物理数学

Anko

2023 年 7 月 8 日

1 ベクトル解析

定義 (Kronecker のデルタ)**.**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1}$$

定義 (レビ・チビタの完全反対称テンソル (Levi-Civita antisymmetric tensor))**.**
ϵ_{ijk} は $1, -1, 0$ の値を取る. $\epsilon_{xyz} = 1$ であり, 任意の 2 つの添字の交換に対して符号を変え, また任意の 2 つの添字の値が等しければ 0 となる.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} &:= \begin{cases} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix} & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が順列のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} && (2) \\
&= \begin{cases} 1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が偶置換のとき}) \\ -1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が奇置換のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} && (3)
\end{aligned}$$

定義 (Einstein の縮約記法)**.**
同じ項で添字が重なる場合はその添字について和を取る.

$$A_i B_i = \sum_{i=x,y,z} A_i B_i \tag{4}$$

定義.
ベクトルについて内積と外積を定義する。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_i B_i \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) = \boldsymbol{e}_i \epsilon_{ijk} A_j B_k \tag{6}$$

定義.

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \partial_i A_i \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \boldsymbol{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \tag{9}$$

定理 1.

$$\boldsymbol{\nabla}(f+g) = \boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(fg) = f\boldsymbol{\nabla}g + g\boldsymbol{\nabla}f \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}f) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{21}$$

◇

証明

ベクトルのときは各要素について考える。

$$(\boldsymbol{\nabla}(f+g))_i = \partial_i(f+g) = \partial_i f + \partial_i g = (\boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g)_i \tag{22}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}(fg))_i = \partial_i(fg) = f\partial_i g + g\partial_i f = (f\boldsymbol{\nabla}g + g\boldsymbol{\nabla}f)_i \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}))_i &= \partial_i(A_jB_j) \quad (24)\\
&= (A_j\partial_iB_j + B_j\partial_iA_j) - (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) \quad (25)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) \quad (26)\\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) \quad (27)\\
&= \epsilon_{ijk}A_j\epsilon_{klm}\partial_lB_m + \epsilon_{ijk}B_j\epsilon_{klm}\partial_lA_m + A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i \quad (28)\\
&= (\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A})_i \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \partial_i(A_i+B_i) = \partial_i A_i + \partial_i B_i && (30)\\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} && (31)\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) &= \partial_i(fA_i) = f\partial_i A_i + A_i\partial_i f && (32)\\
&= f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f) && (33)\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \partial_i(\epsilon_{ijk}A_jB_k) && (34)\\
&= \epsilon_{ijk}(B_k\partial_i A_j + A_j\partial_i B_k) && (35)\\
&= B_k\epsilon_{kij}\partial_i A_j - A_j\epsilon_{jik}\partial_i B_k && (36)\\
&= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) && (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(A_k+B_k) && (38)\\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j A_k + \epsilon_{ijk}\partial_j B_k && (39)\\
&= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} && (40)\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) && (41)\\
&= f\epsilon_{ijk}\partial_j A_k + \epsilon_{ijk}A_k\partial_j f && (42)\\
&= f\epsilon_{ijk}\partial_j A_k - \epsilon_{ikj}A_k\partial_j f && (43)\\
&= (f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}f))_i && (44)\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}A_lB_m && (45)\\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}(B_m\partial_j A_l + A_l\partial_j B_m) && (46)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(B_m\partial_j A_l + A_l\partial_j B_m) && (47)\\
&= (B_j\partial_j A_i + A_i\partial_j B_j) - (B_i\partial_j A_j + A_j\partial_j B_i) && (48)\\
&= A_i\partial_j B_j - B_i\partial_j A_j + B_j\partial_j A_i - A_j\partial_j B_i && (49)\\
&= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} && (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j A_k) = \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 && (51)\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0 && (52)\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}\partial_l A_m) && (53)\\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m && (54)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m && (55)\\
&= \partial_j\partial_i A_j - \partial_j^2 A_i && (56)\\
&= (\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A})_i && (57)
\end{aligned}$$

