

相対論的量子力学 期末レポート

2023 年 8 月 11 日

目次

1	2 次元時空におけるディラック方程式	2
2	指数関数	4
3	スピノル球関数	6
4	水素原子における電子のエネルギー準位	10

1 2次元時空におけるディラック方程式

問題 1.1.

2次元時空におけるディラック方程式は次のように考えられる。

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (1.1)$$

このときガンマ行列 γ^0, γ^1 は次を満たす。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1 \quad (1.2)$$

またカイラリティ γ^5 は次を満たす。

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (1.3)$$

γ^5 を γ^0, γ^1 を用いて表わせ。 \diamond

証明

カイラリティがガンマ行列の複素数係数多項式で表されたとするとガンマ行列の性質より次のように書ける。

$$\gamma^5 = \sum_{e_0, e_1} a_{e_0, e_1} (\gamma^0)^{e_0} (\gamma^1)^{e_1} = \alpha_0 + \alpha_1 \gamma^0 + \alpha_2 \gamma^1 + \alpha_3 \gamma^0 \gamma^1 \quad (a_{e_0, e_1}, \alpha_i \in \mathbb{C}) \quad (1.4)$$

これを代入するとガンマ行列の直交性より

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \iff \alpha_0 \in \mathbb{R}, \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in i\mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (1.6)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1 \implies \alpha_4 = \pm 1 \quad (1.7)$$

となる。よって $\gamma^5 = \pm \gamma^0 \gamma^1$ となる。ここでは特に $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1$ とする。 \square

問題 1.2.

$\gamma_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ とするとき $(\gamma_+)^a, (\gamma_-)^b, (\gamma_+)^a (\gamma_-)^b, (\gamma_-)^b (\gamma_+)^a$ ($a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$) を γ_\pm を用いて表わせ。 \diamond

証明

$$(\gamma_\pm)^2 = \frac{1 \pm 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2}{2^2} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = \gamma_\pm \quad (1.8)$$

$$\gamma_+ \gamma_- = \gamma_- \gamma_+ = \frac{1 + \gamma^5 - \gamma^5 - (\gamma^5)^2}{2^2} = 0 \quad (1.9)$$

より帰納法から次が示せる。

$$(\gamma_+)^a = \gamma_+, \quad (\gamma_-)^b = \gamma_-, \quad (\gamma_+)^a(\gamma_-)^b = 0, \quad (\gamma_-)^b(\gamma_+)^a = 0 \quad (1.10)$$

□

問題 1.3.

$\psi_{\pm}(x) = \gamma_{\pm}\psi(x)$ は γ^5 の固有関数である。それぞれの固有値を求めよ。

◇

証明

カイラリティを作用させることで固有関数 $\psi_{\pm}(x)$ の固有値は ± 1 となる。

$$\gamma^5\psi_{\pm}(x) = \gamma^5\gamma_{\pm}\psi(x) = \frac{\gamma^5 \pm 1}{2}\psi(x) = \pm\gamma^5\psi(x) \quad (1.11)$$

□

問題 1.4.

$\psi_{\pm}(x)$ が満たす連立微分方程式をディラック方程式から求めよ。

◇

証明

$\{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = 0$ より $\gamma^{\mu}\gamma_{\pm} = \gamma_{\mp}\gamma^{\mu}$ となる。よって

$$\begin{cases} \gamma_+(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc)\psi(x) = 0 \\ \gamma_-(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc)\psi(x) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\iff \begin{cases} i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_-(x) = mc\psi_+(x) \\ i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_+(x) = mc\psi_-(x) \end{cases} \quad (1.13)$$

となる。

□

問題 1.5.

$m = 0$ の場合に $\psi_+(x) \propto e^{-iEt/\hbar + ipx/\hbar}$ が解となるとき、 E, p が満たす関係式を求めよ。

◇

証明

$m = 0$ のとき $i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_+(x) = 0$ となる。 $\gamma^1 = \gamma^0(\gamma_+ - \gamma_-)$ より

$$i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_+(x) = i\hbar(\gamma^0 c\partial_t + \gamma^1\partial_x)\psi_+(x) \quad (1.14)$$

$$= (\gamma^0 Ec - \gamma^1 p)\psi_+(x) \quad (1.15)$$

$$= \gamma^0(Ec - (\gamma_+ - \gamma_-)p)\psi_+(x) \quad (1.16)$$

$$= \gamma^0(Ec - p)\psi_+(x) = 0 \quad (1.17)$$

となる。よって $Ec = p$ を満たす。

□

問題 1.6.

$m = 0$ の場合に $\psi_-(x) \propto e^{-iEt/\hbar + ipx/\hbar}$ が解となるとき、 E, p が満たす関係式を求めよ。 ◇

証明

$m = 0$ のとき $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi_-(x) = 0$ となる。 $\gamma^1 = \gamma^0(\gamma_+ - \gamma_-)$ より

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi_-(x) = i\hbar(\gamma^0c\partial_t + \gamma^1\partial_x)\psi_-(x) \quad (1.18)$$

$$= (\gamma^0Ec - \gamma^1p)\psi_-(x) \quad (1.19)$$

$$= \gamma^0(Ec - (\gamma_+ - \gamma_-)p)\psi_-(x) \quad (1.20)$$

$$= \gamma^0(Ec + p)\psi_-(x) = 0 \quad (1.21)$$

となる。よって $Ec = -p$ を満たす。

□

問題 1.7.

