

微分方程式

anko9801

2023 年 12 月 2 日

目次

1	ラプラス変換	2
2	特殊関数	4
2.1	ガウス積分	4
2.2	ガンマ関数	5
2.3	ベータ関数	7
2.4	n 次元超球の体積と表面積	11
2.5	超幾何関数	12
2.6	Bernoulli 数	13
2.7	ゼータ関数 $\zeta(s)$	15
3	微分方程式	20
3.1	エルミート多項式	20
3.2	ルジャンドル微分方程式	22
3.3	ベッセルの微分方程式	22
3.4	ラゲール多項式	23
3.5	ポアソン方程式	24
3.6	変数分離	24
3.7	境界値問題	24

1 ラプラス変換

定義 (ラプラス変換).

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (1.1)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} F(s)e^{st} ds \quad (1.2)$$

定理 1.1.

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \quad (1.4)$$

◇

証明

テスト

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \quad (1.6)$$

□

例えば

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty te^{-st} dt = \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \left[\frac{e^{-st}}{(-s)^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2} \quad (1.8)$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = \left[t^2 \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \left[2t \frac{e^{-st}}{(-s)^2} \right]_0^\infty + \left[2 \frac{e^{-st}}{(-s)^3} \right]_0^\infty = \frac{2}{s^3} \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}[t^3] = \int_0^\infty t^3 e^{-st} dt = \left[t^3 \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \left[3t^2 \frac{e^{-st}}{(-s)^2} \right]_0^\infty + \left[6t \frac{e^{-st}}{(-s)^3} \right]_0^\infty - \left[6 \frac{e^{-st}}{(-s)^4} \right]_0^\infty = \frac{6}{s^4} \quad (1.10)$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[\frac{d^i t^n}{dt^i} \frac{e^{-st}}{(-s)^{i+1}} \right]_0^\infty = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (1.11)$$

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t}] = \int_0^\infty e^{(s_0-s)t} dt = \frac{1}{s-s_0} \quad (1.12)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-st} dt \quad (1.13)$$

$$= -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i\omega - s} - \frac{1}{-i\omega - s} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1.14)$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \int_0^\infty \cos \omega t e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-st} dt \quad (1.15)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{i\omega - s} + \frac{1}{-i\omega - s} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (1.16)$$

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \int_0^\infty \sinh at e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{at} - e^{-at}) e^{-st} dt \quad (1.17)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-s} - \frac{1}{-a-s} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (1.18)$$

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \int_0^\infty \cosh at e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{at} + e^{-at}) e^{-st} dt \quad (1.19)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-s} + \frac{1}{-a-s} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (1.20)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \int_0^\infty \delta(t-a) e^{-st} dt = e^{-sa} \quad (1.21)$$

2 特殊関数

2.1 ガウス積分

定理 2.1 (Gauss 積分).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (a > 0) \quad (2.1)$$

◇

証明

まず積分値を I とおく。

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (2.2)$$

ここで I^2 を変数変換して計算する。

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \quad (2.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy \quad (2.4)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r d\theta dr \quad (2.5)$$

$$= 2\pi \left[\frac{e^{-\alpha r^2}}{-2\alpha} \right]_0^{\infty} \quad (2.6)$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \quad (2.7)$$

よって示される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2.8)$$

□

定理 2.2 (Gauss 積分).

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{\pi} (2n-1)!! \frac{a^{2n+1}}{2^{n+1}} \quad (2.9)$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2} \quad (2.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/4} e^{ikx} dk = 2\sqrt{\pi} e^{-x^2} \quad (2.11)$$

◇

証明

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n \alpha^{-\alpha x^2}}{\partial \alpha^n} dx \quad (2.12)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n \alpha^\infty}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} dx \quad (2.13)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) \quad (2.14)$$

$$= \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \alpha^{-(2n+1)/2} \quad (2.15)$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x e^{-\alpha x^2} dx \quad (2.16)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx \quad (2.17)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{2\alpha} \quad (2.18)$$

$$= \frac{n!}{2} \alpha^{-(n+1)} \quad (2.19)$$

□

2.2 ガンマ関数

定義.

