

# 相対論的量子力学

anko9801

2023 年 8 月 22 日

## 目次

0.1	電磁場中の荷電粒子 .....	2
1	相対論的波動方程式 .....	2
1.1	クライン・ゴールドン方程式 .....	2
2	2次元時空におけるディラック方程式 .....	14
3	指数関数 .....	17
4	スピノル球関数 .....	19
5	水素原子における電子のエネルギー準位 .....	23

## 0.1 電磁場中の荷電粒子

スカラーポテンシャル  $\phi$ , ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の中での電荷  $q$  を持つ粒子の運動は次の置き換えで記述できる。

$$H \mapsto H - q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (0.1)$$

$$\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (0.2)$$

一様な磁場  $\mathbf{B}$  の場合, ベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$  (対称ゲージ) と置くことができるので

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m}\mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \frac{q^2}{8m}(\mathbf{B}^2\mathbf{r}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})^2) \quad (0.3)$$

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$  となるので

$$H = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{2m} \quad (0.4)$$

$$= \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} \quad (0.5)$$

$$= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - 2\frac{q\hbar}{2m}\mathbf{B} \cdot \mathbf{s} \quad \left(\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \quad (0.6)$$

となる。ゼーマン相互作用

## 1 相対論的波動方程式

### 1.1 クライン・ゴールドン方程式

定理 1.1 (クライン・ゴールドン方程式).

相対論的力学におけるエネルギーと運動量に基づいてローレンツ変換のもとで共変となる相対論的波動方程式を構築する。

$$\left[(\hbar c)^2\partial^2 + (mc^2)^2\right]\psi(x) = 0 \quad (1.1)$$

◇

証明

相対論的力学における自由粒子のエネルギーと運動量の関係  $E = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (c\mathbf{p})^2}$  より

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (c\hat{\mathbf{p}})^2}\psi(x) \quad (1.2)$$

となるが

1. 時間微分と空間微分について非対称であり, ローレンツ変換のもとでの共変性が見えない.
2. 実際に, 光速よりも速く情報が伝播しないという, 相対論的な因果律を破る.
3. 空間微分が平方根の中に入っているため連続の方程式を導くことができず, 波動関数の確率解釈ができない.

これだと上記の波動方程式では, 時間に関して 1 階微分, 空間に関して 2 階微分が平方根の中に入っている. この非対称性を解消するため, 時間微分を両辺に作用させると

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi(x) = [(mc^2)^2 + (c\hat{\mathbf{p}})^2]\psi(x) \quad (1.3)$$

$$[(\hbar c)^2\partial^2 + (mc^2)^2]\psi(x) = 0 \quad (1.4)$$

を得る. これをクライン・ゴールドン方程式と呼ぶ.  $\square$

**定理 1.2** (連続の方程式).

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (1.5)$$

◇

**証明**

クライン・ゴールドン方程式から

$$\psi^*(x)[(\hbar c)^2\partial^2 + (mc^2)^2]\psi(x) = 0 \quad (1.6)$$

$$\psi(x)[(\hbar c)^2\partial^2 + (mc^2)^2]\psi^*(x) = 0 \quad (1.7)$$

が得られるので両辺の差を取って

$$(\hbar c)^2\partial_\mu[\psi^*(x)\partial^\mu\psi(x) - \psi(x)\partial^\mu\psi^*(x)] = 0 \quad (1.8)$$

となる. よって

$$j^\mu(x) := \frac{i\hbar}{2m}[\psi^*(x)\partial^\mu\psi(x) - \psi(x)\partial^\mu\psi^*(x)] \quad (1.9)$$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (1.10)$$

となる. ただし  $\rho(x) = j^0(x)/c$  は非負とは限らないため粒子の存在確率密度と解釈することはできない.  $\square$

クライン・ゴールドン方程式では時間に関して 2 階微分を含むため、 $j^0(x)$  に時間微分が残り、確率解釈ができなかった。時間に関して 1 階微分のみを含む相対論的波動方程式を構築したい。また共変性を満足するためには空間に関して 1 階微分のみを含む必要がある。そこで

定理 1.3 (ディラック方程式).

確率解釈できる相対論的波動方程式を構築する。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = (-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi(x) \quad (1.11)$$

ただし、 $\alpha^i, \beta$  は次を満たす無次元の未知係数である。

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad (1.12)$$

◇

証明

次の形となることを仮定する。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = (c\alpha^i \hat{p}_i + \beta mc^2) \psi(x) \quad (1.13)$$

$$= (-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi(x) \quad (1.14)$$

これがクライン・ゴールドン方程式を満たすことから

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi(x) = (c\alpha^i \hat{p}_i + \beta mc^2)^2 \psi(x) \quad (1.15)$$

$$= [c^2 \alpha^i \alpha^j \hat{p}_i \hat{p}_j + \beta^2 (mc^2)^2 + (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \hat{p}_i (mc)] \psi(x) \quad (1.16)$$

$$= [(c\hat{\mathbf{p}})^2 + (mc^2)^2] \psi(x) \quad (1.17)$$

係数を比較することによって  $\alpha^i$  と  $\beta$  は次を満たすエルミート行列であることがわかる。

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad (1.18)$$

□

これを満たす行列について、例えばディラック表示がある。

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^i \otimes \tau^1, \quad \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} = \sigma^0 \otimes \tau^3 \quad (1.19)$$

