

相対性理論

Anko

2023 年 8 月 23 日

目次

1	特殊相対性理論	2
2	一般相対性理論	3
2.1	座標系	4
2.2	様々な座標系における演算	4
2.3	局所平坦性定理	7

1 特殊相対性理論

定義 (Einstein の相対性原理).

自然法則は全ての慣性系において同じ形になる。

定義 (光速不変の原理).

光の速度は全ての慣性系で、光源の速度によらず一定である。

定義 (共変ベクトル・反変ベクトル).

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

時刻 $t \in \mathbb{R}$ と場所 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ をまとめた時空点 $x = (x^\mu)$ を次の反変ベクトルで表す。

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, \mathbf{r}(t)) \quad (2)$$

x による微分を共変ベクトルとして次のように定義する。

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) := \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (3)$$

命題 1.

$$g < 0$$

◇

証明

$$g_{\mu\nu} = M\eta_{\mu\nu}M^\top \quad (4)$$

$$g = \det(\eta_{\mu\nu}) \det(M)^2 = -\det(M)^2 < 0 \quad (5)$$

□

定義 (世界間隔).

$$ds^2 = (c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (c d\tau)^2 \quad (6)$$

これらを元に四元速度、四元加速度、四元運動量

$$u^\mu(t) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \dot{\mathbf{r}}) \quad (7)$$

$$a^\mu(t) = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \gamma(0, \ddot{\mathbf{r}}) \quad (8)$$

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(c, \dot{\mathbf{r}}) \quad (9)$$

$$j^\mu(x) := (c\rho, \mathbf{j}) \quad (10)$$

$$(11)$$

運動方程式

$$m \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (12)$$

作用

$$\delta S = \int \varepsilon^\mu \delta x_\mu d\tau = 0 \quad (13)$$

2 一般相対性理論

公理 (アインシュタインの等価原理).

加速系と重力場の系は局所的には原理的に区別できない。

例えば宇宙人によって部屋に閉じ込められたとき地球と同じ重力があるからといって地球にいるとは限らない。

2.1 座標系

定義 (デカルト座標).

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad (14)$$

定義 (極座標).

ユークリッド平面においてデカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換は次のように定義する。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (15)$$

逆に極座標 (r, θ) からデカルト座標 (x, y) へは次のようになる。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (17)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (18)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \quad (19)$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (20)$$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \cdot (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \quad (21)$$

$$= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \cdot (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \quad (23)$$

$$= -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (24)$$

2.2 様々な座標系における演算

どのような座標系においても同じ形の式を作る。異なる座標系での内積

定義 (座標系の基底ベクトル).

座標変換によって基底ベクトルによる

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \mathbf{e}_{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} \mathbf{e}_{\beta} \quad (25)$$

ある座標系において基底ベクトル同士の内積を計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ といい、これが座標系を表現する。

$$\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (26)$$

また基底ベクトルの微分による係数をクリストッフェル記号といい、 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ と書く。

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\mu} \quad (27)$$

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1} \quad (28)$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \quad (29)$$

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta} \quad (30)$$

ベクトル $\mathbf{A} = A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$ を基底で微分 $\nabla_{\beta} \mathbf{A} = A^{\alpha}_{;\beta} \mathbf{e}_{\alpha}$ について

$$A^{\alpha}_{;\beta} \mathbf{e}_{\alpha} = \nabla_{\beta} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}) = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \mathbf{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = A^{\alpha}_{,\beta} \mathbf{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\mu} \quad (31)$$

より

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + A^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \quad (32)$$

これを共変微分という。共変ベクトルについても共変微分すると

$$A_{\alpha;\mu} = (g_{\alpha\beta} A^{\beta})_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu} A^{\beta} + g_{\alpha\beta} A^{\beta}_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu} A^{\beta} + A_{\alpha;\mu} \quad (33)$$

より次のテンソル方程式が成り立つ。

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \quad (34)$$

またスカラー場 ϕ について 2 階微分することで

$$\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_{,\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \quad (35)$$

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\beta,\alpha} + \phi_{,\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_{,\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \quad (36)$$

より $\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\beta;\alpha}$ であるから

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (37)$$

となる。計量テンソルの共変微分を計算すると

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\nu\beta}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} - g_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} = 0 \quad (38)$$

