + i \sum_k \varepsilon^{ijk} \sigma^k \right) D_i D_j^\dagger \quad (64)$$

$$= \sum_i D_i^2 + i \sum_{i,j,k} \varepsilon^{ijk} \sigma^k D_i D_j^\dagger \quad (65)$$

$$= \mathbf{D}^2 + i \sum_{i,j,k} \varepsilon^{ijk} \sigma^k \frac{q}{i\hbar} \partial_i A_j(x) \quad (66)$$

$$= \mathbf{D}^2 + \frac{q}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(x)) \quad (67)$$

$$= \mathbf{D}^2 + \frac{q}{\hbar} \mathbf{B}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (68)$$

□

(2) 荷電粒子に対するクライン・ゴールドン方程式

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2] \phi(x) = 0 \quad (69)$$

が非相対論的極限 $mc^2 \rightarrow \infty$ において、シュレーディンガー方程式に帰着することを示せ

証明

$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ であり $\phi(x) = e^{-i(mc^2)t/\hbar} \varphi(x)$ とおくと

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2] \phi(x) = 0 \quad (70)$$

$$= \left[\hbar^2 \left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \right) \left(\partial^\mu - \frac{q}{i\hbar} A^\mu(x) \right) + (mc)^2 \right] \phi(x) \quad (71)$$

$$= \left[\left(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + i\hbar \partial_\mu q A^\mu(x) + q A_\mu(x) i\hbar \partial^\mu - q^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \right) + (mc)^2 \right] \phi(x) \quad (72)$$

$$= \left[\left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{p}^2 \right) + q \left(\frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(x) \right) + q \left(\frac{i\hbar}{c^2} \phi \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{p} \right) - q^2 \left(\frac{\phi^2}{c^2} - \mathbf{A}^2 \right) + (mc)^2 \right] \phi(x) \quad (73)$$

$$= \left[\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + q \frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi + q \frac{i\hbar}{c^2} \phi \frac{\partial}{\partial t} - q^2 \frac{\phi^2}{c^2} + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2 + (mc)^2 \right] e^{-i(mc^2)t/\hbar} \varphi(x) \quad (74)$$

$$= \left[-(mc)^2 + q \frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2mq\phi - \frac{q^2 \phi^2}{c^2} + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2 + (mc)^2 \right] e^{-i(mc^2)t/\hbar} \varphi(x) \quad (75)$$

$$= 2m \left[-\frac{q^2 \phi^2}{2mc^2} + \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2}{2m} + q\phi(x) \right] e^{-i(mc^2)t/\hbar} \varphi(x) \quad (76)$$

非相対論的極限 $mc^2 \rightarrow \infty$ のとき $\phi(x)$ は時間に依存しないからシュレーディンガー方程式となる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) = \left(\frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2}{2m} + q\phi \right) \phi(x) \quad (77)$$

□

(3)

$$(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (78)$$

証明

まず次の式が成り立つことを確認する。

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5 = \gamma^0\gamma^0\gamma^5 + \gamma^0\gamma^i\gamma^5 \quad (79)$$

$$= \gamma^0\gamma^0\gamma^5 - \gamma^i\gamma^0\gamma^5 \quad (80)$$

$$= (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\gamma^5 \quad (81)$$

よってディラック方程式より次のようになる。

$$\partial_\mu j_A^\mu(x) = \partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) \quad (82)$$

$$= \partial_\mu(\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) \quad (83)$$

$$= (\partial_\mu\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) + \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi(x) \quad (84)$$

$$= (\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi(x) - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5(\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \quad (85)$$

$$= \left(\frac{1}{i\hbar}(\gamma^\mu q A_\mu(x) + mc)\psi(x)\right)^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi(x) - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\left(\frac{1}{i\hbar}(\gamma^\mu q A_\mu(x) + mc)\psi(x)\right) \quad (86)$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\left(q A_\mu(x)(\psi^\dagger(x)(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi + \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi(x)) + 2mc\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\psi(x)\right) \quad (87)$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\left(q A_\mu(x)(\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) + 2mc\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\psi(x)\right) \quad (88)$$

$$= -\frac{2mc}{i\hbar}\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \quad (89)$$

□

問題 3.

