

# 微分方程式

Anko

2023 年 11 月 18 日

## 目次

1	ラプラス変換	2
2	特殊関数	2
2.1	ガウス積分	2
2.2	ガンマ関数	4
2.3	ベータ関数	6
2.4	$n$ 次元超球の体積と表面積	10
2.5	超幾何関数	11
2.6	Bernoulli 数	12
2.7	ゼータ関数 $\zeta(s)$	14
3	微分方程式	19
3.1	エルミート多項式	19
3.2	ルジャンドル微分方程式	21
3.3	ベッセルの微分方程式	21
3.4	ラゲール多項式	22
3.5	ポアソン方程式	23
3.6	変数分離	23
3.7	境界値問題	23

## 1 ラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

例えば

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty te^{-st} dt = \left[ -\frac{t}{s}e^{-st} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left( -\frac{1}{s}e^{-st} \right) dt = \frac{1}{s^2} \quad (3)$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \int_0^\infty \sin t e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{-st} dt \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{-st+it} - e^{-st-it}) dt \quad (5)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[f] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} f(s)e^{st} ds \quad (6)$$

## 2 特殊関数

### 2.1 ガウス積分

定理 1 (Gauss 積分).

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\Re \alpha > 0) \quad (7)$$

◇

証明

まず積分値を  $I$  とおく。

$$I := \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx \quad (8)$$

ここで  $I^2$  を変数変換して計算する。

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \quad (9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy \quad (10)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r d\theta dr \quad (11)$$

$$= 2\pi \left[ \frac{e^{-\alpha r^2}}{-2\alpha} \right]_0^{\infty} \quad (12)$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \quad (13)$$

よって示される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (14)$$

□

定理 2 (Gauss 積分).

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{\pi} (2n-1)!! \frac{a^{2n+1}}{2^{n+1}} \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2} \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/4} e^{ikx} dk = 2\sqrt{\pi} e^{-x^2} \quad (17)$$

◇

証明

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} dx \quad (18)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (19)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) \quad (20)$$

$$= \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \alpha^{-(2n+1)/2} \quad (21)$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x e^{-\alpha x^2} dx \quad (22)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx \quad (23)$$

$$= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{2\alpha} \quad (24)$$

$$= \frac{n!}{2} \alpha^{-(n+1)} \quad (25)$$

□

## 2.2 ガンマ関数

定義.

複素平面上で  $\operatorname{Re} z > 1$  を満たす領域内にある閉曲線  $C$  上の点  $z$  に対して次の関数は一様収束し正則な関数となる.

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (26)$$

命題 3.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (27)$$

◇

証明

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \quad (28)$$

$$= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (29)$$

$$= z\Gamma(z) \quad (30)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt \quad (31)$$

$$= [-e^{-t}]_0^\infty \quad (32)$$

$$= 1 \quad (33)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt \quad (34)$$

$$= \int_0^\infty s^{-1} e^{-s^2} 2s ds \quad (35)$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds \quad (36)$$

$$= \sqrt{\pi} \quad (37)$$

□

命題 4 (スターリングの公式 (Stirling's formula)).

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \quad (x \gg 1) \quad (38)$$

◇

証明

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (39)$$

$$= \int_0^\infty e^{s(x-1)} e^{-e^s} e^s ds \quad (40)$$

$$= \int_0^\infty e^{sx - e^s} ds \quad (41)$$

$$\approx \int_0^\infty e^{(x \ln x - x) - \frac{x}{2}(s - \ln x)^2} ds \quad (x \gg 1) \quad (42)$$

$$= x^x e^{-x} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}(s - \ln x)^2} ds \quad (43)$$

$$= x^x e^{-x} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}s^2} ds \quad (44)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} x^x e^{-x} \quad (45)$$

これより

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \quad (46)$$

□

命題 5 (ガンマ関数の極と零点).

$$\Gamma(z) = \infty \iff z = 0, -1, -2, \dots \quad (47)$$

$$\text{Res}[\Gamma(z); z = -n] = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (48)$$

$$\{\Gamma(s) = 0 \mid |s| < \infty\} = \emptyset \quad (49)$$

◇

命題 6 (ワイエルシュトラスの公式 (Weierstrass' formula)).

