相対性理論

Anko

2023 年 11 月 15 日

目次

1　特殊相対性理論

定義 (Einstein の相対性原理).
自然法則は全ての慣性系において同じ形になる。

定義 (光速度不変の原理).
光の速度は全ての慣性系で、光源の速度によらず一定である。

世界線がどんな慣性系 Lorentz 変換に対して不変

$$\mathrm{d}s^2 := (c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = (c\,\mathrm{d}\tau)^2 \tag{1}$$

すべての慣性系から見て ds^2 は不変であることがわかる。

時刻 $t \in \mathbb{R}$ と場所 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ をまとめた時空点 $x = (x^\mu)$ を次の反変ベクトルで表す。4 次元時空座標 x^μ を定義する。

$$x^\mu := (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{2}$$

$$x_\mu := (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \tag{3}$$

添字の上下で

$$x^0 = x_0, \quad x^1 = -x_1, \quad x^2 = -x_2, \quad x^3 = -x_3 \tag{4}$$

これが次のように表される。

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx_\mu dx^\mu \tag{5}$$

$$= dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 \tag{6}$$

$$= (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{7}$$

このように上付き添字を持つものは反変ベクトル V^μ, 下付き添字を持つものは共変ベクトル V_μ と呼びます。物理的な内容は同じですが表現が違うものです。ただの表記の違い

次に基本となる反変ベクトルだけで世界線を表すことを考えてみましょう。これには次の

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を定義します。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \tag{8}$$

これにより

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu && (9) \\ &= g_{00}dx^0dx^0 + g_{11}dx^1dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 + g_{33}dx^3dx^3 && (10) \\ &= (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 && (11) \end{aligned}$$

総和記号が多くなってきたので Einstein の縮約記法を用いると

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{12}$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は添字を上下する。

$$ds^2 = -d\tau^2 \tag{13}$$

$$A^\mu A_\mu = A^\nu A_\nu \tag{14}$$

x による微分を共変ベクトルとして次のように定義する。

$$\partial_\mu := (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{15}$$

1.1 計量

とその逆行列 $g^{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$g_{\mu\nu} = M\eta_{\mu\nu}M^{\top} \tag{17}$$
$$g = \det(\eta_{\mu\nu})\det(M)^2 = -\det(M)^2 < 0 \tag{18}$$

これらを元に四元速度、四元加速度、四元運動量

$$u^{\mu}(t) = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(c, \dot{\boldsymbol{r}}) \tag{19}$$
$$a^{\mu}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} = \gamma(0, \ddot{\boldsymbol{r}}) \tag{20}$$
$$p^{\mu} = mu^{\mu} = m\gamma(c, \dot{\boldsymbol{r}}) \tag{21}$$
$$j^{\mu}(x) := (c\rho, \boldsymbol{j}) \tag{22}$$

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{23}$$

作用

$$\delta S = \int \varepsilon^{\mu}\delta x_{\mu}\,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{24}$$

2 一般相対性理論

公理 (アインシュタインの等価原理).
加速系と重力場の系は局所的には原理的に区別できない。

例えば宇宙人によって部屋に閉じ込められたとき地球と同じ重力があるからといって地球にいるとは限らない。

2.1 座標系

定義 (デカルト座標).

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1, \qquad \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0 \tag{25}$$

定義 (極座標)**.**
ユークリッド平面においてデカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換は次のように定義する。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{26}$$

逆に極座標 (r, θ) からデカルト座標 (x, y) へは次のようになる。

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{27}$$

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y \tag{28}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y = -r\sin\theta\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\boldsymbol{e}_y \tag{29}$$

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r = (\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y) \cdot (\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y) \tag{30}$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{31}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta = (-r\sin\theta\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\boldsymbol{e}_y) \cdot (-r\sin\theta\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\boldsymbol{e}_y) \tag{32}$$

$$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2 \tag{33}$$

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta = (\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y) \cdot (-r\sin\theta\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\boldsymbol{e}_y) \tag{34}$$

$$= -r\sin\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{35}$$

2.2 様々な座標系における演算

どのような座標系においても同じ形の式を作る。異なる座標系での内積

定義 (座標系の基底ベクトル).
座標変換によって基底ベクトルによる

$$\boldsymbol{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'} \boldsymbol{e}_{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} \boldsymbol{e}_{\beta} \tag{36}$$

