

物理数学

Anko

2023 年 7 月 16 日

1 微分積分学

1.1 測度

測度とはある範囲の集合に非負の実数あるいは ∞ を対応させる集合関数である。

定義 (加法族).

集合 X の部分集合の族 \mathcal{B} が次の条件を満たすとき、 X 上の加法族と呼ぶ。

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$
2. $A \in \mathcal{B}$ ならば $A^c \in \mathcal{B}$
3. $A_n \in \mathcal{B}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$

定義 (測度).

\mathcal{B} を X 上の加法族とするとき μ が (X, \mathcal{B}) 上の測度であるとは

1. $A \in \mathcal{B}$ に対し $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ $\mu(\emptyset) = 0$
2. A_n

2 微分幾何学

2.1 多様体

接ベクトル接ベクトル束

2.2 微分形式

定義 (微分形式).

$\wedge :$

$$u \wedge v := u \otimes v - v \otimes u \quad (1)$$

0-形式

k -形式 $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \in C^\infty(U)$

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \quad (2)$$

定義 (外微分).

外微分 (exterior derivative) $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ を次のように定義する。

$$d\omega := d\left(\frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}\right) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \quad (4)$$

$$dx \wedge dy = d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) \quad (5)$$

$$= (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta) \wedge (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta) \quad (6)$$

$$= (\cos \theta \sin \theta) dr \wedge dr + (r \cos^2 \theta) dr \wedge d\theta - (r \sin^2 \theta) d\theta \wedge dr - (r^2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \wedge d\theta \quad (7)$$

$$= r dr \wedge d\theta \quad (8)$$

定義 (1 の分割 (partition of unity)).

定理 1 (ストークスの定理).

◇