相対論的量子力学 レポート課題 1

宇佐見大希

2023 年 7 月 17 日

目次

問題 **1.**

α^i と β を次を満たすエルミート行列とする。

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \qquad \beta^2 = 1, \qquad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \tag{1}$$

$\diamond$

(1) γ^0, γ^i を次のように定義する。

$$\gamma^0 := \beta, \qquad \gamma^i := \beta\alpha^i \tag{2}$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \qquad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{3}$$

証明

α^i, β がエルミート行列であることと式 (1) より次の式が成り立つ。

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \tag{4}$$

$$\beta^\dagger = \beta \tag{5}$$

$$\alpha^i\alpha^j = -\alpha^j\alpha^i \qquad (i \neq j) \tag{6}$$

$$\alpha^i\beta = -\beta\alpha^i \tag{7}$$

これらよりガンマ行列のエルミート共役が分かる。

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \tag{8}$$

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^i\beta = -\beta\alpha^i = -\gamma^i \tag{9}$$

次に $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を示す。$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}$ より $\mu \leq \nu$ を示せばよい。
$\mu > 0$ のとき

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \beta\alpha^\mu\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta\alpha^\mu & (10)\\ &= -\beta^2(\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu) & (11)\\ &= -2\delta^{\mu\nu} & (12)\end{aligned}$$

$\mu = 0$ かつ $\mu < \nu$ のとき

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \beta\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta & (13)\\ &= \beta^2\alpha^\nu - \beta^2\alpha^\nu & (14)\\ &= 0 & (15)\end{aligned}$$

$\mu = \nu = 0$ のとき

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\beta^2 \tag{16}$$
$$= 2 \tag{17}$$

よって $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ と書ける。 □

(2) γ^5 を次のように定義する。

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{18}$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \qquad (\gamma^5)^2 = 1, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \tag{19}$$

証明

$$(\gamma^5)^\dagger = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 \tag{20}$$
$$= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \tag{21}$$
$$= (-1)^6 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{22}$$
$$= \gamma^5 \tag{23}$$
$$(\gamma^5)^2 = -(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger \tag{24}$$
$$= -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \tag{25}$$
$$= 1 \tag{26}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = i(\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu) \tag{27}$$
$$= i((-1)^\mu + (-1)^{3-\mu})\gamma^0 \cdots (\gamma^\mu)^2 \cdots \gamma^3 \tag{28}$$
$$= 0 \tag{29}$$

□

(3) Σ^i を次のように定義する。

$$\Sigma^i := \frac{i}{2}\sum_{j,k}\varepsilon^{ijk}\gamma^j\gamma^k \tag{30}$$

このとき次の式を示せ。

$$(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i, \qquad \{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij} \tag{31}$$

証明

　まず $(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i$ を示す。

$$
\begin{aligned}
(\Sigma^i)^\dagger &= -\frac{i}{2}\sum_{j,k}(\varepsilon^{ijk}\gamma^j\gamma^k)^\dagger && (32)\\
&= -\frac{i}{2}\sum_{j,k}\varepsilon^{ijk}\gamma^k\gamma^j && (33)\\
&= -\frac{i}{2}\sum_{j,k}-\varepsilon^{ikj}\gamma^k\gamma^j && (34)\\
&= \Sigma^i && (35)
\end{aligned}
$$

次に $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ を示す。
$i = j$ のとき、ある k, l が存在して

$$
\begin{aligned}
\{\Sigma^i, \Sigma^j\} &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{a,b}\varepsilon^{iab}\gamma^a\gamma^b\right)^2 && (36)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k\right)^2 && (37)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\gamma^k\gamma^l\gamma^k\gamma^l - \gamma^k\gamma^l\gamma^l\gamma^k - \gamma^l\gamma^k\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k\gamma^l\gamma^k\right) && (38)\\
&= 2 && (39)
\end{aligned}
$$