**定理 1.4.**

さらにガンマ行列  $\gamma^\mu := (\beta, \beta\alpha)$  を定義することでディラック方程式は次のように書ける。

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (1.20)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.21)$$

◇

**証明**

ディラック方程式の両辺に  $\beta/c$  を掛けると

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = (-i\hbar c\alpha^i\partial_i + \beta mc^2)\psi(x) \quad (1.22)$$

$$i\hbar\gamma^0\partial_0\psi(x) = (-i\hbar\gamma^i\partial_i + mc)\psi(x) \quad (1.23)$$

となる。またガンマ行列について

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \quad (1.24)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^i\beta = -\beta\alpha^i = -\gamma^i \quad (1.25)$$

より  $\gamma^0$  はエルミート行列で  $\gamma^i$  は反エルミート行列である。 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}$  より  $\mu \leq \nu$  のときを示せばよい。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \begin{cases} \beta\alpha^\mu\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta\alpha^\mu = -\beta^2(\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu) = -2\delta^{\mu\nu} & (\mu > 0, \nu > 0) \\ \beta\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta = \beta^2\alpha^\nu - \beta^2\alpha^\nu = 0 & (\mu = 0, \nu > 0) \\ 2\beta^2 = 2 & (\mu = \nu = 0) \end{cases} \quad (1.26)$$

よって  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  と書ける。

□

**定理 1.5 (ローレンツ共変性).**

$S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu$  を満たすように定めた  $S_\Lambda$  に対して次の変換はローレンツ共変性を満たす。

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad D'_\mu = \Lambda^\nu_\mu D_\nu, \quad \psi'(x') = S_\Lambda\psi(x) \quad (1.27)$$

◇

**証明**

このときディラック方程式は次のように変換でき、共変性を満たす。

$$(i\hbar\gamma^\mu D'_\mu - mc)\psi'(x) = (i\hbar\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu D_\mu - mc)S_\Lambda\psi(x) \quad (1.28)$$

$$= S_\Lambda(i\hbar S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda \Lambda_\mu^\nu D_\mu - mc)\psi(x) \quad (1.29)$$

$$= S_\Lambda(i\hbar \Lambda_\lambda^\mu \gamma^\lambda \Lambda_\mu^\nu D_\mu - mc)\psi(x) \quad (1.30)$$

$$= S_\Lambda(i\hbar \delta_\lambda^\nu \gamma^\lambda D_\mu - mc)\psi(x) \quad (1.31)$$

$$= S_\Lambda(i\hbar \gamma^\nu D_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (1.32)$$

□

**定理 1.6** (無限小変換).

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu \quad (1.33)$$

$\Lambda_\nu^\mu \Lambda_\mu^\lambda = \delta_\nu^\lambda$  であり

$$\Lambda_\nu^\mu \Lambda_\mu^\lambda = (\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu)(\delta_\mu^\lambda + \omega_\mu^\lambda) = \delta_\nu^\lambda + \omega_\nu^\lambda + \omega_\nu^\lambda \quad (1.34)$$

$\omega_{\nu\lambda} = -\omega_{\lambda\nu}$  と反対称となる。

$$\omega_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\eta_x & -\Delta\eta_y & -\Delta\eta_z \\ -\Delta\eta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ -\Delta\eta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ -\Delta\eta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

◇

**命題 1.7.**

$\gamma^5$  を次のように定義する。

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.36)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (1.37)$$

◇

**証明**

$$(\gamma^5)^\dagger = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 \quad (1.38)$$

$$= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \quad (1.39)$$

$$= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.40)$$

$$= \gamma^5 \quad (1.41)$$

$$(\gamma^5)^2 = -(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger \quad (1.42)$$

$$= -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \quad (1.43)$$

$$= 1 \quad (1.44)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = i(\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu) \quad (1.45)$$

$$= i((-1)^\mu + (-1)^{3-\mu})\gamma^0 \dots (\gamma^\mu)^2 \dots \gamma^3 \quad (1.46)$$

$$= 0 \quad (1.47)$$

□

**命題 1.8.**

$\Sigma^i$  を次のように定義する。

$$\Sigma^i := \frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \gamma^j \gamma^k \quad (1.48)$$

このとき次の式を示せ。

$$(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i, \quad \{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij} \quad (1.49)$$