複素平面上で $\Re z > 1$ を満たす領域内にある閉曲線 C 上の点 z に対して次の関数は一様収束し正則な関数となる.

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.20)$$

命題 2.3.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.21)$$

◇

証明

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \quad (2.22)$$

$$= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.23)$$

$$= z\Gamma(z) \quad (2.24)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt \quad (2.25)$$

$$= [-e^{-t}]_0^\infty \quad (2.26)$$

$$= 1 \quad (2.27)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt \quad (2.28)$$

$$= \int_0^\infty s^{-1} e^{-s^2} 2s ds \quad (2.29)$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds \quad (2.30)$$

$$= \sqrt{\pi} \quad (2.31)$$

□

命題 2.4 (スターリングの公式 (Stirling's formula)).

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \quad (x \gg 1) \quad (2.32)$$

◇

証明

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.33)$$

$$= \int_0^\infty e^{s(x-1)} e^{-e^s} e^s ds \quad (2.34)$$

$$= \int_0^\infty e^{sx - e^s} ds \quad (2.35)$$

$$\approx \int_0^\infty e^{(x \ln x - x) - \frac{x}{2}(s - \ln x)^2} ds \quad (x \gg 1) \quad (2.36)$$

$$= x^x e^{-x} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}(s - \ln x)^2} ds \quad (2.37)$$

$$= x^x e^{-x} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}s^2} ds \quad (2.38)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} x^x e^{-x} \quad (2.39)$$

これより

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^x e^{-x} \quad (2.40)$$

□

命題 2.5 (ガンマ関数の極と零点).

$$\Gamma(z) = \infty \iff z = 0, -1, -2, \dots \quad (2.41)$$

$$\text{Res}[\Gamma(z); z = -n] = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.42)$$

$$\{\Gamma(s) = 0 \mid |s| < \infty\} = \emptyset \quad (2.43)$$

◇

命題 2.6 (ワイエルシュトラスの公式 (Weierstrass' formula)).

γ はオイラーの定数 (Euler's constant) とする.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (2.44)$$

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n \right) = 0.577216 \dots \quad (2.45)$$

◇

2.3 ベータ関数

定義.

ベータ関数 (Beta function)

$$B(m, n) := \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (2.46)$$

命題 2.7.

$$B(m, n) = B(n, m) \quad (2.47)$$

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \quad (2.48)$$

$$B(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} du \quad (2.49)$$

◇

証明

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (2.50)$$

$$= \int_1^0 (1-s)^{m-1} s^{n-1} (-dt) \quad (s = 1-t) \quad (2.51)$$

$$= \int_0^1 s^{n-1} (1-s)^{m-1} dt \quad (2.52)$$

$$= B(n, m) \quad (2.53)$$

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (2.54)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2(m-1)} \theta \cos^{2(n-1)} \theta 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (t = \sin^2 \theta) \quad (2.55)$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \quad (2.56)$$

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (2.57)$$

$$(2.58)$$

□

定理 2.8.

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1) \quad (2.59)$$

$$B(m, n+1) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (m+k)} \quad (2.60)$$

◇

証明

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (2.61)$$

$$= \left[\frac{1}{m} t^m (1-t)^{n-1} \right]_0^1 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 t^m (1-t)^{n-2} dt \quad (2.62)$$

$$= \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1) \quad (2.63)$$

$$B(m, n+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{a \cdot (m+1) \cdots (m+n-1)} B(m+n, 1) \quad (2.64)$$

$$= \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (m+k)} \frac{1}{m+n} \quad (2.65)$$

$$= \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (m+k)} \quad (2.66)$$

□

命題 2.9 (ガンマ関数とベータ関数との関係).

