

ベクトル解析

Anko

2023 年 8 月 22 日

目次

1	ベクトル空間	2
1.1	ベクトルの定義	2
1.2	座標系	3
1.3	様々な座標系における演算	4
2	ベクトル解析	6

1 ベクトル空間

1.1 ベクトルの定義

定義 (Einstein の縮約記法).

同じ項で添字が重なる場合にはその添字について和を取る。

定義 (ベクトル空間).

体 K 上の加群を K 上のベクトル空間といい、ベクトル空間の元をベクトルという。

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3$$

定義 (ベクトル空間における内積と外積).

ベクトル $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i, \mathbf{B} = B^j \mathbf{e}_j$ における内積と外積を定義する。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i \mathbf{e}_i \cdot B^j \mathbf{e}_j = g_{ij} A^i B^j \quad (1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A^2 B^3 - A^3 B^2) \mathbf{e}_1 + (A^3 B^1 - A^1 B^3) \mathbf{e}_2 + (A^1 B^2 - A^2 B^1) \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

定理 1.

内積と外積について Einstein の縮約記法を用いて次のように書ける。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i \mathbf{e}_i \cdot B^j \mathbf{e}_j = A_i B^i \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} A^j B^k \quad (4)$$

◇

証明

内積については自明。外積について次のように求められる。

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^1 = \varepsilon^{1jk} A^j B^k = A^2 B^3 - A^3 B^2 \quad (5)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = \varepsilon^{2jk} A^j B^k = A^3 B^1 - A^1 B^3 \quad (6)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^3 = \varepsilon^{3jk} A^j B^k = A^1 B^2 - A^2 B^1 \quad (7)$$

□

1.2 座標系

定義 (デカルト座標).

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad (8)$$

定義 (極座標).

ユークリッド平面においてデカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換は次のように定義する。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (9)$$

逆に極座標 (r, θ) からデカルト座標 (x, y) へは次のようになる。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \quad (13)$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (14)$$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \cdot (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \quad (15)$$

$$= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \cdot (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \quad (17)$$

$$= -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (18)$$

1.3 様々な座標系における演算

どのような座標系においても同じ形の式を作る。異なる座標系での内積

定義 (座標系の基底ベクトル).

座標変換によって基底ベクトルによる

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \mathbf{e}_{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} \mathbf{e}_{\beta} \quad (19)$$

ある座標系において基底ベクトル同士の内積を計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ といい、これが座標系を表現する。

$$\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (20)$$

また基底ベクトルの微分による係数をクリストッフェル記号といい、 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ と書く。

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\mu} \quad (21)$$

これらを用いて共変微分

$$A^{\alpha}_{;\beta} \mathbf{e}_{\alpha} := \nabla_{\beta} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \mathbf{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = A^{\alpha}_{;\beta} \mathbf{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\mu} \quad (22)$$

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + A^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \quad (23)$$

よりデカルト座標に対しての歪みを

例 2 (デカルト座標).

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0 \quad (25)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0 \quad (26)$$

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} \quad (27)$$

◇

例 3 (極座標).

$$\Lambda^\beta_\alpha = \begin{pmatrix} \Lambda^x_r & \Lambda^y_r \\ \Lambda^x_\theta & \Lambda^y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (29)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (30)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

◇

定理 4.

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (32)$$

◇

証明

□

定義 (Kronecker のデルタ).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (33)$$

定義 (レビ・チビタの完全反対称テンソル (Levi-Civita antisymmetric tensor)).

$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_k}$ は $\mu_1 \dots \mu_k$ が順列のとき $1 \dots k$ の偶置換なら 1、奇置換なら -1 とする。順列ではないときは 0 とする。

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_k} := \begin{cases} \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \mu_1 & \dots & \mu_k \end{pmatrix} & (\mu_1 \dots \mu_k \text{ が順列のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \quad (34)$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mu_1 \dots \mu_k \text{ が偶置換のとき}) \\ -1 & (\mu_1 \dots \mu_k \text{ が奇置換のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \quad (35)$$

2 ベクトル解析

定理 5.

