

相対論的量子力学 レポート課題 1

宇佐見大希

2023 年 7 月 11 日

問題 1.

α^i と β を次を満たすエルミート行列とする。

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad (1)$$

◇

(1) γ^0, γ^i を次のように定義する。

$$\gamma^0 := \beta, \quad \gamma^i := \beta\alpha^i \quad (2)$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (3)$$

証明

α^i, β がエルミート行列であることと式 (1) より次の式が成り立つ。

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \quad (4)$$

$$\beta^\dagger = \beta \quad (5)$$

$$\alpha^i \alpha^j = -\alpha^j \alpha^i \quad (i \neq j) \quad (6)$$

$$\alpha^i \beta = -\beta \alpha^i \quad (7)$$

これらよりガンマ行列のエルミート共役が分かる。

$$(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0 \quad (8)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \beta = -\beta \alpha^i = -\gamma^i \quad (9)$$

次に $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を示す。 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}$ より $\mu \leq \nu$ を示せばよい。
 $\mu > 0$ のとき

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \beta\alpha^\mu\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta\alpha^\mu \quad (10)$$

$$= -\beta^2(\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu) \quad (11)$$

$$= -2\delta^{\mu\nu} \quad (12)$$

$\mu = 0$ かつ $\mu < \nu$ のとき

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \beta\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta \quad (13)$$

$$= \beta^2\alpha^\nu - \beta^2\alpha^\nu \quad (14)$$

$$= 0 \quad (15)$$

$\mu = \nu = 0$ のとき

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\beta^2 \quad (16)$$

$$= 2 \quad (17)$$

よって $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ と書ける。 □

(2) γ^5 を次のように定義する。

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (18)$$

このとき次の式を示せ。

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (19)$$

証明

$$(\gamma^5)^\dagger = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 \quad (20)$$

$$= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \quad (21)$$

$$= (-1)^6 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (22)$$

$$= \gamma^5 \quad (23)$$

$$(\gamma^5)^2 = -(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger \quad (24)$$

$$= -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \quad (25)$$

$$= 1 \quad (26)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = i(\gamma^\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu) \quad (27)$$

$$= i((-1)^\mu + (-1)^{3-\mu}) \gamma^0 \dots (\gamma^\mu)^2 \dots \gamma^3 \quad (28)$$

$$= 0 \quad (29)$$

□

(3) Σ^i を次のように定義する。

$$\Sigma^i := \frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \gamma^j \gamma^k \quad (30)$$

このとき次の式を示せ。

$$(\Sigma^i)^\dagger = \Sigma^i, \quad \{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij} \quad (31)$$

証明

$$(\Sigma^i)^\dagger = -\frac{i}{2} \sum_{j,k} (\varepsilon^{ijk} \gamma^j \gamma^k)^\dagger \quad (32)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{j,k} \varepsilon^{ijk} \gamma^k \gamma^j \quad (33)$$

$$= -\frac{i}{2} \sum_{j,k} -\varepsilon^{ikj} \gamma^k \gamma^j \quad (34)$$

$$= \Sigma^i \quad (35)$$

次に $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ を示す。

$i = j$ のとき、ある k, l が存在して

$$\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} \varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b \right)^2 \quad (36)$$

$$= -\frac{1}{2} (\gamma^k \gamma^l - \gamma^l \gamma^k)^2 \quad (37)$$

$$= -\frac{1}{2} (\gamma^k \gamma^l \gamma^k \gamma^l - \gamma^k \gamma^l \gamma^l \gamma^k - \gamma^l \gamma^k \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k \gamma^l \gamma^k) \quad (38)$$

$$= 2 \quad (39)$$

$i \neq j$ のとき a, b, c, d のいずれか 2 つ 1 組は同じであるから

$$\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = -\frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} (\varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b \varepsilon^{jcd} \gamma^c \gamma^d + \varepsilon^{jcd} \gamma^c \gamma^d \varepsilon^{iab} \gamma^a \gamma^b) \quad (40)$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \varepsilon^{iab} \varepsilon^{jcd} (1 + (-1)^3) \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \quad (41)$$

$$= 0 \quad (42)$$

よって $\{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta^{ij}$ である。 \square

(4) $\Sigma = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ と任意の $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$(\mathbf{v} \cdot \Sigma)^2 = \mathbf{v}^2 \quad (43)$$

証明

$$(\mathbf{v} \cdot \Sigma)^2 = (v^i \Sigma^i)(v^j \Sigma^j)^\dagger \quad (44)$$

$$= v^i \Sigma^i \Sigma^j (v^j)^\dagger \quad (45)$$

$$= \delta^{ij} v^i (v^j)^\dagger \quad (46)$$

$$= \mathbf{v}^2 \quad (47)$$

\square

(5) α^i, β の具体例を 1 つ挙げて性質を満たすことを確認せよ。

証明

\square

問題 2.

共変微分 D_μ を次のように定義する。

$$D_\mu := \partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \quad (48)$$

\diamond

(1)

証明

$$D_\mu D_\nu = \left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \right) \left(\partial_\nu - \frac{q}{i\hbar} A_\nu(x) \right) \quad (49)$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu - \frac{q}{i\hbar} \partial_\mu A_\nu(x) - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \partial_\nu - \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu(x) A_\nu(x) \quad (50)$$

$$(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = D_\mu \sigma^\mu D_\nu \sigma^\nu \quad (51)$$

$$= (\sigma^\mu)^2 D_\mu^2 + \sigma^\mu \sigma^\nu D_i D_j + \sigma^j \sigma^i D_j D_i \quad (52)$$

$$= \left(\partial_\mu - \frac{q}{i\hbar} A_\mu(x) \right) \sigma^\mu \left(\partial_\nu - \frac{q}{i\hbar} A_\nu(x) \right) \sigma^\nu \quad (53)$$

□

(2) 荷電粒子に対するクライン・ゴールドン方程式

$$[\hbar^2 D^2 + (mc)^2] \phi(x) = 0 \quad (54)$$

が非相対論的極限 $mc^2 \rightarrow \infty$