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (2.67)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (2.68)$$

◇

証明

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty s^{m-1}e^{-s} ds \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t} dt \quad (2.69)$$

$$= \int_0^\infty q^{2(m-1)}e^{-q^2}2q dq \int_0^\infty p^{2(n-1)}e^{-p^2}2p dp \quad (s = q^2, t = p^2) \quad (2.70)$$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(q^2+p^2)} q^{2m-1} p^{2n-1} dp dq \quad (2.71)$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(m+n-1)} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta r dr d\theta \quad (q = r \cos \theta, p = r \sin \theta) \quad (2.72)$$

$$= 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(m+n)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \quad (2.73)$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-R} R^{m+n-1} r \frac{1}{2r} dR B(m, n) \quad (R = r^2) \quad (2.74)$$

$$= \int_0^\infty e^{-R} R^{m+n-1} dR B(m, n) \quad (2.75)$$

$$= \Gamma(m+n)B(m, n) \quad (2.76)$$

これより

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (2.77)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1)B(z, 1-z) \quad (2.78)$$

$$= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt \quad (2.79)$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (2.80)$$

□

命題 2.10 (ガウスの公式 (Gauss's formula)).

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad (2.81)$$

$$(2.82)$$

◇

証明

□

命題 2.11 (Legendre の倍数公式).

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (2.83)$$

◇

2.4 n 次元超球の体積と表面積

定理 2.12.

$$V_n(R) = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \quad (2.84)$$

◇

証明

n 次元超球の体積は次のように表現できる。

$$V_n(R) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.85)$$

各 x_i を R 倍することで

$$V_n(R) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.86)$$

$$= R^n \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.87)$$

$$= R^n V_n(1) \quad (2.88)$$

これより $V_n(1)$ を求めればよい。 $V_n(1)$ と $V_{n-1}(1)$ の関係を求める。

$$V_n(1) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.89)$$

$$= V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 \left(1 - x_n^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_n \quad (2.90)$$

$$= 2V_{n-1}(1) \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \quad (2.91)$$

$$= V_{n-1}(1) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (2.92)$$

$$= V_{n-1}(1) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (2.93)$$

$$= V_{n-1}(1) \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad (2.94)$$

これより連続に適用することで

$$V_n(1) = V_1(1)\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} \frac{\Gamma(\frac{4}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad (2.95)$$

$$= 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad (2.96)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \quad (2.97)$$

となり、超球の体積は

$$V_n(R) = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \quad (2.98)$$

□

定理 2.13.

表面積

$$S_n(R) = R^{n-1} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (2.99)$$

◇

証明

□

命題 2.14.

◇

2.5 超幾何関数

定義.

超幾何関数

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (2.100)$$

命題 2.15.

$$e^x = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right) \quad (2.101)$$

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1, 1, 2; -x) \quad (2.102)$$

◇

2.6 Bernoulli 数

定義 (Bernoulli 数).

Bernoulli 数 B_n は以下の正則関数の多項式展開の係数として定義される.

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \quad (2.103)$$

命題 2.16.

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_{2n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.104)$$

◇

証明

まず Bernoulli の定義式の両辺に $x/2$ を加える。

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (2.105)$$

このとき左辺は偶関数となる。

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)} = \frac{x e^{x/2} + e^{-x/2}}{2 e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.106)$$

$$\frac{-x}{2} \coth\left(\frac{-x}{2}\right) = \frac{-x e^{-x/2} + e^{x/2}}{2 e^{-x/2} - e^{x/2}} = \frac{x e^{x/2} + e^{-x/2}}{2 e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.107)$$

これより次の右辺も偶関数であることがわかり、一致の定理から右辺について奇数次の項は現れない。よって 3 以上の奇数を添え字に持つ Bernoulli 数はゼロとなる。

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.108)$$

□

定理 2.17.