□

2 微分幾何学

2.1 多様体

接ベクトル接ベクトル束

2.2 微分形式

定義 (微分形式)**.**

$\wedge$:

$$u \wedge v := u \otimes v - v \otimes u \tag{58}$$

0-形式

k-形式 $\omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} \in C^\infty(U)$

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} \tag{59}$$

定義 (外微分)**.**

外微分 (exterior derivative) $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} d\omega &:= d\left(\frac{1}{k!}\omega_{\mu_1 \cdots \mu_k}\right) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} && (60) \\ &= \frac{1}{k!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} && (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) && (62) \\ &= (dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta) \wedge (dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta) && (63) \\ &= (\cos\theta\sin\theta) dr \wedge dr + (r\cos^2\theta) dr \wedge d\theta - (r\sin^2\theta) d\theta \wedge dr - (r^2\sin\theta\cos\theta) d\theta \wedge d\theta && (64) \\ &= r dr \wedge d\theta && (65) \end{aligned}$$

定義 (1 の分割 (partition of unity)).

定理 2 (ストークスの定理).

◇

3　複素関数

この章では

3.1　複素数

高校では $i^2 = -1$ を満たす i を虚数単位といってこれを実数に付け加えたものを複素数と言っていました。これを代数の知識を用いて定義し直します。

定義.
$\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ を複素数体といい、 $\mathbb{C}$ と書く。この元を複素数といい、 x を虚数単位 (imaginary unit) といい、i と書くことにする。このとき任意の元 $z \in \mathbb{C}$ は 2 つの実数 $x, y \in \mathbb{R}$ を用いて $z = x + iy$ と表される。このとき関数 Re, Im を次のように定義する。

$$\begin{cases} x = \mathrm{Re}\, z \\ y = \mathrm{Im}\, z \end{cases} \tag{66}$$

命題 3.
複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z = x + iy$ とすると次が成り立つ。

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \tag{67}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{68}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{69}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{70}$$

◇

証明

複素数体 $\mathbb{C}$ において $\{1, i\}$ は基底となるから線形独立であり $x + iy = 0$ ならば $x = 0$ かつ $y = 0$ である。これより次のようになる。

$$z_1 = z_2 \iff z_1 - z_2 = 0 \iff (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = 0 \tag{71}$$

$$\iff x_1 - x_2 = 0 \land y_1 - y_2 = 0 \iff x_1 = x_2 \land y_1 = y_2 \tag{72}$$

他の等式は計算すれば満たすことが分かる。 □

また交換法則、結合法則、分配法則を満たすことが分かるので $\mathbb{C}$ は可換体です。

定義.
複素数 $z = x + iy$ の絶対値 (absolute value)、共役複素数 (complex conjugate) をそれぞれ次のように定義する。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{73}$$

$$\overline{z} = x - iy \tag{74}$$

命題 4.
複素数 $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して次の式が成り立つ。

$$|z|^2 = z\overline{z} \tag{75}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{76}$$

◇

証明
最初の式については $z = x + iy$ と置くと次のように表される。

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z\overline{z} \tag{77}$$

次に第二式の各項についてそれぞれを二乗した値を比較する。

$$(|z_1| - |z_2|)^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \tag{78}$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2) \tag{79}$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \tag{80}$$

ここで $x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \geq 2x_1x_2y_1y_2$ であるから $x^2 \leq y^2 \implies |x| \leq |y|$ より第二式が成り立つ。 □

無限遠点

リーマン面リーマン球面

3.2 複素変数の関数

定理 5 (コーシー・リーマンの方程式).

複素変数の関数 $f(z) \in \mathbb{C}(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ が $z = z_0$ で微分可能であるとき導関数 $f'(z_0)$ は次のように書くことができる。

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{81}$$

このとき実関数 u, v は次の式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{82}$$

◇

証明

$\Delta z = \Delta x + 0i$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} && (83) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} && (84) \\ &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} && (85) \end{aligned}$$

$\Delta z = 0 + i\Delta y$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} && (86) \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{i\Delta y} && (87) \\ &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} && (88) \end{aligned}$$

これより領域において次が成り立つ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{89}$$

□

3.3 正則関数

定理 6.

