微分幾何学

Anko

2023 年 7 月 17 日

1　微分積分学

1.1　測度

測度とはある範囲の集合に非負の実数あるいは ∞ を対応させる集合関数である。

定義 (加法族).
集合 X の部分集合の族 $\boldsymbol{B}$ が次の条件を満たすとき、X 上の加法族と呼ぶ。

1. $\emptyset \in \boldsymbol{B}$
2. $A \in \boldsymbol{B}$ ならば $A^c \in \boldsymbol{B}$
3. $A_n \in \boldsymbol{B}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{B}$

定義 (測度).
$\boldsymbol{B}$ を X 上の加法族とするとき μ が $(X, \boldsymbol{B})$ 上の測度であるとは

1. $A \in \boldsymbol{B}$ に対し $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ $\mu(\emptyset) = 0$
2. A_n

2　微分幾何学

2.1　多様体

接ベクトル接ベクトル束

2.2　微分形式

定義 (微分形式)**.**
$\wedge$:

$$u \wedge v := u \otimes v - v \otimes u \tag{1}$$

0-形式
k-形式 $\omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} \in C^\infty(U)$

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} \tag{2}$$

定義 (外微分)**.**
外微分 (exterior derivative) $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ を次のように定義する。

$$d\omega := d\left(\frac{1}{k!}\omega_{\mu_1 \cdots \mu_k}\right) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{\partial \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} \tag{4}$$

$$dx \wedge dy = d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) \tag{5}$$

$$= (dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta) \wedge (dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta) \tag{6}$$

$$= (\cos\theta\sin\theta)dr \wedge dr + (r\cos^2\theta)dr \wedge d\theta - (r\sin^2\theta)d\theta \wedge dr - (r^2\sin\theta\cos\theta)d\theta \wedge d\theta \tag{7}$$

$$= r dr \wedge d\theta \tag{8}$$

定義 (1 の分割 (partition of unity))**.**

定理 1 (ストークスの定理)**.**

$\diamond$