微分方程式

anko9801

2023 年 12 月 2 日

目次

1 ラプラス変換 2
2 特殊関数 3
2.1 ガウス積分 3
2.2 ガンマ関数 5
2.3 ベータ関数 7
2.4 n 次元超球の体積と表面積 11
2.5 超幾何関数 12
2.6 Bernoulli 数 13
2.7 ゼータ関数 $\zeta(s)$ 15
3 微分方程式 20
3.1 エルミート多項式 20
3.2 ルジャンドル微分方程式 22
3.3 ベッセルの微分方程式 22
3.4 ラゲール多項式 23
3.5 ポアソン方程式 24
3.6 変数分離 24
3.7 境界値問題 24

1　ラプラス変換

定義 (ラプラス変換).

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{1.1}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-ip}^{c+ip} F(s)e^{st}\,ds \tag{1.2}$$

定理 1.1.

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \tag{1.3}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \tag{1.4}$$

◇

証明

テスト

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \tag{1.5}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \tag{1.6}$$

□

例えば

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} \tag{1.7}$$

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[t\frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2} \tag{1.8}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \int_0^\infty t^2e^{-st}\,dt = \left[t^2\frac{e^{-st}}{-s} - 2t\frac{e^{-st}}{(-s)^2} + 2\frac{e^{-st}}{(-s)^3}\right]_0^\infty = \frac{2}{s^3} \tag{1.9}$$

$$\mathcal{L}[t^3] = \int_0^\infty t^3e^{-st}\,dt = \left[t^3\frac{e^{-st}}{-s} - 3t^2\frac{e^{-st}}{(-s)^2} + 6t\frac{e^{-st}}{(-s)^3} - 6\frac{e^{-st}}{(-s)^4}\right]_0^\infty = \frac{6}{s^4} \tag{1.10}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^ne^{-st}\,dt = \sum_{i=0}^n(-1)^i\left[\frac{d^it^n}{dt^i}\frac{e^{-st}}{(-s)^{i+1}}\right]_0^\infty = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{1.11}$$

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t}] = \int_0^\infty e^{(s_0 - s)t}\,dt = \frac{1}{s - s_0} \tag{1.12}$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)e^{-st}\,dt \tag{1.13}$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i\omega - s} - \frac{1}{-i\omega - s}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{1.14}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \int_0^\infty \cos\omega t e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)e^{-st}\,dt \tag{1.15}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\omega - s} + \frac{1}{-i\omega - s}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{1.16}$$

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \int_0^\infty \sinh at e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{at} - e^{-at})e^{-st}\,dt \tag{1.17}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a - s} - \frac{1}{-a - s}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2} \tag{1.18}$$

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \int_0^\infty \cosh at e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{at} + e^{-at})e^{-st}\,dt \tag{1.19}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a - s} + \frac{1}{-a - s}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2} \tag{1.20}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = \int_0^\infty \delta(t - a)e^{-st}\,dt = e^{-sa} \tag{1.21}$$

2 特殊関数

2.1 ガウス積分

定理 2.1 (Gauss 積分)**.**

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (a > 0) \tag{2.1}$$

◇

証明

まず積分値を I とおく。

$$I := \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx \tag{2.2}$$

ここで I^2 を変数変換して計算する。

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}\, dy && (2.3)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, dx\, dy && (2.4)\\
&= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r\, d\theta\, dr && (2.5)\\
&= 2\pi \left[\frac{e^{-\alpha r^2}}{-2\alpha} \right]_0^\infty && (2.6)\\
&= \frac{\pi}{\alpha} && (2.7)
\end{aligned}
$$

よって示される。

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{2.8}
$$

□

定理 2.2 (Gauss 積分)**.**

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2}\, dx = \sqrt{\pi}(2n-1)!! \frac{a^{2n+1}}{2^{n+1}} && (2.9)\\
&\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2}\, dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2} && (2.10)\\
&\int_{-\infty}^\infty e^{-k^2/4} e^{ikx}\, dk = 2\sqrt{\pi} e^{-x^2} && (2.11)
\end{aligned}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}\, dx &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n \alpha}{\partial e^n}^{-\alpha x^2}\, dx && (2.12)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial \int^n}{}_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx && (2.13)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial^n} (\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}) && (2.14)\\
&= \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \alpha^{-(2n+1)/2} && (2.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}\, dx &= (-1)^n \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x e^{-\alpha x^2}\, dx && (2.16)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\, dx && (2.17)\\
&= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{1}{2\alpha} && (2.18)\\
&= \frac{n!}{2} \alpha^{-(n+1)} && (2.19)
\end{aligned}
$$