$i \neq j$ のとき a, b, c, d のいづれか 2 つ 1 組は同じであるから

$$
\begin{aligned}
\{\Sigma^i, \Sigma^j\} &= -\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{c,d}(\varepsilon^{iab}\gamma^a\gamma^b\varepsilon^{jcd}\gamma^c\gamma^d + \varepsilon^{jcd}\gamma^c\gamma^d\varepsilon^{iab}\gamma^a\gamma^b) && (40)\\
&= -\frac{1}{4}\sum_{a,b}\sum_{c,d}\varepsilon^{iab}\varepsilon^{jcd}(1 + (-1)^3)\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d && (41)\\
&= 0 && (42)
\end{aligned}
$$

よって $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ である。 □

　(4) $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ と任意の $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$
(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Sigma})^2 = \boldsymbol{v}^2 \qquad (43)
$$

証明

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Sigma})^2 = (v^i\Sigma^i)(v^j\Sigma^j)^\dagger \tag{44}$$
$$= v^i\Sigma^i\Sigma^j(v^j)^\dagger \tag{45}$$
$$= \delta^{ij}v^i(v^j)^\dagger \tag{46}$$
$$= \boldsymbol{v}^2 \tag{47}$$

□

(5) α^i, β の具体例を 1 つ挙げて性質を満たすことを確認せよ。

証明

次のディラック表示を用いる。

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

このとき α^i, β の性質を満たす。

$$(\alpha^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \alpha^i \tag{49}$$
$$\beta^\dagger = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} = \beta \tag{50}$$

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$
$$= (\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) \otimes I \tag{52}$$
$$= \Big((\delta^{ij}I + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k) + (\delta^{ji}I + i\varepsilon^{jik}\sigma^k)\Big) \otimes I \tag{53}$$
$$= 2\delta^{ij} \tag{54}$$
$$\beta^2 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}^2 = 1 \tag{55}$$
$$\{\alpha^i, \beta\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$
$$= (\sigma^i\sigma^0 - \sigma^0\sigma^i) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$
$$= 0 \tag{58}$$

□

問題 2.

共変微分 D_μ を次のように定義する。

$$D_\mu := \partial_\mu - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x) \tag{59}$$

◇

(1) $\boldsymbol{D} = (D_1, D_2, D_3)$ に対して

$$(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{D}^2 + \frac{q}{\hbar}\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{60}$$

を示せ。

証明

まず次の式が成り立つことを確認する。

$$\begin{aligned}
D_\mu D_\nu^\dagger &= \left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x)\right)\left(\partial_\nu + \frac{q}{i\hbar}A_\nu(x)\right) && (61)\\
&= \partial_\mu\partial_\nu + \frac{q}{i\hbar}\partial_\mu A_\nu(x) - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x)\partial_\nu + \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu(x)A_\nu(x) && (62)
\end{aligned}$$

よって次のように示せる。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= \sum_{i,j}(D_i\sigma^i)(D_j\sigma^j)^\dagger && (63)\\
&= \sum_{i,j}\left(\delta^{ij}I + i\sum_k \varepsilon^{ijk}\sigma^k\right)D_iD_j^\dagger && (64)\\
&= \sum_i D_i^2 + i\sum_{i,j,k}\varepsilon^{ijk}\sigma^k D_iD_j^\dagger && (65)\\
&= \boldsymbol{D}^2 + i\sum_{i,j,k}\varepsilon^{ijk}\sigma^k\frac{q}{i\hbar}\partial_i A_j(x) && (66)\\
&= \boldsymbol{D}^2 + \frac{q}{\hbar}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(x)) && (67)\\
&= \boldsymbol{D}^2 + \frac{q}{\hbar}\boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma} && (68)
\end{aligned}$$

□

(2) 荷電粒子に対するクライン・ゴルドン方程式

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2]\phi(x) = 0 \tag{69}$$

が非相対論的極限 $mc^2 \to \infty$ において、シュレーディンガー方程式に帰着することを示せ

証明

$A^\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A})$ であり $\phi(x) = e^{-i(mc^2)t/\hbar}\varphi(x)$ とおくと