中心力ポテンシャル $V(r)$ を持つハミルトニアン $\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 + V(r)$ を考える. ◇(1) \hat{H} と軌道角運動量 $\hat{L} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$ との交換関係を求めよ。

証明

$$[\hat{H}, \hat{L}^i] = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 + V(r), \varepsilon^{ijk} r^j \hat{p}^k] \quad (90)$$

$$= \varepsilon^{ijk} \left(c[\alpha^\mu \hat{p}^\mu, r^j \hat{p}^k] + mc^2[\beta, r^j \hat{p}^k] + [V(r), r^j \hat{p}^k] \right) \quad (91)$$

$$= \varepsilon^{ijk} \left(c\alpha^\mu (p^\mu r^j p^k - r^j p^k p^\mu) + mc^2(\beta r^j p^k - r^j p^k \beta) + (V(r)r^j p^k - r^j p^k V(r)) \right) \quad (92)$$

$$= \varepsilon^{ijk} \left(c\alpha^\mu (-i\hbar \delta^{\mu j}) p^k + 0 + r^j (-i\hbar \partial^k V(r)) \right) \quad (93)$$

$$= -i\hbar c \varepsilon^{ijk} \alpha^j p^k - i\hbar \left(\mathbf{r} \times \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} \right)_i \quad (94)$$

$$= -i\hbar c \varepsilon^{ijk} \alpha^j p^k - i\hbar \frac{dV}{dr} \left(\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right)_i \quad (95)$$

$$= -i\hbar c \varepsilon^{ijk} \alpha^j p^k \quad (96)$$

□

(2) $\Sigma^i := -\frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \alpha^j \alpha^k$ とするとき、 \hat{H} とスピン角運動量 $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Sigma}$ との交換関係を求めよ。

証明

$$[\hat{H}, \hat{S}^i] = \left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 + V(r), -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \alpha^j \alpha^k \right] \quad (97)$$

$$= -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \left(c[\alpha^\mu, \alpha^j \alpha^k] p^\mu + mc^2[\beta, \alpha^j \alpha^k] + [V(r), \alpha^j \alpha^k] \right) \quad (98)$$

$$= -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \left(c(\alpha^\mu \alpha^j \alpha^k - \alpha^j \alpha^k \alpha^\mu) p^\mu + mc^2(\beta \alpha^j \alpha^k - \alpha^j \alpha^k \beta) + 0 \right) \quad (99)$$

$$= -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \left(c((- \alpha^j \alpha^\mu + 2\delta^{\mu j}) \alpha^k - \alpha^j (-\alpha^\mu \alpha^k + 2\delta^{k\mu})) p^\mu + 0 + 0 \right) \quad (100)$$

$$= -\frac{i\hbar c}{2} \varepsilon^{ijk} (\alpha^k p^j - \alpha^j p^k) \quad (101)$$

$$= i\hbar c \varepsilon^{ijk} \alpha^j p^k \quad (102)$$

□

(3) 全角運動量が保存量となることを示せ。

証明

$$[\hat{H}, \hat{J}^i] = [\hat{H}, \hat{L}^i + \hat{S}^i] = 0 \quad (103)$$

□

問題 4.

σ をパウリ行列として、任意のベクトル \mathbf{p} に対する 2 行 2 列の行列 $\sigma \cdot \mathbf{p}$ を考える。 \diamond

(1) $(\sigma \cdot \mathbf{p})^2$ を求めよ。

証明

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})^2 = (\sigma^i p^i)(\sigma^j p^j)^\dagger \quad (104)$$

$$= p^i p^j (\delta^{ij} I + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k) \quad (105)$$

$$= \mathbf{p}^2 \quad (106)$$

□

(2) $\text{tr}(\sigma \cdot \mathbf{p})$ を求めよ。

証明

$\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$ とすると

$$\text{tr}(\sigma \cdot \mathbf{p}) = \text{tr} \begin{pmatrix} p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^3 \end{pmatrix} = 0 \quad (107)$$

□

(3) $\sigma \cdot \mathbf{p}$ の固有値を求めよ。

証明

$\sigma \cdot \mathbf{p}$ の固有値を λ_1, λ_2 とおくと

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(\sigma \cdot \mathbf{p}) = 0 \quad (108)$$

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (\sigma \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 \quad (109)$$

よって固有値は $\pm|\mathbf{p}|$ である。

□

(4) $\mathbf{p} := |\mathbf{p}|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ とするとき、固有ベクトルを求めよ。

証明

$$(\sigma \cdot \mathbf{p} \mp |\mathbf{p}|I)\mathbf{v} = |\mathbf{p}| \begin{pmatrix} \cos \theta \mp 1 & \sin \theta \cos \phi - i \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + i \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \mp 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \quad (110)$$

$$= |\mathbf{p}| \begin{pmatrix} \cos \theta \mp 1 & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \mp 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \quad (111)$$

より固有値に対する固有ベクトルはそれぞれ次のベクトルの定数倍である。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -\cos \theta \pm 1 \end{pmatrix} \tag{112}$$

□