◇

**証明**

まず  $(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i$  を示す。

$$(\Sigma^i)^\dagger = -\frac{i}{2} \sum_{j,k} (\varepsilon^{ijk} \gamma^j \gamma^k)^\dagger \quad (1.50)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \gamma^k \gamma^j \quad (1.51)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{j,k} -\varepsilon^{ikj} \gamma^k \gamma^j \quad (1.52)$$

$$= \Sigma^i \quad (1.53)$$

次に  $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$  を示す。

$i = j$  のとき、ある  $k, l$  が存在して

$$\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{a,b} \varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b \right)^2 \quad (1.54)$$

$$= -\frac{1}{2} (\gamma^k \gamma^l - \gamma^l \gamma^k)^2 \quad (1.55)$$

$$= -\frac{1}{2} (\gamma^k \gamma^l \gamma^k \gamma^l - \gamma^k \gamma^l \gamma^l \gamma^k - \gamma^l \gamma^k \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k \gamma^l \gamma^k) \quad (1.56)$$

$$= 2 \quad (1.57)$$

$i \neq j$  のとき  $a, b, c, d$  のいずれか 2 つ 1 組は同じであるから

$$\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = -\frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} (\varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b \varepsilon^{jcd} \gamma^c \gamma^d + \varepsilon^{jcd} \gamma^c \gamma^d \varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b) \quad (1.58)$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \varepsilon^{iab} \varepsilon^{jcd} (1 + (-1)^3) \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \quad (1.59)$$

$$= 0 \quad (1.60)$$

よって  $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$  である。  $\square$

(4)  $\Sigma = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$  と任意の  $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$  に対して次が成り立つことを示せ。

$$(\mathbf{v} \cdot \Sigma)^2 = \mathbf{v}^2 \quad (1.61)$$

証明

$$(\mathbf{v} \cdot \Sigma)^2 = (v^i \Sigma^i)(v^j \Sigma^j)^\dagger \quad (1.62)$$

$$= v^i \Sigma^i \Sigma^j (v^j)^\dagger \quad (1.63)$$

$$= \delta^{ij} v^i (v^j)^\dagger \quad (1.64)$$

$$= \mathbf{v}^2 \quad (1.65)$$

$\square$

(5)  $\alpha^i, \beta$  の具体例を 1 つ挙げて性質を満たすことを確認せよ。

証明

次のディラック表示を用いる。

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$



このとき  $\alpha^i, \beta$  の性質を満たす。

$$(\alpha^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \alpha^i \quad (1.67)$$

$$\beta^\dagger = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} = \beta \quad (1.68)$$

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

$$= (\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i) \otimes I \quad (1.70)$$

$$= \left( (\delta^{ij} I + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k) + (\delta^{ji} I + i\varepsilon^{jik} \sigma^k) \right) \otimes I \quad (1.71)$$

$$= 2\delta^{ij} \otimes I \quad (1.72)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}^2 = 1 \quad (1.73)$$

$$\{\alpha^i, \beta\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

$$= (\sigma^i \sigma^0 - \sigma^0 \sigma^i) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

$$= 0 \quad (1.76)$$

□

### 問題 1.9.

共変微分  $D_\mu$  を次のように定義する。

$$D_\mu := \partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \quad (1.77)$$

◇

(1)  $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)$  に対して

$$(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{D}^2 + \frac{q}{\hbar} \mathbf{B}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.78)$$

を示せ。

証明

まず次の式が成り立つことを確認する。

$$D_\mu D_\nu^\dagger = \left( \partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \right) \left( \partial_\nu + \frac{q}{i\hbar} A_\nu(x) \right) \quad (1.79)$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu + \frac{q}{i\hbar} \partial_\mu A_\nu(x) - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \partial_\nu + \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu(x) A_\nu(x) \quad (1.80)$$

よって次のように示せる。

$$(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \sum_{i,j} (D_i \sigma^i) (D_j \sigma^j)^\dagger \quad (1.81)$$

$$= \sum_{i,j} \left( \delta^{ij} I + i \sum_k \varepsilon^{ijk} \sigma^k \right) D_i D_j^\dagger \quad (1.82)$$

$$= \sum_i D_i^2 + i \sum_{i,j,k} \varepsilon^{ijk} \sigma^k D_i D_j^\dagger \quad (1.83)$$

$$= \mathbf{D}^2 + i \sum_{i,j,k} \varepsilon^{ijk} \sigma^k \frac{q}{i\hbar} \partial_i A_j(x) \quad (1.84)$$

$$= \mathbf{D}^2 + \frac{q}{\hbar} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(x)) \quad (1.85)$$

$$= \mathbf{D}^2 + \frac{q}{\hbar} \mathbf{B}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.86)$$

□

(2) 荷電粒子に対するクライン・ゴールドン方程式

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2] \phi(x) = 0 \quad (1.87)$$

が非相対論的極限  $mc^2 \rightarrow \infty$  において、シュレーディンガー方程式に帰着することを示せ

証明

$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$  であり  $\phi(x) = e^{-i(mc^2)t/\hbar}\varphi(x)$  とおくと