□

2.2 ガンマ関数

定義.
複素平面上で $\Re z > 1$ を満たす領域内にある閉曲線 C 上の点 z に対して次の関数は一様収束し正則な関数となる.

$$
\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \tag{2.20}
$$

命題 2.3.

$$
\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(n+1) = n!, \qquad \Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.21}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt && (2.22)\\
&= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt && (2.23)\\
&= z\Gamma(z) && (2.24)\\
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\,dt && (2.25)\\
&= [-e^{-t}]_0^\infty && (2.26)\\
&= 1 && (2.27)\\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt && (2.28)\\
&= \int_0^\infty s^{-1}e^{-s^2}2s\,ds && (2.29)\\
&= 2\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds && (2.30)\\
&= \sqrt{\pi} && (2.31)
\end{aligned}
$$

□

命題 2.4 (スターリングの公式 (Stirling's formula))**.**

$$
\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}e^{-x}x^x \qquad (x \gg 1) \tag{2.32}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt && (2.33)\\
&= \int_0^\infty e^{s(x-1)}e^{-e^s}e^s\,ds && (2.34)\\
&= \int_0^\infty e^{sx-e^s}\,ds && (2.35)\\
&\approx \int_0^\infty e^{(x\ln x - x)-\frac{x}{2}(s-\ln x)^2}\,ds \qquad (x \gg 1) && (2.36)\\
&= x^x e^{-x}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}(s-\ln x)^2}\,ds && (2.37)\\
&= x^x e^{-x}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}s^2}\,ds && (2.38)\\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{x}}x^x e^{-x} && (2.39)
\end{aligned}
$$

これより

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x} \tag{2.40}$$

□

命題 2.5 (ガンマ関数の極と零点)**.**

$$\Gamma(z) = \infty \iff z = 0, -1, -2, \dots \tag{2.41}$$

$$\mathrm{Res}[\Gamma(z); z = -n] = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.42}$$

$$\{\Gamma(s) = 0 \mid |s| < \infty\} = \emptyset \tag{2.43}$$

◇

命題 2.6 (ワイエルシュトラスの公式 (Weierstrass' formula))**.**

γ はオイラーの定数 (Euler's constant) とする.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \tag{2.44}$$

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \log n\right) = 0.577216\cdots \tag{2.45}$$

◇

2.3 ベータ関数

定義.

ベータ関数 (Beta function)

$$B(m,n) := \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \tag{2.46}$$

命題 2.7.

$$B(m,n) = B(n,m) \tag{2.47}$$

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta \tag{2.48}$$

$$B(m,n) = \int_0^{\infty}\frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}\,d\theta \tag{2.49}$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
B(m,n) &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt && (2.50)\\
&= \int_1^0 (1-s)^{m-1}s^{n-1}(-\,dt) \qquad (s=1-t) && (2.51)\\
&= \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^{m-1}\,dt && (2.52)\\
&= B(n,m) && (2.53)\\
B(m,n) &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt && (2.54)\\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{2(m-1)}\theta\cos^{2(n-1)}\theta 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \qquad (t=\sin^2\theta) && (2.55)\\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta && (2.56)\\
B(m,n) &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt && (2.57)\\
& && (2.58)
\end{aligned}
$$

□

定理 2.8.

$$
\begin{aligned}
B(m,n) &= \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1) && (2.59)\\
B(m,n+1) &= \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(m+k)} && (2.60)
\end{aligned}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
B(m,n) &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt & (2.61)\\
&= \left[\frac{1}{m}t^m(1-t)^{n-1}\right]_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 t^m(1-t)^{n-2}\,dt & (2.62)\\
&= \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1) & (2.63)\\
B(m,n+1) &= \frac{n\cdot(n-1)\cdots 1}{a\cdot(m+1)\cdots(m+n-1)}B(m+n,1) & (2.64)\\
&= \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1}(m+k)}\frac{1}{m+n} & (2.65)\\
&= \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(m+k)} & (2.66)
\end{aligned}
$$

□

命題 2.9 (ガンマ関数とベータ関数との関係)**.**

$$
\begin{aligned}
B(m,n) &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} & (2.67)\\
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z} & (2.68)
\end{aligned}
$$

