

# 集合論

Anko

2023 年 7 月 19 日

## 目次

1	公理的集合論の基礎	2
1.1	論理	2
1.2	順序数	7

# 1 公理的集合論の基礎

## 1.1 論理

公理 (外延性).

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \iff z \in y) \implies x = y) \quad (1)$$

公理 (内包性図式).

変数  $y$  を自由変数として用いない任意の論理式  $\phi$  を用いて次のように表せられる。

$$\exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \wedge \phi) \quad (2)$$

定義 (内包性図式).

$\{x \in z : \phi\} := y$  !s.t.  $\forall x (x \in y \iff x \in z \wedge \phi)$ 。これは外延性より唯一つに定まる。

定理 1.

$$\exists y \forall x (x \notin y) \quad (3)$$

◇

証明

内包性より  $\exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \wedge x \neq x)$  となる。 $z$  には真のクラスは含まれないから 1 つも元のない集合となる  $\exists y \forall x (x \in y \iff x \notin z)$ 。これより、 $\forall x (x \notin y)$  となる  $y$  の存在が正当化される。□

定義.

上の集合  $y$  を空集合  $\emptyset$  と呼ぶ。

定理 2.

$$\neg \exists z \forall x (x \in z) \quad (4)$$

◇

証明

$\forall x (x \in z)$  となる  $z$  が存在すると仮定すると, 内包性より  $\{x \in z : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$  が存在, つまり  $\exists y \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \notin x)$  となる。しかし  $x$  に  $y$  を代入することで  $y \in y \longleftrightarrow y \notin y$  より矛盾。よってそのような  $z$  は存在しない。□

公理 (対).

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z) \quad (5)$$

定義.

対

$$\{x, y\} := \{v \in z : v = x \vee v = y\} \quad (6)$$

単集合

$$\{x\} := \{x, x\} \quad (7)$$

順序対

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad (8)$$

公理 (和集合).

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A) \quad (9)$$

定義.

和集合

$$\bigcup \mathcal{F} := \{x : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y)\} \quad (10)$$

共通部分

$$\bigcap \mathcal{F} := \{x : \forall Y \in \mathcal{F} (x \in Y)\} \quad (11)$$

和集合

$$A \cup B := \bigcup \{A, B\} \quad (12)$$

積集合

$$A \cap B := \bigcap \{A, B\} \quad (13)$$

差集合

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\} \quad (14)$$

公理 (置換図式).

$$\forall x \in A \exists! y \phi(x, y) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y) \quad (15)$$

定理 3 (置換図式).

$$\forall x \in A \exists! y \phi(x, y) \rightarrow \exists \{y : \exists x \in A \phi(x, y)\} \quad (16)$$

◇

証明

$\forall x \in A \exists! y \phi(x, y)$  を仮定すると, 置換公理より  $\forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y)$  を満たす集合  $Y$  が存在し, 内包性公理より  $\{y \in Y : \exists x \in A \phi(x, y)\}$  が存在する。これは  $Y' = \{y : \exists x \in A \phi(x, y)\}$

とおくと,  $Y'$  の濃度は  $A$  の濃度以下であるから集合として存在し,  $Y = Y'$  となる。  $\square$

**定義 (直積集合).**

$$A \times B := \{\langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

**証明**

置換公理と内包性公理より, 各  $y \in B$  に対し,

$$\forall x \in A \exists! z \{z = \langle x, y \rangle\} \text{prod}(A, y) := \{z : \exists x \in A (z = \langle x, y \rangle)\} \quad (17)$$

また, 次のように定義できる。

$$\forall y \in B \exists! z \{z = \text{prod}\{A, y\}\} \text{prod}'(A, B) := \{\text{prod}\{A, y\} : y \in B\} \quad (18)$$

$A \times B := \bigcup \text{prod}'(A, B)$  と置くことで定義の正当性が分かる。  $\square$

**定義.**

**関係**

任意の要素が順序対となる集合.

定義域, 値域

関係  $R$  に対し, 定義域  $\text{dom}(R)$  と値域  $\text{ran}(R)$  は次のように定義する。

$$\text{dom}(R) = \{x : \exists y \{\langle x, y \rangle \in R\}\} \quad (19)$$

$$\text{ran}(R) = \{y : \exists x \{\langle x, y \rangle \in R\}\} \quad (20)$$

関係  $R$  は通常  $R \subset \text{dom}(R) \times \text{ran}(R)$  となる場合だけに使われる。

$$R^{-1} := \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in R\}$$

**定理 4.**

関係  $R$  に対し  $\{R^{-1}\}^{-1} = R$  となる。  $\diamond$

**証明**

$R$  は関係であるから任意の  $R$  の元は順序対であり, それぞれに対し反転を 2 回行えば元に戻る。  $\square$

定義 (関数).

関係  $f$  が  $\forall x \in \text{dom}(f), \exists y \in \text{ran}(f) \{ \langle x, y \rangle \in f \}$  を満たすとき  $f$  を関数と呼ぶ。また, 関数  $f$  について  $A = \text{dom}(f), B \supset \text{ran}(f)$  を満たすとき,  $f : A \rightarrow B$  と書く。

関数の制限

定義 (狭義全順序).

集合  $A$  関係  $R$  に対し, 次を満たす組  $\langle A, R \rangle$  を狭義全順序と呼ぶ。

$$\text{推移律} \quad \forall x, y, z \in A (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz) \quad (21)$$

$$\text{三分律} \quad \forall x, y \in A (x = y \vee xRy \vee yRx) \quad (22)$$

$$\text{非反射律} \quad \forall x \in A \{ \neg \{ xRx \} \} \quad (23)$$

定理 5.

