

# 量子力学 III

## 複数の同一粒子からなる量子系：発展編 (第二量子化)

21B00349 宇佐見大希

2023 年 10 月 27 日

### 目次

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | もし、量子状態の対称化の要請がなかったら？  | 3  |
| 2  | $n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$                                    | 6  |
| 3  | 完全対称な状態と完全反対称な状態の数学的取り扱い                                     | 10 |
| 4  | 複数の同一粒子からなる量子系の状態に対する対称化の要請                                  | 20 |
| 5  | 計算練習   | 20 |
| 6  | Bose, Fermi 粒子系の量子状態の粒子数表示                                   | 21 |
| 7  | Bose 粒子系の消滅演算子 $\hat{a}_i$ と生成演算子 $\hat{a}_i^\dagger$        | 23 |
| 8  | Fermi 粒子系の消滅演算子 $\hat{c}_i$ と生成演算子 $\hat{c}_i^\dagger$       | 27 |
| 9  | Bose, Fermi 粒子系の消滅演算子 $\hat{b}_i$ と生成演算子 $\hat{b}_i^\dagger$ | 31 |
| 10 | 演算子の粒子数表示: 1 粒子演算子とその和、2 粒子演算子とその和の導入                        | 31 |
| 11 | $n$ 粒子演算子の和の粒子数表示  | 32 |
| 12 | 1 粒子状態の完全正規直交系の取り替え  | 35 |
| 13 | 場の演算子の導入   | 36 |
| 14 | 量子化された場の理論は粒子数を固定しない多体系の量子力学に等しい。                            | 43 |
| 15 | Heisenberg 表示での場の演算子の運動方程式                                   | 46 |
| 16 | 第二量子化 - 場の正準量子化の手続き  | 47 |
| 17 | 第二量子化 - 波動描像から粒子描像へ  | 47 |

| 問題番号    | 正誤  |
|---------|---|
| Q21-1.  | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o (v) o (vi) o (vii) o (viii) o (ix) o (x) o (xi) x                                       |
| Q21-2.  | o   |
| Q21-3.  | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o (v) o (vi) o (vii) o (viii) o (ix) o (x) o (xi) o (xii) o (xiii) o (xiv) o (xv) o (xvi) |
| Q21-4.  | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o (v) o (vi) o  |
| Q21-5.  | (i) o (ii) o  |
| Q21-6.  | o   |
| Q21-7.  | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o   |
| Q21-8.  | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o   |
| Q21-9.  | (i) o (ii) o  |
| Q21-10. | $\triangle$   |
| Q21-11. | o   |
| Q21-12. | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o (v) o (vi) o (vii) o (viii) o (ix) o  |
| Q21-13. | o   |
| Q21-14. | o   |
| Q21-15. | o   |
| Q21-16. | o   |
| Q21-17. | (i) o (ii) o  |
| Q21-18. | (i) o (ii) o  |
| Q21-19. | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o (v) o (vi) o  |
| Q21-20. | (i) o (ii) o (iii) o (iv) o   |
| Q21-21. | o   |

表 1 正誤表

このレポートでは複数の同一粒子系におけるさまざまな表現を導入することを目的とする。

## 1 もし、量子状態の対称化の要請がなかったら？

量子に関する実験を進めていくと複数の同一粒子はどうしても区別できないことが分かってきた。これを理論へ組み込む為に物理学者は「いかなる粒子状態は粒子交換に関して不変である」という論理の飛躍を用いて説明した。

$$\text{複数の同一粒子は区別できない.} \quad (1.1)$$

$$\iff \text{いかなる観測量の期待値は粒子交換に関して不変である.} \quad (1.2)$$

$$\Leftarrow \text{いかなる粒子状態は粒子交換に関して不変である.} \quad (1.3)$$

この要請を「対称化の要請」と呼ぶ。ここでは対称化の要請をせずに複数の同一粒子を区別できないという事実だけで導けることを考える。

**定義 1.1** (複数の同一粒子系における Hilbert 空間).

1 粒子状態の Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{single}$  に対して  $N$  個の粒子の粒子状態の Hilbert 空間はテンソル積  $\mathcal{H}^{(N)} \cong \mathcal{H}_{single} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{single}$  で表現される。そして  $\mathcal{H}^{(N)}$  の粒子状態は  $|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}$  と書き、定数倍は同一視する。また  $|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle, |\psi'_1\rangle \cdots |\psi'_N\rangle$  の内積は次のように定義する。

$$(\langle \psi_1 | \cdots \langle \psi_N |) \cdot (|\psi'_1\rangle \cdots |\psi'_N\rangle) = \langle \psi_1 | \psi'_1 \rangle \cdots \langle \psi_N | \psi'_N \rangle. \quad (1.4)$$

異なる 1 粒子状態  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}_{single}$  を持つ粒子による 2 つの粒子系  $\mathcal{H}^{(2)} \cong \mathcal{H}_{single} \otimes \mathcal{H}_{single}$  において次の 2 つを仮定する。

1. 2 つの粒子は区別できない。
2. 粒子の 1 個が  $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{single}$  となり、もう 1 個は  $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_{single}$  となる。(これを仮定  $D$  とおく)

これらの条件は次のように言い換えられる。

1. いかなる観測量の期待値は粒子交換に関して不変である。
2. 任意の粒子状態  $|\Psi\rangle$  は  $|\alpha\rangle|\beta\rangle, |\beta\rangle|\alpha\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$  の重ね合わせにより表現できる。

粒子状態については規格化条件を用いて次のように表現できる。

$$|\Psi\rangle = c_1|\alpha\rangle|\beta\rangle + c_2|\beta\rangle|\alpha\rangle \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}, |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1). \quad (1.5)$$

今後の為に粒子交換を表す演算子を定義しておく。

**定義 1.2** (交換演算子).

Hilbert 空間  $\mathcal{H}^{(2)}$  において交換演算子 (exchange operator)  $\hat{E}$  を次のように定義する。

$$\hat{E}|\psi\rangle|\psi'\rangle = |\psi'\rangle|\psi\rangle. \quad (1.6)$$

問題 1.3 (Q21-1(i)).

粒子が区別できないならば粒子状態を区別できないとは示せないが, ここでは粒子状態を区別できないと仮定する. このとき粒子状態  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$  は粒子を交換しても不変であるから位相を考慮して次の式が成り立つ.

$$|\Psi\rangle = \hat{E}|\Psi\rangle \iff c_1|\alpha\rangle|\beta\rangle + c_2|\beta\rangle|\alpha\rangle = c_1|\beta\rangle|\alpha\rangle + c_2|\alpha\rangle|\beta\rangle \iff c_1 = \pm c_2. \quad (1.7)$$

よって粒子状態は次のようになる.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle \pm |\beta\rangle|\alpha\rangle). \quad (1.8)$$

これより粒子状態を区別できないならば係数に対して条件を足さなければならないことが分かる.  $\diamond$

命題 1.4 (Q21-1(ii)).

粒子状態  $|\Psi_S\rangle, |\Psi_A\rangle$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} |\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\alpha\rangle) \\ |\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle - |\beta\rangle|\alpha\rangle) \end{cases}. \quad (1.9)$$

このとき  $D$  を満たす任意の粒子状態  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$  は次のように表現される.

$$|\Psi\rangle = c_S|\Psi_S\rangle + c_A|\Psi_A\rangle. \quad (1.10)$$

$\diamond$

証明

$D$  を満たす任意の粒子状態  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(2)}$  は次のように書ける.

$$|\Psi\rangle = c_1|\alpha\rangle|\beta\rangle + c_2|\beta\rangle|\alpha\rangle \quad (1.11)$$

$$= \frac{c_1 + c_2}{2}(|\alpha\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\alpha\rangle) + \frac{c_1 - c_2}{2}(|\alpha\rangle|\beta\rangle - |\beta\rangle|\alpha\rangle) \quad (1.12)$$

$$= \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}}|\Psi_S\rangle + \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{2}}|\Psi_A\rangle. \quad (1.13)$$

よって次のように係数をおくことで  $|\Psi\rangle$  は  $|\alpha\rangle|\beta\rangle, |\beta\rangle|\alpha\rangle$  と  $|\Psi_S\rangle, |\Psi_A\rangle$  のそれぞれの重ね合わせが同値な表現となることがわかる.

$$c_S = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}}, \quad c_A = \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{2}} \quad (1.14)$$

$$c_1 = \frac{c_S + c_A}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{c_S - c_A}{\sqrt{2}}. \quad (1.15)$$

$\square$

命題 1.5 (Q21-1(iii)(iv)(v)).

交換演算子について次の性質が認められる.

$$\hat{E} = \hat{E}^\dagger = \hat{E}^{-1}, \quad \hat{E}^2 = \hat{1} \quad (1.16)$$

$$\hat{E}|\Psi\rangle = c_S|\Psi_S\rangle - c_A|\Psi_A\rangle. \quad (1.17)$$

◇

## 証明

まず粒子状態  $|\psi\rangle|\psi'\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle, |\beta\rangle|\alpha\rangle$  に対して演算子  $\hat{E}^{-1}, \hat{E}^\dagger$  を適用する.

$$\hat{E}^{-1}|\psi\rangle|\psi'\rangle = \hat{E}^{-1}\hat{E}|\psi'\rangle|\psi\rangle = |\psi'\rangle|\psi\rangle \quad (1.18)$$

$$\langle\psi|\langle\psi'|\hat{E}^\dagger\hat{E}|\psi\rangle|\psi'\rangle = \langle\psi'|\langle\psi|\psi'\rangle|\psi\rangle = \langle\psi|\langle\psi'|\psi\rangle|\psi'\rangle. \quad (1.19)$$

これより次のことが分かる.

$$\hat{E} = \hat{E}^\dagger = \hat{E}^{-1}, \quad \hat{E}^2 = \hat{E}\hat{E}^{-1} = \hat{1}. \quad (1.20)$$

次に粒子状態  $|\Psi_S\rangle, |\Psi_A\rangle$  に適用すると

$$\hat{E}|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{E}(|\alpha\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\alpha\rangle) = +\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\alpha\rangle) = +|\Psi_S\rangle \quad (1.21)$$

$$\hat{E}|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{E}(|\alpha\rangle|\beta\rangle - |\beta\rangle|\alpha\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle - |\beta\rangle|\alpha\rangle) = -|\Psi_A\rangle. \quad (1.22)$$

となるから任意の状態  $|\Psi\rangle$  に適用すると次のようになる.

$$\hat{E}|\Psi\rangle = \hat{E}(c_S|\Psi_S\rangle + c_A|\Psi_A\rangle) = c_S|\Psi_S\rangle - c_A|\Psi_A\rangle. \quad (1.23)$$

□

## 命題 1.6 (Q21-1(vi)(vii)(viii)).

Hilbert 空間  $\mathcal{H}^{(2)}$  の任意の観測量  $\hat{O}$  について 2 つの粒子を区別できないことと次の 3 つはそれぞれ同値である.