◇

証明

$$
\begin{aligned}
\Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^\infty s^{m-1}e^{-s}\,ds \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt && (2.69)\\
&= \int_0^\infty q^{2(m-1)}e^{-q^2}2q\,dq \int_0^\infty p^{2(n-1)}e^{-p^2}2p\,dp \qquad (s=q^2, t=p^2) && (2.70)\\
&= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(q^2+p^2)}q^{2m-1}p^{2n-1}\,dp\,dq && (2.71)\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(m+n-1)}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta r\,dr\,d\theta \qquad (q=r\cos\theta, p=r\sin\theta) && (2.72)\\
&= 4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(m+n)-1}\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta && (2.73)\\
&= 2\int_0^\infty e^{-R}R^{m+n-1}r\frac{1}{2r}\,dRB(m,n) \qquad (R=r^2) && (2.74)\\
&= \int_0^\infty e^{-R}R^{m+n-1}\,dRB(m,n) && (2.75)\\
&= \Gamma(m+n)B(m,n) && (2.76)
\end{aligned}
$$

これより

$$
B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.77}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(1)B(z,1-z) && (2.78)\\
&= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt && (2.79)\\
&= \frac{\pi}{\sin\pi z} && (2.80)
\end{aligned}
$$

□

命題 2.10 (ガウスの公式 (Gauss's formula))**.**

$$
\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{2.81}
$$

(2.82)

◇

証明

□

命題 2.11 (Legendre の倍数公式)**.**

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{2.83}$$

◇

2.4 n 次元超球の体積と表面積

定理 2.12.

$$V_n(R) = R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \tag{2.84}$$

◇

証明

n 次元超球の体積は次のように表現できる。

$$V_n(R) = \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le R^2} dx_1\,dx_2\cdots\,dx_n \tag{2.85}$$

各 x_i を R 倍することで

$$V_n(R) = \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le R^2} dx_1\,dx_2\cdots\,dx_n \tag{2.86}$$

$$= R^n\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1} dx_1\,dx_2\cdots\,dx_n \tag{2.87}$$

$$= R^nV_n(1) \tag{2.88}$$

これより $V_n(1)$ を求めればよい。$V_n(1)$ と $V_{n-1}(1)$ の関係を求める。

$$V_n(1) = \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\le 1-x_n^2} dx_1\,dx_2\cdots\,dx_n \tag{2.89}$$

$$= V_{n-1}(1)\int_{-1}^{1}\left(1-x_n^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\,dx_n \tag{2.90}$$

$$= 2V_{n-1}(1)\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta \tag{2.91}$$

$$= V_{n-1}(1)B\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right) \tag{2.92}$$

$$= V_{n-1}(1)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{2.93}$$

$$= V_{n-1}(1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \tag{2.94}$$

これより連続に適用することで

$$V_n(1) = V_1(1)\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} \frac{\Gamma(\frac{4}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \tag{2.95}$$

$$= 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \tag{2.96}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \tag{2.97}$$

となり、超球の体積は

$$V_n(R) = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} \tag{2.98}$$

□

定理 2.13.

表面積

$$S_n(R) = R^{n-1} \frac{2\pi^{\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{2.99}$$

◇

証明

□

命題 2.14.

◇

2.5 超幾何関数

定義.

超幾何関数

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{2.100}$$

命題 2.15.

$$e^x = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(1, b, 1; \frac{x}{b}\right) \tag{2.101}$$

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1,1,2;-x) \tag{2.102}$$

◇

2.6 Bernoulli 数

定義 (Bernoulli 数)**.**
Bernoulli 数 B_n は以下の正則関数の多項式展開の係数として定義される.

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n. \tag{2.103}$$

命題 2.16.

$$B_1=-\frac{1}{2}, B_{2n+1}=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{2.104}$$

◇

証明

まず Bernoulli の定義式の両辺に $x/2$ を加える。

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \tag{2.105}$$

このとき左辺は偶関数となる。

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)}=\frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=\frac{x}{2}\coth(\frac{x}{2}) \tag{2.106}$$

$$\frac{-x}{2}\coth(\frac{-x}{2})=\frac{-x}{2}\frac{e^{-x/2}+e^{x/2}}{e^{-x/2}-e^{x/2}}=\frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=\frac{x}{2}\coth(\frac{x}{2}) \tag{2.107}$$

これより次の右辺も偶関数であることがわかり、一致の定理から右辺について奇数次の項は現れない。よって 3 以上の奇数を添え字に持つ Bernoulli 数はゼロとなる。

$$B_1=-\frac{1}{2}, \qquad B_{2n+1}=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{2.108}$$

□

定理 2.17.