$\gamma$  はオイラーの定数 (Euler's constant) とする.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (50)$$

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n \right) = 0.577216 \dots \quad (51)$$

◇

## 2.3 ベータ関数

定義.

ベータ関数 (Beta function)

$$B(m, n) := \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (52)$$

命題 7.

$$B(m, n) = B(n, m) \quad (53)$$

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \quad (54)$$

$$B(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} d\theta \quad (55)$$

◇

証明

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (56)$$

$$= \int_1^0 (1-s)^{m-1} s^{n-1} (-ds) \quad (s = 1-t) \quad (57)$$

$$= \int_0^1 s^{n-1} (1-s)^{m-1} ds \quad (58)$$

$$= B(n, m) \quad (59)$$

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (60)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2(m-1)} \theta \cos^{2(n-1)} \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (t = \sin^2 \theta) \quad (61)$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \quad (62)$$

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (63)$$

$$(64)$$

□

定理 8.

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1) \quad (65)$$

$$B(m, n+1) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (m+k)} \quad (66)$$

◇

証明

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (67)$$

$$= \left[ \frac{1}{m} t^m (1-t)^{n-1} \right]_0^1 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 t^m (1-t)^{n-2} dt \quad (68)$$

$$= \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1) \quad (69)$$

$$B(m, n+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{a \cdot (m+1) \cdots (m+n-1)} B(m+n, 1) \quad (70)$$

$$= \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (m+k)} \frac{1}{m+n} \quad (71)$$

$$= \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (m+k)} \quad (72)$$

□

命題 9 (ガンマ関数とベータ関数との関係).

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (73)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (74)$$

◇

証明



$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty s^{m-1} e^{-s} \, ds \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} \, dt \quad (75)$$

$$= \int_0^\infty q^{2(m-1)} e^{-q^2} 2q \, dq \int_0^\infty p^{2(n-1)} e^{-p^2} 2p \, dp \quad (s = q^2, t = p^2) \quad (76)$$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(q^2+p^2)} q^{2m-1} p^{2n-1} \, dp \, dq \quad (77)$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(m+n-1)} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta \, dr \, d\theta \quad (q = r \cos \theta, p = r \sin \theta) \quad (78)$$

$$= 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(m+n)-1} \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta \, d\theta \quad (79)$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-R} R^{m+n-1} r \frac{1}{2r} \, dR \, B(m, n) \quad (R = r^2) \quad (80)$$

$$= \int_0^\infty e^{-R} R^{m+n-1} \, dR \, B(m, n) \quad (81)$$

$$= \Gamma(m+n) B(m, n) \quad (82)$$

これより

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (83)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1)B(z, 1-z) \quad (84)$$

$$= \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{-z} \, dt \quad (85)$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (86)$$

□

**命題 10** (ガウスの公式 (Gauss's formula)).

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (87)$$

$$(88)$$

◇

証明

□

命題 11 (Legendre の倍数公式).

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad (89)$$

◇

## 2.4 $n$ 次元超球の体積と表面積

定理 12.

$$V_n(R) = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \quad (90)$$

◇

証明

$n$  次元超球の体積は次のように表現できる。

$$V_n(R) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (91)$$

各  $x_i$  を  $R$  倍することで

$$V_n(R) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (92)$$

$$= R^n \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (93)$$

$$= R^n V_n(1) \quad (94)$$

これより  $V_n(1)$  を求めればよい。 $V_n(1)$  と  $V_{n-1}(1)$  の関係を求める。

$$V_n(1) = \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (95)$$

$$= V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n \quad (96)$$

$$= 2V_{n-1}(1) \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \quad (97)$$

$$= V_{n-1}(1) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (98)$$

$$= V_{n-1}(1) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (99)$$

$$= V_{n-1}(1) \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (100)$$

これより連続に適用することで

$$V_n(1) = V_1(1)\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} \frac{\Gamma(\frac{4}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad (101)$$

$$= 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad (102)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \quad (103)$$

となり、超球の体積は

$$V_n(R) = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \quad (104)$$

□

定理 13.

表面積

$$S_n(R) = R^{n-1} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (105)$$

◇

証明

□

命題 14.

◇

## 2.5 超幾何関数

定義.