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2]\phi(x) = 0 \quad (1.88)$$

$$= \left[ \hbar^2 \left( \partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \right) \left( \partial^\mu - \frac{q}{i\hbar} A^\mu(x) \right) + (mc)^2 \right] \phi(x) \quad (1.89)$$

$$= \left[ \left( \hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + i\hbar \partial_\mu q A^\mu(x) + q A_\mu(x) i\hbar \partial^\mu - q^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \right) + (mc)^2 \right] \phi(x) \quad (1.90)$$

$$= \left[ \left( \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 t}{\partial +^2} \mathbf{p}^2 \right) + q \left( \frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial t}{\partial \phi} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(x) \right) + q \left( \frac{i\hbar}{c^2} \phi \frac{\partial t}{\partial -} \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{p} \right) - q^2 \left( \frac{\phi^2}{c^2} - \mathbf{A}^2 \right) + (mc)^2 \right] \phi(x) \quad (1.91)$$

$$= \left[ \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 t}{\partial +^2} q \frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial t}{\partial \phi} + q \frac{i\hbar}{c^2} \phi \frac{\partial t}{\partial -} q^2 \frac{\phi^2}{c^2} + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2 + (mc)^2 \right] e^{-i(mc^2)t/\hbar} \varphi(x) \quad (1.92)$$

$$= \left[ -(mc)^2 + q \frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2mq\phi - \frac{q^2 \phi^2}{c^2} + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2 + (mc)^2 \right] e^{-i(mc^2)t/\hbar} \varphi(x) \quad (1.93)$$

$$= 2m \left[ -\frac{q^2 \phi^2}{2mc^2} + \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2}{2m} + q\phi(x) \right] e^{-i(mc^2)t/\hbar} \varphi(x) \quad (1.94)$$

非相対論的極限  $mc^2 \rightarrow \infty$  のとき  $\phi(x)$  は時間に依存しないからシュレーディンガー方程式となる。

$$i\hbar \frac{\partial t}{\partial \phi}(x) = \left( \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2}{2m} + q\phi \right) \phi(x) \quad (1.95)$$

□

(3) 荷電粒子に対するディラック方程式

$$(i\hbar \gamma^\mu D_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (1.96)$$

を用いて、軸性ベクトル  $j_A^\mu(x) := \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$  の発散  $\partial_\mu j_A^\mu(x)$  を計算し、微分を含まない形で表せ。

証明

まず次の式が成り立つことを確認する。

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 + \gamma^0 \gamma^i \gamma^5 \quad (1.97)$$

$$= \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 - \gamma^i \gamma^0 \gamma^5 \quad (1.98)$$

$$= (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \quad (1.99)$$

よってディラック方程式より次のようになる。

$$\partial_\mu j_A^\mu(x) = \partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) \quad (1.100)$$

$$= \partial_\mu(\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) \quad (1.101)$$

$$= (\partial_\mu\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) + \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi(x) \quad (1.102)$$

$$= (\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi(x) - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5(\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \quad (1.103)$$

$$= \left(\frac{1}{i\hbar}(\gamma^\mu q A_\mu(x) + mc)\psi(x)\right)^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi(x) - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\left(\frac{1}{i\hbar}(\gamma^\mu q A_\mu(x) + mc)\psi(x)\right) \quad (1.104)$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\left(q A_\mu(x)(\psi^\dagger(x)(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi + \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu\psi(x)) + 2mc\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\psi(x)\right) \quad (1.105)$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\left(q A_\mu(x)(\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi - \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)) + 2mc\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^5\psi(x)\right) \quad (1.106)$$

$$= -\frac{2mc}{i\hbar}\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \quad (1.107)$$

□

#### 問題 1.10.

中心力ポテンシャル  $V(r)$  を持つハミルトニアン  $\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 + V(r)$  を考える. ◇

(1)  $\hat{H}$  と軌道角運動量  $\hat{L} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$  との交換関係を求めよ。

証明

$$[\hat{H}, \hat{L}^i] = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 + V(r), \varepsilon^{ijk}r^j\hat{p}^k] \quad (1.108)$$

$$= \varepsilon^{ijk}\left(c[\alpha^\mu\hat{p}^\mu, r^j\hat{p}^k] + mc^2[\beta, r^j\hat{p}^k] + [V(r), r^j\hat{p}^k]\right) \quad (1.109)$$

$$= \varepsilon^{ijk}\left(c\alpha^\mu(p^\mu r^j\hat{p}^k - r^j\hat{p}^k p^\mu) + mc^2(\beta r^j\hat{p}^k - r^j\hat{p}^k\beta) + (V(r)r^j\hat{p}^k - r^j\hat{p}^k V(r))\right) \quad (1.110)$$

$$= \varepsilon^{ijk}\left(c\alpha^\mu(-i\hbar\delta^{\mu j})\hat{p}^k + 0 + r^j(-i\hbar\partial^k V(r))\right) \quad (1.111)$$

$$= -i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j\hat{p}^k - i\hbar\left(\mathbf{r} \times \frac{dV}{dr} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)_i \quad (1.112)$$

$$= -i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j\hat{p}^k - i\hbar\frac{dV}{dr}\left(\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right)_i \quad (1.113)$$

$$= -i\hbar c\varepsilon^{ijk}\alpha^j\hat{p}^k \quad (1.114)$$

□

(2)  $\Sigma^i := -\frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \alpha^j \alpha^k$  とするとき、 $\hat{H}$  とスピン角運動量  $\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \Sigma$  との交換関係を求めよ。