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{B_n}{(n-m)!m!}x^n=\delta_{n,1} \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{2.109}$$

◇

証明

定義式の左辺の分母を払って展開すると

$$
\begin{aligned}
x &= (e^x - 1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n && (2.110)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right) && (2.111)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{k!n!}x^{k+n} && (2.112)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{B_n}{(n-m)!m!}x^n. && (2.113)
\end{aligned}
$$

となり両辺の係数を比較することで次のようになる。

$$
\sum_{m=0}^{n-1}\frac{B_n}{(n-m)!m!}x^n = \delta_{n,1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.114}
$$

□

命題 2.18.

$$
B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \cdots \tag{2.115}
$$

◇

証明

上の定理について具体的式を求めると

$$
\begin{aligned}
&B_0 = 1 && (2.116)\\
&\frac{1}{2}B_0 + B_1 = 0 && (2.117)\\
&\frac{1}{6}B_0 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 = 0 && (2.118)\\
&\frac{1}{24}B_0 + \frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{4}B_2 + \frac{1}{6}B_3 = 0 && (2.119)\\
&\frac{1}{120}B_0 + \frac{1}{24}B_1 + \frac{1}{12}B_2 + \frac{1}{12}B_3 + \frac{1}{24}B_4 = 0 && (2.120)\\
&\frac{1}{720}B_0 + \frac{1}{120}B_1 + \frac{1}{48}B_2 + \frac{1}{36}B_3 + \frac{1}{48}B_4 + \frac{1}{120}B_5 = 0 && (2.121)\\
&\frac{1}{5040}B_0 + \frac{1}{720}B_1 + \frac{1}{240}B_2 + \frac{1}{144}B_3 + \frac{1}{144}B_4 + \frac{1}{240}B_5 + \frac{1}{720}B_6 = 0 && (2.122)\\
&\cdots && (2.123)
\end{aligned}
$$

より添字が奇数のときを代入することで求まる。

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \cdots . \tag{2.124}$$

□

2.7 ゼータ関数 $\zeta(s)$

定義 (ゼータ関数)**.**

ゼータ関数 $\zeta(s)$ は次のように定義される.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s > 1). \tag{2.125}$$

命題 2.19.

$\zeta(s)$ が $s > 1$ において一様絶対収束することを示す. ◇

証明

$s = a + bi$ $(a > 1)$ とおく. すると次のようになる.

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \approx \int_1^{\infty} dx x^{-a} = \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a} \right]_1^{\infty} < \infty. \tag{2.126}$$

よってゼータ関数 $\zeta(s)$ は一様絶対収束する. □

命題 2.20.

$$\zeta(s) = \prod_{p:prime} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad (s > 1). \tag{2.127}$$

◇

証明

素因数分解の一意性より次のようにゼータ関数 $\zeta(s)$ は式変形できる.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.128}$$
$$= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{(2\cdot 3)^s} + \cdots \tag{2.129}$$
$$= \left(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \cdots\right)\left(1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \cdots\right)\left(1 + 5^{-s} + 5^{-2s} + \cdots\right)\cdots \tag{2.130}$$
$$= \prod_{p:prime} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots) \tag{2.131}$$
$$= \prod_{p:prime} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \tag{2.132}$$

□

命題 2.21.

$$\zeta(s) = 0 \implies s \le 1. \tag{2.133}$$

◇

証明

$s > 1$ において $s = a + b\sqrt{-1}$ $(a > 1)$ とおくと p^{-s} の大きさは次のように評価される.

$$|p^{-s}| = |p^{-a-b\sqrt{-1}}| = |p^{-a}| \cdot |e^{-\sqrt{-1}b\ln p}| = p^{-a}. \tag{2.134}$$

これより $\zeta(s)$ の大きさは次のように評価される.

$$|\zeta(s)| = \left|\prod_{p:prime} \frac{1}{1 - p^{-s}}\right| \ge \prod_{p:prime} \frac{1}{1 - |p^{-s}|} = \prod_{p:prime} \frac{1}{1 - p^{-a}} > 0. \tag{2.135}$$

よって $s > 1$ において $\zeta(s)$ はゼロとならない. つまり次のようになる.

$$\zeta(s) = 0 \implies s \le 1. \tag{2.136}$$

□

命題 2.22.