超幾何関数

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (106)$$

命題 15.

$$e^x = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right) \quad (107)$$

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1, 1, 2; -x) \quad (108)$$

◇

## 2.6 Bernoulli 数

定義 (Bernoulli 数).

Bernoulli 数  $B_n$  は以下の正則関数の多項式展開の係数として定義される.

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \quad (109)$$

命題 16.

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_{2n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (110)$$

◇

証明

まず Bernoulli の定義式の両辺に  $x/2$  を加える。

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (111)$$

このとき左辺は偶関数となる。

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)} = \frac{x e^{x/2} + e^{-x/2}}{2 e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right) \quad (112)$$

$$\frac{-x}{2} \coth\left(\frac{-x}{2}\right) = \frac{-x e^{-x/2} + e^{x/2}}{2 e^{-x/2} - e^{x/2}} = \frac{x e^{x/2} + e^{-x/2}}{2 e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right) \quad (113)$$

これより次の右辺も偶関数であることがわかり、一致の定理から右辺について奇数次の項は現れない。よって 3 以上の奇数を添え字に持つ Bernoulli 数はゼロとなる。

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (114)$$

□

定理 17.

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{B_m}{(n-m)!m!} x^n = \delta_{n,1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (115)$$

◇

証明

定義式の左辺の分母を払って展開すると

$$x = (e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (116)$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \quad (117)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{k!n!} x^{k+n} \quad (118)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{B_n}{(n-m)!m!} x^n. \quad (119)$$

となり両辺の係数を比較することで次のようになる。

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{B_n}{(n-m)!m!} x^n = \delta_{n,1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (120)$$

□

命題 18.

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad (121)$$

◇

証明

上の定理について具体的式を求めると

$$B_0 = 1 \quad (122)$$

$$\frac{1}{2}B_0 + B_1 = 0 \quad (123)$$

$$\frac{1}{6}B_0 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 = 0 \quad (124)$$

$$\frac{1}{24}B_0 + \frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{4}B_2 + \frac{1}{6}B_3 = 0 \quad (125)$$

$$\frac{1}{120}B_0 + \frac{1}{24}B_1 + \frac{1}{12}B_2 + \frac{1}{12}B_3 + \frac{1}{24}B_4 = 0 \quad (126)$$

$$\frac{1}{720}B_0 + \frac{1}{120}B_1 + \frac{1}{48}B_2 + \frac{1}{36}B_3 + \frac{1}{48}B_4 + \frac{1}{120}B_5 = 0 \quad (127)$$

$$\frac{1}{5040}B_0 + \frac{1}{720}B_1 + \frac{1}{240}B_2 + \frac{1}{144}B_3 + \frac{1}{144}B_4 + \frac{1}{240}B_5 + \frac{1}{720}B_6 = 0 \quad (128)$$

$$\dots \quad (129)$$

より添字が奇数のときを代入することで求まる。

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad (130)$$

□

## 2.7 ゼータ関数 $\zeta(s)$

定義 (ゼータ関数).

ゼータ関数  $\zeta(s)$  は次のように定義される.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re s > 1). \quad (131)$$

命題 19.

$\zeta(s)$  が  $\Re s > 1$  において一様絶対収束することを示す.

◇

証明

$s = a + bi$  ( $a > 1$ ) とおく. すると次のようになる.

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \approx \int_1^{\infty} dx x^{-a} = \left[ \frac{1}{1-a} x^{1-a} \right]_1^{\infty} < \infty. \quad (132)$$

よってゼータ関数  $\zeta(s)$  は一様絶対収束する.

□

命題 20.

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad (\Re s > 1). \quad (133)$$

◇

証明

素因数分解の一意性より次のようにゼータ関数  $\zeta(s)$  は式変形できる.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (134)$$

$$= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{(2 \cdot 3)^s} + \cdots \quad (135)$$

$$= \left(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \cdots\right) \left(1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \cdots\right) \left(1 + 5^{-s} + 5^{-2s} + \cdots\right) \cdots \quad (136)$$

$$= \prod_{p:\text{prime}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots) \quad (137)$$

$$= \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (138)$$

□

命題 21.

$$\zeta(s) = 0 \implies \Re s \leq 1. \quad (139)$$

◇

証明

$\Re s > 1$  において  $s = a + b\sqrt{-1}$  ( $a > 1$ ) とおくと  $p^{-s}$  の大きさは次のように評価される.

