

# ベクトル解析

Anko

2023 年 7 月 17 日

## 1 記法・記号

定義 (Kronecker のデルタ).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1)$$

定義 (レビ・チビタの完全反対称テンソル (Levi-Civita antisymmetric tensor)).

$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k}$  は  $\mu_1 \cdots \mu_k$  が順列のとき  $1 \cdots k$  の偶置換なら 1、奇置換なら  $-1$  とする。順列ではないときは 0 とする。

$$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} := \begin{cases} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix} & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{ が順列のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \quad (2)$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{ が偶置換のとき}) \\ -1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{ が奇置換のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \quad (3)$$

定義 (Einstein の縮約記法).

同じ項で添字が重なる場合はその添字について和を取る.

$$A_i B_i = \sum_{i=x,y,z} A_i B_i \quad (4)$$

## 2 ベクトル空間

定義 (ベクトル空間).

体  $K$  における加群をベクトル空間である。

定義.

ベクトルについて内積と外積を定義する。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_i B_i \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (6)$$

## 3 ベクトル解析

定義.

ベクトル  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  について勾配  $\nabla \mathbf{A}$  と発散  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 、回転  $\nabla \times \mathbf{A}$  を次のように定義する。

$$\nabla \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \partial_i A_i \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad (9)$$

定理 1 (勾配・発散・回転の線形性).

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (10)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (11)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (12)$$

◇

証明

$$(\nabla(f + g))_i = \partial_i(f + g) \quad (13)$$

$$= \partial_i f + \partial_i g \quad (14)$$

$$= (\nabla f + \nabla g)_i \quad (15)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \partial_i(A_i + B_i) \quad (16)$$

$$= \partial_i A_i + \partial_i B_i \quad (17)$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (18)$$

$$(\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j(A_k + B_k) \quad (19)$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k + \epsilon_{ijk} \partial_j B_k \quad (20)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (21)$$

□

定理 2 (勾配・発散・回転のスカラー倍).

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (22)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (23)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f) \quad (24)$$

◇

証明

$$(\nabla(fg))_i = \partial_i(fg) \quad (25)$$

$$= f\partial_i g + g\partial_i f \quad (26)$$

$$= (f\nabla g + g\nabla f)_i \quad (27)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \partial_i(fA_i) \quad (28)$$

$$= f\partial_i A_i + A_i\partial_i f \quad (29)$$

$$= f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (30)$$

$$(\nabla \times (f\mathbf{A}))_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) \quad (31)$$

$$= f\epsilon_{ijk}\partial_j A_k + \epsilon_{ijk}A_k\partial_j f \quad (32)$$

$$= f\epsilon_{ijk}\partial_j A_k - \epsilon_{ikj}A_k\partial_j f \quad (33)$$

$$= (f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f))_i \quad (34)$$

□

定理 3.

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (35)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (36)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (37)$$

◇

証明

$$(\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}))_i = \partial_i(A_j B_j) \quad (38)$$

$$= (A_j \partial_i B_j + B_j \partial_i A_j) - (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) + (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) \quad (39)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl})(A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) \quad (40)$$

$$= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} (A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) \quad (41)$$

$$= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} \partial_l B_m + \epsilon_{ijk} B_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m + A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i \quad (42)$$

$$= (\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A})_i \quad (43)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} A_j B_k) \quad (44)$$

$$= \epsilon_{ijk} (B_k \partial_i A_j + A_j \partial_i B_k) \quad (45)$$

$$= B_k \epsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k \quad (46)$$

$$= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (47)$$

$$(\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} A_l B_m \quad (48)$$

$$= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \quad (49)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl})(B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \quad (50)$$

$$= (B_j \partial_j A_i + A_i \partial_j B_j) - (B_i \partial_j A_j + A_j \partial_j B_i) \quad (51)$$

$$= A_i \partial_j B_j - B_i \partial_j A_j + B_j \partial_j A_i - A_j \partial_j B_i \quad (52)$$

$$= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (53)$$

□

定理 4.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (54)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (55)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (56)$$

◇

証明

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) \quad (57)$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \quad (58)$$

このとき対称性から  $i, j$  を交換しても等しい。

$$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = \epsilon_{jik}\partial_j\partial_i A_k \quad (59)$$

$$\iff \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = -\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k \quad (60)$$

$$\iff \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 \quad (61)$$

よって

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (62)$$

他も同様にして

$$(\nabla \times (\nabla f))_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0 \quad (63)$$

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}\partial_l A_m) \quad (64)$$

$$= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m \quad (65)$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m \quad (66)$$

$$= \partial_j\partial_i A_j - \partial_j^2 A_i \quad (67)$$

$$= (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A})_i \quad (68)$$

□