素数が無限に存在することを示す. ◇

証明

ゼータ関数 $\zeta(s)$ $(s>1)$ について $s\to 1$ の極限を取ると発散する.

$$\lim_{s\to 1}\zeta(s)=\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\infty. \tag{2.137}$$

また Euler 積表示についても極限を取る.

$$\lim_{s\to 1}\zeta(s)=\prod_{p:prime}\frac{1}{1-1/p}. \tag{2.138}$$

ここで素数が有限個しかないならば発散しない. ただゼータ関数は極限を取ると発散するので素数は無限個存在する. □

命題 2.23.

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^{\infty}dx\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\qquad(s>1). \tag{2.139}$$

◇

証明

ガンマ関数の定義式について $x:=nx$ と置換積分することで次のように式変形できる.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)&=\int_0^{\infty}dx x^{s-1}e^{-x} && (2.140)\\
&=\int_0^{\infty}n\,dx(nx)^{s-1}e^{-nx}, && (2.141)\\
\Gamma(s)\zeta(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s)}{n^s} && (2.142)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}dx x^{s-1}e^{-nx} && (2.143)\\
&=\int_0^{\infty}dx\frac{x^{s-1}}{e^x-1}. && (2.144)
\end{aligned}$$

□

命題 2.24.

この積分値を求める為に複素解析を用いる. 積分路 C を $C=C(\delta)=C_+(\delta)+C_0(\delta)+C_+(\delta)$ として $C_+(\delta)$ は実軸上無限遠から原点から δ の距離にある点まで, $C_0(\delta)$ は中心を原点とする半径 δ の円を反時計回りに 1 周し, $C_-(\delta)$ は実軸上原点から δ の距離にある点から無限遠までを積分する. また次の関数 $I(s;C)$ を定義しておく.

$$I(s;C):=\int_C dz\frac{z^{s-1}}{e^z-1}. \tag{2.145}$$

$0 < \delta < 2\pi$ を満たす範囲で δ を動かしても積分値は一定である．$s > 1$ のとき $\delta \to 0$ とすると $C_0(\delta)$ に沿った積分 $I(s; C_0(\delta))$ がゼロになる． $\diamond$

証明

被積分関数は $2n\pi\sqrt{-1}$ について 1 位の極がある．これより留数定理から積分路の内部の極の数が変化しないなら積分値は一定である．よって $0 < \delta < 2\pi$ を満たす範囲で δ を動かしても極の数は変化しないから積分値は一定である．

$$
\begin{aligned}
|I(s; C_0(\delta))| &= \left| \int_{C_0(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \right| && (2.146)\\
&= \left| \int_0^{2\pi} \delta i e^{i\theta}\, d\theta \frac{(\delta e^{i\theta})^{s-1}}{e^{\delta(\cos\theta + i\sin\theta)} - 1} \right| && (2.147)\\
&\leq \int_0^{2\pi} d\theta \frac{|\delta^s|}{e^{\delta\cos\theta} - 1} && (2.148)\\
&< |\delta^{s-1}|\pi. && (2.149)
\end{aligned}
$$

これより $\delta \to 0$ のとき積分値 $I(s; C_0(\delta))$ は 0 となる． $\square$

命題 2.25.

$$
I(s; C) = (e^{2\pi i s} - 1) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. \tag{2.150}
$$

$\diamond$

証明

Q 17A-10 の考察から $\delta \to 0$ の極限において積分 $I(s; C)$ を考える．

$$
\begin{aligned}
I(s; C) &= \int_{C(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} && (2.151)\\
&= \int_{C_- + C_0 + C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} && (2.152)\\
&= \int_{C_-} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + \int_{C_0} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} && (2.153)\\
&= e^{2\pi i s} \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} + 0 + \int_{C_+} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} && (2.154)\\
&= (e^{2\pi i s} - 1) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}. && (2.155)
\end{aligned}
$$

$\square$

Q 17A-12.

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)} I(s;C). \tag{2.156}$$

(i) 17A-11 より $s>1$ において次が成り立つ.

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x-1} \tag{2.157}$$

$$= \frac{I(s;C)}{e^{2\pi i s}-1}, \tag{2.158}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)} I(s;C) \qquad (s>1). \tag{2.159}$$

(ii) $I(s;C)$ は次のように定義された.

$$I(s;C) = \int_{C(\delta)} dz \frac{z^{s-1}}{e^z-1}. \tag{2.160}$$

これは複素平面全体 $s \in \mathbb{C}$ に対して正則である. よって (i) で求めた式は $s>1$ の条件を取り外すことができ, 解析接続となる.