証明

$$[\hat{H}, \hat{S}^i] = \left[ c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 + V(r), -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \alpha^j \alpha^k \right] \quad (1.115)$$

$$= -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \left( c[\alpha^\mu, \alpha^j \alpha^k] p^\mu + mc^2 [\beta, \alpha^j \alpha^k] + [V(r), \alpha^j \alpha^k] \right) \quad (1.116)$$

$$= -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \left( c(\alpha^\mu \alpha^j \alpha^k - \alpha^j \alpha^k \alpha^\mu) p^\mu + mc^2 (\beta \alpha^j \alpha^k - \alpha^j \alpha^k \beta) + 0 \right) \quad (1.117)$$

$$= -\frac{i\hbar}{4} \varepsilon^{ijk} \left( c((- \alpha^j \alpha^\mu + 2\delta^{\mu j}) \alpha^k - \alpha^j (-\alpha^\mu \alpha^k + 2\delta^{k\mu})) p^\mu + 0 + 0 \right) \quad (1.118)$$

$$= -\frac{i\hbar c}{2} \varepsilon^{ijk} (\alpha^k p^j - \alpha^j p^k) \quad (1.119)$$

$$= i\hbar c \varepsilon^{ijk} \alpha^j p^k \quad (1.120)$$

□

(3) 全角運動量が保存量となることを示せ。

証明

全角運動量がハミルトニアンと交換するから保存量となる。

$$[\hat{H}, \hat{J}^i] = [\hat{H}, \hat{L}^i + \hat{S}^i] = 0 \quad (1.121)$$

□

問題 1.11.

$\boldsymbol{\sigma}$  をパウリ行列として、任意のベクトル  $\mathbf{p}$  に対する 2 行 2 列の行列  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$  を考える。 ◇

(1)  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2$  を求めよ。

証明

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = (\sigma^i p^i)(\sigma^j p^j)^\dagger \quad (1.122)$$

$$= p^i p^j (\delta^{ij} I + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k) \quad (1.123)$$

$$= \mathbf{p}^2 \quad (1.124)$$

□

(2)  $Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$  を求めよ。

証明

$\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$  とすると

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \text{Tr} \begin{pmatrix} p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.125)$$

□

(3)  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$  の固有値を求めよ。

証明

$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$  とおくと

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = 0 \quad (1.126)$$

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 \quad (1.127)$$

よって固有値は  $\pm|\mathbf{p}|$  である。

□

(4)  $\mathbf{p} := |\mathbf{p}|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  とするとき、固有ベクトルを求めよ。

証明

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \mp |\mathbf{p}|I)\mathbf{v} = |\mathbf{p}| \begin{pmatrix} \cos \theta \mp 1 & \sin \theta \cos \phi - i \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + i \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \mp 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \quad (1.128)$$

$$= |\mathbf{p}| \begin{pmatrix} \cos \theta \mp 1 & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \mp 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \quad (1.129)$$

より固有値  $\pm|\mathbf{p}|$  に対する固有ベクトルはそれぞれ次のベクトルの定数倍である。

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -\cos \theta \pm 1 \end{pmatrix} \quad (1.130)$$

□

## 2 2次元時空におけるディラック方程式

問題 2.1.

2次元時空におけるディラック方程式は次のように考えられる。

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

このときガンマ行列  $\gamma^0, \gamma^1$  は次を満たす。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1 \quad (2.2)$$

またカイラリティ  $\gamma^5$  は次を満たす。

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (2.3)$$

$\gamma^5$  を  $\gamma^0, \gamma^1$  を用いて表わせ。

◇

**証明**

カイラリティがガンマ行列の複素数係数多項式で表されるとするとガンマ行列の性質より次のように書ける。

$$\gamma^5 = \sum_{e_0, e_1} a_{e_0, e_1} (\gamma^0)^{e_0} (\gamma^1)^{e_1} = \alpha_0 + \alpha_1 \gamma^0 + \alpha_2 \gamma^1 + \alpha_3 \gamma^0 \gamma^1 \quad (a_{e_0, e_1}, \alpha_i \in \mathbb{C}) \quad (2.4)$$

これを代入するとガンマ行列の直交性より

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \iff \alpha_0 \in \mathbb{R}, \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in i\mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (2.6)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1 \implies \alpha_3 = \pm 1 \quad (2.7)$$

となる。よって  $\gamma^5 = \pm \gamma^0 \gamma^1$  となる。ここでは特に  $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1$  とする。

□

**問題 2.2.**

$\gamma_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$  とするとき  $(\gamma_+)^a, (\gamma_-)^b, (\gamma_+)^a (\gamma_-)^b, (\gamma_-)^b (\gamma_+)^a$  ( $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) を  $\gamma_\pm$  を用いて表わせ。

