ベクトル解析

Anko

2023 年 8 月 22 日

目次

1　ベクトル空間

1.1　ベクトルの定義

定義 (Einstein の縮約記法)**.**
同じ項で添字が重なる場合にはその添字について和を取る。

定義 (ベクトル空間)**.**
体 K 上の加群を K 上のベクトル空間といい、ベクトル空間の元をベクトルという。
$\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i = A_1 \boldsymbol{e}_1 + A_2 \boldsymbol{e}_2 + A_3 \boldsymbol{e}_3$

定義 (ベクトル空間における内積と外積)**.**
ベクトル $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{B} = B_j \boldsymbol{e}_j$ における内積と外積を定義する。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i \boldsymbol{e}_i \cdot B_j \boldsymbol{e}_j = g_{ij} A_i B_j \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2)\boldsymbol{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\boldsymbol{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\boldsymbol{e}_3 \tag{2}$$

定理 1.
内積と外積について Einstein の縮約記法を用いて次のように書ける。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i \boldsymbol{e}_i \cdot B_j \boldsymbol{e}_j = A_i B_i \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{4}$$

◇

証明
内積については自明。外積について次のように求められる。

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_1 = \varepsilon_{1jk} A_j B_k = A_2 B_3 - A_3 B_2 \tag{5}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_2 = \varepsilon_{2jk} A_j B_k = A_3 B_1 - A_1 B_3 \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_3 = \varepsilon_{3jk} A_j B_k = A_1 B_2 - A_2 B_1 \tag{7}$$

□

1.2 座標系

定義 (デカルト座標).

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1, \qquad \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0 \tag{8}$$

定義 (極座標).

ユークリッド平面においてデカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換は次のように定義する。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x} \tag{9}$$

逆に極座標 (r, θ) からデカルト座標 (x, y) へは次のようになる。

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \sin\theta \tag{10}$$

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y = \cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y \tag{11}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y = -r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y \tag{12}$$

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r = (\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y) \cdot (\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y) \tag{13}$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta = (-r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y) \cdot (-r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y) \tag{15}$$

$$= r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta = r^2 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta = (\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y) \cdot (-r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y) \tag{17}$$

$$= -r\sin\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{18}$$

1.3 様々な座標系における演算

どのような座標系においても同じ形の式を作る。異なる座標系での内積

定義 (座標系の基底ベクトル).
座標変換によって基底ベクトルによる

$$\boldsymbol{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{e}_{\beta} \tag{19}$$

ある座標系において基底ベクトル同士の内積を計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ といい、これが座標系を表現する。

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \tag{20}$$

また基底ベクトルの微分による係数をクリストッフェル記号といい、$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ と書く。

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\mu} \tag{21}$$

$$g^{\alpha\beta} = g^{-1}_{\alpha\beta} \tag{22}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \tag{23}$$

ベクトル $\boldsymbol{A} = A^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$ を基底で微分 $\nabla_{\beta}\boldsymbol{A} = A^{\alpha}{}_{;\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha}$ について

$$A^{\alpha}{}_{;\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha} = \nabla_{\beta}\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(A^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}) = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\boldsymbol{e}_{\alpha} + A^{\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = A^{\alpha}{}_{,\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha} + A^{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\mu} \tag{24}$$

より

$$A^{\alpha}{}_{;\beta} = A^{\alpha}{}_{,\beta} + A^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \tag{25}$$

これを共変微分という。共変ベクトルについても共変微分すると

$$A_{\alpha;\mu} = (g_{\alpha\beta}A^{\beta})_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu}A^{\beta} + g_{\alpha\beta}A^{\beta}{}_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu}A^{\beta} + A_{\alpha;\mu} \tag{26}$$

より次のテンソル方程式が成り立つ。

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \tag{27}$$

またスカラー場 ϕ について 2 階微分することで

$$\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \tag{28}$$

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\beta,\alpha} + \phi_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_\mu \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \tag{29}$$

より $\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\beta;\alpha}$ であるから

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \tag{30}$$

となる。計量テンソルの共変微分を計算すると

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\nu\beta}\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu{}_{\mu\beta} = 0 \tag{31}$$

これを添字を変えたものを適切に足し引きする。

$$g_{\alpha\beta,\mu} = g_{\nu\beta}\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} + g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu{}_{\mu\beta} \tag{32}$$

$$g_{\mu\alpha,\beta} = g_{\nu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\mu\beta} + g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} \tag{33}$$

$$g_{\beta\mu,\alpha} = g_{\nu\mu}\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} + g_{\beta\nu}\Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} \tag{34}$$

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu{}_{\beta\mu} \tag{35}$$

両辺に $\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}$ を掛けると

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu{}_{\beta\mu} = \delta^\gamma_\nu\Gamma^\nu{}_{\beta\mu} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu} \tag{36}$$

よりクリストッフェル記号を計量テンソルで表すことができる。

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \tag{37}$$

テンソル方程式

$$A^\alpha{}_{;\beta} = A^\alpha{}_{,\beta} + A^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \tag{38}$$

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \tag{39}$$

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \tag{40}$$

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \tag{41}$$

例 2 (デカルト座標).