Riemman Roch の定理 ◇

定義 (初等関数)**.**

指数関数 $2\pi i$ 周期で同じ

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{90}$$

三角関数

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{91}$$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{92}$$

$$\tan z := \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \tag{93}$$

双曲線関数

$$\sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \tag{94}$$

$$\cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \tag{95}$$

$$\tanh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} \tag{96}$$

対数関数

$$\log z := \log r + i\theta \qquad (z \neq 0) \tag{97}$$

$$\theta = \arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi \tag{98}$$

$$\operatorname{Log} z := \log r + i \operatorname{Arg} z \tag{99}$$

命題 7.

$$\sin^{-1} z = -i \log\Big(iz + (1 - z^2)^{1/2}\Big) \tag{100}$$

◇

定理 8 (一致の定理)**.**

領域 D で正則な関数 $f(z), g(z)$ があり、D の小領域もしくは曲線上で一致しているとき、領域 D 全体で $f(z) = g(z)$ が成り立つ。 ◇

証明

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{101}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{102}$$

□

定理 9 (解析接続).

◇

4　フーリエ解析

4.1　フーリエ級数

定義 (複素フーリエ級数).
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上 関数 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ に対し

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{103}$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \tag{104}$$

例

定理 10 (Bessel の不等式).

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2 \tag{105}$$

◇

定理 11 (平均値の定理).

区間 $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ について $a < c < b$ となる c が存在して次のようになる。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{106}$$

◇

命題 12.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{107}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{m,n} \tag{108}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{m,n} \tag{109}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta_{n,0} \tag{110}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{111}$$

◇

証明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\,\mathrm{d}x \tag{112}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \tag{113}$$

$$= 0 \tag{114}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\,\mathrm{d}x \tag{115}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n} + \dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \dfrac{1}{2}\left[x + \dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \tag{116}$$

$$= \pi\delta_{m,n} \tag{117}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,\mathrm{d}x \tag{118}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n} - \dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \dfrac{1}{2}\left[x - \dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \tag{119}$$

$$= \pi\delta_{m,n} \tag{120}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [x]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \tag{121}$$

$$= 2\pi\delta_{n,0} \tag{122}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[-\dfrac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [0]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \tag{123}$$

$$= 0 \tag{124}$$

□

定義 (2π の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{125}$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{d}x \tag{126}$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \tag{127}$$

定義 (2π の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{128}$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,\mathrm{d}x \tag{129}$$

証明

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{130}$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})\right) \tag{131}$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right) \tag{132}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{133}$$

ただし c_n は次のように定める。

$$c_n := \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n > 0) \\ \dfrac{a_0}{2} & (n = 0) \\ \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n < 0) \end{cases} \tag{134}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}e^{-inx}\,\mathrm{d}x \tag{135}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,\mathrm{d}x \tag{136}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m 2\pi\delta_{m,n} \tag{137}$$
$$= c_n \tag{138}$$

□

定義 (一般の周期をもつ関数のフーリエ級数)**.**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{139}$$
$$a_n := \frac{1}{l}\int_{-l}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \tag{140}$$
$$b_n := \frac{1}{l}\int_{-l}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \tag{141}$$

定義 (一般の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \tag{142}$$

$$c_n := \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x \tag{143}$$

定理 13.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{144}$$

◇

補題 14 (コーシーの不等式).

実数の数列 $\{p_n\}_n, \{q_n\}_n$ について次の不等式が成立する。

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2\right) \geq \left(\sum_{n=1}^{N} p_n q_n\right)^2 \tag{145}$$

◇

証明

x について次の 2 次関数の判別式を考えることで求まる。

$$\sum_{n=1}^{N} (p_n x + q_n)^2 \geq 0 \tag{146}$$

□

定理 15 (ワイエルシュトラスの M テスト).

区間 $[a, b]$ で定義された関数列の無限級数 $s(x)$ の各項の絶対値が上界 M_n をもち、 M_n の総和が収束するならばもとの級数は $[a, b]$ で一様収束する。

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{147}$$

◇

証明

□

5 特殊関数

定義.
複素平面上で $\mathrm{Re}\, z > 1$ を満たす領域内にある閉曲線 C 上の点 z に対して次の関数は一様収束し正則な関数となる.