これを添字を変えたものを適切に足し引きして両辺に $\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}$ を掛けると

$$g_{\alpha\beta,\mu} = g_{\nu\beta}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} + g_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} \quad (39)$$

$$g_{\mu\alpha,\beta} = g_{\nu\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\nu} + g_{\mu\nu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \quad (40)$$

$$g_{\beta\mu,\alpha} = g_{\nu\mu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} + g_{\beta\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} \quad (41)$$

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\nu} \quad (42)$$

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} \quad (43)$$

よりクリストッフェル記号を計量テンソルで表すことができる。

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (44)$$

テンソル方程式

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + A^{\mu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \quad (45)$$

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \quad (46)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (47)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (48)$$

例 2 (デカルト座標).

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (49)$$

$$\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} e_{\mu} = 0 \quad (50)$$

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} = A_{\alpha,\beta} \quad (51)$$

$$A^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} \quad (52)$$

◇

例 3 (極座標).

$$\Lambda^\beta_\alpha = \begin{pmatrix} \Lambda^x_r & \Lambda^y_r \\ \Lambda^x_\theta & \Lambda^y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (54)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (55)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \Gamma^r_{rr} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{rr} \mathbf{e}_\theta = 0 \quad (57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \Gamma^r_{r\theta} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{r\theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta r} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{\theta r} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = \Gamma^r_{\theta\theta} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta = -r \mathbf{e}_r \quad (60)$$

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial \alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} A^\mu \quad (61)$$

$$= \frac{\partial A^r}{\partial r} + \frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A^r \quad (62)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} A^\theta \quad (63)$$

◇

2.3 局所平坦性定理

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial^4(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0 \partial x'^1 \partial x'^2 \partial x'^3)} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (65)$$

$$= \det(\Lambda^\alpha_\beta) dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (66)$$

$$= \sqrt{-g} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (67)$$

$$(g_{\alpha\beta}) = (\Lambda^\alpha_\beta)(\eta_{\alpha\beta})(\Lambda^\alpha_\beta)^T \quad (68)$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = \det(\Lambda^\alpha_\beta) \det(\eta_{\alpha\beta}) \det((\Lambda^\alpha_\beta)^T) \quad (69)$$

$$= -\det(\Lambda^\alpha_\beta)^2 \quad (70)$$

$$\det(\Lambda^\alpha_\beta) = \sqrt{-g} \quad (71)$$

定理 4 (発散の公式).

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\mu)_{,\mu} \quad (72)$$

◇

証明

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\mu\alpha,\beta}) \quad (73)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta})}_{\text{対称}} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \quad (74)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \quad (75)$$

$$= \frac{(\sqrt{-g})_{,\mu}}{\sqrt{-g}} \quad (g_{,\mu} = gg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (76)$$

$$(77)$$

$$A^\alpha_{;\alpha} = A^\alpha_{,\alpha} + A^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} \quad (78)$$

$$= A^\alpha_{,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}}A^\mu(\sqrt{-g})_{,\mu} \quad (79)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\mu)_{,\mu} \quad (80)$$

□

$$V^\alpha(B) - V^\alpha(A) = \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = - \int_{x^2=b} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 \quad (81)$$

$$\delta V^\alpha = \text{最初に} \delta a e_\sigma, \text{次に} \delta b e_\lambda, \text{そして} -\delta a e_\sigma, \text{最後に} -\delta b e_\lambda \text{の移動による } V^\alpha \text{ の変化} \quad (82)$$

$$= - \int_{x^\lambda=b} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu dx^\sigma - \int_{x^\sigma=a+\delta a} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu dx^\lambda + \int_{x^\lambda=b+\delta b} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu dx^\sigma + \int_{x^\sigma=a} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu dx^\lambda \quad (83)$$

$$\approx \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu) dx^\sigma + \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu) dx^\lambda \quad (84)$$

$$\approx \delta a \delta b \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu) \right] \quad (85)$$

$$= \delta a \delta b [\Gamma^\alpha_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\mu\lambda}] V^\mu \quad (86)$$

定義 (リーマンの曲率テンソル).

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} := \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad (87)$$

局所慣性系において $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$ であるから

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} \quad (88)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\mu\nu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) - \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\mu,\beta\nu} - g_{\beta\mu,\sigma\nu}) \quad (89)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \quad (90)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^\lambda_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (91)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (92)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad (93)$$