ある座標系において基底ベクトル同士の内積を計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ といい、場所の複雑な関数である。

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \tag{37}$$

また基底ベクトルの微分による係数をクリストッフェル記号といい、$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ と書く。

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{\mu} \tag{38}$$

$$g^{\alpha\beta} = g^{-1}_{\alpha\beta} \tag{39}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \tag{40}$$

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} g_{\alpha\beta} \tag{41}$$

ベクトル $\boldsymbol{A} = A^{\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha}$ を基底で微分 $\nabla_{\beta} \boldsymbol{A} = \partial \boldsymbol{A} / \partial x^{\beta} = A^{\alpha}{}_{;\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha}$ について

$$A^{\alpha}{}_{;\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (A^{\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha}) = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \boldsymbol{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = A^{\alpha}{}_{,\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{\mu} \tag{42}$$

より

$$A^{\alpha}{}_{;\beta} = A^{\alpha}{}_{,\beta} + A^{\mu} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \tag{43}$$

これを共変微分という。スカラー場 ϕ について微分と共変微分をすることについて

$$\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_{\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \tag{44}$$

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\beta,\alpha} + \phi_{\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_{\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \tag{45}$$

であり、$\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\beta;\alpha}$ であるから

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} \tag{46}$$

となる。

共変ベクトルについても共変微分すると

$$A_{\alpha;\mu} = (g_{\alpha\beta}A^{\beta})_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu}A^{\beta} + g_{\alpha\beta}A^{\beta}{}_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu}A^{\beta} + A_{\alpha;\mu} \tag{47}$$

より最初と結果を比較することで次のテンソル方程式が成り立つ。

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \tag{48}$$

また計量テンソルの共変微分を計算すると

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta} = 0 \tag{49}$$

より、これを添字を変えたものを

$$g_{\alpha\beta,\mu} = g_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} + g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta} \tag{50}$$

$$g_{\mu\alpha,\beta} = g_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta} + g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} \tag{51}$$

$$g_{\beta\mu,\alpha} = g_{\nu\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha} + g_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} \tag{52}$$

適切に足し引きして両辺に $\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}$ を掛けると

$$2g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} \tag{53}$$

$$\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) \tag{54}$$

よりクリストッフェル記号を計量テンソルで表すことができる。

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \tag{55}$$

テンソル方程式

テンソルの共変微分は次のようになる。

$$V^{\alpha}_{;\beta} = V^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}V^{\mu} \tag{56}$$

$$P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}P_{\mu} \tag{57}$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\gamma}T^{\alpha\mu} \tag{58}$$

更に

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \tag{59}$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \tag{60}$$

例 1 (デカルト座標)**.**

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} && (61)\\
\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} &= \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\mu = 0 && (62)\\
A^\alpha{}_{;\beta} &= A^\alpha{}_{,\beta} = A_{\alpha,\beta} && (63)\\
A^\alpha{}_{;\alpha} &= \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} && (64)
\end{aligned}
$$

◇

例 2 (極座標)**.**

$$
\Lambda^\beta{}_\alpha = \begin{pmatrix} \Lambda^x{}_r & \Lambda^y{}_r \\ \Lambda^x{}_\theta & \Lambda^y{}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{65}
$$

$$
\boldsymbol{e}_r = \cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y \tag{66}
$$

$$
\boldsymbol{e}_\theta = -r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y \tag{67}
$$

$$
g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{68}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} &= \Gamma^r{}_{rr}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{rr}\boldsymbol{e}_\theta = 0 && (69)\\
\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} &= \Gamma^r{}_{r\theta}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{r\theta}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta && (70)\\
\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} &= \Gamma^r{}_{\theta r}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{\theta r}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta && (71)\\
\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} &= \Gamma^r{}_{\theta\theta}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\boldsymbol{e}_\theta = -r\boldsymbol{e}_r && (72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^\alpha{}_{;\alpha} &= \frac{\partial A^\alpha}{\partial \alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}A^\mu && (73)\\
&= \frac{\partial A^r}{\partial r} + \frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}A^r && (74)\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA^r) + \frac{\partial}{\partial \theta}A^\theta && (75)
\end{aligned}
$$

◇

2.3 局所平坦性定理

定理 3.

