プラズマ物理学

21B00349 宇佐見大希

2024 年 2 月 4 日

目次

1 プラズマ

プラズマとは高エネルギー状態で励起・電離し、陽イオンと電子が熱運動している状態のこと。

種類	質量	電荷　力
陽イオン	$M \approx 1800m$	$Z_\sigma e$
電子	$m = 511$ keV	$-e$

表 1

$$\alpha_\sigma = \frac{n_\sigma}{N_\sigma} \tag{1.1}$$

1.1 散乱断面積

$$D = r_1 + r_2 \tag{1.2}$$

$$\sigma(\chi) = \frac{D^2}{4} \tag{1.3}$$

$$\sigma(\chi) = \left| \frac{b}{\sin b} \frac{db}{d\chi} \right| \tag{1.4}$$

$$Q = \int W(\chi)\sigma(\chi)\, d\Omega = \int_0^\pi W(\chi)\sigma(\chi) 2\pi \sin\chi\, d\chi \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \dfrac{q_0 q}{r^2} \\ F_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

これらをエネルギー積分することで保存量を見出すことができる。

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}L = 0 \tag{1.7}$$

$$m\dot{r}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - \frac{q_0 q}{r^2}\dot{r} = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} - \frac{q_0 q}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{q_0 q}{r}\right) = 0 \tag{1.8}$$

これより初期状態において速度 v_0, $r \to \infty$ に対して最近接距離 $r_{\min}$ のとき $\dot{r} = 0$ となるから次のように求まる。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{L_0^2}{2mr_{\min}^2} + \frac{q_0 q}{r_{\min}}, \qquad L_0 = mv_0 b \tag{1.9}$$

$$r_{\min}^2 - \frac{2q_0 q}{mv_0^2} r_{\min} - b^2 = 0 \tag{1.10}$$

$$r_{\min} = \frac{q_0 q}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{q_0 q}{mv_0^2}\right)^2 + b^2} \tag{1.11}$$

次の関係式が成り立つ。

$$\tan\frac{\chi}{2} = \frac{q_0 q}{bmv_0^2} \tag{1.12}$$

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{1.13}$$

これを課題 1 の式に代入することで次のような関係式が成り立つ。

$$r_{\min} = \frac{q_0 q}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \tan^2\frac{\chi}{2}}\right) \tag{1.14}$$

散乱角を $\chi \ll 1$ とすると $n \sim 10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$ 温度 $T \sim 10\ \mathrm{keV}$ より

$$r_{\min} = \frac{q_0 q}{2mv_0^2} = \frac{q_0 q}{2k_B T} = 5.0 \times 10^{-5}\mathrm{m} \tag{1.15}$$

1.2 Maxwell-Boltzmann 分布

統計力学より速度分布関数は熱平衡状態を特徴付ける系の熱速度 $v_t = \sqrt{k_B T/m}$ を用いて次のように書ける。

$$f(\boldsymbol{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_B T}\right) = \frac{n}{(2v_t^2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right) \tag{1.16}$$

これを積分すると

$$\int f(\boldsymbol{v};t)\,d\boldsymbol{v} = \frac{n}{(2v_t^2\pi)^{3/2}} \int \exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right) d\boldsymbol{v} = n \tag{1.17}$$

より任意の物理量 $Q(\boldsymbol{v})$ の全速度空間の平均値は次のようになる。

$$\langle Q(\boldsymbol{v})\rangle = \int Q(\boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{v};t)\,d\boldsymbol{v} \Big/ \int f(\boldsymbol{v};t)\,d\boldsymbol{v} = \frac{1}{n}\int Q(\boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{v};t)\,d\boldsymbol{v} \tag{1.18}$$

$d\boldsymbol{v} = 4\pi v^2\,dv$

$$\langle 1\rangle = \frac{1}{(2v_t^2\pi)^{3/2}}\int \exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right)d\boldsymbol{v} = 1 \tag{1.19}$$

$$\langle q\boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{(2v_t^2\pi)^{3/2}}\int q\boldsymbol{v}\exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right)d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1.20}$$

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2\right\rangle = \frac{1}{(2v_t^2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{2}mv^2\exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right)d\boldsymbol{v} = \frac{3}{2}mv_t^2 = \frac{3}{2}k_BT \tag{1.21}$$

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2\boldsymbol{v}\right\rangle = \frac{1}{(2v_t^2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{2}mv^2\boldsymbol{v}\exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right)d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1.22}$$

$$\langle v^3\rangle = \frac{1}{(2v_t^2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty 4\pi v^5\exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right)dv = 4\pi\left(\frac{2v_t^2}{\pi}\right)^{3/2} \tag{1.23}$$

$$\langle v^4\rangle = \frac{1}{(2v_t^2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty 4\pi v^6\exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right)dv = 15v_t^4 = 15\frac{T^2}{m^2} \tag{1.24}$$

さらに電場が掛かっている状態のとき Boltzmann 分布

$$f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}) = n_0\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2/2+q\varphi(\boldsymbol{r})}{k_BT}\right) = \frac{n(\boldsymbol{r})}{(2v_t^2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right) \tag{1.25}$$

$$\int f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{v} = n(\boldsymbol{r}) = n_0\exp\left(-\frac{q\varphi(\boldsymbol{r})}{k_BT}\right) \tag{1.26}$$