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{B_n}{(n-m)!m!} x^n = \delta_{n,1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.109)$$

◇

証明

定義式の左辺の分母を払って展開すると

$$x = (e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (2.110)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \quad (2.111)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{k!n!} x^{k+n} \quad (2.112)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{B_n}{(n-m)!m!} x^n. \quad (2.113)$$

となり両辺の係数を比較することで次のようになる。

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{B_n}{(n-m)!m!} x^n = \delta_{n,1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.114)$$

□

命題 2.18.

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad (2.115)$$

◇

証明

上の定理について具体的式を求めると

$$B_0 = 1 \quad (2.116)$$

$$\frac{1}{2}B_0 + B_1 = 0 \quad (2.117)$$

$$\frac{1}{6}B_0 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 = 0 \quad (2.118)$$

$$\frac{1}{24}B_0 + \frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{4}B_2 + \frac{1}{6}B_3 = 0 \quad (2.119)$$

$$\frac{1}{120}B_0 + \frac{1}{24}B_1 + \frac{1}{12}B_2 + \frac{1}{12}B_3 + \frac{1}{24}B_4 = 0 \quad (2.120)$$

$$\frac{1}{720}B_0 + \frac{1}{120}B_1 + \frac{1}{48}B_2 + \frac{1}{36}B_3 + \frac{1}{48}B_4 + \frac{1}{120}B_5 = 0 \quad (2.121)$$

$$\frac{1}{5040}B_0 + \frac{1}{720}B_1 + \frac{1}{240}B_2 + \frac{1}{144}B_3 + \frac{1}{144}B_4 + \frac{1}{240}B_5 + \frac{1}{720}B_6 = 0 \quad (2.122)$$

$$\dots \quad (2.123)$$

より添字が奇数のときを代入することで求まる。

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad (2.124)$$

□

2.7 ゼータ関数 $\zeta(s)$

定義 (ゼータ関数).

ゼータ関数 $\zeta(s)$ は次のように定義される.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1). \quad (2.125)$$

命題 2.19.

$\zeta(s)$ が $s > 1$ において一様絶対収束することを示す.

◇

証明

$s = a + bi$ ($a > 1$) とおく. すると次のようになる.

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \approx \int_1^{\infty} dx x^{-a} = \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a} \right]_1^{\infty} < \infty. \quad (2.126)$$

よってゼータ関数 $\zeta(s)$ は一様絶対収束する.

□

命題 2.20.

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad (s > 1). \quad (2.127)$$

◇

証明

素因数分解の一意性より次のようにゼータ関数 $\zeta(s)$ は式変形できる.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (2.128)$$

$$= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{(2 \cdot 3)^s} + \dots \quad (2.129)$$

$$= \left(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \dots\right) \left(1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \dots\right) \left(1 + 5^{-s} + 5^{-2s} + \dots\right) \dots \quad (2.130)$$

$$= \prod_{p:\text{prime}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots) \quad (2.131)$$

$$= \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (2.132)$$

□

命題 2.21.

$$\zeta(s) = 0 \implies s \leq 1. \quad (2.133)$$

◇

証明

$s > 1$ において $s = a + b\sqrt{-1}$ ($a > 1$) とおくと p^{-s} の大きさは次のように評価される.

$$|p^{-s}| = |p^{-a-b\sqrt{-1}}| = |p^{-a}| \cdot |e^{-\sqrt{-1}b \ln p}| = p^{-a}. \quad (2.134)$$

これより $\zeta(s)$ の大きさは次のように評価される.

$$|\zeta(s)| = \left| \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \right| \geq \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 + |p^{-s}|} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 + p^{-a}} > 0. \quad (2.135)$$

よって $s > 1$ において $\zeta(s)$ はゼロとならない. つまり次のようになる.

$$\zeta(s) = 0 \implies s \leq 1. \quad (2.136)$$

□

命題 2.22.

素数が無限に存在することを示す.

◇

証明

ゼータ関数 $\zeta(s)$ ($s > 1$) について $s \rightarrow 1$ の極限を取ると発散する.

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty. \quad (2.137)$$

また Euler 積表示についても極限を取る.