任意の計量 $g_{\alpha\beta}$ は座標変換することである点で平坦な計量となる。

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

◇

証明

一般相対論において計量は 3 つの正の固有値と 1 つの負の固有値を持つ。これより任意の計量 $g_{\alpha\beta}$ に対して次のように定式化できる。

$$g_{\mu\nu}(x^\gamma) = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} + O[(x^\gamma - \mathscr{P})^2] \tag{77}$$

つまり次のように書ける。

$$g_{\mu\nu}|_{\mathscr{P}} = \Lambda^\alpha{}_\mu|_{\mathscr{P}} \Lambda^\beta{}_\nu|_{\mathscr{P}} g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}} = \eta_{\mu\nu} \tag{78}$$

$$g_{\mu\nu,\gamma}|_{\mathscr{P}} = 0 \tag{79}$$

$$g_{\mu\nu,\gamma\lambda}|_{\mathscr{P}} \neq 0 \tag{80}$$

これらはそれぞれ 10 個、$10 \times 4 = 40$ 個、$10 \times 10 = 100$ 個の独立な成分を持つ。それぞれのテンソルをテイラー展開する。

$$\Lambda^\alpha{}_\mu = \Lambda^\alpha{}_\mu|_{\mathscr{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma) \left.\frac{\partial \Lambda^\alpha{}_\mu}{\partial x^\gamma}\right|_{\mathscr{P}} + \frac{1}{2}(x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda) \left.\frac{\partial^2 \Lambda^\alpha{}_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\gamma}\right|_{\mathscr{P}} + \cdots \tag{81}$$

$$= \Lambda^\alpha{}_\mu|_{\mathscr{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma) \left.\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\mu}\right|_{\mathscr{P}} + \frac{1}{2}(x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda) \left.\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\gamma \partial x^\mu}\right|_{\mathscr{P}} + \cdots \tag{82}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma) \left.\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right|_{\mathscr{P}} + \frac{1}{2}(x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda) \left.\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda \partial x^\gamma}\right|_{\mathscr{P}} + \cdots \tag{83}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = [\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta}]_{\mathscr{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma)\Big[\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta,\lambda} + \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_{\nu,\lambda} g_{\alpha\beta} + \Lambda^\alpha{}_{\mu,\lambda} \Lambda^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta}\Big]_{\mathscr{P}} \tag{84}$$

$$+ \frac{1}{2}(x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda)[\cdots]_{\mathscr{P}} + \cdots \tag{85}$$

$\Lambda^\alpha{}_\mu|_{\mathscr{P}}$, $\Lambda^\alpha{}_{\mu,\gamma}|_{\mathscr{P}}$, $\Lambda^\alpha{}_{\mu,\gamma\lambda}|_{\mathscr{P}}$ は偏微分の対称性よりそれぞれ $4 \times 4 = 16$ 個、$4 \times 10 = 40$ 個、$4 \times 20 = 80$ 個を持つ。

$$g_{\mu\nu}|_{\mathscr{P}} = \Lambda^\alpha{}_\mu|_{\mathscr{P}} \Lambda^\beta{}_\nu|_{\mathscr{P}} g_{\alpha\beta}|_{\mathscr{P}} = \eta_{\mu\nu} \tag{86}$$

の 10 個の方程式を満たすことは $\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}|_{\mathscr{P}}$ の 16 個の成分によってできる。残りの 6 個の成分はローレンツ変換の自由度に対応している。(速度の 3 成分とある軸による回転の 3 成分)

$$g_{\mu\nu,\gamma}|_{\mathscr{P}} = 0 \tag{87}$$

については 40 個と 40 個でなんとか満たすことができる。

$$g_{\mu\nu,\gamma\lambda}|_{\mathscr{P}} = 0 \tag{88}$$

を満たすことについては 100 個に対して 80 個で不可能である。 □

命題 4.