1. 期待値  $\langle\hat{O}\rangle$  は粒子交換に関して不変である.
2. 観測量  $\hat{O}$  は粒子交換に関して不変である. つまり  $\hat{O} = \hat{E}\hat{O}\hat{E}$  である.
3. 観測量  $\hat{O}$  と交換演算子  $\hat{E}$  は可換である.

◇

## 証明

1 から 2 を示す. 期待値について  $|\Psi\rangle \rightarrow \hat{E}|\Psi\rangle$  と状態を変更しても不変であるから次のようになる.

$$\langle\hat{O}\rangle = \langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{E}^\dagger\hat{O}\hat{E}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{E}\hat{O}\hat{E}|\Psi\rangle. \quad (1.24)$$

これより  $\hat{O} = \hat{E}\hat{O}\hat{E}$  となり,  $\hat{O}$  は粒子交換に関して不変であることがわかる. 念のため  $\hat{E}\hat{O}\hat{E}$  について  $(\hat{E}\hat{O}\hat{E})^\dagger = \hat{E}^\dagger\hat{O}^\dagger\hat{E}^\dagger = \hat{E}\hat{O}\hat{E}$  と計算できるから  $\hat{E}\hat{O}\hat{E}$  は Hermite 演算子となり整合性は保っている. 次に 2 から 3 を示す.

$$\hat{E}\hat{O} = \hat{E}\hat{E}\hat{O}\hat{E} = \hat{O}\hat{E}. \quad (1.25)$$

つまり  $[\hat{O}, \hat{E}] = 0$  であるから  $\hat{O}, \hat{E}$  は可換である. 最後に 3 から 1 は  $\hat{E}^\dagger\hat{O}\hat{E} = \hat{E}^\dagger\hat{E}\hat{O} = \hat{O}$  より成り立つ. よって全て互いに同値であることは示された. □

命題 1.7 (Q21-1(ix)).

観測量  $\hat{O}$  の期待値  $\langle \hat{O} \rangle$  について次のように書ける.

$$\langle \hat{O} \rangle = |c_S|^2 \langle \Psi_S | \hat{O} | \Psi_S \rangle + |c_A|^2 \langle \Psi_A | \hat{O} | \Psi_A \rangle. \quad (1.26)$$

◇

証明

観測量  $\hat{O}$  の期待値  $\langle \hat{O} \rangle$  は次のように計算できる.

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle \quad (1.27)$$

$$= (c_S^* \langle \Psi_S | + c_A^* \langle \Psi_A |) \hat{O} (c_S | \Psi_S \rangle + c_A | \Psi_A \rangle) \quad (1.28)$$

$$= |c_S|^2 \langle \Psi_S | \hat{O} | \Psi_S \rangle + |c_A|^2 \langle \Psi_A | \hat{O} | \Psi_A \rangle + c_S^* c_A \langle \Psi_S | \hat{O} | \Psi_A \rangle + c_A^* c_S \langle \Psi_A | \hat{O} | \Psi_S \rangle \quad (1.29)$$

$$= |c_S|^2 \langle \Psi_S | \hat{O} | \Psi_S \rangle + |c_A|^2 \langle \Psi_A | \hat{O} | \Psi_A \rangle. \quad (1.30)$$

ただし式 (1.30) において次のような計算をした.

$$\langle \Psi_S | \hat{O} | \Psi_A \rangle = \langle \Psi_S | \hat{E} \hat{O} \hat{E} | \Psi_A \rangle = -\langle \Psi_S | \hat{O} | \Psi_A \rangle = 0 \quad (1.31)$$

$$\langle \Psi_A | \hat{O} | \Psi_S \rangle = \langle \Psi_A | \hat{E} \hat{O} \hat{E} | \Psi_S \rangle = -\langle \Psi_A | \hat{O} | \Psi_S \rangle = 0. \quad (1.32)$$

□

問題 1.8 (Q21-1(x)).

例えば  $\hat{O} = 2|\beta\rangle\langle\alpha|\langle\alpha|\langle\beta|$  とすると

$$\langle \Psi_S | \hat{O} | \Psi_S \rangle = \frac{1}{2} (\langle \alpha | \langle \beta | + \langle \beta | \langle \alpha |) \hat{O} (|\alpha\rangle |\beta\rangle + |\beta\rangle |\alpha\rangle) = +1 \quad (1.33)$$

$$\langle \Psi_A | \hat{O} | \Psi_A \rangle = \frac{1}{2} (\langle \alpha | \langle \beta | - \langle \beta | \langle \alpha |) \hat{O} (|\alpha\rangle |\beta\rangle - |\beta\rangle |\alpha\rangle) = -1. \quad (1.34)$$

より  $c_S, c_A$  は互いに依存しない.

◇

問題 1.9 (Q21-1(xi)).

交換演算子が Hilbert 空間の代数構造において既約元であることは直感的に成り立つので, 区別できない情報が観測量の演算子に吸収され, 粒子状態の粒子を区別できないとは示せない. 問題 1.3 のように係数は決まらず, 理論の予言能力に問題はない.

◇

公理 1.10 (対称化の要請).

いかなる粒子状態は粒子交換に関して不変である.

## 2 $n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$

前章の 2 粒子系で交換演算子を導入したが一般の  $N$  個の粒子系において対応するものが置換演算子である. それを導入する前段階として  $n$  次対称群を整理する.

**定義 2.1** ( $n$  次対称群).

$X$  を集合とするととき  $X$  から  $X$  への全単射写像  $\sigma: X \rightarrow X$  を  $X$  の置換という.  $\sigma, \tau$  を置換とするととき, その積  $\sigma\tau$  を写像としての合成  $\sigma \circ \tau$  と定義する.  $X$  の置換全体の集合はこの演算により群となり, これを  $X$  の置換群という.  $\mathbb{Z}_n := \{1, 2, \dots, n\}$  の置換群を  $n$  次対称群といい  $\mathfrak{S}_n$  と書く.

繰り返すが置換の積は写像の合成であり写像は右結合である. (Q21-2(i))

**問題 2.2** (Q21-2(ii)).

$X = \{0, 1, 2, 3\}$  の置換群  $G$  に対して  $\sigma, \tau \in G$  の積  $\sigma\tau$  を計算せよ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

◇

**証明**

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

□

**定理 2.3** (Q21-3(i)(ii)(iii)(iv)).

$n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  は群である.

◇

**証明**

$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$  が全単射写像であることを示す. まず  $\sigma\tau$  の全射性について  $\sigma$  の全射性より任意の  $c \in X$  に対して  $\sigma(b) = c$  となる  $b \in X$  があり,  $\tau(a) = b$  となる  $a \in X$  がある. これより任意の  $c$  に対して次を満たす  $a$  がある.

$$\sigma\tau(a) = \sigma \circ \tau(a) = \sigma(\tau(a)) = c. \quad (2.3)$$

また  $\sigma\tau$  の単射性についてはそれぞれの単射性より次のように満たされる.

$$\sigma\tau(a) = \sigma\tau(b) \implies \tau(a) = \tau(b) \implies a = b. \quad (2.4)$$

これより積について閉じていることが分かる.

単位元は  $X$  の恒等写像  $\text{id}_X$  とすることで任意の  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $\sigma \text{id}_X = \text{id}_X \sigma = \sigma$  を満たす.

また任意の元  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対する逆元は逆像  $\sigma^{-1}$  とすることで  $\sigma\sigma^{-1} = \text{id}_X$  を満たす.

そして定義から結合法則  $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$  も満たすことが分かる.

よって  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  は群となる.

□

**命題 2.4** (Q21-4).

$n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の位数は  $n!$  である.

◇

**証明**

全単射写像は  $X$  の順列で被覆できるから位数は  $n!$  となる. □

**命題 2.5** (Q21-5(i)(ii), Q21-6(i)(ii)).

$\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$  とすると  $\mathfrak{S}_n = \sigma_0 \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n \sigma_0 = \mathfrak{S}_n^{-1}$  である. ◇

**証明**

$\sigma_0$  を左から掛けることに対して  $\sigma_0^{-1}$  を左から掛けることは逆写像となるから, 全単射となる. よって  $\sigma_0 \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n$  となる. 逆も同様なので  $\mathfrak{S}_n \sigma_0 = \mathfrak{S}_n$  となる. また群の性質より各元の逆元は唯一であるから  $\mathfrak{S}_n^{-1} = \mathfrak{S}_n$  となる. これより群  $R$  に対して関数  $f: \mathfrak{S}_n \rightarrow R$  があるとき次のようになる.

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma_0 \sigma) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma \sigma_0) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma^{-1}) \quad (2.5)$$

□

**定義 2.6** (互換, 巡回置換).

置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $1 \leq i < j \leq n$  のとき  $k \neq i, j$  なら  $\sigma(k) = k$  で  $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$  であるとき  $\sigma$  を互換といい  $(i \ j)$  と書く. より一般に  $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \cdots \mapsto i_m \mapsto i_1$  と移し, 他の元は変えない置換を巡回置換といい  $(i_1 \ \cdots \ i_m)$  と書く.