$f_{ij} = f_{ji}$ と対称性があるとき $\varepsilon_{ijk} f_{ij} = 0$ となる。

◇

証明

i, j を交換しても等しいことから

$$\varepsilon_{ijk} f_{ij} = \varepsilon_{jik} f_{ji} = -\varepsilon_{ijk} f_{ij} = 0 \quad (36)$$

となる。

□

定義.

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (37)$$

定義.

ベクトル $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ について勾配 $\nabla \mathbf{A}$ と発散 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 、回転 $\nabla \times \mathbf{A}$ を次のように定義する。

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} \mathbf{e}_i \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \partial_i A^i \quad (39)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}^i \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k \quad (40)$$

定理 6 (勾配・発散・回転の線形性).

それぞれ線形性が成り立つ。

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (41)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (42)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (43)$$

◇

証明

$$(\nabla(f + g))_i = \partial_i(f + g) \quad (44)$$

$$= \partial_i f + \partial_i g \quad (45)$$

$$= (\nabla f + \nabla g)_i \quad (46)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \partial_i(A_i + B_i) \quad (47)$$

$$= \partial_i A_i + \partial_i B_i \quad (48)$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (49)$$

$$(\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (A_k + B_k) \quad (50)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k \quad (51)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (52)$$

□

定理 7 (スカラー倍の勾配・発散・回転).

スカラー倍はそれぞれ次のようになる。

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (53)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (54)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f) \quad (55)$$

◇

証明

$$(\nabla(fg))_i = \partial_i(fg) \quad (56)$$

$$= f\partial_i g + g\partial_i f \quad (57)$$

$$= (f\nabla g + g\nabla f)_i \quad (58)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \partial_i(fA_i) \quad (59)$$

$$= f\partial_i A_i + A_i\partial_i f \quad (60)$$

$$= f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (61)$$

$$(\nabla \times (f\mathbf{A}))_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) \quad (62)$$

$$= f\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k + \varepsilon_{ijk}A_k\partial_j f \quad (63)$$

$$= f\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k - \varepsilon_{ikj}A_k\partial_j f \quad (64)$$

$$= (f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f))_i \quad (65)$$

□

定理 8 (ベクトルの内積・外積の勾配・発散・回転).

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (66)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (67)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (68)$$

◇

証明

$$(\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}))_i = \partial_i(A_j B_j) \quad (69)$$

$$= (A_j \partial_i B_j + B_j \partial_i A_j) - (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) + (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) \quad (70)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl})(A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) \quad (71)$$

$$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} (A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) \quad (72)$$

$$= \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m + \varepsilon_{ijk} B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i \quad (73)$$

$$= (\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}))_i + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})_i + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}_i + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}_i \quad (74)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \quad (75)$$

$$= \varepsilon_{ijk} (B_k \partial_i A_j + A_j \partial_i B_k) \quad (76)$$

$$= B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \quad (77)$$

$$= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (78)$$

$$(\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \quad (79)$$

$$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \quad (80)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl})(B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \quad (81)$$

$$= (B_j \partial_j A_i + A_i \partial_j B_j) - (B_i \partial_j A_j + A_j \partial_j B_i) \quad (82)$$

$$= A_i \partial_j B_j - B_i \partial_j A_j + B_j \partial_j A_i - A_j \partial_j B_i \quad (83)$$

$$= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (84)$$

□

定理 9 (有名定理).

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (85)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (86)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (87)$$

◇

証明

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \partial_i (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) \quad (88)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0 \quad (89)$$

$$(\nabla \times (\nabla f))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f = 0 \quad (90)$$

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l A_m) \quad (91)$$

$$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \quad (92)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \quad (93)$$

$$= \partial_j \partial_i A_j - \partial_j^2 A_i \quad (94)$$

$$= (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A})_i \quad (95)$$

□

定理 10 (Gauss の定理).

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (96)$$

◇