

# 多様体

anko9801

2023 年 11 月 12 日

## 目次

1	ユークリッド空間 .....	2
2	.....	2

## 1 ユークリッド空間

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  はすべての多様体の原型となるもの。すべての多様体は局所的に  $\mathbb{R}^n$  のように見える。実ベクトル空間  $V, W$

$$\text{Hom}(V, W) \ni f : V \rightarrow W \quad (1.1)$$

$$\alpha^i : \sum v^i e_i \mapsto v^i \quad (1.2)$$

$$\begin{array}{ccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad (1.3)$$

座標関数  $\alpha^i$

曲面の接平面上にあるベクトルを接ベクトルという。

$\mathbb{R}^n$  の点  $p$  における接空間  $T_p(\mathbb{R}^n), T_p\mathbb{R}^n$  の元を接ベクトルという。

## 2

定義 (線形写像).

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \quad (2.1)$$

$$L(rv) = rL(v) \quad (2.2)$$

定義 (コベクトル).

ベクトル空間上の  $k$  変数交代多重線形関数は次数  $k$  の多重コベクトル

$$V = \text{span}\{e_i\} \quad (2.3)$$

$$T_p(\mathbb{R}^n) = \text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\} \quad (2.4)$$

余接空間

$$T_p^*(\mathbb{R}^n), T_p^*\mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

定義 (テンソル積).

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k)g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \quad (2.6)$$

$$\sigma f(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad (2.7)$$

$$Sf = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma f \quad (2.8)$$

$$Af = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma f \quad (2.9)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g) \quad (2.10)$$