**補題 2.7.**

任意の置換は一意的巡回置換の積で表現できる. ◇

**証明**

置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  においてある元  $i_1 \in X$  を選び, 移していくと鳩ノ巣原理より必ず  $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \cdots \mapsto i_m \mapsto i_1$  と巡回する. これより巡回置換  $(i_1 \ \cdots \ i_m)$  と  $i_1, \dots, i_m$  を変えず他の元を  $i \mapsto \sigma(i)$  とする置換  $\sigma'$  を用いて  $\sigma = (i_1 \ \cdots \ i_m) \sigma'$  と表現できる. 次は  $\sigma'$  の  $i_1, \dots, i_m$  ではない元に対してと, 帰納的に同様の操作をすることで置換は巡回置換の積で表せられ, 積の順番を除いて一意に定まることが分かる. □

**定理 2.8** (Q21-7(i)).

任意の置換は互換の積で表現できる. ◇

**証明**

任意の置換は巡回置換の積で表現できるから, 巡回置換が互換の積で表せられることを示せばよい.

$$(i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_m) = (i_1 \ i_3 \ \cdots \ i_m)(i_1 \ i_2) \quad (2.6)$$

$$= (i_1 \ i_4 \ \cdots \ i_m)(i_1 \ i_3)(i_1 \ i_2) \quad (2.7)$$

$$= (i_1 \ i_m)(i_1 \ i_{m-1}) \cdots (i_1 \ i_3)(i_1 \ i_2). \quad (2.8)$$

これは上のように変形することにより示される. □



**定義 2.9** (符号).

置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  の符号  $\text{sgn } \sigma = (-1)^\sigma$  を次のように定義する.

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^\sigma = \begin{cases} +1 & (\sigma \text{ が偶数個の互換の積で表される}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇数個の互換の積で表される}) \end{cases}. \quad (2.9)$$

**命題 2.10** (Q21-7(ii)).

置換の符号は well-defined である. ◇

**証明**

次のように定義される差積  $\Delta(x_1, \dots, x_n)$  を置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  用いて変数の添字を置換することを考える.

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (2.10)$$

互換  $\sigma = (i \ j)$  で置換するとそれぞれ次のようになるから  $\Delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = -\Delta(x_1, \dots, x_n)$  となる.

$$(x_j - x_i) \mapsto -(x_j - x_i) \quad (2.11)$$

$$(x_a - x_i)(x_a - x_j) \mapsto (x_a - x_i)(x_a - x_j) \quad (2.12)$$

$$(x_i - x_a)(x_a - x_j) \mapsto (x_i - x_a)(x_a - x_j) \quad (2.13)$$

$$(x_i - x_a)(x_j - x_a) \mapsto (x_i - x_a)(x_j - x_a). \quad (2.14)$$

これより置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  が異なる互換の積  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k = \tau_1 \cdots \tau_m$  で表されたとき

$$\Delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^k \Delta(x_1, \dots, x_n) = (-1)^m \Delta(x_1, \dots, x_n). \quad (2.15)$$

となる為、互換の積の個数の偶奇は一致する. □

**命題 2.11** (Q21-8(i)(ii)(iii)).

置換の符号  $\text{sgn} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}^\times$  は準同型写像である. ◇

**証明**

差積を用いることで

$$\text{sgn}(\sigma\tau) \Delta(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_{\sigma\tau(1)}, \dots, x_{\sigma\tau(n)}) \quad (2.16)$$

$$= \text{sgn}(\sigma) \Delta(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \Delta(x_1, \dots, x_n). \quad (2.17)$$

より準同型の性質  $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$  が成り立つ. 準同型であるから次が成り立つ.

$$\text{sgn}(\text{id}_X) = \text{sgn}(\text{id}_X) \text{sgn}(\text{id}_X) = 1 \quad (2.18)$$

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\text{id}_X) \text{sgn}(\sigma)^{-1} = \text{sgn}(\sigma)^{-1} = \text{sgn}(\sigma) \quad (2.19)$$

□

### 3 完全対称な状態と完全反対称な状態の数学的取り扱い

**定義 3.1** (置換演算子).

$N$  個の同一の粒子  $X_1, \dots, X_N$  からなる全体系の Hilbert 空間  $\mathcal{H}^{(N)}$  において置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  を用いた置換演算子  $\hat{P}(\sigma)$  を状態に対して粒子  $X_i$  を粒子  $X_{\sigma(i)}$  に置き換える演算子とする.

**命題 3.2** (Q21-9, Q21-10(i)(ii)).

粒子状態に対して置換演算子  $\hat{P}(\sigma)$  は次のように作用する.

$$\hat{P}(\sigma)|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = |\psi_{\sigma^{-1}(1)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma^{-1}(N)}\rangle \quad (3.1)$$

$$\hat{P}^\dagger(\sigma)|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = |\psi_{\sigma(1)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma(N)}\rangle \quad (3.2)$$

◇

**証明**

置換演算子の行列表示について置換演算子を適用すると粒子  $X_i$  における状態は元々  $X_{\sigma^{-1}(i)}$  であるから次のようになる.

$$\langle \xi_1 | \cdots \langle \xi_N | \hat{P}(\sigma) |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = \langle \xi_1 | \cdots \langle \xi_N | \psi_{\sigma^{-1}(1)}\rangle \cdots \psi_{\sigma^{-1}(N)}\rangle \quad (3.3)$$

$$= \langle \xi_{\sigma(1)} | \cdots \langle \xi_{\sigma(N)} | \psi_1\rangle \cdots \psi_N\rangle \quad (3.4)$$

これは次のように波動関数表示で書けば粒子  $X_i$  の状態を粒子  $X_{\sigma(i)}$  の状態に置き換えていると解釈できる.

$$\langle \xi_1 | \langle \xi_2 | \cdots \langle \xi_N | \hat{P}(\sigma) |\Psi\rangle = \langle \xi_{\sigma(1)} | \langle \xi_{\sigma(2)} | \cdots \langle \xi_{\sigma(N)} | \Psi\rangle \quad (3.5)$$

$$(\hat{P}(\sigma)\Psi)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \Psi(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(N)}). \quad (3.6)$$

これより任意の粒子状態  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}$  に置換演算子を適用すると次のようになる.

$$|\Psi\rangle = \sum_i c^{(i)} |\psi_1^{(i)}\rangle \cdots |\psi_N^{(i)}\rangle \quad (3.7)$$

$$\hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = \sum_i c^{(i)} |\psi_{\sigma^{-1}(1)}^{(i)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma^{-1}(N)}^{(i)}\rangle \quad (3.8)$$

$$\hat{P}^\dagger(\sigma)|\Psi\rangle = \sum_i c^{(i)} |\psi_{\sigma(1)}^{(i)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma(N)}^{(i)}\rangle. \quad (3.9)$$

□

**定理 3.3** (Q21-11(i)(ii)(iii)(iv)).

$\hat{P}(\sigma)$  は unitary な準同型演算子である.

◇

**証明**

まず unitary 演算子であることは次のようにして成り立つ.

$$\hat{P}(\sigma)^\dagger \hat{P}(\sigma) |\Psi\rangle = |\psi_{\sigma\sigma^{-1}(1)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma\sigma^{-1}(N)}\rangle = |\Psi\rangle \quad (3.10)$$

$$\hat{P}(\sigma) \hat{P}(\sigma)^\dagger |\Psi\rangle = |\psi_{\sigma^{-1}\sigma(1)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma^{-1}\sigma(N)}\rangle = |\Psi\rangle. \quad (3.11)$$

そして準同型であることは次のようにして成り立つ.

$$\hat{P}(\sigma\tau) |\Psi\rangle = |\psi_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}\rangle \cdots |\psi_{(\sigma\tau)^{-1}(N)}\rangle \quad (3.12)$$

$$= \hat{P}(\sigma) |\psi_{\tau^{-1}(1)}\rangle \cdots |\psi_{\tau^{-1}(N)}\rangle \quad (3.13)$$

$$= \hat{P}(\sigma) \hat{P}(\tau) |\Psi\rangle. \quad (3.14)$$

よって  $\hat{P}(\sigma)$  は unitary な準同型である. 準同型の性質より

$$\hat{P}(\text{id}_X) = \hat{1} \quad (3.15)$$

$$\hat{P}(\sigma^{-1}) = \hat{P}(\sigma)^{-1} \quad (3.16)$$

となる. □

**定義 3.4** (完全対称, 完全反対称).

Hilbert 空間の状態  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}$  において任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  に対して  $\hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$  となるとき完全対称,  $\hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = \text{sgn}(\sigma)|\Psi\rangle$  となるとき完全反対称であると定義する. そして完全対称, 完全反対称な状態のなす Hilbert 空間を  $\mathcal{H}_S^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)}$  と書き, 全 Hilbert 空間  $\mathcal{H}^{(N)}$  から  $\mathcal{H}_S^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)}$  への射影演算子を  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}, \hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  とする.

**補題 3.5** (Q21-12(i)(ii)).

任意の互換  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  に対して  $\hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$  となることは完全対称, 完全反対称であることと同値である. ◇

**証明**

任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  は互換の積で表現できるから互換  $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathfrak{S}_N$  を用いて  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$  と書け, 次のようになる.

$$\hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = |\Psi\rangle = (+1)^m |\Psi\rangle \quad (\text{完全対称}) \quad (3.17)$$

$$\hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = \text{sgn}(\sigma)|\Psi\rangle = (-1)^m |\Psi\rangle \quad (\text{完全反対称}) \quad (3.18)$$

これより同値であることがわかる. □

**命題 3.6** (Q21-13(i)(ii)).

$\mathcal{H}_S^{(N)}$  と  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  は直交し, その直和について次のようになる.

$$\begin{cases} \mathcal{H}_S^{(2)} \oplus \mathcal{H}_A^{(2)} = \mathcal{H}^{(2)} \\ \mathcal{H}_S^{(N)} \oplus \mathcal{H}_A^{(N)} \subsetneq \mathcal{H}^{(N)} \quad (N \geq 3) \end{cases} \quad (3.19)$$

◇

証明

$|\Psi_S\rangle \in \mathcal{H}_S^{(N)}$ ,  $|\Psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A^{(N)}$  の内積について互換  $\sigma$  の演算子を挿入することで求まる.

$$\langle \Psi_S | \Psi_A \rangle = \langle \Psi_S | \hat{P}(\sigma)^\dagger \hat{P}(\sigma) | \Psi_A \rangle \quad (3.20)$$

$$= -\langle \Psi_S | \Psi_A \rangle = 0. \quad (3.21)$$

これより  $\mathcal{H}_S^{(N)}$  と  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  は直交する. 次に  $N = 2$  における  $\mathcal{H}_S^{(N)}$ ,  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  は次のように表現できる.