◇

**証明**

$$(\gamma_\pm)^2 = \frac{1 \pm 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2}{2^2} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = \gamma_\pm \quad (2.8)$$

$$\gamma_+ \gamma_- = \gamma_- \gamma_+ = \frac{1 + \gamma^5 - \gamma^5 - (\gamma^5)^2}{2^2} = 0 \quad (2.9)$$

より帰納法から次が示せる。

$$(\gamma_+)^a = \gamma_+, \quad (\gamma_-)^b = \gamma_-, \quad (\gamma_+)^a (\gamma_-)^b = 0, \quad (\gamma_-)^b (\gamma_+)^a = 0 \quad (2.10)$$

□

問題 2.3.

$\psi_{\pm}(x) = \gamma_{\pm}\psi(x)$  は  $\gamma^5$  の固有関数である。それぞれの固有値を求めよ。 ◇

証明

カイラリティを作用させることで固有関数  $\psi_{\pm}(x)$  の固有値は  $\pm 1$  となる。

$$\gamma^5 \psi_{\pm}(x) = \gamma^5 \gamma_{\pm} \psi(x) = \frac{\gamma^5 \pm 1}{2} \psi(x) = \pm \gamma^5 \psi(x) \quad (2.11)$$

□

問題 2.4.

$\psi_{\pm}(x)$  が満たす連立微分方程式をディラック方程式から求めよ。 ◇

証明

$\{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = 0$  より  $\gamma^{\mu} \gamma_{\pm} = \gamma_{\mp} \gamma^{\mu}$  となる。よって

$$\begin{cases} \gamma_+ (i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - mc) \psi(x) = 0 \\ \gamma_- (i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - mc) \psi(x) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\iff \begin{cases} i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_-(x) = mc \psi_+(x) \\ i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_+(x) = mc \psi_-(x) \end{cases} \quad (2.13)$$

となる。 □

問題 2.5.

$m = 0$  の場合に  $\psi_+(x) \propto e^{-iEt/\hbar + ipx/\hbar}$  が解となるとき、 $E, p$  が満たす関係式を求めよ。 ◇

証明

$m = 0$  のとき  $i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_+(x) = 0$  となる。  $\gamma^1 = \gamma^0(\gamma_+ - \gamma_-)$  より

$$i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_+(x) = i\hbar (\gamma^0 c \partial_t + \gamma^1 \partial_x) \psi_+(x) \quad (2.14)$$

$$= (\gamma^0 Ec - \gamma^1 p) \psi_+(x) \quad (2.15)$$

$$= \gamma^0 (Ec - (\gamma_+ - \gamma_-) p) \psi_+(x) \quad (2.16)$$

$$= \gamma^0 (Ec - p) \psi_+(x) = 0 \quad (2.17)$$

となる。よって  $Ec = p$  を満たす。 □

問題 2.6.

$m = 0$  の場合に  $\psi_-(x) \propto e^{-iEt/\hbar + ipx/\hbar}$  が解となるとき、 $E, p$  が満たす関係式を求めよ。 ◇

証明



$m = 0$  のとき  $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi_-(x) = 0$  となる。  $\gamma^1 = \gamma^0(\gamma_+ - \gamma_-)$  より

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi_-(x) = i\hbar(\gamma^0c\partial_t + \gamma^1\partial_x)\psi_-(x) \quad (2.18)$$

$$= (\gamma^0Ec - \gamma^1p)\psi_-(x) \quad (2.19)$$

$$= \gamma^0(Ec - (\gamma_+ - \gamma_-)p)\psi_-(x) \quad (2.20)$$

$$= \gamma^0(Ec + p)\psi_-(x) = 0 \quad (2.21)$$

となる。よって  $Ec = -p$  を満たす。  $\square$

**問題 2.7.**

$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^5$  を 2 行 2 列の行列とすると、それらの具体形をパウリ行列を用いて表せ。  $\diamond$

**証明**

パウリ行列を次のように定義する。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

これより次のようにおくとそれぞれの性質を満たす。

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma_2, \quad \gamma^5 = -\sigma_3 \quad (2.23)$$

$\square$

### 3 指数関数

**問題 3.1.**

次の式を示せ。

$$e^{i\hat{B}}\mathbf{A}e^{-i\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \mathbf{A}]] \dots]}_n \quad (3.1)$$

$\diamond$

**証明**

$e^{i\lambda\hat{B}}\mathbf{A}e^{-i\lambda\hat{B}}$  について考える。これを  $\lambda$  について展開すると

$$e^{i\lambda\hat{B}}\mathbf{A}e^{-i\lambda\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{i\lambda\hat{B}}\mathbf{A}e^{i\lambda\hat{B}} \right]_{\lambda=0} \quad (3.2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} e^{i\lambda\hat{B}} i[\hat{B}, \mathbf{A}] e^{i\lambda\hat{B}} \right]_{\lambda=0} \quad (3.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[ e^{i\lambda\hat{B}} i^n \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \mathbf{A}]] \dots]}_n e^{i\lambda\hat{B}} \right]_{\lambda=0} \quad (3.4)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \mathbf{A}]] \dots]}_n \quad (3.5)$$