Q 17A-13.

$$\zeta(s) = e^{-\pi i s}\Gamma(1-s)\frac{1}{2\pi i} I(s;C). \tag{2.161}$$

さらに次のガンマ関数 $\Gamma(s)$ の反転公式より

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{2.162}$$

ゼータ関数は次のように表される.

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi i s}-1)\Gamma(s)} I(s;C) \tag{2.163}$$

$$= \frac{\sin \pi s}{\pi(e^{2\pi i s}-1)}\Gamma(1-s) I(s;C) \tag{2.164}$$

$$= \frac{e^{i\pi s}-e^{-i\pi s}}{e^{2\pi i s}-1}\Gamma(1-s)\frac{1}{2\pi i} I(s;C) \tag{2.165}$$

$$= e^{-\pi i s}\Gamma(1-s)\frac{1}{2\pi i} I(s;C). \tag{2.166}$$

3　微分方程式

3.1　エルミート多項式

定義 (エルミート多項式)**.**
次の級数展開の右辺に現れる $H_n(x)$ をエルミート多項式 (Hermite polynomials) という。

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \tag{3.1}$$

また左辺の関数はエルミート多項式の母関数 (generating function) という。

定理 3.1 (ロドリグの公式 (Rodrigues's formula))**.**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n x}{de^n}^{-x^2} \tag{3.2}$$

◇

証明

両辺を t で n 階微分する。

$$\frac{\partial^n t}{\partial (^n} 左辺) = e^{x^2} \frac{\partial^n t}{\partial e^n}^{-(t-x)^2} = -e^{x^2} \frac{\partial^n x}{\partial e^n}^{-(t-x)^2} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^n t}{\partial (^n} 右辺) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m-n)!} H_m(x) t^{m-n} \tag{3.4}$$

$t = 0$ とすると示せる。

$$H_n(x) = -e^{x^2} \frac{\partial^n x}{\partial e^n}^{-x^2} \tag{3.5}$$

□

命題 3.2.

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-z^2+2zx}}{z^{n+1}}\, dz \tag{3.6}$$

$$H_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (-i)^n \int_{-\infty+2ix}^{\infty+2ix} e^{-q^2/4} (q+2ix)^n \, dq \tag{3.7}$$

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \frac{n!}{(n-2l)!l!} (2x)^{n-2l} \tag{3.8}$$

◇

命題 3.3.

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \tag{3.9}$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{3.10}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{3.11}$$

◇

証明

□

定理 3.4.

$$\frac{d^2x}{df^2}(x) - 2x\frac{dx}{df}(x) + 2nf(x) = 0 \tag{3.12}$$

◇

証明

□

定理 3.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \tag{3.13}$$

◇

証明

□

3.2 ルジャンドル微分方程式

定義 (ルジャンドル微分方程式).

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{3.14}$$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \tag{3.15}$$

定義 (ルジャンドルの陪微分方程式).

ルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \tag{3.16}$$

これを満たす独立な 2 つの解 $P_n^m(x)$ と $Q_n^m(x)$ を第一種および第二種ルジャンドル陪関数はルジャンドル関数で表される。

3.3 ベッセルの微分方程式

定義.

ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{3.17}$$

定義.

ベッセルの微分方程式 (Bessel's equation)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{3.18}$$

3.4 ラゲール多項式

定義.
ラゲール多項式

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{z^n}{n!} \tag{3.19}$$

命題 3.6.

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n x}{d(^n} x^n e^{-x}) \tag{3.20}$$

$$L_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l (n!)^2}{(l!)^2 (n-l)!} x^l \tag{3.21}$$

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{3.22}$$

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \tag{3.23}$$

$$L_n(0) = n! \tag{3.24}$$

◇

3.5 ポアソン方程式

3.6 変数分離

3.7 境界値問題

定義.
ラプラス方程式 (Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.25}$$

ポアソン方程式 (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \tag{3.26}$$

波動方程式 (wave equation)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.27}$$

熱伝導方程式 (heat conduction equation)
κ を熱伝導率 (thermal conductivity)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) \tag{3.28}$$

命題 3.7.
ラプラス方程式を満たし

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.29}$$

次の境界条件を満たす関数 $u(x, y)$ を求める。

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0 \tag{3.30}$$

◇

証明

これは変数分離法が使えないと思う。

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{3.31}$$

ラプラス方程式

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{3.32}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \tag{3.33}$$

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \tag{3.34}$$

$$Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \tag{3.35}$$

$$X(x) = \sin(\frac{n\pi x}{a}) \tag{3.36}$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \tag{3.37}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sinh(\frac{n\pi b}{a}) \tag{3.38}$$

□