微分方程式

Anko

2023 年 7 月 17 日

目次

1　特殊関数

1.1　ガウス積分

定理 1 (Gauss 積分)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\Re a > 0) \tag{1}$$

◇

証明

まず積分値を I とおく。

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

ここで I^2 を変数変換して計算する。

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}\,\mathrm{d}y && (3)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && (4)\\
&= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r && (5)\\
&= 2\pi\left[\frac{e^{-\alpha r^2}}{-2\alpha}\right]_0^{\infty} && (6)\\
&= \frac{\pi}{\alpha} && (7)
\end{aligned}$$

よって示される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{8}$$

□

定理 2 (Gauss 積分)**.**

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(2n-1)!!\frac{a^{2n+1}}{2^{n+1}} \tag{9}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2}a^{2n+2} \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/4} e^{ikx}\,\mathrm{d}k = 2\sqrt{\pi}e^{-x^2} \tag{11}$$

◇

証明

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{12}$$
$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{13}$$
$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) \tag{14}$$
$$= \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\alpha^{-(2n+1)/2} \tag{15}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{16}$$
$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \tag{17}$$
$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{2\alpha} \tag{18}$$
$$= \frac{n!}{2}\alpha^{-(n+1)} \tag{19}$$

□

1.2 ガンマ関数

定義.
複素平面上で $\mathrm{Re}\, z > 1$ を満たす領域内にある閉曲線 C 上の点 z に対して次の関数は一様収束し正則な関数となる.

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{20}$$

命題 3.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(n+1) = n!, \qquad \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{21}$$

◇

命題 4 (スターリングの公式 (Stirling's formula)).

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}e^{-x}x^x \qquad (x \gg 1) \tag{22}$$

◇

命題 5 (ガンマ関数の特異点).

$$\Gamma(z) = \infty \iff z = 0, -1, -2, \ldots \tag{23}$$

$$\mathrm{Res}[\Gamma(z); z = -n] = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{24}$$

◇

命題 6.

ガウスの公式 (Gauss's formula)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

◇

命題 7.

ワイエルシュトラスの公式 (Weierstrass' formula) γ はオイラーの定数 (Euler's constant) とする.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \tag{27}$$

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \log n\right) = 0.577216\cdots \tag{28}$$

◇

1.3 ベータ関数

定義.

ベータ関数 (Beta function)

$$B(z,\zeta) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}\,\mathrm{d}t \tag{29}$$

命題 8.

$$B(z,\zeta) = B(\zeta, z) \tag{30}$$

$$B(z,\zeta) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1}\theta \cos^{2\zeta-1}\theta \,\mathrm{d}\theta \tag{31}$$

$$B(z,\zeta) = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{(1+u)^{z+\zeta}}\,\mathrm{d}\theta \tag{32}$$

$$B(z,\zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} \tag{33}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{34}$$

◇

命題 9 (Legendre の倍数公式)**.**

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \tag{35}$$

◇

1.4 n 次元超球の体積と表面積

1.5 超幾何関数

定義.

超幾何関数

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{36}$$

命題 10.

$$e^x = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right) \tag{37}$$

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1,1,2;-x) \tag{38}$$

◇

2　微分方程式

2.1　エルミート多項式

定義 (エルミート多項式)**.**
次の級数展開の右辺に現れる $H_n(x)$ をエルミート多項式 (Hermite polynomials) という。

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \tag{39}$$

また左辺の関数はエルミート多項式の母関数 (generating function) という。

定理 11 (ロドリグの公式 (Rodrigues's formula))**.**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} \tag{40}$$

◇

証明

両辺を t で n 階微分する。

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Big(\text{左辺}\Big) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2} = -e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-x)^2} \tag{41}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Big(\text{右辺}\Big) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m-n)!} H_m(x) t^{m-n} \tag{42}$$

$t = 0$ とすると示せる。

$$H_n(x) = -e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \tag{43}$$

□

2.2 ルジャンドル微分方程式

定義 (ルジャンドル微分方程式)**.**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{44}$$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \tag{45}$$

定義 (ルジャンドルの陪微分方程式)**.**
ルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \tag{46}$$

これを満たす独立な 2 つの解 $P_n^m(x)$ と $Q_n^m(x)$ を第一種および第二種ルジャンドル陪関数はルジャンドル関数で表される。

2.3 ベッセルの微分方程式

定義.
ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{47}$$

定義.
ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{48}$$

2.4 ラゲール多項式

定義.

ラゲール多項式

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{z^n}{n!} \tag{49}$$

命題 12.

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) \tag{50}$$

$$L_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n!)^2}{(l!)^2 (n-l)!} x^l \tag{51}$$

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{52}$$

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{53}$$

$$L_n(0) = n! \tag{54}$$

◇

2.5 ポアソン方程式

2.6 変数分離

2.7 境界値問題

定義.
ラプラス方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{55}$$

ポアソン方程式 (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \tag{56}$$

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{57}$$

熱伝導方程式 (heat conduction equation)
κ を熱伝導率 (thermal conductivity)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \tag{58}$$

命題 13.
ラプラス方程式を満たし

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{59}$$

次の境界条件を満たす関数 $u(x, y)$ を求める。

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0 \tag{60}$$

◇

証明

これは変数分離法が使えないと思う。

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{61}$$

ラプラス方程式

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{62}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{63}$$

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \tag{64}$$

$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \tag{65}$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{66}$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \tag{67}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \tag{68}$$

$\square$