長さ $\mathrm{d}l$ と体積 $\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$ について

$$\mathrm{d}l = |\boldsymbol{A}|\,\mathrm{d}\lambda \tag{89}$$

$$\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = \sqrt{-g}\,\mathrm{d}x'^0\,\mathrm{d}x'^1\,\mathrm{d}x'^2\,\mathrm{d}x'^3 \tag{90}$$

◇

証明

長さ $\mathrm{d}l$ を計算する。

$$\mathrm{d}l = |g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta|^{1/2} \tag{91}$$

$$= \left|g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}\right|^{1/2}\mathrm{d}\lambda \tag{92}$$

$$= \left|g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta\right|^{1/2}\mathrm{d}\lambda \tag{93}$$

$$= \sqrt{|\boldsymbol{A}^2|}\,\mathrm{d}\lambda \tag{94}$$

体積 $\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$ について

$$\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = \frac{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}{\partial(x'^0\,x'^1\,x'^2\,x'^3)}\,\mathrm{d}x'^0\,\mathrm{d}x'^1\,\mathrm{d}x'^2\,\mathrm{d}x'^3 \tag{95}$$

$$= \begin{vmatrix} \partial x^0/\partial x'^0 & \partial x^0/\partial x'^1 & \partial x^0/\partial x'^2 & \partial x^0/\partial x'^3 \\ \partial x^1/\partial x'^0 & \partial x^1/\partial x'^1 & \partial x^1/\partial x'^2 & \partial x^1/\partial x'^3 \\ \partial x^2/\partial x'^0 & \partial x^2/\partial x'^1 & \partial x^2/\partial x'^2 & \partial x^2/\partial x'^3 \\ \partial x^3/\partial x'^0 & \partial x^3/\partial x'^1 & \partial x^3/\partial x'^2 & \partial x^3/\partial x'^3 \end{vmatrix}\mathrm{d}x'^0\,\mathrm{d}x'^1\,\mathrm{d}x'^2\,\mathrm{d}x'^3 \tag{96}$$

$$= \det(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta})\,\mathrm{d}x'^0\,\mathrm{d}x'^1\,\mathrm{d}x'^2\,\mathrm{d}x'^3 \tag{97}$$

$\det(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta})$ について計算すると

$$(g_{\alpha\beta}) = (\Lambda^{\alpha}{}_{\beta})(\eta_{\alpha\beta})(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta})^T \tag{98}$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = \det(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta})\det(\eta_{\alpha\beta})\det(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}) = -\det(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta})^2 \tag{99}$$

$$\det(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}) = \sqrt{-g} \tag{100}$$

となるから

$$\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = \sqrt{-g}\,\mathrm{d}x'^0\,\mathrm{d}x'^1\,\mathrm{d}x'^2\,\mathrm{d}x'^3 \tag{101}$$

となる。 □

局所慣性系

ある点 $\mathscr{P}$ が局所慣性系となっているとき

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{102}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu} = 0 \implies \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = 0 \tag{103}$$

定理 5 (発散の公式)**.**

$$A^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\mu})_{,\mu} \tag{104}$$

◇

証明

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\mu\alpha,\beta}) \tag{105}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{g^{\alpha\beta}}_{\text{対称}}\underbrace{(g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta})}_{\text{反対称}} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \tag{106}$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \tag{107}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{,\mu} \qquad (g_{,\mu} = gg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}) \tag{108}$$

$$A^{\alpha}{}_{;\alpha} = A^{\alpha}{}_{,\alpha} + A^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} \tag{109}$$

$$= A^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}}A^{\mu}(\sqrt{-g})_{,\mu} \tag{110}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\mu})_{,\mu} \tag{111}$$

□

測地線

$$V^\alpha(B) - V^\alpha(A) = \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 = -\int_{x^2=b} \Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu\,\mathrm{d}x^1 \tag{112}$$

$$\delta V^\alpha = \text{最初に}\delta a\boldsymbol{e}_\sigma, \text{次に}\delta b\boldsymbol{e}_\lambda, \text{そして} -\delta a\boldsymbol{e}_\sigma, \text{最後に} -\delta b\boldsymbol{e}_\lambda \text{の移動による } V^\alpha \text{の変化} \tag{113}$$

$$= -\int_{x^\lambda=b} \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} V^\mu\,\mathrm{d}x^\sigma - \int_{x^\sigma=a+\delta a} \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} V^\mu\,\mathrm{d}x^\lambda + \int_{x^\lambda=b+\delta b} \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} V^\mu\,\mathrm{d}x^\sigma + \int_{x^\sigma=a} \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} V^\mu\,\mathrm{d}x^\lambda \tag{114}$$

$$\approx \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} V^\mu)\,\mathrm{d}x^\sigma + \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} V^\mu)\,\mathrm{d}x^\lambda \tag{115}$$

$$\approx \delta a \delta b \Big[\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} V^\mu) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} V^\mu) \Big] \tag{116}$$

$$= \delta a \delta b [\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}] V^\mu \tag{117}$$