$$\sum_i c^{(i)} \left( |\psi_1^{(i)}\rangle |\psi_2^{(i)}\rangle + |\psi_2^{(i)}\rangle |\psi_1^{(i)}\rangle \right) \in \mathcal{H}_S^{(2)} \quad (3.22)$$

$$\sum_i c^{(i)} \left( |\psi_1^{(i)}\rangle |\psi_2^{(i)}\rangle - |\psi_2^{(i)}\rangle |\psi_1^{(i)}\rangle \right) \in \mathcal{H}_A^{(2)}. \quad (3.23)$$

これよりこれらの直和は全空間  $\mathcal{H}^{(2)}$  を表現できる.  $N = 3$  における  $\mathcal{H}_S^{(N)}$ ,  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  の元は例えば次のようになる.

$$|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle |\psi_3\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_3\rangle |\psi_1\rangle + |\psi_3\rangle |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle + |\psi_1\rangle |\psi_3\rangle |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle |\psi_3\rangle + |\psi_3\rangle |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_S^{(N)} \quad (3.24)$$

$$|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle |\psi_3\rangle + |\psi_2\rangle |\psi_3\rangle |\psi_1\rangle + |\psi_3\rangle |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle - |\psi_1\rangle |\psi_3\rangle |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle |\psi_3\rangle - |\psi_3\rangle |\psi_2\rangle |\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_A^{(N)}. \quad (3.25)$$

これよりこれらの直和でも全空間は表現できない.  $N > 3$  も同様である. □

**定理 3.7** (Q21-14(i)(ii)(iii)).

射影演算子  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}$ ,  $\hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  は次のように表現される.

$$\hat{\mathcal{S}}^{(N)} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma) \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathcal{A}}^{(N)} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\sigma). \quad (3.27)$$

◇

証明

演算子  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}$ ,  $\hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  に対して置換演算子  $\hat{P}(\tau)$  を適用すると次のようになる.

$$\hat{P}(\tau) \hat{\mathcal{S}}^{(N)} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\tau\sigma) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma') = \hat{\mathcal{S}}^{(N)} \quad (3.28)$$

$$\hat{P}(\tau) \hat{\mathcal{A}}^{(N)} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\tau\sigma) = \text{sgn}(\tau) \frac{1}{N!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma') \hat{P}(\sigma') = \text{sgn}(\tau) \hat{\mathcal{A}}^{(N)}. \quad (3.29)$$

これより演算子  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)} : \mathcal{H}^{(N)} \rightarrow \mathcal{H}_S^{(N)}$ ,  $\hat{\mathcal{A}}^{(N)} : \mathcal{H}^{(N)} \rightarrow \mathcal{H}_A^{(N)}$  となる.

$$(\hat{\mathcal{S}}^{(N)})^2 = \frac{1}{N!^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma\tau) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma') = \hat{\mathcal{S}}^{(N)} \quad (3.30)$$

$$(\hat{\mathcal{A}}^{(N)})^2 = \frac{1}{N!^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma\tau) \hat{P}(\sigma\tau) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma') \hat{P}(\sigma') = \hat{\mathcal{A}}^{(N)}. \quad (3.31)$$

これより  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}, \hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  で何度射影しても同じ結果となる. □

**命題 3.8** (Q21-14(iii)(iv)(v)).

射影演算子は Hermite 演算子であり, 積と和について次のようになる.

$$\hat{\mathcal{S}}^{(N)} \hat{\mathcal{A}}^{(N)} = \hat{\mathcal{A}}^{(N)} \hat{\mathcal{S}}^{(N)} = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{S}}^{(2)} + \hat{\mathcal{A}}^{(2)} = \hat{1}_{\mathcal{H}^{(2)}} \\ \hat{\mathcal{S}}^{(N)} + \hat{\mathcal{A}}^{(N)} \neq \hat{1}_{\mathcal{H}^{(N)}} \quad (N \geq 3) \end{cases} \quad (3.33)$$

◇

**証明**

次に置換演算子の unitary 性より Hermite 演算子となる.

$$(\hat{\mathcal{S}}^{(N)})^\dagger = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma)^\dagger = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma^{-1}) = \hat{\mathcal{S}}^{(N)} \quad (3.34)$$

$$(\hat{\mathcal{A}}^{(N)})^\dagger = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\sigma)^\dagger = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\sigma^{-1}) = \hat{\mathcal{A}}^{(N)}. \quad (3.35)$$

演算子  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}, \hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  の積について

$$\hat{\mathcal{S}}^{(N)} \hat{\mathcal{A}}^{(N)} = \hat{\mathcal{A}}^{(N)} \hat{\mathcal{S}}^{(N)} = \frac{1}{N!^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\tau) \hat{P}(\sigma\tau) \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \left( \frac{1}{N!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma') \hat{P}(\sigma') \right) \quad (3.37)$$

$$= 0. \quad (3.38)$$

より直交することが分かる. また演算子  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}, \hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  の和について

$$\hat{\mathcal{S}}^{(2)} + \hat{\mathcal{A}}^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} (\hat{P}(\sigma) + \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\sigma)) = \hat{1}_{\mathcal{H}^{(2)}} \quad (3.39)$$

$$\hat{\mathcal{S}}^{(N)} + \hat{\mathcal{A}}^{(N)} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\hat{P}(\sigma) + \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\sigma)) \neq \hat{1}_{\mathcal{H}^{(N)}} \quad (N \geq 3). \quad (3.40)$$

とわかる. □

**定理 3.9** (Q21-15(i)(ii)).

$1 \leq \mu < \nu \leq N$  において  $|\psi_\mu\rangle$  と  $|\psi_\nu\rangle$  が線形従属であるならば  $\hat{\mathcal{A}}^{(N)} |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = 0$  となる. ◇

**証明**

任意の  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $\tau(\mu) = \sigma(\nu)$ ,  $\tau(\nu) = \sigma(\mu)$  であり, その他の元  $1 \leq i \leq N$  で  $\tau(i) = \sigma(i)$  となる  $\tau$  が一意に取れる.  $\tau$  は  $\sigma$  に対して符号が反転し,  $\hat{P}(\sigma)|\Psi\rangle = \hat{P}(\tau)|\Psi\rangle$  となる. よって  $\hat{\mathcal{A}}^{(N)} |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = 0$  となる. □

**補題 3.10.**

Hilbert 空間に演算子  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}, \hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  を作用させるとそれぞれの部分空間となる.

$$\mathcal{H}_S^{(N)} = \hat{\mathcal{S}}^{(N)} \mathcal{H}^{(N)} \quad (3.41)$$

$$\mathcal{H}_A^{(N)} = \hat{\mathcal{A}}^{(N)} \mathcal{H}^{(N)} \quad (3.42)$$

◇

証明

$\hat{\mathcal{S}}^{(N)}, \hat{\mathcal{A}}^{(N)}$  は  $\mathcal{H}_S^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)}$  への射影演算子であるから  $\mathcal{H}_S^{(N)} \supseteq \hat{\mathcal{S}}^{(N)}\mathcal{H}^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)} \supseteq \hat{\mathcal{A}}^{(N)}\mathcal{H}^{(N)}$  は成り立つ。また  $|\Psi_S\rangle \in \mathcal{H}_S^{(N)}, |\Psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A^{(N)}$  について次が成り立つことが分かる。

$$|\Psi_S\rangle = \hat{P}(\sigma)|\Psi_S\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \hat{P}(\sigma)|\Psi_S\rangle = \hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\Psi_S\rangle \quad (3.43)$$

$$|\Psi_A\rangle = \text{sgn}(\sigma)\hat{P}(\sigma)|\Psi_A\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\hat{P}(\sigma)|\Psi_A\rangle = \hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\Psi_A\rangle \quad (3.44)$$

これより  $\mathcal{H}_S^{(N)} \subseteq \hat{\mathcal{S}}^{(N)}\mathcal{H}^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)} \subseteq \hat{\mathcal{A}}^{(N)}\mathcal{H}^{(N)}$  は成り立つ。よってそれぞれ等しいことが分かる。 □

**命題 3.11** (Q21-16(i)(ii), Q21-17(i)(ii), Q21-18(i)(ii)).

$\mathcal{H}_{\text{single}}$  の完全正規直交系を添字集合  $I$  を用いて  $\{|\phi_i\rangle\}_{i \in I}$  とする。

$$\mathcal{H}_S^{(N)} = \text{span}\left\{\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)}\right\} \quad (3.45)$$

$$\mathcal{H}_A^{(N)} = \text{span}\left\{\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)}\right\} \quad (3.46)$$

ただし添字集合  $I_S^{(N)}, I_A^{(N)}$  は次のように定義される。

$$I_S^{(N)} = \{(i_1, \dots, i_N) \mid i_1, \dots, i_N \in I \wedge i_1 \leq \dots \leq i_N\} \quad (3.47)$$

$$I_A^{(N)} = \{(i_1, \dots, i_N) \mid i_1, \dots, i_N \in I \wedge i_1 < \dots < i_N\} \quad (3.48)$$

◇

証明

完全対称化演算子は置換に対して不変であり、準同型である為に次のように変形できる。

$$\hat{\mathcal{S}}^{(N)}\mathcal{H}^{(N)} = \hat{\mathcal{S}}^{(N)} \text{span}\left\{|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \mid |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}\right\} \quad (3.49)$$

$$= \text{span}\left\{\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \mid |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}\right\} \quad (3.50)$$

$$= \hat{\mathcal{S}}^{(N)} \text{span}\{|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid i_1, \dots, i_N \in I\} \quad (3.51)$$

$$= \text{span}\left\{\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid i_1, \dots, i_N \in I\right\} \quad (3.52)$$

$$= \text{span}\left\{\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)}\right\} \quad (3.53)$$

同様に完全反対称についても同じ 1 粒子状態があると 0 となるから次のように変形できる。

$$\hat{\mathcal{A}}^{(N)}\mathcal{H}^{(N)} = \hat{\mathcal{A}}^{(N)} \text{span}\left\{|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \mid |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}\right\} \quad (3.54)$$

$$= \text{span}\left\{\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \mid |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle \in \mathcal{H}^{(N)}\right\} \quad (3.55)$$

$$= \hat{\mathcal{A}}^{(N)} \text{span}\{|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid i_1, \dots, i_N \in I\} \quad (3.56)$$

$$= \text{span}\left\{\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid i_1, \dots, i_N \in I\right\} \quad (3.57)$$

$$= \text{span}\left\{\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)}\right\} \quad (3.58)$$

これらに対して補題 3.10 を適用して示される。 □

**定義 3.12** (完全対称, 完全反対称な状態の基底とその粒子数).

Hilbert 空間  $\mathcal{H}_S^{(N)}$  の基底状態  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle$  ( $i_1, \dots, i_N \in I_S^{(N)}$ ) を規格化した状態を  $|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_S$  と定義する. 同様に Hilbert 空間  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  の基底状態  $\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle$  ( $i_1, \dots, i_N \in I_A^{(N)}$ ) を規格化した状態を  $|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_A$  と定義する. またこれらの状態の粒子数  $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を  $i$  と等しい  $i_\mu$  の個数と定義する. これは占有数ともいう.

