集合論

Anko

2023 年 7 月 17 日

1 公理的集合論の基礎

1.1 論理

公理 (外延性)**.**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \iff z \in y) \implies x = y) \tag{1}$$

公理 (内包性図式)**.**
変数 y を自由変数として用いない任意の論理式 ϕ を用いて次のように表せられる。

$$\exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \land \phi) \tag{2}$$

定義 (内包性図式)**.**
$\{x \in z : \phi\} \coloneqq y \, !s.t. \, \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \in z \land \phi)$。これは外延性より唯一つに定まる.

定理 1.

$$\exists y \forall x (x \notin y) \tag{3}$$

$\diamond$

証明

内包性より $\exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \land x \neq x)$ となる。z には真のクラスは含まれないから 1 つも元のない集合となる $\exists y \forall x (x \in y \iff x \notin z)$。これより、$\forall x (x \notin y)$ となる y の存在が正当化される。 $\square$

定義.
上の集合 y を空集合 $\emptyset$ と呼ぶ。

定理 2.

$$\neg \exists z \forall x (x \in z) \tag{4}$$

$\diamond$

証明

$\forall x (x \in z)$ となる z が存在すると仮定すると, 内包性より $\{x \in z : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$ が存在, つまり $\exists y \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \notin x)$ となる。しかし x に y を代入することで $y \in y \longleftrightarrow y \notin y$ より矛盾。よってそのような z は存在しない. $\square$

公理 (対).

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \land y \in z) \tag{5}$$

定義.

対

$$\{x, y\} \coloneqq \{v \in z : v = x \vee v = y\} \tag{6}$$

単集合

$$\{x\} \coloneqq \{x, x\} \tag{7}$$

順序対

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\} \tag{8}$$

公理 (和集合)**.**

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \to x \in A) \tag{9}$$

定義.

和集合

$$\bigcup \mathcal{F} \coloneqq \{x : \exists Y \in \mathcal{F}(x \in Y)\} \tag{10}$$

共通部分

$$\bigcap \mathcal{F} \coloneqq \{x : \forall Y \in \mathcal{F}(x \in Y)\} \tag{11}$$

和集合

$$A \cup B \coloneqq \bigcup \{A, B\} \tag{12}$$

積集合

$$A \cap B \coloneqq \bigcap \{A, B\} \tag{13}$$

差集合

$$A \setminus B \coloneqq \{x \in A : x \notin B\} \tag{14}$$

公理 (置換図式)**.**

$$\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y) \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y) \tag{15}$$

定理 3 (置換図式)**.**

$$\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y) \to \exists \{y : \exists x \in A \phi(x, y)\} \tag{16}$$

◇

証明

$\forall x \in A \exists ! y \phi(x, y)$ を仮定すると, 置換公理より $\forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y)$ を満たす集合 Y が存在し, 内包性公理より $\{y \in Y : \exists x \in A \phi(x, y)\}$ が存在する。これは $Y' = \{y : \exists x \in A \phi(x, y)\}$ とおくと, Y' の濃度は A の濃度以下であるから集合として存在し, $Y = Y'$ となる。 □

定義 (直積集合)**.**
$A \times B \coloneqq \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$

証明

置換公理と内包性公理より, 各 $y \in B$ に対し,

$$\forall x \in A \exists! z\{z = \langle x, y\rangle\} \mathrm{prod}(A, y) \coloneqq \{z : \exists x \in A(z = \langle x, y\rangle)\} \tag{17}$$

また, 次のように定義できる。

$$\forall y \in B \exists! z\{z = \mathrm{prod}\{A, y\}\} \mathrm{prod}'(A, B) \coloneqq \{\mathrm{prod}\{A, y\} : y \in B\} \tag{18}$$

$A \times B \coloneqq \bigcup \mathrm{prod}'(A, B)$ と置くことで定義の正当性が分かる。 □

定義.
関係
任意の要素が順序対となる集合.
定義域, 値域
関係 R に対し, 定義域 $\mathrm{dom}(R)$ と値域 $\mathrm{ran}(R)$ は次のように定義する。

$$\mathrm{dom}(R) = \{x : \exists y\{\langle x, y\rangle \in R\}\} \tag{19}$$

$$\mathrm{ran}(R) = \{y : \exists x\{\langle x, y\rangle \in R\}\} \tag{20}$$

関係 R は通常 $R \subset \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{ran}(R)$ となる場合だけに使われる。
$R^{-1} \coloneqq \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}$

定理 4.
関係 R に対し $\{R^{-1}\}^{-1} = R$ となる。 ◇

証明

R は関係であるから任意の R の元は順序対であり, それぞれに対し反転を 2 回行えば元に戻る。 □

定義 (関数)**.**
関係 f が $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \exists y \in \mathrm{ran}(f)\{\langle x, y\rangle \in f\}$ を満たすとき f を関数と呼ぶ。また, 関数 f について $A = \mathrm{dom}(f), B \supset \mathrm{ran}(f)$ を満たすとき, $f : A \to B$ と書く。
関数の制限

定義 (狭義全順序)**.**
集合 A 関係 R に対し, 次を満たす組 $\langle A, R\rangle$ を狭義全順序と呼ぶ。

$$\text{推移律} \quad \forall x, y, z \in A(xRy \land yRz \to xRz) \tag{21}$$
$$\text{三分律} \quad \forall x, y \in A(x = y \lor xRy \lor yRx) \tag{22}$$
$$\text{非反射律} \quad \forall x \in A\{\neg\{xRx\}\} \tag{23}$$