$$|p^{-s}| = |p^{-a-b\sqrt{-1}}| = |p^{-a}| \cdot |e^{-\sqrt{-1}b \ln p}| = p^{-a}. \quad (140)$$

これより  $\zeta(s)$  の大きさは次のように評価される.

$$|\zeta(s)| = \left| \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \right| \geq \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - |p^{-s}|} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-a}} > 0. \quad (141)$$

よって  $\Re s > 1$  において  $\zeta(s)$  はゼロとならない. つまり次のようになる.

$$\zeta(s) = 0 \implies \Re s \leq 1. \quad (142)$$

□

命題 22.

素数が無限に存在することを示す.

◇

証明

ゼータ関数  $\zeta(s)$  ( $\Re s > 1$ ) について  $s \rightarrow 1$  の極限を取ると発散する.

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty. \quad (143)$$

また Euler 積表示についても極限を取る.

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1-1/p}. \quad (144)$$

ここで素数が有限個しかないならば発散しない. ただゼータ関数は極限を取ると発散するので素数は無限個存在する.  $\square$

**命題 23.**

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \quad (\Re s > 1). \quad (145)$$

$\diamond$

**証明**

ガンマ関数の定義式について  $x := nx$  と置換積分することで次のように式変形できる.

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-x} \quad (146)$$

$$= \int_0^{\infty} n dx (nx)^{s-1} e^{-nx}, \quad (147)$$

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \quad (148)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-nx} \quad (149)$$

$$= \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. \quad (150)$$

$\square$

**命題 24.**

この積分値を求める為に複素解析を用いる. 積分路  $C$  を  $C = C(\delta) = C_+(\delta) + C_0(\delta) + C_-(\delta)$  として  $C_+(\delta)$  は実軸上無限遠から原点から  $\delta$  の距離にある点まで,  $C_0(\delta)$  は中心を原点とする半径  $\delta$  の円を反時計回りに 1 周し,  $C_-(\delta)$  は実軸上原点から  $\delta$  の距離にある点から無限遠までを積分する. また次の関数  $I(s; C)$  を定義しておく.

$$I(s; C) := \int_C dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}. \quad (151)$$



$0 < \delta < 2\pi$  を満たす範囲で  $\delta$  を動かしても積分値は一定である.  $\Re s > 1$  のとき  $\delta \rightarrow 0$  とすると  $C_0(\delta)$  に沿った積分  $I(s; C_0(\delta))$  がゼロになる.  $\diamond$

証明

被積分関数は  $2n\pi\sqrt{-1}$  について 1 位の極がある. これより留数定理から積分路の内部の極の数が変化しないなら積分値は一定である. よって  $0 < \delta < 2\pi$  を満たす範囲で  $\delta$  を動かしても極の数は変化しないから積分値は一定である.

$$|I(s; C_0(\delta))| = \left| \int_{C_0(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \right| \quad (152)$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \delta i e^{i\theta} d\theta \frac{(\delta e^{i\theta})^{s-1}}{e^{\delta(\cos\theta + i\sin\theta)} - 1} \right| \quad (153)$$

$$\leq \int_0^{2\pi} d\theta \frac{|\delta^s|}{e^{\delta \cos\theta} - 1} \quad (154)$$

$$< |\delta^{s-1}| \pi. \quad (155)$$

これより  $\delta \rightarrow 0$  のとき積分値  $I(s; C_0(\delta))$  は 0 となる.  $\square$

命題 25.

$$I(s; C) = (e^{2\pi is} - 1) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. \quad (156)$$

$\diamond$

証明

Q 17A-10 の考察から  $\delta \rightarrow 0$  の極限において積分  $I(s; C)$  を考える.

$$I(s; C) = \int_{C(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (157)$$

$$= \int_{C_- + C_0 + C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (158)$$

$$= \int_{C_-} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + \int_{C_0} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (159)$$

$$= e^{2\pi is} \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + 0 + \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (160)$$

$$= (e^{2\pi is} - 1) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. \quad (161)$$

$\square$

Q 17A-12.

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)} I(s; C). \quad (162)$$

(i) 17A-11 より  $\Re s > 1$  において次が成り立つ.