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2]\phi(x) = 0 \tag{70}$$

$$= \left[\hbar^2\left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar}A_\mu(x)\right)\left(\partial^\nu - \frac{q}{i\hbar}A^\nu(x)\right) + (mc)^2\right]\phi(x) \tag{71}$$

$$= \left[\left(\hbar^2\partial_\mu\partial^\nu + i\hbar\partial_\mu qA^\nu(x) + qA_\mu(x)i\hbar\partial^\nu - q^2A_\mu(x)A^\nu(x)\right) + (mc)^2\right]\phi(x) \tag{72}$$

$$= \left[\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{p}^2\right) + q\left(\frac{i\hbar}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}(x)\right) + q\left(\frac{i\hbar}{c^2}\phi\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{A}(x)\cdot\boldsymbol{p}\right) - q^2\left(\frac{\phi^2}{c^2} - \boldsymbol{A}^2\right) + (mc)^2\right]\phi(x) \tag{73}$$

$$= \left[\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + q\frac{i\hbar}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi + q\frac{i\hbar}{c^2}\phi\frac{\partial}{\partial t} - q^2\frac{\phi^2}{c^2} + (\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(x))^2 + (mc)^2\right]e^{-i(mc^2)t/\hbar}\varphi(x) \tag{74}$$

$$= \left[-(mc)^2 + q\frac{i\hbar}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + 2mq\phi - \frac{q^2\phi^2}{c^2} + (\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(x))^2 + (mc)^2\right]e^{-i(mc^2)t/\hbar}\varphi(x) \tag{75}$$

$$= 2m\left[-\frac{q^2\phi^2}{2mc^2} + \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(x))^2}{2m} + q\phi(x)\right]e^{-i(mc^2)t/\hbar}\varphi(x) \tag{76}$$

非相対論的極限 $mc^2 \to \infty$ のとき $\phi(x)$ は時間に依存しないからシュレーディンガー方程式となる。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = \left(\frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(x))^2}{2m} + q\phi\right)\phi(x) \tag{77}$$

□

(3) 荷電粒子に対するディラック方程式

$$(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\psi(x) = 0 \tag{78}$$

を用いて, 軸性ベクトル $j_A^\mu(x) := \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ の発散 $\partial_\mu j_A^\mu(x)$ を計算し、微分を含まない形で表せ。

証明

まず次の式が成り立つことを確認する。

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5 = \gamma^0\gamma^0\gamma^5 + \gamma^0\gamma^i\gamma^5 \tag{79}$$

$$= \gamma^0\gamma^0\gamma^5 - \gamma^i\gamma^0\gamma^5 \tag{80}$$

$$= (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\gamma^5 \tag{81}$$

よってディラック方程式より次のようになる。

$$\partial_\mu j_A^\mu(x) = \partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) \tag{82}$$
$$= \partial_\mu(\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) \tag{83}$$
$$= (\partial_\mu\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) + \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi(x) \tag{84}$$
$$= (\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi(x) - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5(\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \tag{85}$$
$$= \left(\frac{1}{i\hbar}(\gamma^\mu qA_\mu(x) + mc)\psi(x)\right)^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi(x) - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\left(\frac{1}{i\hbar}(\gamma^\mu qA_\mu(x) + mc)\psi(x)\right) \tag{86}$$
$$= -\frac{1}{i\hbar}\Big(qA_\mu(x)(\psi^\dagger(x)(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi + \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi(x)) + 2mc\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\psi(x)\Big) \tag{87}$$
$$= -\frac{1}{i\hbar}\Big(qA_\mu(x)(\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) + 2mc\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\psi(x)\Big) \tag{88}$$
$$= -\frac{2mc}{i\hbar}\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \tag{89}$$

□

問題 3.