$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^5$ を 2 行 2 列の行列とすると、それらの具体形をパウリ行列を用いて表せ。 ◇

証明

パウリ行列を次のように定義する。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

これより次のようにおくとそれぞれの性質を満たす。

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma_2, \quad \gamma^5 = -\sigma_3 \quad (1.23)$$

□

2 指数関数

問題 2.1.

次の式を示せ。

$$e^{i\hat{B}}\hat{A}e^{-i\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] \dots]}_n \quad (2.1)$$

◇

証明

$e^{i\lambda\hat{B}}\hat{A}e^{-i\lambda\hat{B}}$ について考える。これを λ について展開すると

$$e^{i\lambda\hat{B}}\hat{A}e^{-i\lambda\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} e^{i\lambda\hat{B}} \hat{A} e^{i\lambda\hat{B}} \right]_{\lambda=0} \quad (2.2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} e^{i\lambda\hat{B}} i[\hat{B}, \hat{A}] e^{i\lambda\hat{B}} \right]_{\lambda=0} \quad (2.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[e^{i\lambda\hat{B}} i^n \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] \dots]}_n e^{i\lambda\hat{B}} \right]_{\lambda=0} \quad (2.4)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] \dots]}_n \quad (2.5)$$

よって $\lambda = 1$ を代入することで示せる。

$$e^{i\hat{B}}\hat{A}e^{-i\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] \dots]}_n \quad (2.6)$$

□

問題 2.2.

∂ を微分演算子とすると、 $(\partial e^{i\hat{B}})e^{-i\hat{B}} = -e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}})$ を示せ。

◇

証明

$1 = e^{i\hat{B}}e^{-i\hat{B}}$ に微分演算子を作用させることで示せる。

$$0 = \partial 1 = \partial(e^{i\hat{B}}e^{-i\hat{B}}) = (\partial e^{i\hat{B}})e^{-i\hat{B}} + e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) \quad (2.7)$$

$$(\partial e^{i\hat{B}})e^{-i\hat{B}} = -e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) \quad (2.8)$$

□

問題 2.3.

次の式を示せ。

$$e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial\hat{B}]] \dots]}_{n-1} \quad (2.9)$$

◇

証明

(1) において $\hat{A} = \partial$ を代入して示せる。

$$e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial]] \dots]}_n \dots \quad (2.10)$$

$$= \partial + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial]] \dots]}_n \dots \quad (2.11)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial \hat{B}]] \dots]}_{n-1} \dots \quad (2.12)$$

$$(2.13)$$

□

3 スピノル球関数

問題 3.1.

スピノル球関数を球面調和関数を用いて次のように定義する。

$$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left(\begin{array}{c} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{array} \right)_{j=l \pm 1/2} \quad (3.1)$$

軌道角運動量 \hat{L} , スピン角運動量 \hat{S} , 全角運動量 \hat{J} とする。

$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$ が持つパリティを求めよ。

◇

証明

球面調和関数におけるパリティは $(-1)^l$ となるからスピノル球関数のパリティは $(-1)^l$ となる。

$$Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (3.3)$$

□

問題 3.2.

$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$ が持つ \hat{J}_z の固有値を求めよ。

◇

証明

球面調和関数における固有値からスピノル球関数の \hat{J}_z の固有値は $m\hbar$ となる。

$$\hat{J}_z Y_l^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.4)$$

$$\hat{J}_z \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) = m\hbar \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (3.5)$$

□

問題 3.3.

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$ が持つ \hat{L}^2 の固有値を求めよ。

◇

証明

球面調和関数における固有値からスピノル球関数の \hat{L}^2 の固有値は $\hbar^2 l(l+1)$ となる。

$$\hat{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.6)$$

$$\hat{L}^2 \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (3.7)$$

□

問題 3.4.

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$ が持つ $\hat{L} \cdot \hat{S}$ の固有値を求めよ。

◇

証明

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$ に $\hat{L} \cdot \hat{S}$ を作用させると

$$\hat{L} \cdot \hat{S} \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (3.8)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (3.9)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left(\left(l \pm \frac{1}{2} \right) \left(l \pm \frac{1}{2} + 1 \right) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (3.10)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left(\pm \left(l + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

より固有値は $\frac{\hbar^2 l}{2}, -\frac{\hbar^2(l+1)}{2}$ となる。

□

問題 3.5.

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$ が持つ \hat{J}^2 の固有値を求めよ。

◇

証明

$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$ に $\hat{\mathbf{J}}^2$ を作用させると

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \hbar^2 j(j+1) \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (3.13)$$

$$= \hbar^2 \left(l \pm \frac{1}{2} \right) \left(\left(l \pm \frac{1}{2} \right) + 1 \right) \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (3.14)$$

$$= \hbar^2 \left(\left(l \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (3.15)$$

より固有値は $l^2 - \frac{1}{4}, (l+1)^2 - \frac{1}{4}$ となる。 \square

問題 3.6.

パウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ と位置ベクトル $\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ に対して $\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$ を計算し、スピノル球関数のみを用いて表せ。 \diamond

証明

まず演算子を計算すると

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

となる。三角関数を球面調和関数に作用させたときの固有値は次のようになるから

$$\cos \theta Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^m(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^m(\theta, \phi) \quad (3.17)$$

$$\sin \theta e^{i\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1}(\theta, \phi) \quad (3.18)$$

$$\sin \theta e^{-i\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1}(\theta, \phi) \quad (3.19)$$

次のように計算できる。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \cos \theta Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sin \theta e^{-i\phi} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sin \theta e^{i\phi} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \cos \theta Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (3.21)$$

$$, \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sin \theta e^{i\phi} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \cos \theta Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big)_{j=l \pm 1/2} \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l-m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ + \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m-\frac{1}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ , -\sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ + \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{3}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (3.23)$$

$$+ \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m-\frac{1}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \quad (3.24)$$

$$\pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \quad (3.25)$$

$$\pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \quad (3.26)$$

$$, -\sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \quad (3.27)$$

$$+ \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \quad (3.28)$$

$$\mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{3}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \quad (3.29)$$

$$\mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big)_{j=l \pm 1/2} \quad (3.30)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} (2l+1) \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2} \pm 1}{(2l+1)(2l+1 \pm 2)}} Y_{l \pm 1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ , \mp (2l+1) \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2} \pm 1}{(2l+1)(2l+1 \pm 2)}} Y_{l \pm 1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (3.31)$$

$$, \mp (2l+1) \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2} \pm 1}{(2l+1)(2l+1 \pm 2)}} Y_{l \pm 1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big)_{j=l \pm 1/2} \quad (3.32)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2j+1 \pm 1}} \begin{pmatrix} \sqrt{j + \frac{1}{2} \mp \left(m - \frac{1}{2}\right)} Y_{j \pm 1/2}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ , \mp \sqrt{j + \frac{1}{2} \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)} Y_{j \pm 1/2}^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix} = \mathcal{Y}_{j,m}^{\mp}(\theta, \phi) \quad (3.33)$$

$$, \mp \sqrt{j + \frac{1}{2} \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)} Y_{j \pm 1/2}^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big) = \mathcal{Y}_{j,m}^{\mp}(\theta, \phi) \quad (3.34)$$

よって次の式となる。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \mathcal{Y}_{j,m}^{\mp}(\theta, \phi) \quad (3.35)$$

□

4 水素原子における電子のエネルギー準位

問題 4.1.

中心力ポテンシャル $V(r) = -\frac{\alpha \hbar c}{r}$ のもとでディラック方程式を解くことにより得られる水素原子中の電子のエネルギー準位を考える。

主量子数 n が与えられたとき、全角運動量 j が取り得る値を答えよ。 ◇

証明

n と j に関して $n = j + n' + 1/2$ という関係があるから $j = 1/2, \dots, (2n-1)/2$ を取る。 □

問題 4.2.

主量子数 n , 全角運動量 j を持つ状態のエネルギー固有値の表式を書き下せ。また、そのエネルギー固有値の縮重度を答えよ。 ◇

証明

主量子数 n , 全角運動量 j を持つ状態のエネルギー固有値の表式は次のようになる。

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2}}} \quad (4.1)$$

また縮重度は $j = l \pm 1/2$ より $n' = 0$ において $2j + 1$ 、 $n' > 0$ において $2(2j + 1)$ となる。 □

問題 4.3.

主量子数 n を持つ状態の総数を求めよ。 ◇

証明

$n = j + n' + 1/2$ と $j = l \pm 1/2$ より状態の総数は $2n^2$ となる。

$$2n + 2 \times \sum_{n'=1}^{n-1} 2(n - n') = 2n^2 \quad (4.2)$$

□

問題 4.4.

電子の静止エネルギーから測った束縛エネルギーの大きさが縮退を除いて 7 番目と 10 番目

に大きい準位の主量子数 n と全角運動量 j をそれぞれ答えよ。また、それらの準位の束縛エネルギーの大きさを有効数字 6 桁で求めよ。◇

証明

7 番目に大きい準位は $n = 4, j = 1/2$ で 10 番目に大きい準位は $n = 4, j = 7/2$ である。またそれぞれの束縛エネルギーは

$$\mathcal{E} \approx -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2} - \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \frac{\alpha^4 mc^2}{2n^3} \quad (4.3)$$

$$\approx -\frac{13.60569}{n^2} - \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \frac{7.249022 \times 10^{-4}}{n^3} \quad (4.4)$$

$$\mathcal{E}_{4,1/2} \approx 0.850365 \quad (4.5)$$

$$\mathcal{E}_{4,7/2} \approx 0.850356 \quad (4.6)$$

となる。□

問題 4.5.

同じ主量子数 n を持つ状態でも全角運動量 j に依存してエネルギー準位が分裂する。この現象を表す名称を答えよ。◇

証明

微細構造 □