フーリエ解析

Anko

2023 年 12 月 2 日

目次

1　フーリエ解析

1.1　フーリエ級数

定義 (内積)**.**

関数の正規直交関数系による展開区間 $[a,b]$ 上の

定義 (複素フーリエ級数)**.**

$\mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上 関数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ に対し区間 $[-\pi,\pi]$ において定義された実数値関数 $f(x)$ が連続かつ区分的に C^1 級かつ周期的である $(f(-\pi)=f(\pi))$ ならば $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx} \tag{1.1}$$

$$c_n:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx \tag{1.2}$$

例

定理 1.1 (Bessel の不等式)**.**

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2\le\|f\|_2^2 \tag{1.3}$$

◇

定理 1.2 (平均値の定理)**.**

区間 $[a,b]$ で連続、 (a,b) で微分可能な関数 $f(x)$ について $a<c<b$ となる c が存在して次のようになる。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{1.4}$$

◇

命題 1.3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \tag{1.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \pi\delta_{m,n} \tag{1.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \pi\delta_{m,n} \tag{1.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = 2\pi\delta_{n,0} \tag{1.8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = 0 \tag{1.9}$$

◇

証明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\,dx \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \tag{1.11}$$

$$= 0 \tag{1.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\,dx \tag{1.13}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \tag{1.14}$$

$$= \pi\delta_{m,n} \tag{1.15}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,dx \tag{1.16}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m \neq n) \\ \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \tag{1.17}$$

$$= \pi\delta_{m,n} \tag{1.18}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [x]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \tag{1.19}$$

$$= 2\pi\delta_{n,0} \tag{1.20}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = \begin{cases} \left[-\dfrac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq 0) \\ [0]_{-\pi}^{\pi} & (n = 0) \end{cases} \tag{1.21}$$

$$= 0 \tag{1.22}$$

□

定義 (2π の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{1.23}$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \tag{1.24}$$

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \tag{1.25}$$

定義 (2π の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.26}$$

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \tag{1.27}$$

証明

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) && (1.28) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \right) && (1.29) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) && (1.30) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} && (1.31)
\end{aligned}
$$

ただし c_n は次のように定める。

$$
c_n := \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n > 0) \\ \dfrac{a_0}{2} & (n = 0) \\ \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n < 0) \end{cases} \tag{1.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} e^{-inx} \, dx && (1.33) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} \, dx && (1.34) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m 2\pi \delta_{m,n} && (1.35) \\
&= c_n && (1.36)
\end{aligned}
$$

□

定義 (一般の周期をもつ関数のフーリエ級数).

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) && (1.37) \\
a_n &:= \frac{1}{L} \int_{-L}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx && (1.38) \\
b_n &:= \frac{1}{L} \int_{-L}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx && (1.39)
\end{aligned}
$$

定義 (一般の周期をもつ関数の複素フーリエ級数).

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \tag{1.40}$$

$$c_n := \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \tag{1.41}$$

定理 1.4.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1.42}$$

◇

補題 1.5 (コーシーの不等式).

実数の数列 $\{p_n\}_n, \{q_n\}_n$ について次の不等式が成立する。

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2\right) \geq \left(\sum_{n=1}^{N} p_n q_n\right)^2 \tag{1.43}$$

◇

証明

x について次の 2 次関数の判別式を考えることで求まる。

$$\sum_{n=1}^{N} (p_n x + q_n)^2 \geq 0 \tag{1.44}$$

□

定理 1.6 (ワイエルシュトラスの M テスト).

区間 $[a,b]$ で定義された関数列の無限級数 $s(x)$ の各項の絶対値が上界 M_n をもち、 M_n の総和が収束するならばもとの級数は $[a,b]$ で一様収束する。

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1.45}$$

◇

証明

□

定理 1.7.
$f(x) = x^n$ を $[-1,1]$ で Fourier 変換を行うことで ζ 関数の値がわかる ◇

証明
偶関数のとき $f(x) = x^{2n}$ となる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\pi x)) \tag{1.46}$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^{2m}\,dx = \frac{2}{2m+1} \tag{1.47}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} x^{2m} \cos(n\pi x)\,dx \tag{1.48}$$

$$= 2\int_{0}^{1} x^{2m} \cos(n\pi x)\,dx \tag{1.49}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k \Big[(x^{2m})^{(k)}(\cos(n\pi x))^{(-k-1)}\Big]_0^1 \tag{1.50}$$

k が偶数のとき $\sin(n\pi x)$ があるから $x = 0, 1$ 両方で 0 となる。また $k \neq 2m$ のとき $x = 0$ で 0 となる。これより k が奇数 $(2s-1)$ かつ $x = 1$ のときのみを考えればよい。

$$a_n = -2\sum_{s=1}^{m}\Big[\frac{(2m)!}{(2m-k)!}x^{2m-k}\frac{(-1)^s}{(n\pi)^{k+1}}\cos(n\pi x)\Big]_0^1 \tag{1.51}$$

$$= -2\sum_{s=1}^{m}\frac{(2m)!}{(2m-2s+1)!}\frac{(-1)^{s+n}}{(n\pi)^{2s}} \tag{1.52}$$

$$x^{2m} = \frac{1}{2m+1} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{m}\frac{(2m)!}{(2m-2s+1)!}\frac{(-1)^{s+n}}{(n\pi)^{2s}}\cos(n\pi x) \tag{1.53}$$

$m = 1$ のとき

$$x^2 = \frac{1}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2} \tag{1.54}$$

$$0^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} \tag{1.55}$$

$$1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \tag{1.56}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} x^3 \sin(n\pi x)\,dx = \tag{1.57}$$

□