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1-1/p}. \quad (2.138)$$

ここで素数が有限個しかないならば発散しない. ただゼータ関数は極限を取ると発散するので素数は無限個存在する. \square

命題 2.23.

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \quad (s > 1). \quad (2.139)$$

\diamond

証明

ガンマ関数の定義式について $x := nx$ と置換積分することで次のように式変形できる.

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-x} \quad (2.140)$$

$$= \int_0^{\infty} n dx (nx)^{s-1} e^{-nx}, \quad (2.141)$$

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \quad (2.142)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-nx} \quad (2.143)$$

$$= \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. \quad (2.144)$$

\square

命題 2.24.

この積分値を求める為に複素解析を用いる. 積分路 C を $C = C(\delta) = C_+(\delta) + C_0(\delta) + C_-(\delta)$ として $C_+(\delta)$ は実軸上無限遠から原点から δ の距離にある点まで, $C_0(\delta)$ は中心を原点とする半径 δ の円を反時計回りに 1 周し, $C_-(\delta)$ は実軸上原点から δ の距離にある点から無限遠までを積分する. また次の関数 $I(s; C)$ を定義しておく.

$$I(s; C) := \int_C dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}. \quad (2.145)$$

$0 < \delta < 2\pi$ を満たす範囲で δ を動かしても積分値は一定である. $s > 1$ のとき $\delta \rightarrow 0$ とすると $C_0(\delta)$ に沿った積分 $I(s; C_0(\delta))$ がゼロになる. \diamond

証明

被積分関数は $2n\pi\sqrt{-1}$ について 1 位の極がある. これより留数定理から積分路の内部の極の数が変化しないなら積分値は一定である. よって $0 < \delta < 2\pi$ を満たす範囲で δ を動かしても極の数は変化しないから積分値は一定である.

$$|I(s; C_0(\delta))| = \left| \int_{C_0(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \right| \quad (2.146)$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \delta i e^{i\theta} d\theta \frac{(\delta e^{i\theta})^{s-1}}{e^{\delta(\cos\theta + i\sin\theta)} - 1} \right| \quad (2.147)$$

$$\leq \int_0^{2\pi} d\theta \frac{|\delta|^s}{e^{\delta \cos\theta} - 1} \quad (2.148)$$

$$< |\delta|^{s-1} \pi. \quad (2.149)$$

これより $\delta \rightarrow 0$ のとき積分値 $I(s; C_0(\delta))$ は 0 となる. \square

命題 2.25.

$$I(s; C) = (e^{2\pi is} - 1) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. \quad (2.150)$$

\diamond

証明

Q 17A-10 の考察から $\delta \rightarrow 0$ の極限において積分 $I(s; C)$ を考える.

$$I(s; C) = \int_{C(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (2.151)$$

$$= \int_{C_- + C_0 + C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (2.152)$$

$$= \int_{C_-} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + \int_{C_0} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (2.153)$$

$$= e^{2\pi is} \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + 0 + \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (2.154)$$

$$= (e^{2\pi is} - 1) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. \quad (2.155)$$

\square

Q 17A-12.

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)} I(s; C). \quad (2.156)$$

(i) 17A-11 より $s > 1$ において次が成り立つ.

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \quad (2.157)$$

$$= \frac{I(s; C)}{e^{2\pi is} - 1}, \quad (2.158)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)} I(s; C) \quad (s > 1). \quad (2.159)$$

(ii) $I(s; C)$ は次のように定義された.

$$I(s; C) = \int_{C(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}. \quad (2.160)$$

これは複素平面全体 $s \in \mathbb{C}$ に対して正則である. よって (i) で求めた式は $s > 1$ の条件を取り外すことができ, 解析接続となる.

Q 17A-13.

$$\zeta(s) = e^{-\pi is} \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} I(s; C). \quad (2.161)$$

さらに次のガンマ関数 $\Gamma(s)$ の反転公式より

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \quad (2.162)$$

ゼータ関数は次のように表される.

