ベクトル解析

Anko

2023 年 7 月 19 日

目次

1　記法・記号

定義 (Kronecker のデルタ)**.**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1}$$

定義 (レビ・チビタの完全反対称テンソル (Levi-Civita antisymmetric tensor))**.**
$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k}$ は $\mu_1 \cdots \mu_k$ が順列のとき $1 \cdots k$ の偶置換なら 1、奇置換なら -1 とする。順列ではないときは 0 とする。

$$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} := \begin{cases} \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix} & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が順列のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{2}$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が偶置換のとき}) \\ -1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が奇置換のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{3}$$

定義 (Einstein の縮約記法)**.**
同じ項で添字が重なる場合はその添字について和を取る.

$$A_i B_i = \sum_{i=x,y,z} A_i B_i \tag{4}$$

2 ベクトル空間

定義 (ベクトル空間)**.**
体 K における加群をベクトル空間である。

定義.
ベクトルについて内積と外積を定義する。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = A_iB_i \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) = \boldsymbol{e}_i\epsilon_{ijk}A_jB_k \tag{6}$$

3 ベクトル解析

定義.
ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ について勾配 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}$ と発散 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$、回転 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \partial_iA_i \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \boldsymbol{e}_i\epsilon_{ijk}\partial_jA_k \tag{9}$$

定理 1 (勾配・発散・回転の線形性)**.**

$$\boldsymbol{\nabla}(f+g) = \boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{12}$$

$\diamond$

証明

$$(\boldsymbol{\nabla}(f+g))_i = \partial_i(f+g) \tag{13}$$
$$= \partial_i f + \partial_i g \tag{14}$$
$$= (\boldsymbol{\nabla} f + \boldsymbol{\nabla} g)_i \tag{15}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \partial_i(A_i + B_i) \tag{16}$$
$$= \partial_i A_i + \partial_i B_i \tag{17}$$
$$= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \tag{18}$$
$$(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}))_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(A_k + B_k) \tag{19}$$
$$= \epsilon_{ijk}\partial_j A_k + \epsilon_{ijk}\partial_j B_k \tag{20}$$
$$= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{21}$$

$\square$

定理 2 (勾配・発散・回転のスカラー倍).

$$\boldsymbol{\nabla}(fg) = f\boldsymbol{\nabla} g + g\boldsymbol{\nabla} f \tag{22}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla} f) \tag{23}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla} f) \tag{24}$$

$\diamond$

証明

$$
\begin{align}
(\boldsymbol{\nabla}(fg))_i &= \partial_i(fg) \tag{25}\\
&= f\partial_i g + g\partial_i f \tag{26}\\
&= (f\boldsymbol{\nabla} g + g\boldsymbol{\nabla} f)_i \tag{27}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) &= \partial_i(fA_i) \tag{28}\\
&= f\partial_i A_i + A_i\partial_i f \tag{29}\\
&= f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla} f) \tag{30}\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) \tag{31}\\
&= f\epsilon_{ijk}\partial_j A_k + \epsilon_{ijk}A_k\partial_j f \tag{32}\\
&= f\epsilon_{ijk}\partial_j A_k - \epsilon_{ikj}A_k\partial_j f \tag{33}\\
&= (f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla} f))_i \tag{34}
\end{align}
$$

□

定理 3.

$$
\begin{align}
\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \tag{35}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \tag{36}\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \tag{37}
\end{align}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}))_i &= \partial_i(A_jB_j) && (38)\\
&= (A_j\partial_iB_j + B_j\partial_iA_j) - (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) && (39)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) && (40)\\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) && (41)\\
&= \epsilon_{ijk}A_j\epsilon_{klm}\partial_lB_m + \epsilon_{ijk}B_j\epsilon_{klm}\partial_lA_m + A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i && (42)\\
&= (\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A})_i && (43)\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \partial_i(\epsilon_{ijk}A_jB_k) && (44)\\
&= \epsilon_{ijk}(B_k\partial_iA_j + A_j\partial_iB_k) && (45)\\
&= B_k\epsilon_{kij}\partial_iA_j - A_j\epsilon_{jik}\partial_iB_k && (46)\\
&= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) && (47)\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}A_lB_m && (48)\\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) && (49)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) && (50)\\
&= (B_j\partial_jA_i + A_i\partial_jB_j) - (B_i\partial_jA_j + A_j\partial_jB_i) && (51)\\
&= A_i\partial_jB_j - B_i\partial_jA_j + B_j\partial_jA_i - A_j\partial_jB_i && (52)\\
&= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} && (53)
\end{aligned}
$$

□

定理 4.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= 0 && (54)\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) &= \boldsymbol{0} && (55)\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} && (56)
\end{aligned}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_jA_k) && (57)\\
&= \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k && (58)
\end{aligned}
$$

このとき対称性から $i,\, j$ を交換しても等しい。

$$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = \epsilon_{jik}\partial_j\partial_i A_k \tag{59}$$

$$\Longleftrightarrow \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = -\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k \tag{60}$$

$$\Longleftrightarrow \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 \tag{61}$$

よって

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0 \tag{62}$$

他も同様にして

$$(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} f))_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0 \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}\partial_l A_m) && (64)\\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m && (65)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m && (66)\\
&= \partial_j\partial_i A_j - \partial_j^2 A_i && (67)\\
&= (\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A})_i && (68)
\end{aligned}$$

□