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t \tag{148}$$

命題 16.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{149}$$

$$\Gamma(1) = 1 \tag{150}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{151}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{152}$$

◇

命題 17 (スターリングの公式 (Stirling's formula))**.**

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \qquad (x \gg 1) \tag{153}$$

◇

命題 18.
ガウスの公式 (Gauss's formula)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{154}$$

$$\tag{155}$$

◇

命題 19.
ワイエルシュトラスの公式 (Weierstrass' formula) γ はオイラーの定数 (Euler's constant) と

する.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \tag{156}$$

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \log n\right) = 0.577216\cdots \tag{157}$$

◇

定義.

ベータ関数 (Beta function)

$$B(z,\zeta) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}\,\mathrm{d}t \tag{158}$$

命題 20.

$$B(z,\zeta) = B(\zeta,z) \tag{159}$$

$$B(z,\zeta) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2z-1}\theta\cos^{2\zeta-1}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{160}$$

$$B(z,\zeta) = \int_0^{\infty}\frac{u^{z-1}}{(1+u)^{z+\zeta}}\,\mathrm{d}\theta \tag{161}$$

$$B(z,\zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \tag{162}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{163}$$

◇

定義 (ルジャンドル微分方程式)**.**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{164}$$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty}a_j x^j \tag{165}$$

定義 (ルジャンドルの陪微分方程式)**.**
ルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \tag{166}$$

これを満たす独立な 2 つの解 $P_n^m(x)$ と $Q_n^m(x)$ を第一種および第二種ルジャンドル陪関数はルジャンドル関数で表される。

定義.
ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{167}$$

定義.
ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{168}$$

定義.
ラゲール多項式

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{z^n}{n!} \tag{169}$$

命題 21.

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) \tag{170}$$

$$L_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n!)^2}{(l!)^2 (n-l)!} x^l \tag{171}$$

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{172}$$

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{173}$$

$$L_n(0) = n! \tag{174}$$

◇

定義.

次の級数展開の右辺に現れる $H_n(x)$ をエルミート多項式 (Hermite polynomials) という.

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \tag{175}$$

また, 左辺の関数はエルミート多項式の母関数 (generating function) という.

命題 22.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \tag{176}$$

◇

定義.

超幾何関数

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{177}$$

命題 23.

$$e^x = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right) \tag{178}$$

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1, 1, 2; -x) \tag{179}$$

◇

5.1 境界値問題

定義.
ラプラス方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{180}$$

ポアソン方程式 (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \tag{181}$$

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{182}$$

熱伝導方程式 (heat conduction equation)
κ を熱伝導率 (thermal conductivity)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \tag{183}$$

命題 24.
ラプラス方程式を満たし

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{184}$$

次の境界条件を満たす関数 $u(x, y)$ を求める。

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0 \tag{185}$$

◇

証明
これは変数分離法が使えないと思う。

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{186}$$

ラプラス方程式

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{187}$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{188}$$
$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \tag{189}$$
$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \tag{190}$$
$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{191}$$
$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \tag{192}$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \tag{193}$$

□

定理 25 (ガウス積分)**.**

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{194}$$
$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(2n-1)!!\frac{a^{2n+1}}{2^{n+1}} \tag{195}$$
$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2}a^{2n+2} \tag{196}$$
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-k^2/4} e^{ikx}\,\mathrm{d}k = 2\sqrt{\pi}e^{-x^2} \tag{197}$$

◇

証明

まず積分値を I とおく。

$$I := \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{198}$$

ここで I^2 を変数変換して計算する。

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right) \tag{199}$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{200}$$
$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \tag{201}$$
$$= 2\pi\left[-\frac{e^{-\alpha r^2}}{2\alpha}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{a} \tag{202}$$

よって

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{203}$$

また

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x && (204)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x && (205)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) && (206)\\
&= \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \alpha^{-(2n+1)/2} && (207)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x && (208)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x && (209)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{2\alpha} && (210)\\
&= \frac{n!}{2} \alpha^{-(n+1)} && (211)
\end{aligned}$$

□