中心力ポテンシャル $V(r)$ を持つハミルトニアン $\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 + V(r)$ を考える. ◇

(1) $\hat{H}$ と軌道角運動量 $\hat{L} = \boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ との交換関係を求めよ。

証明

$$[\hat{H}, \hat{L}^i] = [c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 + V(r), \varepsilon^{ijk}r^j\hat{p}^k] \tag{90}$$
$$= \varepsilon^{ijk}\Big(c[\alpha^\mu\hat{p}^\mu, r^j\hat{p}^k] + mc^2[\beta, r^j\hat{p}^k] + [V(r), r^j\hat{p}^k]\Big) \tag{91}$$
$$= \varepsilon^{ijk}\Big(c\alpha^\mu(p^\mu r^j p^k - r^j p^k p^\mu) + mc^2(\beta r^j p^k - r^j p^k\beta) + (V(r)r^j p^k - r^j p^k V(r))\Big) \tag{92}$$
$$= \varepsilon^{ijk}\Big(c\alpha^\mu(-i\hbar\delta^{\mu j})p^k + 0 + r^j(-i\hbar\partial^k V(r))\Big) \tag{93}$$
$$= -i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j p^k - i\hbar\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial\boldsymbol{r}}\right)_i \tag{94}$$
$$= -i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j p^k - i\hbar\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)_i \tag{95}$$
$$= -i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j p^k \tag{96}$$

□

(2) $\Sigma^i := -\frac{i}{2}\sum_{j,k}\varepsilon^{ijk}\alpha^j\alpha^k$ とするとき、$\hat{H}$ とスピン角運動量 $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ との交換関係を求めよ。

証明

$$
\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{S}^i] &= \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 + V(r), -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\alpha^j\alpha^k\right] && (97)\\
&= -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\Big(c[\alpha^\mu, \alpha^j\alpha^k]p^\mu + mc^2[\beta, \alpha^j\alpha^k] + [V(r), \alpha^j\alpha^k]\Big) && (98)\\
&= -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\Big(c(\alpha^\mu\alpha^j\alpha^k - \alpha^j\alpha^k\alpha^\mu)p^\mu + mc^2(\beta\alpha^j\alpha^k - \alpha^j\alpha^k\beta) + 0\Big) && (99)\\
&= -\frac{i\hbar}{4}\varepsilon^{ijk}\Big(c((-\alpha^j\alpha^\mu + 2\delta^{\mu j})\alpha^k - \alpha^j(-\alpha^\mu\alpha^k + 2\delta^{k\mu}))p^\mu + 0 + 0\Big) && (100)\\
&= -\frac{i\hbar c}{2}\varepsilon^{ijk}(\alpha^k p^j - \alpha^j p^k) && (101)\\
&= i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j p^k && (102)
\end{aligned}
$$

□

(3) 全角運動量が保存量となることを示せ。

証明

全角運動量がハミルトニアンと交換するから保存量となる。

$$
[\hat{H}, \hat{J}^i] = [\hat{H}, \hat{L}^i + \hat{S}^i] = 0 \tag{103}
$$

□

問題 **4.**

$\boldsymbol{\sigma}$ をパウリ行列として、任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ に対する 2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ を考える。 ◇

(1) $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2$ を求めよ。

証明

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2 &= (\sigma^i p^i)(\sigma^j p^j)^\dagger && (104)\\
&= p^i p^j\Big(\delta^{ij} I + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k\Big) && (105)\\
&= \boldsymbol{p}^2 && (106)
\end{aligned}
$$

□

(2) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})$ を求めよ。

証明

$\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$ とすると

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^3 \end{pmatrix} = 0 \tag{107}$$

□

(3) $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ の固有値を求めよ。

証明

$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ の固有値を λ_1, λ_2 とおくと

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) = 0 \tag{108}$$

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2 = \boldsymbol{p}^2 \tag{109}$$

よって固有値は $\pm|\boldsymbol{p}|$ である。 □

(4) $\boldsymbol{p} := |\boldsymbol{p}|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ とするとき、固有ベクトルを求めよ。

証明

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \mp |\boldsymbol{p}|I)\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{p}|\begin{pmatrix} \cos\theta \mp 1 & \sin\theta\cos\phi - i\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi + i\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta \mp 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} \tag{110}$$

$$= |\boldsymbol{p}|\begin{pmatrix} \cos\theta \mp 1 & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \mp 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} \tag{111}$$

より固有値 $\pm|\boldsymbol{p}|$ に対する固有ベクトルはそれぞれ次のベクトルの定数倍である。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\phi} \\ -\cos\theta \pm 1 \end{pmatrix} \tag{112}$$

□