計算物理

anko

2023 年 5 月 29 日

1　差分法

$$\frac{\partial f(x_i,t_n)}{\partial t} \approx \frac{f(x_i,t_{n+1})-f(x_i,t_n)}{\Delta t} \tag{1}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \tag{2}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \tag{3}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1})-f(x_{n-1})}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{4}$$

$f(x \pm k\Delta x)$ の Taylor 展開で 2 次以外の項を相殺することで次の式が得られる.

$$f''(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1})-2f(x_n)+f(x_{n-1})}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{5}$$

$$f''(x_n) \approx \frac{-f(x_{n+2})+16f(x_{n+1})-30f(x_n)+16f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}{12\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \tag{6}$$

1.1　拡散方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$\frac{f(x_i,t_{n+1})-f(x_i,t_n)}{\Delta t} = \kappa \frac{f(x_{i+1},t_n)-2f(x_i,t_n)+f(x_{i-1},t_n)}{\Delta x^2} \tag{8}$$

$$f(x_i,t_{n+1}) = f(x_i,t_n) + \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2}(f(x_{i+1},t_n)-2f(x_i,t_n)+f(x_{i-1},t_n)) \tag{9}$$

1.2　フォン・ノイマンの安定性解析

時間が経つと共に振幅が増大しないことは安定性の条件となる.

$$f(x,t) = \sum_k A_k(t) e^{ikx} \tag{10}$$

$$\left| \frac{A_k(t_{n+1})}{A_k(t_n)} \right| \leq 1 \tag{11}$$

CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件とは計算上の情報の伝播する速さより物理的な情報の伝播する速さが小さいことは安定性の条件となる.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c \tag{12}$$

1.3 移流方程式

差分法だと不安定となる．これは差分により拡散項が増えてしまったからである．2 次中心差分で離散化したものについて安定性解析する.

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -c\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \tag{13}$$

$$\frac{f(x_i,t_{n+1}) - f(x_i,t_n)}{\Delta t} = -c\frac{f(x_{i+1},t_n) - f(x_{i-1},t_n)}{2\Delta x} \tag{14}$$

$$(A(t_{n+1}) - A(t_n))\frac{e^{ikx_i}}{\Delta t} = -c\big(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\big)\frac{A(t_n)e^{ikx_i}}{2\Delta x} \tag{15}$$

$$\left|\frac{A(t_{n+1})}{A(t_n)}\right| = \sqrt{|1 - i\nu\sin(k\Delta x)|^2} = \sqrt{1+\nu^2\sin^2(k\Delta x)} > 1 \tag{16}$$

後退差分で離散化したものについて安定性解析する.

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -c\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \tag{17}$$

$$\frac{f(x_i,t_{n+1}) - f(x_i,t_n)}{\Delta t} = -c\frac{f(x_i,t_n) - f(x_{i-1},t_n)}{\Delta x} \tag{18}$$

$$(A(t_{n+1}) - A(t_n))\frac{e^{ikx_i}}{\Delta t} = -c\big(1 - e^{-ik\Delta x}\big)\frac{A(t_n)e^{ikx_i}}{\Delta x} \tag{19}$$

$$\left|\frac{A(t_{n+1})}{A(t_n)}\right| = \sqrt{|1 - \nu(1 - e^{-ik\Delta x})|^2} \tag{20}$$

$$= \sqrt{1 - 2\nu(1-\nu)(1-\cos(k\Delta x))}\begin{cases} \leq 1 & (\nu \leq 1) \\ > 1 & (\nu > 1) \end{cases} \tag{21}$$

CFL 条件

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -c\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \tag{22}$$

$$\frac{f(x_i,t_{n+1}) - f(x_i,t_n)}{\Delta t} = -c\frac{f(x_i,t_n) - f(x_{i-1},t_n)}{\Delta x^2} \tag{23}$$

$$\dot{f}(x_i,t_n) + \frac{\Delta t}{2}\ddot{f}(x_i,t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) = -cf'(x_i,t_n) + \frac{c\Delta x}{2}f''(x_i,t_n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{24}$$

1.4 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F} \tag{25}$$

まず無次元化する.

$$\boldsymbol{v} = V\tilde{\boldsymbol{v}} \qquad \boldsymbol{r} = L\tilde{\boldsymbol{r}} \qquad t = \frac{L}{V}\tilde{t} \qquad p = \rho V^2\tilde{p} \qquad \boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{L}\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{V}{L}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \qquad \mathrm{Re} = \frac{UV}{\nu} \tag{26}$$

レイノルズ数 Re は慣性力と粘性力の比に対応する．

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial \tilde{t}} = -(\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nabla}})\tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{p} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\tilde{\boldsymbol{\nabla}}^2\tilde{\boldsymbol{v}} \tag{27}$$

これ以降, 無次元量を表すチルダは略す．$\boldsymbol{v} = (u, v, 0)$ とするとき, 次の渦度方程式となる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)u - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u \tag{28}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)v - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v \tag{29}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\omega - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\omega + \frac{1}{\mathrm{Re}}\boldsymbol{\nabla}^2\omega \qquad \left(\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{30}$$

ここでは非圧縮性液体 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ のときを考える．

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\omega + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\omega \tag{31}$$

ここで流れ関数 Φ を導入する．

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \omega = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \nabla^2\Phi \tag{32}$$

流れ関数を用いると解くべき方程式は渦度方程式とポアソン方程式に分けることができる．

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\omega \tag{33}$$

$$\nabla^2\Phi = -\omega \tag{34}$$

ポアソン方程式については差分法で解ける．

$$\nabla^2\Phi = -\omega \tag{35}$$

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \omega_{i,j} \tag{36}$$

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - \Delta x^2\omega_{i,j}\right) \tag{37}$$

初期値を適当にセットして, この漸化式を収束するまで繰り返し更新する．この漸化式を改良させて収束を早めることができる．次の漸化式を順にヤコビ法, ガウス・ザイデル法, SOR 法という．

$$\Phi_{i,j}^{\mathrm{new}} = \frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - \Delta x^2\omega_{i,j}\right) \tag{38}$$

$$\Phi_{i,j}^{\mathrm{new}} = \frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j}^{\mathrm{new}} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}^{\mathrm{new}} - \Delta x^2\omega_{i,j}\right) \tag{39}$$

$$\Phi_{i,j}^{\mathrm{new}} = C_{SOR}\frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j}^{\mathrm{new}} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}^{\mathrm{new}} - \Delta x^2\omega_{i,j}\right) + (1 - C_{SOR})\Phi_{i,j} \quad (0 < C_{SOR} < 2) \tag{40}$$