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \quad (163)$$

$$= \frac{I(s; C)}{e^{2\pi is} - 1}, \quad (164)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)} I(s; C) \quad (\Re s > 1). \quad (165)$$

(ii)  $I(s; C)$  は次のように定義された.

$$I(s; C) = \int_{C(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}. \quad (166)$$

これは複素平面全体  $s \in \mathbb{C}$  に対して正則である. よって (i) で求めた式は  $\Re s > 1$  の条件を取り外すことができ, 解析接続となる.

Q 17A-13.

$$\zeta(s) = e^{-\pi is} \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} I(s; C). \quad (167)$$

さらに次のガンマ関数  $\Gamma(s)$  の反転公式より

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \quad (168)$$

ゼータ関数は次のように表される.

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi is} - 1)\Gamma(s)} I(s; C) \quad (169)$$

$$= \frac{\sin \pi s}{\pi(e^{2\pi is} - 1)} \Gamma(1-s) I(s; C) \quad (170)$$

$$= \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{e^{2\pi is} - 1} \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} I(s; C) \quad (171)$$

$$= e^{-\pi is} \Gamma(1-s) \frac{1}{2\pi i} I(s; C). \quad (172)$$

### 3 微分方程式

#### 3.1 エルミート多項式

定義 (エルミート多項式).

次の級数展開の右辺に現れる  $H_n(x)$  をエルミート多項式 (Hermite polynomials) という。

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \quad (173)$$

また左辺の関数はエルミート多項式の母関数 (generating function) という。

定理 26 (ロドリグの公式 (Rodrigues's formula)).

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (174)$$

◇

証明

両辺を  $t$  で  $n$  階微分する。

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (\text{左辺}) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2} = -e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-x)^2} \quad (175)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (\text{右辺}) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m-n)!} H_m(x) t^{m-n} \quad (176)$$

$t = 0$  とすると示せる。

$$H_n(x) = -e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \quad (177)$$

□

命題 27.

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-z^2+2zx}}{z^{n+1}} dz \quad (178)$$

$$H_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (-i)^n \int_{-\infty+2ix}^{\infty+2ix} e^{-q^2/4} (q+2ix)^n dq \quad (179)$$

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \frac{n!}{(n-2l)!!} (2x)^{n-2l} \quad (180)$$

◇

命題 28.

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \quad (181)$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (182)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (183)$$

◇

証明

□

定理 29.

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - 2x \frac{d}{dx} f(x) + 2nf(x) = 0 \quad (184)$$

◇

証明

□

定理 30.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad (185)$$

◇

証明

□

### 3.2 ルジャンドル微分方程式

定義 (ルジャンドル微分方程式).

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (186)$$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (187)$$

定義 (ルジャンドルの陪微分方程式).

ルジャンドルの陪微分方程式

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) y = 0 \quad (188)$$

これを満たす独立な 2 つの解  $P_n^m(x)$  と  $Q_n^m(x)$  を第一種および第二種ルジャンドル陪関数はルジャンドル関数で表される。

### 3.3 ベッセルの微分方程式

定義.

ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (189)$$

定義.

ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (190)$$

### 3.4 ラゲール多項式

定義.

ラゲール多項式

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{z^n}{n!} \quad (191)$$

命題 31.

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (192)$$

$$L_n(x) = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l (n!)^2}{(l!)^2 (n-l)!} x^l \quad (193)$$

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (194)$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (195)$$

$$L_n(0) = n! \quad (196)$$

◇

### 3.5 ポアソン方程式

### 3.6 変数分離

### 3.7 境界値問題

定義.

ラプラス方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (197)$$

ポアソン方程式 (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \quad (198)$$

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (199)$$

熱伝導方程式 (heat conduction equation)

$\kappa$  を熱伝導率 (thermal conductivity)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \quad (200)$$

命題 32.

ラプラス方程式を満たし

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (201)$$

次の境界条件を満たす関数  $u(x, y)$  を求める。

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0 \quad (202)$$

◇

証明

これは変数分離法が使えないと思う。

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (203)$$

ラプラス方程式

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad (204)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (205)$$

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \quad (206)$$

$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \quad (207)$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (208)$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \quad (209)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad (210)$$

□