**定理 3.13** (Q21-19(i), Q21-20(i)(ii)(iii)).

完全対称な粒子基底  $|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_S$  は粒子数  $n_i$  を用いて次のように表現できる.

$$|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_S = \sqrt{\frac{N!}{\prod_{i \in I} n_i!}} \hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i \in I} n_i!}} \text{per} \begin{bmatrix} |\phi_{i_1}\rangle & \cdots & |\phi_{i_N}\rangle \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

◇

**証明**

まず  $\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle$  のノルムを計算すると次のようになる.

$$\|\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle\| = \sqrt{\langle\phi_{i_1}|\cdots\langle\phi_{i_N}|\hat{\mathcal{S}}^{(N)\dagger}\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle} \quad (3.60)$$

$$= \frac{1}{N!} \sqrt{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \langle\phi_{i_1}|\cdots\langle\phi_{i_N}|\hat{P}(\tau)^\dagger \hat{P}(\sigma)|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle} \quad (3.61)$$

$$= \frac{1}{N!} \sqrt{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \langle\phi_{\tau^{-1}(i_1)}|\cdots\langle\phi_{\tau^{-1}(i_N)}|\phi_{\sigma^{-1}(i_1)}\rangle\cdots\phi_{\sigma^{-1}(i_N)}\rangle} \quad (3.62)$$

$$= \sqrt{\frac{\prod_{i \in I} n_i!}{N!}}. \quad (3.63)$$

これより基底状態は次のように書ける.

$$|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_S = \sqrt{\frac{N!}{\prod_{i \in I} n_i!}} \hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle. \quad (3.64)$$

さらに変形を進めると次のようになる.

$$\hat{\mathcal{S}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma)|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle \quad (3.65)$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} |\phi_{\sigma^{-1}(i_1)}\rangle\cdots|\phi_{\sigma^{-1}(i_N)}\rangle \quad (3.66)$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} |\phi_{i_{\sigma(1)}}\rangle\cdots|\phi_{i_{\sigma(N)}}\rangle \quad (3.67)$$

$$= \frac{\prod_{i \in I} n_i!}{N!} \sum_{(i_1, \dots, i_N) \sim (i'_1, \dots, i'_N)} |\phi_{i'_1}\rangle\cdots|\phi_{i'_N}\rangle \quad (3.68)$$

$$= \frac{1}{N!} \text{per} \begin{bmatrix} |\phi_{i_1}\rangle^{(1)} & \cdots & |\phi_{i_N}\rangle^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\phi_{i_1}\rangle^{(N)} & \cdots & |\phi_{i_N}\rangle^{(N)} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{N!} \text{per} \begin{bmatrix} |\phi_{i_1}\rangle & \cdots & |\phi_{i_N}\rangle \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

よって次のようになる.

$$|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i \in I} n_i!}} \text{per} \left[ |\phi_{i_1}\rangle \quad \cdots \quad |\phi_{i_N}\rangle \right]. \quad (3.71)$$

□

**命題 3.14** (Q21-20(iv)(v)(vi)).

粒子状態  $|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S$  は  $\mathcal{H}_S^{(N)}$  の完全正規直交系となる.

◇

**証明**

まず正規直交関係については次のように計算できる.

$$\langle \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N} | \phi_{i'_1} \cdots \phi_{i'_N} \rangle_S = \frac{N!^{-1}}{\sqrt{\prod_{i \in I} n_i! n'_i!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \langle \phi_{i_1} | \cdots \langle \phi_{i_N} | \hat{P}(\sigma^{-1}\tau) | \phi_{i'_1} \rangle \cdots | \phi_{i'_N} \rangle \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\prod_{i \in I} n_i! n'_i!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \langle \phi_{i_1} | \cdots \langle \phi_{i_N} | \hat{P}(\sigma) | \phi_{i'_1} \rangle \cdots | \phi_{i'_N} \rangle \quad (3.73)$$

$$= \delta_{i_1 i'_1} \cdots \delta_{i_N i'_N}. \quad (3.74)$$

次に完全性については係数を取り除いて次のように計算できる.

$$\mathcal{H}_S^{(N)} = \text{span} \left\{ \hat{\mathcal{S}}^{(N)} |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)} \right\} \quad (3.75)$$

$$= \text{span} \left\{ |\phi_{i'_1} \cdots \phi_{i'_N}\rangle_S \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)} \right\}. \quad (3.76)$$

そして完備性については次のように計算できる.

$$\sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)}} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \langle \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N} |_S \quad (3.77)$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)}} \frac{1}{N! \prod_{i \in I} n_i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma) |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \langle \phi_{i_1} | \cdots \langle \phi_{i_N} | \hat{P}^\dagger(\tau) \quad (3.78)$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)}} \frac{1}{\prod_{i \in I} n_i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \hat{P}(\sigma) |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \langle \phi_{i_1} | \cdots \langle \phi_{i_N} | \quad (3.79)$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_S^{(N)}} |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \langle \phi_{i_1} | \cdots \langle \phi_{i_N} | \quad (3.80)$$

$$= \hat{1}_{\mathcal{H}_S^{(N)}}. \quad (3.81)$$

よって  $|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S$  は完全正規直交系となる.

□

**定理 3.15** (Q21-19(ii), Q21-21(i)(ii)).

完全反対称な粒子基底  $|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A$  は粒子数  $n_i$  を用いて次のように表現できる.

$$|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = \sqrt{N!} \hat{\mathcal{A}}^{(N)} |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \left[ |\phi_{i_1}\rangle \quad \cdots \quad |\phi_{i_N}\rangle \right]. \quad (3.82)$$

◇

**証明**



まず  $\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle$  のノルムを計算すると次のようになる.

$$\|\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle\| = \sqrt{\langle\phi_{i_1}|\cdots\langle\phi_{i_N}|\hat{\mathcal{A}}^{(N)\dagger}\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle} \quad (3.83)$$

$$= \frac{1}{N!} \sqrt{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\tau\sigma) \langle\phi_{i_1}|\cdots\langle\phi_{i_N}|\hat{P}(\tau)^\dagger\hat{P}(\sigma)|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle} \quad (3.84)$$

$$= \frac{1}{N!} \sqrt{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma^2)} \quad (3.85)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}}. \quad (3.86)$$

これより基底状態は次のように書ける.

$$|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_A = \sqrt{N!}\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle. \quad (3.87)$$

さらに変形を進めると次のようになる.

$$\hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\sigma)|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle \quad (3.88)$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) |\phi_{\sigma^{-1}(i_1)}\rangle\cdots|\phi_{\sigma^{-1}(i_N)}\rangle \quad (3.89)$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) |\phi_{i_{\sigma(1)}}\rangle\cdots|\phi_{i_{\sigma(N)}}\rangle \quad (3.90)$$

$$= \frac{1}{N!} \det \begin{bmatrix} |\phi_{i_1}\rangle^{(1)} & \cdots & |\phi_{i_N}\rangle^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\phi_{i_1}\rangle^{(N)} & \cdots & |\phi_{i_N}\rangle^{(N)} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$= \frac{1}{N!} \det \left[ |\phi_{i_1}\rangle \quad \cdots \quad |\phi_{i_N}\rangle \right]. \quad (3.92)$$

よって次のようになる.

$$|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \left[ |\phi_{i_1}\rangle \quad \cdots \quad |\phi_{i_N}\rangle \right]. \quad (3.93)$$

□

**命題 3.16** (Q21-21(iii)(iv)(v)).

粒子状態  $|\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}\rangle_A$  は  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  の完全正規直交系となる.

◇

**証明**

まず正規直交関係については次のように計算できる.

$$\langle\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_N}|\phi_{i'_1}\cdots\phi_{i'_N}\rangle_A = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma^{-1}\tau) \langle\phi_{i_1}|\cdots\langle\phi_{i_N}|\hat{P}(\sigma^{-1}\tau)|\phi_{i'_1}\rangle\cdots|\phi_{i'_N}\rangle \quad (3.94)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \langle\phi_{i_1}|\cdots\langle\phi_{i_N}|\hat{P}(\sigma)|\phi_{i'_1}\rangle\cdots|\phi_{i'_N}\rangle \quad (3.95)$$

$$= \delta_{i_1 i'_1} \cdots \delta_{i_N i'_N}. \quad (3.96)$$

次に完全性については係数を取り除いて次のように計算できる.

$$\mathcal{H}_A^{(N)} = \text{span} \left\{ \hat{\mathcal{A}}^{(N)}|\phi_{i_1}\rangle\cdots|\phi_{i_N}\rangle \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)} \right\} \quad (3.97)$$

$$= \text{span} \left\{ |\phi_{i'_1}\cdots\phi_{i'_N}\rangle_A \mid (i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)} \right\}. \quad (3.98)$$

最後に完備性については次のように計算できる.

$$\sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)}} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \langle \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}|_A \quad (3.99)$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)}} \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma\tau) \hat{P}(\sigma) |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \langle \phi_{i_1}| \cdots \langle \phi_{i_N}| \hat{P}^\dagger(\tau) \quad (3.100)$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \hat{P}(\sigma) |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \langle \phi_{i_1}| \cdots \langle \phi_{i_N}| \quad (3.101)$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_N) \in I_A^{(N)}} |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle \langle \phi_{i_1}| \cdots \langle \phi_{i_N}| \quad (3.102)$$

$$= \hat{1}_{\mathcal{H}_A^{(N)}}. \quad (3.103)$$

よって  $|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A$  は  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  の完全正規直交系となる.  $\square$