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)} I(s; C) \quad (2.163)$$

$$= \frac{\sin \pi s}{\pi(e^{2\pi is} - 1)} \Gamma(1-s) I(s; C) \quad (2.164)$$

$$= \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{e^{2\pi is} - 1} \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} I(s; C) \quad (2.165)$$

$$= e^{-\pi is} \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} I(s; C). \quad (2.166)$$

3 微分方程式

3.1 エルミート多項式

定義 (エルミート多項式).

次の級数展開の右辺に現れる $H_n(x)$ をエルミート多項式 (Hermite polynomials) という。

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \quad (3.1)$$

また左辺の関数はエルミート多項式の母関数 (generating function) という。

定理 3.1 (ロドリグの公式 (Rodrigues's formula)).

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n x^{-x^2}}{d\epsilon^n} \quad (3.2)$$

◇

証明

両辺を t で n 階微分する。

$$\frac{\partial^n t}{\partial (n)} \text{左辺} = e^{x^2} \frac{\partial^n t^{-(t-x)^2}}{\partial \epsilon^n} = -e^{x^2} \frac{\partial^n x^{-(t-x)^2}}{\partial \epsilon^n} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^n t}{\partial (n)} \text{右辺} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m-n)!} H_m(x) t^{m-n} \quad (3.4)$$

$t = 0$ とすると示せる。

$$H_n(x) = -e^{x^2} \frac{\partial^n x^{-x^2}}{\partial \epsilon^n} \quad (3.5)$$

□

命題 3.2.

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-z^2+2zx}}{z^{n+1}} dz \quad (3.6)$$

$$H_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (-i)^n \int_{-\infty+2ix}^{\infty+2ix} e^{-q^2/4} (q+2ix)^n dq \quad (3.7)$$

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \frac{n!}{(n-2l)!l!} (2x)^{n-2l} \quad (3.8)$$

◇

命題 3.3.

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \quad (3.9)$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (3.10)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (3.11)$$

◇

証明

□

定理 3.4.

$$\frac{d^2x}{df^2}(x) - 2x\frac{dx}{df}(x) + 2nf(x) = 0 \quad (3.12)$$

◇

証明

□

定理 3.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad (3.13)$$

◇

証明

□

3.2 ルジャンドル微分方程式

定義 (ルジャンドル微分方程式).

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (3.14)$$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (3.15)$$

定義 (ルジャンドルの陪微分方程式).

ルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \quad (3.16)$$

これを満たす独立な 2 つの解 $P_n^m(x)$ と $Q_n^m(x)$ を第一種および第二種ルジャンドル陪関数はルジャンドル関数で表される。

3.3 ベッセルの微分方程式

定義.

ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (3.17)$$

定義.

ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (3.18)$$

3.4 ラゲール多項式

定義.

ラゲール多項式

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{z^n}{n!} \quad (3.19)$$

命題 3.6.

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n x}{d(n)} x^n e^{-x} \quad (3.20)$$

$$L_n(x) = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l (n!)^2}{(l!)^2 (n-l)!} x^l \quad (3.21)$$

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (3.22)$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (3.23)$$

$$L_n(0) = n! \quad (3.24)$$

◇

3.5 ポアソン方程式

3.6 変数分離

3.7 境界値問題

定義.

ラプラス方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.25)$$

ポアソン方程式 (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \quad (3.26)$$

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

熱伝導方程式 (heat conduction equation)

κ を熱伝導率 (thermal conductivity)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \quad (3.28)$$

命題 3.7.

ラプラス方程式を満たし

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.29)$$

次の境界条件を満たす関数 $u(x, y)$ を求める。

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0 \quad (3.30)$$

◇

証明

これは変数分離法が使えないと思う。

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.31)$$

ラプラス方程式

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (3.33)$$

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \quad (3.34)$$

$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \quad (3.35)$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (3.36)$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \quad (3.37)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad (3.38)$$

□