定理 5.
$\langle A, R\rangle$ が狭義全順序ならば, 任意の $B \subset A$ について $\langle B, R\rangle$ は狭義全順序となる。 $\diamond$

証明
$R \subset \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{ran}(R)$ より集合に対して関係の集合は依存していない。また推移律, 三分律, 非反射律は存在を示している訳ではないので B に対しても成立する。よって $\langle B, R\rangle$ は狭義全順序となる。 $\square$

定義.
同型写像集合と関係の対 $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ について全単射 $f : A \to B$ が存在し $\forall x, y \in A(xRy \iff f(x)Sf(y))$ となるとき $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ と書き, f を同型写像と呼ぶ。
整列順序全順序 $\langle A, R\rangle$ について A の空でない任意の部分集合に必ず R-最小の要素があるとき, $\langle A, R\rangle$ が整列順序であるという。
切片 $\mathrm{pred}(A, x, R) \coloneqq \{y \in A : yRx\}$

定理 6.
$\langle A, R\rangle$ を整列順序とするとき, 任意の $x \in A$ に対して $\langle A, R\rangle \ncong \langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle$ である。
$\diamond$

証明

$f : A \to \mathrm{pred}(A, x, R)$ が同型写像であると仮定すると, 集合 $\{y \in A : f(y) \neq y\}$ の R-最小要素 y が。 $\square$

定理 7.

$\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ を互いに同型な整列順序とするとき, この間の同型写像は唯一つ存在する。

$\diamond$

証明

仮に 2 つの同型写像 f, g が存在したとき $f(y) \neq g(y)$ であるような $y \in A$ のうち R-最小の y を考えると矛盾。 $\square$

定理 8.

$\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ を整列順序とするとき, 次の 3 つの命題は互いに背反である。

$$\text{(a)} \quad \langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle \tag{24}$$

$$\text{(b)} \quad \exists y \in B\{\langle A, R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, y, S), S\rangle\} \tag{25}$$

$$\text{(c)} \quad \exists x \in A\{\langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle\} \tag{26}$$

$\diamond$

証明

次のように f を定める。

$$f = \{\langle v, w\rangle : v \in A \wedge w \in B \wedge \langle \mathrm{pred}(A, v, R), R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, w, S), S\rangle\} \tag{27}$$

このとき, f は A のある切片から B のある切片への同型写像となるが, これら二つの切片の両方が真の切片となることはありえない。 $\square$

公理 (選択公理).

$\forall A \exists R$(R は A を整列順序づけする)

1.2 順序数

定義 (推移的).

集合 x の任意の要素が同時に x の部分集合でもあるとき x が推移的であると呼ぶ。

定義 (順序数)**.**
推移的な集合 x が $\in$ によって整列順序づけされるとき, x を順序数と呼ぶ。

定理 9.

1. x が順序数で $y \in x$ なら, y も順序数で $y = \mathrm{pred}(x, y)$。
2. x と y が順序数で $x \cong y$ なら, $x = y$。
3. x と y が順序数なら, $x \in y, y \in x, y = x$ のどれか 1 つだけが成立する。
4. x と y と z が順序数で $x \in y, y \in z$ であれば, $x \in z$ である。
5. C が順序数の空でない集合であれば, $\exists x \in C \forall y \in C(x \in y \vee x = y)$。

$\diamond$

証明

1. 推移的であるから y も順序数であり $\mathrm{pred}(x, y) = \{z \in x : z \in y\} = y$ となる。
2. 具体的な集合は空集合しか定義されていないから x, y が同じように推移的であるならば $x = y$ であることが分かる。
3. (1), (2) と定理 (ref) より成立する。$x = \{x\}$ などの自分自身の元となる推移的な集合は順序数でないから 2 つ同時に成立することはない。
4. 推移的である為, 成り立つ。
5. C の $\in$-最小 x について $x \cap C = 0$ となる。よって 0 に含まれる元は存在しないことと (3) より x は条件を満たす。

よって全て示された。 $\square$

定理 10.
$\neg \exists z \forall x(x!$は順序数 $\to x \in z)$ $\diamond$

証明
仮に任意の順序数を含む集合 z があるとすると, 集合

$$ON = \{x : x \text{ は順序数}\} \tag{28}$$

が存在し, これは順序数となるが, $ON \in ON$ となり, 整列順序付けできない為, 順序数ではない。よって矛盾し, そのような集合 z は存在しない。 $\square$

補題 11.

順序数の集合 A が $\forall x \in A \forall y \in x (y \in A)$ ならば A は順序数である。 $\diamond$

定理 12.

$\langle A, R \rangle$ が整列順序であれば, あるただ一つに定まる順序数 C について $\langle A, R \rangle \cong C$ となる。 $\diamond$

証明

定理 (ref)(3) より唯一性はわかる。$B = \Big\{ a \in A : \exists x (x!\text{は順序数} \wedge x \cong \langle \mathrm{pred}(A, a, R) \rangle) \Big\}$ とおくと, 置換公理より

$$\forall a \in B \exists ! x (x \cong \langle \mathrm{pred}(A, a, R) \rangle) \tag{29}$$

$$C \coloneqq \{ x : \exists a \in B \{ x \cong \langle \mathrm{pred}(A, a, R) \rangle \} \} \tag{30}$$

となる C が存在し, 関数 f を $f : a \mapsto x$ とおくと $f \subset B \times C$ となる。 $\square$