量子力学

Anko

2023 年 7 月 19 日

目次

0.1 電磁場中の荷電粒子

スカラーポテンシャル ϕ, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の中での電荷 q を持つ粒子の運動は次の置き換えで記述できる。

$$H \mapsto H - q\phi(\boldsymbol{r}, t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2}$$

一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の場合, ベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$ (対称ゲージ) と置くことができるので

$$\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{L} + \frac{q^2}{8m}(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{r}^2 - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{r})^2) \tag{3}$$

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ となるので

$$\begin{aligned} H &= \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})^2}{2m} && (4) \\ &= \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{A})^2}{2m} && (5) \\ &= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{A})^2 - 2\frac{q\hbar}{2m}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{s} \qquad \left(\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) && (6) \end{aligned}$$

となる。ゼーマン相互作用

1 相対論的量子力学

定理 1.

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\phi(t, \boldsymbol{r}) + q\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r}) \tag{7}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r}) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r}) \tag{9}$$

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r}))^2}{2m} + q\phi(t, \boldsymbol{r}) \tag{10}$$

◇

証明

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 \tag{11}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}))^2}{2m} + q\phi(t,\boldsymbol{r}) \tag{14}$$

□

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{r}) = \left(\frac{(\hat{\boldsymbol{p}} - q\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}))^2}{2m} + q\phi(t,\boldsymbol{r})\right)\psi(t,\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi(t,\boldsymbol{r})\right)\psi(t,\boldsymbol{r}) = \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}))^2}{2m} \tag{16}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi(t,\boldsymbol{r}) \tag{17}$$

$$-i\hbar\boldsymbol{\nabla} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) \tag{18}$$

定理 2.

$$\frac{\partial\rho(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) = 0 \tag{19}$$

◇

証明

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{r}) = \left(\frac{(\hat{\boldsymbol{p}} - q\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}))^2}{2m} + q\phi(t,\boldsymbol{r})\right)\psi(t,\boldsymbol{r}) \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

□