**命題 3.17** (Q21-22(i)(ii)(iii)(iv), Q21-23(i)(ii)(iii)(iv)).

完全正規直交系  $|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S, |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A$  についてそれぞれ完全対称性, 完全反対称性が成り立ち, どちらも線形性が成り立つ.

$$|\phi_{i_{\sigma(1)}} \cdots \phi_{i_{\sigma(N)}}\rangle_S = |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \quad (3.104)$$

$$|\phi_{i_{\sigma(1)}} \cdots \phi_{i_{\sigma(N)}}\rangle_A = \text{sgn}(\sigma) |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \quad (3.105)$$

$$|\phi_{i_1} \cdots a^{(0)}\phi_{i_\mu}^{(0)} + a^{(1)}\phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = a^{(0)} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(0)} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S + a^{(1)} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \quad (3.106)$$

$$|\phi_{i_1} \cdots a^{(0)}\phi_{i_\mu}^{(0)} + a^{(1)}\phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = a^{(0)} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(0)} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A + a^{(1)} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A. \quad (3.107)$$

$\diamond$

**証明**

行列に関する性質より次のようになる.

$$|\phi_{i_{\sigma(1)}} \cdots \phi_{i_{\sigma(N)}}\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i \in I} n_i!}} \text{per} \begin{bmatrix} |\phi_{i_{\sigma(1)}}\rangle & \cdots & |\phi_{i_{\sigma(N)}}\rangle \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i \in I} n_i!}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} |\phi_{i_{\sigma\tau(1)}}\rangle \cdots |\phi_{i_{\sigma\tau(N)}}\rangle \quad (3.109)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i \in I} n_i!}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} |\phi_{i_{\tau(1)}}\rangle \cdots |\phi_{i_{\tau(N)}}\rangle \quad (3.110)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{i \in I} n_i!}} \text{per} \begin{bmatrix} |\phi_{i_1}\rangle & \cdots & |\phi_{i_N}\rangle \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$= |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S. \quad (3.112)$$

$$\left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \cdots \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \left[ \left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle \right] \quad (3.113)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\tau) \left| \phi_{i_{\sigma\tau(1)}} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_{\sigma\tau(N)}} \right\rangle \quad (3.114)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \left| \phi_{i_{\tau(1)}} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_{\tau(N)}} \right\rangle \quad (3.115)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \text{sgn}(\sigma) \det \left[ \left| \phi_{i_1} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_N} \right\rangle \right] \quad (3.116)$$

$$= \text{sgn}(\sigma) \left| \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N} \right\rangle_A. \quad (3.117)$$

次に線形性について順当に計算する.

$$\left| \phi_{i_1} \cdots a^{(0)} \phi_{i_\mu}^{(0)} + a^{(1)} \phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N} \right\rangle_S \quad (3.118)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!} \prod_{i \in I} n_i!} \text{per} \left[ \left| \phi_{i_1} \right\rangle \cdots a^{(0)} \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle + a^{(1)} \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_N} \right\rangle \right] \quad (3.119)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!} \prod_{i \in I} n_i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \right\rangle \cdots \left( a^{(0)} \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle + a^{(1)} \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \right) \cdots \left| \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle \quad (3.120)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!} \prod_{i \in I} n_i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \left( a^{(0)} \left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle + a^{(1)} \left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle \right) \quad (3.121)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!} \prod_{i \in I} n_i!} \left( a^{(0)} \text{per} \left[ \left| \phi_{i_1} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_N} \right\rangle \right] + a^{(1)} \text{per} \left[ \left| \phi_{i_1} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_N} \right\rangle \right] \right) \quad (3.122)$$

$$= a^{(0)} \left| \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(0)} \cdots \phi_{i_N} \right\rangle_S + a^{(1)} \left| \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N} \right\rangle_S. \quad (3.123)$$

$$\left| \phi_{i_1} \cdots a^{(0)} \phi_{i_\mu}^{(0)} + a^{(1)} \phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N} \right\rangle_A \quad (3.124)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \left[ \left| \phi_{i_1} \right\rangle \cdots a^{(0)} \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle + a^{(1)} \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_N} \right\rangle \right] \quad (3.125)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \right\rangle \cdots \left( a^{(0)} \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle + a^{(1)} \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \right) \cdots \left| \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle \quad (3.126)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \left( a^{(0)} \left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle + a^{(1)} \left| \phi_{i_{\sigma(1)}} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_{\sigma(N)}} \right\rangle \right) \quad (3.127)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left( a^{(0)} \det \left[ \left| \phi_{i_1} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(0)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_N} \right\rangle \right] + a^{(1)} \det \left[ \left| \phi_{i_1} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_\mu}^{(1)} \right\rangle \cdots \left| \phi_{i_N} \right\rangle \right] \right) \quad (3.128)$$

$$= a^{(0)} \left| \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(0)} \cdots \phi_{i_N} \right\rangle_A + a^{(1)} \left| \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_\mu}^{(1)} \cdots \phi_{i_N} \right\rangle_A. \quad (3.129)$$

よって成り立つ. □

## 4 複数の同一粒子からなる量子系の状態に対する対称化の要請

定義 4.1 (スピン統計定理).

$N$  個の同一の Bose 粒子による Hilbert 空間は完全対称な Hilbert 空間  $\mathcal{H}_S^{(N)}$ , また Fermi 粒子による Hilbert 空間は完全反対称な Hilbert 空間  $\mathcal{H}_A^{(N)}$  となる. また全粒子数を固定しない Bose, Fermi 粒子系の Hilbert 空間を  $\mathcal{H}_{Bose}, \mathcal{H}_{Fermi}$  と書き, 次のように定義する.

$$\mathcal{H}_{Bose} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_S^{(N)} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{H}_{Fermi} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_A^{(N)} \quad (4.2)$$

特に断りのない限り, 随伴関手は省略するものとする.

## 5 計算練習

例 5.1 (Q21-25, Q21-26, Q21-27).

互いに異なる 1 粒子状態  $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{single}$  を持つ Hilbert 空間において 2, 3 個の同一の Bose 粒子, Fermi 粒子の Hilbert 空間は次のようになる. 互いに異なる 3 つの 1 粒子状態  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle \in \mathcal{H}_{single}$  を

| Bose, Fermi | $\mathcal{H}_{single}$ の基底      | 全粒子数 $N$ | $\mathcal{H}_S^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)}$ の基底   |
|-------------|---------------------------------|----------|--|
| Bose        | $ \alpha\rangle$                | 1        | $ \alpha\rangle$   |
| Bose        | $ \alpha\rangle,  \beta\rangle$ | 1        | $ \alpha\rangle,  \beta\rangle$  |
| Bose        | $ \alpha\rangle$                | 2        | $ \alpha\rangle \alpha\rangle$   |
| Bose        | $ \alpha\rangle,  \beta\rangle$ | 2        | $ \alpha\rangle \alpha\rangle,  \beta\rangle \beta\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}( \alpha\rangle \beta\rangle +  \beta\rangle \alpha\rangle)$                |
| Bose        | $ \alpha\rangle$                | 3        | $ \alpha\rangle \alpha\rangle \alpha\rangle$   |
|             |                                 |          | $ \alpha\rangle \alpha\rangle \alpha\rangle,  \beta\rangle \beta\rangle \beta\rangle,$   |
| Bose        | $ \alpha\rangle,  \beta\rangle$ | 3        | $\frac{1}{\sqrt{3}}( \alpha\rangle \alpha\rangle \beta\rangle +  \alpha\rangle \beta\rangle \alpha\rangle +  \beta\rangle \alpha\rangle \alpha\rangle),$ |
|             |                                 |          | $\frac{1}{\sqrt{3}}( \alpha\rangle \beta\rangle \beta\rangle +  \beta\rangle \alpha\rangle \beta\rangle +  \beta\rangle \beta\rangle \alpha\rangle)$     |
| Fermi       | $ \alpha\rangle$                | 1        | なし   |
| Fermi       | $ \alpha\rangle,  \beta\rangle$ | 1        | なし   |
| Fermi       | $ \alpha\rangle$                | 2        | なし   |
| Fermi       | $ \alpha\rangle,  \beta\rangle$ | 2        | $\frac{1}{\sqrt{2}}( \alpha\rangle \beta\rangle -  \beta\rangle \alpha\rangle)$  |
| Fermi       | $ \alpha\rangle$                | 3        | なし   |
| Fermi       | $ \alpha\rangle,  \beta\rangle$ | 3        | なし   |

表 2 Bose, Fermi 粒子系の基底

持つ場合においてそれぞれ 1 つずつある全系の状態は次のようになる.

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle|\gamma\rangle + |\gamma\rangle|\alpha\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\gamma\rangle|\alpha\rangle + |\gamma\rangle|\beta\rangle|\alpha\rangle + |\alpha\rangle|\gamma\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\alpha\rangle|\gamma\rangle) \in \mathcal{H}_S^{(3)} \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|\alpha\rangle|\beta\rangle|\gamma\rangle + |\gamma\rangle|\alpha\rangle|\beta\rangle + |\beta\rangle|\gamma\rangle|\alpha\rangle - |\gamma\rangle|\beta\rangle|\alpha\rangle - |\alpha\rangle|\gamma\rangle|\beta\rangle - |\beta\rangle|\alpha\rangle|\gamma\rangle) \in \mathcal{H}_A^{(3)} \quad (5.2)$$

◇

## 6 Bose, Fermi 粒子系の量子状態の粒子数表示

**定義 6.1** (Bose, Fermi 粒子系の量子状態の粒子数表示).

Bose, Fermi 粒子系の粒子状態は粒子数  $n_i$  を用いて次のように表現できる.

$$|(n_i)_{i \in I}\rangle_S = |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle_S = |\underbrace{\phi_1 \phi_1 \cdots \phi_1}_{n_1} \underbrace{\phi_2 \phi_2 \cdots \phi_2}_{n_2} \cdots \underbrace{\phi_i \phi_i \cdots \phi_i}_{n_i} \cdots\rangle_S \quad (6.1)$$

$$|(n_i)_{i \in I}\rangle_A = |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle_A = |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A. \quad (6.2)$$

これを粒子数表示または占有数表示という.

