電磁気学

Anko

2023 年 7 月 8 日

1 電磁気学

1.1 真空中の電磁気学

定義 (Maxwell の方程式).

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対して次のような式が成り立つ。

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \,\mathrm{d}V \iff \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S \iff \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = 0 \iff \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$c^2 \int_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S \iff \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

ただし電荷密度 $\rho(t, \boldsymbol{r}) = qn$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{r}) = qn\boldsymbol{v}$ とする。ローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{5}$$

これらの法則で電磁気学が完結する。

1.2 ポテンシャル

定理 1 (電位とベクトルポテンシャル)**.**

次を満たす ϕ, $\boldsymbol{A}$ が存在し、

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{7}$$

◇

証明

□

定理 2 (ゲージ変換)**.**

任意の関数 $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ として次のゲージ変換は不変に保つ。

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \tag{8}$$

$$\phi \to \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{9}$$

ゲージ条件 ◇

証明

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{10}$$

より

□

命題 3.

静電場においてクーロンゲージ条件を満たすとき

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{11}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{12}$$

◇

定理 4.

静電エネルギー

$$U_e = \frac{1}{2} \tag{13}$$

◇

1.3 電磁波

命題 5.
$\rho = 0$ $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ において $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は波動方程式を満たす。 ◇

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} \tag{14}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{17}$$

1.4 導体

定義 (導体)**.**
時間が経つと

1. 導体内部に電場は存在しない。
2. 導体内部に電荷はなく、表面のみに電荷が分布する。

導体全体で電位は一定、