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{42}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = 0 \tag{43}$$

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0 \tag{44}$$

$$A^\alpha{}_{;\beta} = A^\alpha{}_{,\beta} \tag{45}$$

◇

例 3 (極座標).

$$\Lambda^\beta{}_\alpha = \begin{pmatrix} \Lambda^x{}_r & \Lambda^y{}_r \\ \Lambda^x{}_\theta & \Lambda^y{}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y \tag{47}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = -r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y \tag{48}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = \Gamma^r{}_{rr}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{rr}\boldsymbol{e}_\theta = 0 \tag{50}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \Gamma^r{}_{r\theta}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{r\theta}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \tag{51}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \Gamma^r{}_{\theta r}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{\theta r}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \tag{52}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = \Gamma^r{}_{\theta\theta}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\boldsymbol{e}_\theta = -r\boldsymbol{e}_r \tag{53}$$

$$A^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial \alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}A^\mu \tag{54}$$

$$= \frac{\partial A^r}{\partial r} + \frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}A^r \tag{55}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA^r) + \frac{\partial}{\partial \theta}A^\theta \tag{56}$$

◇

2　ベクトル解析

定義 (Kronecker のデルタ)**.**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{57}$$

定義 (レビ・チビタの完全反対称テンソル (Levi-Civita antisymmetric tensor))**.**

$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k}$ は $\mu_1 \cdots \mu_k$ が順列のとき $1 \cdots k$ の偶置換なら 1、奇置換なら -1 とする。順列ではないときは 0 とする。

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} := \begin{cases} \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix} & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が順列のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{58}$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が偶置換のとき}) \\ -1 & (\mu_1 \cdots \mu_k \text{が奇置換のとき}) \\ 0 & (else) \end{cases} \tag{59}$$

定理 4.

$f_{ij} = f_{ji}$ と対称性があるとき $\varepsilon_{ijk} f_{ij} = 0$ となる。 ◇

証明

i, j を交換しても等しいことから

$$\varepsilon_{ijk} f_{ij} = \varepsilon_{jik} f_{ji} = -\varepsilon_{ijk} f_{ij} = 0 \tag{60}$$

となる。 □

定義.
ベクトル $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i$ について勾配 $\nabla \boldsymbol{A}$ と発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$、回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を次のように定義する。

$$\nabla \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i \partial_i A_i \tag{61}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial_i A_i \tag{62}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \tag{63}$$

ただし

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{64}$$

定理 5 (勾配・発散・回転の線形性)**.**
それぞれ線形性が成り立つ。

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \tag{65}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B} \tag{66}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{67}$$

◇

証明

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \boldsymbol{e}_i \partial_i (f+g) && (68)\\
&= \boldsymbol{e}_i \partial_i f + \boldsymbol{e}_i \partial_i g && (69)\\
&= \nabla f + \nabla g && (70)\\
\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \partial_i (A_i + B_i) && (71)\\
&= \partial_i A_i + \partial_i B_i && (72)\\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B} && (73)\\
\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (A_k + B_k) && (74)\\
&= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k && (75)\\
&= \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B} && (76)
\end{aligned}$$

□

定理 6 (スカラー倍の勾配・発散・回転)**.**
　スカラー倍はそれぞれ次のようになる。

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{77}$$
$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla f) \tag{78}$$
$$\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = f(\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\nabla f) \tag{79}$$

◇

証明

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= \boldsymbol{e}_i\partial_i(fg) && (80)\\
&= f\boldsymbol{e}_i\partial_i g + g\boldsymbol{e}_i\partial_i f && (81)\\
&= f\nabla g + g\nabla f && (82)\\
\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) &= \partial_i(fA_i) && (83)\\
&= f\partial_i A_i + A_i\partial_i f && (84)\\
&= f(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla f) && (85)\\
\nabla \times (f\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) && (86)\\
&= f\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k + \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}A_k\partial_j f && (87)\\
&= f\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k - \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ikj}A_k\partial_j f && (88)\\
&= f(\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\nabla f) && (89)
\end{aligned}$$

□

定理 7 (ベクトルの内積・外積の勾配・発散・回転)**.**

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} \tag{90}$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{91}$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{92}$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{e}_i\partial_i(A_jB_j) && (93)\\
&= \boldsymbol{e}_i((A_j\partial_iB_j + B_j\partial_iA_j) - (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) + (A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i)) && (94)\\
&= \boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + \boldsymbol{e}_i(A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) && (95)\\
&= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(A_j\partial_lB_m + B_j\partial_lA_m) + \boldsymbol{e}_i(A_j\partial_jB_i + B_j\partial_jA_i) && (96)\\
&= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}\partial_lB_m + \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}B_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m + \boldsymbol{e}_iA_j\partial_jB_i + \boldsymbol{e}_iB_j\partial_jA_i && (97)\\
&= \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} && (98)\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k) && (99)\\
&= \varepsilon_{ijk}(B_k\partial_iA_j + A_j\partial_iB_k) && (100)\\
&= B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j - A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k && (101)\\
&= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) && (102)\\
\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m && (103)\\
&= \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) && (104)\\
&= \boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) && (105)\\
&= \boldsymbol{e}_i(B_j\partial_jA_i + A_i\partial_jB_j) - \boldsymbol{e}_i(B_i\partial_jA_j + A_j\partial_jB_i) && (106)\\
&= \boldsymbol{e}_iA_i\partial_jB_j - \boldsymbol{e}_iB_i\partial_jA_j + \boldsymbol{e}_iB_j\partial_jA_i - \boldsymbol{e}_iA_j\partial_jB_i && (107)\\
&= \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} && (108)
\end{aligned}
$$

□

定理 8 (有名定理)**.**

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= 0 && (109)\\
\nabla\times(\nabla f) &= \boldsymbol{0} && (110)\\
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} && (111)
\end{aligned}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k) && (112)\\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 && (113)\\
\nabla \times (\nabla f) &= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0 && (114)\\
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l A_m) && (115)\\
&= \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m && (116)\\
&= \boldsymbol{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m && (117)\\
&= \boldsymbol{e}_i\partial_j\partial_i A_j - \boldsymbol{e}_i\partial_j^2 A_i && (118)\\
&= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} && (119)
\end{aligned}
$$

□

定理 9 (Gauss の定理)**.**

$$
\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{120}
$$

◇