粒子状態  $|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S, |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A$  の粒子数をそれぞれ  $n_i^{(s)}, n_i^{(a)}$  とおくと次のような性質を満たす.

$$n_i^{(s)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \sum_{i \in I} n_i^{(s)} = N \quad (6.3)$$

$$n_i^{(a)} \in \{0, 1\}, \quad \sum_{i \in I} n_i^{(a)} = N. \quad (6.4)$$

**命題 6.2.**

Bose, Fermi 粒子系の粒子数表示は well-defined である.

◇

**証明**

Bose, Fermi 粒子系の完全正規直交系は次のようにラベル付けされていた.

$$|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \quad (i_1, \dots, i_N \in I, i_1 \leq \cdots \leq i_N) \quad (6.5)$$

$$|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \quad (i_1, \dots, i_N \in I, i_1 < \cdots < i_N). \quad (6.6)$$

これらの完全正規直交系はどちらも昇順にソートされているのである粒子数表示に対して完全正規直交系は一意に存在する.

$$|(n_i)_{i \in I}\rangle_S \quad \left( n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i \in I} n_i = N \right) \quad (6.7)$$

$$|(n_i)_{i \in I}\rangle_A \quad \left( n_i \in \{0, 1\}, \sum_{i \in I} n_i = N \right) \quad (6.8)$$

逆に完全正規直交系に対して条件を満たすような粒子数表示は一意に存在する. よって同値な表現であることがわかる. □

**定理 6.3.**

Bose, Fermi 粒子系の粒子数表示  $\{|(n_i)_{i \in I}\rangle_S \mid n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \{|(n_i)_{i \in I}\rangle_A \mid n_i \in \{0, 1\}\}$  は完全正規直交系となる.  $\diamond$

**証明**

まず全粒子数  $N$  の Hilbert 空間  $\mathcal{H}_S^{(N)}, \mathcal{H}_A^{(N)}$  の粒子数表示について命題 6.2 より粒子数表示と完全正規直交系が対応する. よって命題 3.14, 命題 3.16 より粒子数表示は完全正規直交系となる. これより次の式が成り立つ.

$$\langle (n_i)_{i \in I} | (n'_i)_{i \in I} \rangle_S = \prod_{i \in I} \delta_{n_i n'_i} \quad (6.9)$$

$$\langle (n_i)_{i \in I} | (n'_i)_{i \in I} \rangle_A = \prod_{i \in I} \delta_{n_i n'_i} \quad (6.10)$$

$$\mathcal{H}_S^{(N)} = \text{span} \left\{ |(n_i)_{i \in I}\rangle_S \mid n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i \in I} n_i = N \right\} \quad (6.11)$$

$$\mathcal{H}_A^{(N)} = \text{span} \left\{ |(n_i)_{i \in I}\rangle_A \mid n_i \in \{0, 1\}, \sum_{i \in I} n_i = N \right\} \quad (6.12)$$

$$\sum_{n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_i n_i = N} |(n_i)_{i \in I}\rangle_S \langle (n_i)_{i \in I}|_S = \hat{1}_{\mathcal{H}_S^{(N)}} \quad (6.13)$$

$$\sum_{n_i \in \{0, 1\}, \sum_i n_i = N} |(n_i)_{i \in I}\rangle_A \langle (n_i)_{i \in I}|_A = \hat{1}_{\mathcal{H}_A^{(N)}} \quad (6.14)$$

次に全粒子数を固定しない Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{Bose}, \mathcal{H}_{Fermi}$  について考える. まず正規直交関係について Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{Bose}, \mathcal{H}_{Fermi}$  の定義より異なる全粒子数の状態は直交するから次のように計算できる.

$$\langle (n_i)_{i \in I} | (n'_i)_{i \in I} \rangle_S = \delta_{NN'} \prod_{i \in I} \delta_{n_i n'_i} = \prod_{i \in I} \delta_{n_i n'_i} \quad (6.15)$$

$$\langle (n_i)_{i \in I} | (n'_i)_{i \in I} \rangle_A = \delta_{NN'} \prod_{i \in I} \delta_{n_i n'_i} = \prod_{i \in I} \delta_{n_i n'_i} \quad (6.16)$$

次に空間全体を張ることは定義より自明.

$$\text{span}\{|(n_i)_{i \in I}\rangle_S \mid n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_S^{(N)} = \mathcal{H}_{Bose} \quad (6.17)$$

$$\text{span}\{|(n_i)_{i \in I}\rangle_A \mid n_i \in \{0, 1\}\} = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_A^{(N)} = \mathcal{H}_{Fermi} \quad (6.18)$$

最後に完備性については次のように計算できる.

$$\sum_{n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |(n_i)_{i \in I}\rangle_S \langle (n_i)_{i \in I}|_S = \sum_{N=0}^{\infty} \hat{1}_{\mathcal{H}_S^{(N)}} = \hat{1}_{\mathcal{H}_{Bose}} \quad (6.19)$$

$$\sum_{n_i \in \{0, 1\}} |(n_i)_{i \in I}\rangle_A \langle (n_i)_{i \in I}|_A = \sum_{N=0}^{\infty} \hat{1}_{\mathcal{H}_A^{(N)}} = \hat{1}_{\mathcal{H}_{Fermi}} \quad (6.20)$$

$\square$

## 7 Bose 粒子系の消滅演算子 $\hat{a}_i$ と生成演算子 $\hat{a}_i^\dagger$

### 定義 7.1.

Bose 粒子系の消滅演算子  $\hat{a}_i$  と生成演算子  $\hat{a}_i^\dagger$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} \hat{a}_i \frac{1}{\sqrt{N!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_{\substack{\mu \in X \\ i_\mu = i}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_{\mu-1}}\rangle \quad |\phi_{i_{\mu+1}}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \\ \hat{a}_i^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \text{per} [|\phi_i\rangle \quad |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \end{cases} \quad (7.1)$$

その上で個数演算子  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  と全粒子数演算子  $\hat{N} = \sum_{i \in I} \hat{n}_i$  と定義する.

### 定理 7.2 (Q21-35).

Bose 粒子系の消滅, 生成演算子の定義と次は同値である.

$$\begin{cases} \hat{a}_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = \sqrt{n_i} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_{\mu-1}} \phi_{i_{\mu+1}} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \\ \hat{a}_i^\dagger |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = \sqrt{n_i + 1} |\phi_{i_1} \cdots \phi_i \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \end{cases} \quad (7.2)$$

◇

### 証明

Bose 粒子系の粒子数表示は次のように展開できる.

$$|\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_N}\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_{j \in I} n_j!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \quad (7.3)$$

また permutation は置換に対して不変であるので定義と次は同値である.

$$\begin{cases} \hat{a}_i \frac{1}{\sqrt{N!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{n_i}{\sqrt{(N-1)!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_{\mu-1}}\rangle \quad |\phi_{i_{\mu+1}}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \\ \hat{a}_i^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_i\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{a}_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = \frac{n_i}{\sqrt{(N-1)! \prod_{j \in I} n_j!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_{\mu-1}}\rangle \quad |\phi_{i_{\mu+1}}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \\ \hat{a}_i^\dagger |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{(N+1)! \prod_{j \in I} n_j!}} \text{per} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_i\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{a}_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = \sqrt{n_i} |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_{\mu-1}} \phi_{i_{\mu+1}} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \\ \hat{a}_i^\dagger |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_S = \sqrt{n_i + 1} |\phi_{i_1} \cdots \phi_i \cdots \phi_{i_N}\rangle_S \end{cases} \quad (7.6)$$

よって  $\mathcal{H}_S^{(N)}$  の完全正規直交系で表現できる. □

### 定理 7.3 (Q21-36).

Bose 粒子系の消滅, 生成演算子の定義と次は同値である.

$$\begin{cases} \hat{a}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |\dots, n_i - 1, \dots\rangle \\ \hat{a}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle \end{cases} \quad (7.7)$$

◇

## 証明

定理 7.2 を吟味することで消滅演算子によって添字  $i$  の 1 粒子状態を消滅させ, 生成演算子によって添字  $i$  の 1 粒子状態を生成していることがわかる. よって粒子数表示に直すことで定義と同値となる.

□

命題 7.4 (Q21-37(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)(vii)).

Bose 粒子系における消滅, 生成演算子の交換関係は次のようになる.

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (7.8)$$

◇

## 証明

消滅演算子  $\hat{a}_i$ , 生成演算子  $\hat{a}_i^\dagger$  を状態  $|\dots, n_i, \dots\rangle \in \mathcal{H}_{Bose}$  に適用すると

$$\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} \hat{a}_i |\dots, n_i + 1, \dots\rangle = (n_i + 1) |\dots, n_i, \dots\rangle \quad (7.9)$$

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} \hat{a}_i^\dagger |\dots, n_i - 1, \dots\rangle = n_i |\dots, n_i, \dots\rangle \quad (7.10)$$

よりそれぞれの交換関係は次のようになる.

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = (n_i + 1) - n_i = 1 \quad (7.11)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i^\dagger] = 0 \quad (7.12)$$

異なる添字  $i, j$  についても状態  $|\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \in \mathcal{H}_{Bose}$  に適用すると

$$\hat{a}_i \hat{a}_j |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_i n_j} |\dots, n_i - 1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle \quad (7.13)$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_i (n_j + 1)} |\dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle \quad (7.14)$$

$$\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_i (n_j + 1)} |\dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle \quad (7.15)$$

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{(n_i + 1)(n_j + 1)} |\dots, n_i + 1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle \quad (7.16)$$

よりそれぞれの交換関係は次のようになる.

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (7.17)$$

よって示された.

□

命題 7.5 (Q21-38(i)(ii)).

Bose 粒子系における消滅, 生成演算子は互いに Hermite 共役である.