よって  $\lambda = 1$  を代入することで示せる。

$$e^{i\hat{B}}\mathbf{A}e^{-i\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \mathbf{A}]] \dots]}_n \quad (3.6)$$

□

### 問題 3.2.

$\partial$  を微分演算子とすると、 $(\partial e^{i\hat{B}})e^{-i\hat{B}} = -e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}})$  を示せ。

◇

証明

$1 = e^{i\hat{B}}e^{-i\hat{B}}$  に微分演算子を作用させることで示せる。

$$0 = \partial 1 = \partial(e^{i\hat{B}}e^{-i\hat{B}}) = (\partial e^{i\hat{B}})e^{-i\hat{B}} + e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) \quad (3.7)$$

$$(\partial e^{i\hat{B}})e^{-i\hat{B}} = -e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) \quad (3.8)$$

□

### 問題 3.3.

次の式を示せ。

$$e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial \hat{B}]] \dots]}_{n-1} \quad (3.9)$$

◇

証明

(1) において  $\mathbf{A} = \partial$  を代入して示せる。

$$e^{i\hat{B}}(\partial e^{-i\hat{B}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial]] \dots]}_n \quad (3.10)$$

$$= \partial + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial]] \dots]}_n \quad (3.11)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{B}, \dots [\hat{B}, [\hat{B}, \partial \hat{B}]] \dots]}_{n-1} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

□

## 4 スピノル球関数

問題 4.1.

スピノル球関数を球面調和関数を用いて次のように定義する。

$$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left( \begin{array}{c} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{array} \right)_{j=l \pm 1/2} \quad (4.1)$$

軌道角運動量  $\hat{\mathbf{L}}$ , スピン角運動量  $\hat{\mathbf{S}}$ , 全角運動量  $\hat{\mathbf{J}}$  とする。

$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$  が持つパリティを求めよ。

◇

証明

球面調和関数におけるパリティは  $(-1)^l$  となるからスピノル球関数のパリティは  $(-1)^l$  となる。

$$Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (4.2)$$

$$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (4.3)$$

□

問題 4.2.

$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$  が持つ  $\hat{J}_z$  の固有値を求めよ。

◇

証明

球面調和関数における固有値からスピノル球関数の  $\hat{J}_z$  の固有値は  $m\hbar$  となる。

$$\hat{J}_z Y_l^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \phi) \quad (4.4)$$

$$\hat{J}_z \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) = m\hbar \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (4.5)$$

□

#### 問題 4.3.

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$  が持つ  $\hat{L}^2$  の固有値を求めよ。

◇

#### 証明

球面調和関数における固有値からスピノル球関数の  $\hat{L}^2$  の固有値は  $\hbar^2 l(l+1)$  となる。

$$\hat{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (4.6)$$

$$\hat{L}^2 \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (4.7)$$

□

#### 問題 4.4.

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$  が持つ  $\hat{L} \cdot \hat{S}$  の固有値を求めよ。

◇

#### 証明

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$  に  $\hat{L} \cdot \hat{S}$  を作用させると

$$\hat{L} \cdot \hat{S} \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (4.8)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left( j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (4.9)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left( \left( l \pm \frac{1}{2} \right) \left( l \pm \frac{1}{2} + 1 \right) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (4.10)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \left( \pm \left( l + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi) \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

より固有値は  $\frac{\hbar^2 l}{2}, -\frac{\hbar^2(l+1)}{2}$  となる。

□

#### 問題 4.5.

$\mathcal{Y}_{j,m}^\pm(\theta, \phi)$  が持つ  $\hat{J}^2$  の固有値を求めよ。

◇

#### 証明

$\mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$  に  $\hat{\mathbf{J}}^2$  を作用させると

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \hbar^2 j(j+1) \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (4.13)$$

$$= \hbar^2 \left( l \pm \frac{1}{2} \right) \left( \left( l \pm \frac{1}{2} \right) + 1 \right) \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (4.14)$$

$$= \hbar^2 \left( \left( l \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) \quad (4.15)$$

より固有値は  $l^2 - \frac{1}{4}, (l+1)^2 - \frac{1}{4}$  となる。  $\square$

**問題 4.6.**

パウリ行列  $\boldsymbol{\sigma}$  と位置ベクトル  $\mathbf{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  に対して  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi)$  を計算し、スピノル球関数のみを用いて表せ。  $\diamond$

**証明**

まず演算子を計算すると

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

となる。三角関数を球面調和関数に作用させたときの固有値は次のようになるから

$$\cos \theta Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^m(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^m(\theta, \phi) \quad (4.17)$$

$$\sin \theta e^{i\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1}(\theta, \phi) \quad (4.18)$$

$$\sin \theta e^{-i\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1}(\theta, \phi) \quad (4.19)$$

