

物理数学

Anko

2023 年 7 月 16 日

1 フーリエ解析

1.1 フーリエ級数

定義 (内積).

関数の正規直交関数系による展開区間 $[a, b]$ 上の

定義 (複素フーリエ級数).

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上 関数 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し区間 $[-\pi, \pi]$ において定義された実数値関数 $f(x)$ が連続かつ区分的に C^1 級かつ周期的である ($f(-\pi) = f(\pi)$) ならば $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad (1)$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (2)$$

例

定理 1 (Bessel の不等式).

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad (3)$$

◇

定理 2 (平均値の定理).

区間 $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ について $a < c < b$ となる c が存在して

次のようになる。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (4)$$

◇

命題 3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) \, dx = 0 \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \pi \delta_{m,n} \quad (6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) \, dx = \pi \delta_{m,n} \quad (7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx = 2\pi \delta_{n,0} \quad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx = 0 \quad (9)$$

◇

証明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \, dx \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (11)$$

$$= 0 \quad (12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \, dx \quad (13)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \quad (14)$$

$$= \pi \delta_{m,n} \quad (15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx \quad (16)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \quad (17)$$

$$= \pi \delta_{m,n} \quad (18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx = \begin{cases} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [x]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \quad (19)$$

$$= 2\pi\delta_{n,0} \quad (20)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx = \begin{cases} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [0]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \quad (21)$$

$$= 0 \quad (22)$$

□

定義 (2π の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (23)$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \quad (24)$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \quad (25)$$

定義 (2π の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (26)$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad (27)$$

証明

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (28)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \right) \quad (29)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \quad (30)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (31)$$

ただし c_n は次のように定める。

$$c_n := \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & (n > 0) \\ \frac{a_0}{2} & (n = 0) \\ \frac{a_n + ib_n}{2} & (n < 0) \end{cases} \quad (32)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} e^{-inx} dx \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m 2\pi \delta_{m,n} \quad (35)$$

$$= c_n \quad (36)$$

□

定義 (一般の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (37)$$

$$a_n := \frac{1}{l} \int_{-l}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (38)$$

$$b_n := \frac{1}{l} \int_{-l}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (39)$$

定義 (一般の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x} \quad (40)$$

$$c_n := \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx \quad (41)$$

定理 4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (42)$$

◇

補題 5 (コーシーの不等式).

実数の数列 $\{p_n\}_n, \{q_n\}_n$ について次の不等式が成立する。

$$\left(\sum_{n=1}^N p_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N q_n^2 \right) \geq \left(\sum_{n=1}^N p_n q_n \right)^2 \quad (43)$$

◇

証明

x について次の 2 次関数の判別式を考えることで求まる。

$$\sum_{n=1}^N (p_n x + q_n)^2 \geq 0 \quad (44)$$

□

定理 6 (ワイエルシュトラスの M テスト).

区間 $[a, b]$ で定義された関数列の無限級数 $s(x)$ の各項の絶対値が上界 M_n をもち、 M_n の総和が収束するならばもとの級数は $[a, b]$ で一様収束する。

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (45)$$

◇

証明

□