$\langle A, R \rangle$  が狭義全順序ならば, 任意の  $B \subset A$  について  $\langle B, R \rangle$  は狭義全順序となる。◇

証明

$R \subset \text{dom}(R) \times \text{ran}(R)$  より集合に対して関係の集合は依存していない。また推移律, 三分律, 非反射律は存在を示している訳ではないので  $B$  に対しても成立する。よって  $\langle B, R \rangle$  は狭義全順序となる。□

定義.

同型写像集合と関係の対  $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$  について全単射  $f : A \rightarrow B$  が存在し  $\forall x, y \in A (xRy \iff f(x)Sf(y))$  となるとき  $\langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle$  と書き,  $f$  を同型写像と呼ぶ。

整列順序全順序  $\langle A, R \rangle$  について  $A$  の空でない任意の部分集合に必ず  $R$ -最小の要素があるとき,  $\langle A, R \rangle$  が整列順序であるという。

切片  $\text{pred}(A, x, R) := \{y \in A : yRx\}$

定理 6.

$\langle A, R \rangle$  を整列順序とすると, 任意の  $x \in A$  に対して  $\langle A, R \rangle \not\cong \langle \text{pred}(A, x, R), R \rangle$  である。◇

証明

$f : A \rightarrow \text{pred}(A, x, R)$  が同型写像であると仮定すると, 集合  $\{y \in A : f(y) \neq y\}$  の  $R$ -最小要素  $y$  が。  $\square$

定理 7.

$\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$  を互いに同型な整列順序とすると, この間の同型写像は唯一つ存在する。  $\diamond$

証明

仮に 2 つの同型写像  $f, g$  が存在したとき  $f(y) \neq g(y)$  であるような  $y \in A$  のうち  $R$ -最小の  $y$  を考えると矛盾。  $\square$

定理 8.

$\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$  を整列順序とすると, 次の 3 つの命題は互いに背反である。

$$(a) \quad \langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle \quad (24)$$

$$(b) \quad \exists y \in B \{ \langle A, R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, y, S), S \rangle \} \quad (25)$$

$$(c) \quad \exists x \in A \{ \langle \text{pred}(A, x, R), R \rangle \cong \langle B, S \rangle \} \quad (26)$$

$\diamond$

証明

次のように  $f$  を定める。

$$f = \{ \langle v, w \rangle : v \in A \wedge w \in B \wedge \langle \text{pred}(A, v, R), R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, w, S), S \rangle \} \quad (27)$$

このとき,  $f$  は  $A$  のある切片から  $B$  のある切片への同型写像となるが, これら二つの切片の両方が真の切片となることはありえない。  $\square$

公理 (選択公理).

$\forall A \exists R (R \text{ は } A \text{ を整列順序づけする})$

## 1.2 順序数

定義 (推移的).

集合  $x$  の任意の要素が同時に  $x$  の部分集合でもあるとき  $x$  が推移的であると呼ぶ。

定義 (順序数).

推移的な集合  $x$  が  $\in$  によって整列順序づけされる時、 $x$  を順序数と呼ぶ。

定理 9.

1.  $x$  が順序数で  $y \in x$  なら、 $y$  も順序数で  $y = \text{pred}(x, y)$ 。
2.  $x$  と  $y$  が順序数で  $x \cong y$  なら、 $x = y$ 。
3.  $x$  と  $y$  が順序数なら、 $x \in y, y \in x, y = x$  のどれか 1 つだけが成立する。
4.  $x$  と  $y$  と  $z$  が順序数で  $x \in y, y \in z$  であれば、 $x \in z$  である。
5.  $C$  が順序数の空でない集合であれば、 $\exists x \in C \forall y \in C (x \in y \vee x = y)$ 。

◇

証明

1. 推移的であるから  $y$  も順序数であり  $\text{pred}(x, y) = \{z \in x : z \in y\} = y$  となる。
2. 具体的な集合は空集合しか定義されていないから  $x, y$  が同じように推移的であるならば  $x = y$  であることが分かる。
3. (1), (2) と定理 (ref) より成立する。 $x = \{x\}$  などの自分自身の元となる推移的な集合は順序数でないから 2 つ同時に成立することはない。
4. 推移的である為、成り立つ。
5.  $C$  の  $\in$ -最小  $x$  について  $x \cap C = \emptyset$  となる。よって 0 に含まれる元は存在しないことと (3) より  $x$  は条件を満たす。

よって全て示された。

□

定理 10.

$\neg \exists z \forall x (x \text{ は順序数} \rightarrow x \in z)$

◇

証明

仮に任意の順序数を含む集合  $z$  があるとすると、集合

$$ON = \{x : x \text{ は順序数}\} \quad (28)$$

が存在し、これは順序数となるが、 $ON \in ON$  となり、整列順序付けできない為、順序数ではない。よって矛盾し、そのような集合  $z$  は存在しない。

□



補題 11.

順序数の集合  $A$  が  $\forall x \in A \forall y \in x (y \in A)$  ならば  $A$  は順序数である。  $\diamond$

定理 12.

$\langle A, R \rangle$  が整列順序であれば, あるただ一つに定まる順序数  $C$  について  $\langle A, R \rangle \cong C$  となる。  $\diamond$

証明

定理 (ref)(3) より唯一性はわかる。 $B = \{a \in A : \exists x (x \text{ は順序数} \wedge x \cong \langle \text{pred}(A, a, R) \rangle)\}$  とおくと, 置換公理より

$$\forall a \in B \exists! x (x \cong \langle \text{pred}(A, a, R) \rangle) \quad (29)$$

$$C := \{x : \exists a \in B (x \cong \langle \text{pred}(A, a, R) \rangle)\} \quad (30)$$

となる  $C$  が存在し, 関数  $f$  を  $f : a \mapsto x$  とおくと  $f \subset B \times C$  となる。  $\square$