次のように計算できる。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \cos \theta Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sin \theta e^{-i\phi} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sin \theta e^{i\phi} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \cos \theta Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (4.21)$$

$$, \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sin \theta e^{i\phi} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \cos \theta Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big)_{j=l \pm 1/2} \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l-m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ + \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m-\frac{1}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ , -\sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ + \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{3}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \\ \mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (4.23)$$

$$+ \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m-\frac{1}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \quad (4.24)$$

$$\pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \quad (4.25)$$

$$\pm \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \quad (4.26)$$

$$, -\sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l+m+\frac{3}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \quad (4.27)$$

$$+ \sqrt{l + \frac{1}{2} \pm m} \sqrt{\frac{(l-m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \quad (4.28)$$

$$\mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{3}{2})(l-m+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \quad (4.29)$$

$$\mp \sqrt{l + \frac{1}{2} \mp m} \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})(l-m-\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big)_{j=l \pm 1/2} \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} (2l+1) \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2} \pm 1}{(2l+1)(2l+1 \pm 2)}} Y_{l \pm 1}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ , \mp (2l+1) \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2} \pm 1}{(2l+1)(2l+1 \pm 2)}} Y_{l \pm 1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}_{j=l \pm 1/2} \quad (4.31)$$

$$, \mp (2l+1) \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2} \pm 1}{(2l+1)(2l+1 \pm 2)}} Y_{l \pm 1}^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big)_{j=l \pm 1/2} \quad (4.32)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2j+1 \pm 1}} \begin{pmatrix} \sqrt{j + \frac{1}{2} \mp \left(m - \frac{1}{2}\right)} Y_{j \pm 1/2}^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ , \mp \sqrt{j + \frac{1}{2} \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)} Y_{j \pm 1/2}^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix} = \mathcal{Y}_{j,m}^{\mp}(\theta, \phi) \quad (4.33)$$

$$, \mp \sqrt{j + \frac{1}{2} \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)} Y_{j \pm 1/2}^{m+1/2}(\theta, \phi) \Big) = \mathcal{Y}_{j,m}^{\mp}(\theta, \phi) \quad (4.34)$$

よって次の式となる。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \mathcal{Y}_{j,m}^{\pm}(\theta, \phi) = \mathcal{Y}_{j,m}^{\mp}(\theta, \phi) \quad (4.35)$$

□

## 5 水素原子における電子のエネルギー準位

### 問題 5.1.

中心力ポテンシャル  $V(r) = -\frac{\alpha \hbar c}{r}$  のもとでディラック方程式を解くことにより得られる水素原子中の電子のエネルギー準位を考える。

主量子数  $n$  が与えられたとき、全角運動量  $j$  が取り得る値を答えよ。 ◇

証明

$n$  と  $j$  に関して  $n = j + n' + 1/2$  という関係があるから  $j = 1/2, \dots, (2n-1)/2$  を取る。 □

### 問題 5.2.

主量子数  $n$ , 全角運動量  $j$  を持つ状態のエネルギー固有値の表式を書き下せ。また、そのエネルギー固有値の縮重度を答えよ。 ◇

証明

主量子数  $n$ , 全角運動量  $j$  を持つ状態のエネルギー固有値の表式は次のようになる。

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2}}} \quad (5.1)$$

また縮重度は  $j = l \pm 1/2$  より  $n' = 0$  において  $2j+1$ 、 $n' > 0$  において  $2(2j+1)$  となる。 □

### 問題 5.3.

主量子数  $n$  を持つ状態の総数を求めよ。 ◇

証明

$n = j + n' + 1/2$  と  $j = l \pm 1/2$  より状態の総数は  $2n^2$  となる。

$$2n + 2 \times \sum_{n'=1}^{n-1} 2(n - n') = 2n^2 \quad (5.2)$$

□

### 問題 5.4.

電子の静止エネルギーから測った束縛エネルギーの大きさが縮退を除いて 7 番目と 10 番目

に大きい準位の主量子数  $n$  と全角運動量  $j$  をそれぞれ答えよ。また、それらの準位の束縛エネルギーの大きさを有効数字 6 桁で求めよ。◇

証明

7 番目に大きい準位は  $n = 4, j = 1/2$  で 10 番目に大きい準位は  $n = 4, j = 7/2$  である。またそれぞれの束縛エネルギーは

$$\mathcal{E} \approx -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2} - \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \frac{\alpha^4 mc^2}{2n^3} \quad (5.3)$$

$$\approx -\frac{13.60569}{n^2} - \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \frac{7.249022 \times 10^{-4}}{n^3} \quad (5.4)$$

$$\mathcal{E}_{4,1/2} \approx 0.850365 \quad (5.5)$$

$$\mathcal{E}_{4,7/2} \approx 0.850356 \quad (5.6)$$

となる。□

問題 5.5.

同じ主量子数  $n$  を持つ状態でも全角運動量  $j$  に依存してエネルギー準位が分裂する。この現象を表す名称を答えよ。◇

証明

微細構造 □