速度 $\boldsymbol{u}_0 = (0,0,u_0)$ で移流している温度 T のプラズマは次のように与えられる。Debye 長の 2 乗程度大きく個別運動をしつつ、より大きなスケールでは集団振動していることが分かる。

1.3 Debye 遮蔽

電子は質量が軽い $m \ll 1$ として慣性項を無視、圧力 $p = nT$ を用いて電子温度は空間的に一様であるとすると

$$mn\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} = nq\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) - \nabla p \tag{1.27}$$

$$0 = -nq\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) - T\nabla n \tag{1.28}$$

$$n = n_0\exp\left(-\frac{q\varphi(\boldsymbol{r})}{T}\right) \tag{1.29}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{T}{q}\ln\left(\frac{n}{n_0}\right) \tag{1.30}$$

$q=-e, Ze$ $m=m_e, M$, $Zn_i=n_e$

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{T\nabla n}{nq} = \frac{T\nabla n_e}{n_e e} = -\frac{T\nabla n_i}{n_i Ze} \tag{1.31}$$
$$\delta n_i = -\frac{Ze\varphi}{T_i} n_{i0} \tag{1.32}$$

ポテンシャルとそれを構築する電荷分布は次のようになる。

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q_0}{r}\exp(-k_d r) \tag{1.33}$$
$$\rho(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{k_d^2 q_0}{r}\exp(-k_d r) \tag{1.34}$$

これより総電荷は次のようになる。

$$\int \rho(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} = -k_d^2 q_0 \int \frac{\exp(-k_d r)}{r}\, d\boldsymbol{r} = -q_0 \tag{1.35}$$

1.4　プラズマ振動

2　集団運動と個別運動

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_i \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i) \tag{2.1}$$
$$\rho_{\boldsymbol{k}}(t) = \int \rho(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} = \sum_i e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{2.2}$$

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}_i) = 4\pi e\rho(\boldsymbol{r}_i) = 4\pi e\sum_{j\neq i}\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j) = 4\pi e\sum_{j\neq i}\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)}\, d\boldsymbol{k} \tag{2.3}$$
$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(\boldsymbol{k})\nabla^2 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i}\, d\boldsymbol{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int(-k^2)\varphi(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i}\, d\boldsymbol{k} \tag{2.4}$$
$$\varphi(\boldsymbol{k}) = -\frac{4\pi e}{k^2}\sum_{j\neq i} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_j} \tag{2.5}$$
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{k} = -\frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int\sum_{j\neq i}\frac{1}{k^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)}\, d\boldsymbol{k} \tag{2.6}$$
$$= -4\pi e\sum_{\boldsymbol{k}}{}'\sum_{j\neq i}\frac{1}{k^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)} \tag{2.7}$$
$$\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) = -4\pi e i\sum_{\boldsymbol{k}}{}'\sum_{j\neq i}\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)} \tag{2.8}$$

$$\dot{\rho}_{\boldsymbol{k}} = -i\sum_i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_i)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{2.9}$$

$$\ddot{\rho}_{\boldsymbol{k}} = -\sum_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_i)^2 + i\boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_i]e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{2.10}$$

$$= -\sum_i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_i)^2e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} - \sum_i i\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{e\nabla\varphi(\boldsymbol{r}_i)}{m}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{2.11}$$

$$= -\sum_i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_i)^2e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} - \frac{4\pi e^2}{m}\sum_i\boldsymbol{k}\cdot\left(\sum_{\boldsymbol{q}}{}'\sum_{j\neq i}\frac{\boldsymbol{q}}{q^2}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{2.12}$$

$$= -\sum_i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_i)^2e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} - \frac{4\pi e^2}{m}\sum_i\sum_{\boldsymbol{q}}{}'\rho_{\boldsymbol{q}}\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{q^2}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i} \tag{2.13}$$

$$= -\frac{T}{m}k^2\rho_{\boldsymbol{k}} - \frac{4\pi e^2}{m}\sum_{\boldsymbol{q}}{}'\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{q^2}\right)\rho_{\boldsymbol{q}}\rho_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}} \tag{2.14}$$

$$= -\frac{T}{m}k^2\rho_{\boldsymbol{k}} - \omega_p^2\rho_{\boldsymbol{k}} - \frac{4\pi e^2}{m}\sum_{\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{k}}{}'\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{q^2}\right)\rho_{\boldsymbol{q}}\rho_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}} \tag{2.15}$$

$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{q}$ のとき $\rho_0 = n_0$ であるから

$$\ddot{\rho}_{\boldsymbol{k}} + \left[\omega_p^2 + \frac{3k_BT}{m}k^2\right]\rho_{\boldsymbol{k}} = -\frac{4\pi e^2}{m}\sum_{\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{k}}{}'\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q}}{q^2}\right)\rho_{\boldsymbol{q}}\rho_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}} \tag{2.16}$$

つまり運動方程式において波数 $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}$ の波から波数 $\boldsymbol{k}$ の波に相互作用する。3 次元ではなく 1 次元であると仮定する以外で係数 3 は消すことが出来なかった。

2.1 ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha}\right)dx = (\alpha\pi)^{1/2} \tag{2.17}$$