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu \tag{118}$$

定義 (リーマンの曲率テンソル).
ぱっと見テンソルではないけどテンソルとなる。

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\nu{}_{\beta\mu} \tag{119}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} \tag{120}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0 \iff \text{平坦な多様体} \tag{121}$$

定理 6.

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{122}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{123}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{124}$$

◇

局所慣性系において $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$ であるから

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} \tag{125}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\beta,\mu\nu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) - \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\mu,\beta\nu} - g_{\beta\mu,\sigma\nu}) \tag{126}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \tag{127}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) \tag{128}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \tag{129}$$

これらについて次のような関係式が成り立つ。

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{130}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{131}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0 \tag{132}$$

これよりテンソル方程式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{133}$$

これをビアンキの恒等式という。

定義.

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha} \tag{134}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \tag{135}$$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \tag{136}$$

ビアンキ恒等式に対して $\alpha\mu$、$\beta\nu$ の順に縮約を取ると

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{137}$$

$$g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}[R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda}+R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu}+R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] \tag{138}$$
$$=g^{\beta\nu}[R_{\beta\nu;\lambda}+(-R_{\beta\lambda;\nu})+R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu}] \tag{139}$$
$$=R_{;\lambda}+(-R^{\nu}{}_{\lambda;\nu})+(-R^{\mu}{}_{\lambda;\mu}) \tag{140}$$
$$=R_{;\lambda}-2R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} \tag{141}$$
$$=(\delta^{\mu}_{\lambda}R-2R^{\mu}{}_{\lambda})_{;\mu} \tag{142}$$
$$=g_{\lambda\gamma}(g^{\mu\gamma}R-2R^{\mu\gamma})_{;\mu} \tag{143}$$

これはアインシュタイン・テンソルを用いて

$$(\delta^{\mu}_{\lambda}R-2R^{\mu}{}_{\lambda})_{;\mu}=-2g_{\lambda\gamma}\left(R^{\mu\gamma}-\frac{1}{2}g^{\mu\gamma}R\right)_{;\mu}=0 \tag{144}$$
$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0 \tag{145}$$

となる。

2.4 曲がった時空での物理

1. 時空 (すべての事象の集合) は、メトリックをもった四次元多様体である。
2. メトリックは棒と時計で測ることができる。二つの近傍の点の間の棒に沿った距離は $|\,\mathrm{d}x^2|^{1/2}$ であり、短時間に引き続いて起こる二つの事象を通過した時計の測る、それらの時間間隔は、$|-\,\mathrm{d}x^2|^{1/2}$ である。
3. 時空のメトリックは、適当な座標系を選ぶことによって任意の一点でローレンツ系での形 $\eta_{\alpha\beta}$ とすることである。
4. アインシュタインの等価原理: 重力作用を考えなくてよい局所的な物理実験はどんなものであっても自由落下する慣性系で測定すれば、特殊相対論の成り立つ平坦な時空でなされる実験と同じ結果を与える。

特殊相対論における粒子、エントロピー、四元運動量の保存則は次のように表された。

$$(nU^{\alpha})_{,\alpha}=0 \tag{146}$$
$$U^{\alpha}S_{,\alpha}=0 \tag{147}$$
$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{148}$$

これはアインシュタインの等価原理によってテンソル方程式が成り立つ。

$$(nU^{\alpha})_{;\alpha}=0 \tag{149}$$
$$U^{\alpha}S_{;\alpha}=0 \tag{150}$$
$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0 \tag{151}$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U^{\nu} + pg^{\mu\nu} \tag{152}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 + 2\phi)\,\mathrm{d}t^2 + (1 - 2\phi)(\,\mathrm{d}x^2 + \,\mathrm{d}y^2 + \,\mathrm{d}z^2) \tag{153}$$