◇

## 証明



次の計算により  $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$  は互いに Hermite 共役であることがわかる.

$$\langle n_1, \dots, n_i, \dots | \hat{a}_i | n'_1, \dots, n'_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i + 1} \langle n_1, \dots, n_i + 1, \dots | n'_1, \dots, n'_i, \dots \rangle \quad (7.18)$$

$$= \delta_{n_1 n'_1} \cdots \sqrt{n_i + 1} \delta_{n_i + 1, n'_i} \cdots \quad (7.19)$$

$$= \delta_{n_1 n'_1} \cdots \sqrt{n'_i} \delta_{n_i, n'_i - 1} \cdots \quad (7.20)$$

$$= \sqrt{n'_i} \langle n_1, \dots, n_i, \dots | n'_1, \dots, n'_i - 1, \dots \rangle \quad (7.21)$$

$$= \langle n_1, \dots, n_i, \dots | (\hat{a}_i | n'_1, \dots, n'_i, \dots \rangle) \quad (7.22)$$

□

**命題 7.6** (Q21-39(i)(ii)(iii)(iv)).

個数演算子  $\hat{n}_i$  と全粒子数演算子  $\hat{N}$  は Hermite 演算子であり, 固有値は  $\hat{n}_i = n_i, \hat{N} = N$  となる. ◇

**証明**

個数演算子  $\hat{n}_i$ , 全粒子数演算子  $\hat{N}$  はそれぞれ生成消滅演算子, 個数演算子に展開でき, Hermite 演算子であることがわかる.

$$\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad \hat{n}_i^\dagger = (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i)^\dagger = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = \hat{n}_i \quad (7.23)$$

$$\hat{N} = \sum_{i \in I} \hat{n}_i \quad \hat{N}^\dagger = \sum_{i \in I} \hat{n}_i^\dagger = \sum_{i \in I} \hat{n}_i = \hat{N} \quad (7.24)$$

そして固有値は次のように計算できる.

$$\hat{n}_i | \dots, n_i, \dots \rangle = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \dots, n_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i} \hat{a}_i^\dagger | \dots, n_i - 1, \dots \rangle = n_i | \dots, n_i, \dots \rangle \quad (7.25)$$

$$\hat{N} | (n_i)_{i \in I} \rangle = \sum_{j \in I} \hat{n}_j | (n_i)_{i \in I} \rangle = \sum_{j \in I} n_j | (n_i)_{i \in I} \rangle = N | (n_i)_{i \in I} \rangle \quad (7.26)$$

□

**定義 7.7.**

真空状態  $|\text{vac}\rangle$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} \hat{a}_i |\text{vac}\rangle = 0 & (\forall i \in I) \\ \langle \text{vac} | \text{vac} \rangle = 1 \end{cases} \quad (7.27)$$

**命題 7.8** (Q21-40(i)).

真空状態  $|\text{vac}\rangle$  は粒子が 1 個も存在しない状態  $|0, \dots, 0, \dots\rangle$  と同じである. ◇

**証明**

任意の個数演算子で係数が 0 となることから分かる.

$$\hat{n}_i |\text{vac}\rangle = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |\text{vac}\rangle = 0 \quad (7.28)$$

□

命題 7.9 (Q21-40(ii)).

任意の完全正規直交系の元は真空状態を用いて表現できる.

$$|(n_i)_{i \in I}\rangle = \prod_{i \in I} \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |\text{vac}\rangle \quad (7.29)$$

◇

証明

命題 7.8 より次のように変形できる.

$$\prod_{i \in I} \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |\text{vac}\rangle = \prod_{i \in I} \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (7.30)$$

$$= \prod_{i \in I} \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \sqrt{n_i!} |0, \dots, n_i, \dots\rangle \quad (7.31)$$

$$= |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle \quad (7.32)$$

□

定理 7.10 (Q21-41(i)).

Bose 粒子系における消滅演算子  $\hat{a}_i$  と生成演算子  $\hat{a}_i^\dagger$  において次の性質は定義と同値である.

$$(\hat{a}_i)^\dagger = \hat{a}_i^\dagger, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad \hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = n_i \quad (7.33)$$

◇

証明

既に定義から性質を導くことはしているので性質から定義を導く.

$$\hat{n}_i \hat{a}_i = (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i) \hat{a}_i = (\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger - 1) \hat{a}_i = (n_i - 1) \hat{a}_i \quad (7.34)$$

$$\hat{n}_i \hat{a}_i^\dagger = \hat{a}_i^\dagger (\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger) = \hat{a}_i^\dagger (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + 1) = (n_i + 1) \hat{a}_i^\dagger \quad (7.35)$$

$$\hat{n}_j \hat{a}_i = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_i = \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j = n_j \hat{a}_i \quad (i \neq j) \quad (7.36)$$

$$\hat{n}_j \hat{a}_i^\dagger = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j = n_j \hat{a}_i^\dagger \quad (i \neq j) \quad (7.37)$$

より  $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$  を適用すると状態の粒子数  $n_i$  が 1 だけ上下する. また  $(\hat{a}_i)^\dagger = \hat{a}_i^\dagger$  より

$$\langle \dots, n_i - 1, \dots | \hat{a}_i | \dots, n_i, \dots \rangle = \langle \dots, n_i, \dots | \hat{a}_i^\dagger | \dots, n_i - 1, \dots \rangle \quad (7.38)$$

$$n_i = \langle \dots, n_i, \dots | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \dots, n_i, \dots \rangle \quad (7.39)$$

であるから次のようになる.

$$\hat{a}_i | \dots, n_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i} | \dots, n_i - 1, \dots \rangle \quad (7.40)$$

$$\hat{a}_i^\dagger | \dots, n_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i + 1} | \dots, n_i + 1, \dots \rangle \quad (7.41)$$

これらの式から定理 7.2 より定義を導ける.

□

## 8 Fermi 粒子系の消滅演算子 $\hat{c}_i$ と生成演算子 $\hat{c}_i^\dagger$

### 定義 8.1.

Fermi 粒子系の消滅演算子  $\hat{c}_i$  と生成演算子  $\hat{c}_i^\dagger$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} \hat{c}_i \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{Z}_N \\ i_\mu = i}} (-1)^\mu \det [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_{\mu-1}}\rangle \quad |\phi_{i_{\mu+1}}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \\ \hat{c}_i^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det [|\phi_i\rangle \quad |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \end{cases} \quad (8.1)$$

その上で個数演算子  $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$  と全粒子数演算子  $\hat{N} = \sum_{i \in I} \hat{n}_i$  と定義する.

### 定理 8.2 (Q21-50).

Fermi 粒子系の消滅, 生成演算子  $\hat{c}_i, \hat{c}_i^\dagger$  の定義は次の式と同値である.

$$\begin{cases} \hat{c}_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = (-1)^\mu n_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_{\mu-1}} \phi_{i_{\mu+1}} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = (-1)^\mu |\phi_{i_1} \cdots \phi_i \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \end{cases} \quad (8.2)$$

◇

### 証明

Fermi 粒子系の消滅, 生成演算子の定義は  $|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A$  の粒子数  $n_i$  を用いて次のようになる.

$$\hat{c}_i \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{(-1)^\mu n_i}{\sqrt{(N-1)!}} \det [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_{\mu-1}}\rangle \quad |\phi_{i_{\mu+1}}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \quad (8.3)$$

$$\hat{c}_i^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det [|\phi_i\rangle \quad |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \quad (8.4)$$

$$= \frac{(-1)^\mu}{\sqrt{(N+1)!}} \det [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_i\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \quad (8.5)$$

Fermi 粒子系の状態は次のように展開できる.

$$|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det [|\phi_{i_1}\rangle \quad \cdots \quad |\phi_{i_N}\rangle] \quad (8.6)$$

これより定義と次の式は同値である.

$$\begin{cases} \hat{c}_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = (-1)^\mu n_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_{\mu-1}} \phi_{i_{\mu+1}} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = (-1)^\mu |\phi_{i_1} \cdots \phi_i \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \end{cases} \quad (8.7)$$

□

### 定理 8.3 (Q21-51).

Fermi 粒子系の消滅, 生成演算子  $\hat{c}_i, \hat{c}_i^\dagger$  の定義は次と同値である.

$$\begin{cases} \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} n_i |\dots, 1 - n_i, \dots\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} (1 - n_i) |\dots, 1 - n_i, \dots\rangle_A \end{cases} \quad (8.8)$$

◇

## 証明

Fermi 粒子系の粒子数表示は次のように展開できる.

$$|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle_A = |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \quad (8.9)$$

これに加え, 粒子数が 2 以上だと零状態となることから次のように変形できる.

$$\begin{cases} \hat{c}_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = (-1)^\mu n_i |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_{\mu-1}} \phi_{i_{\mu+1}} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle_A = (-1)^\mu |\phi_{i_1} \cdots \phi_i \cdots \phi_{i_N}\rangle_A \end{cases} \quad (8.10)$$

$$\iff \begin{cases} \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} n_i |\dots, n_i - 1, \dots\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle_A \end{cases} \quad (8.11)$$

$$\iff \begin{cases} \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} n_i |\dots, 1 - n_i, \dots\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} (1 - n_i) |\dots, 1 - n_i, \dots\rangle_A \end{cases} \quad (8.12)$$

$$\iff \begin{cases} \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} n_i |\dots, 0, \dots\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} (1 - n_i) |\dots, 1, \dots\rangle_A \end{cases} \quad (8.13)$$

よって定義と同値である. □

**定理 8.4** (Q21-52(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)(vii)(viii)(ix)(x)(xi)(xii)(xiii)(xiv)(xv)(xvi)(xvii)(xviii)(xix)(xx)).

Fermi 粒子系における消滅演算子  $\hat{c}_i$  と生成演算子  $\hat{c}_i^\dagger$  の反交換関係は次のようになる.

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0 \quad (8.14)$$

◇

## 証明

消滅演算子  $\hat{c}_i$ , 生成演算子  $\hat{c}_i^\dagger$  は次のように表現できた.

$$\begin{cases} \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} n_i |\dots, 0, \dots\rangle_A \\ \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} (1 - n_i) |\dots, 1, \dots\rangle_A \end{cases} \quad (8.15)$$

消滅演算子  $\hat{c}_i$ , 生成演算子  $\hat{c}_i^\dagger$  を状態  $|\dots, n_i, \dots\rangle_A \in \mathcal{H}_{Fermi}$  に適用すると

$$\hat{c}_i \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (1 - n_i) |\dots, 0, \dots\rangle_A \quad (8.16)$$

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = n_i |\dots, 1, \dots\rangle_A \quad (8.17)$$

$$\hat{c}_i \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = 0 \quad (8.18)$$

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle_A = 0 \quad (8.19)$$

よりそれぞれの反交換関係は次のようになる.

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_i^\dagger\} = 1, \quad \{\hat{c}_i, \hat{c}_i\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_i^\dagger\} = 0 \quad (8.20)$$

次に異なる添字  $i, j$  が  $i < j$  の順となっているとき状態  $|\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \in \mathcal{H}_{Bose}$  に適用すると次のようになる。

$$\hat{c}_i \hat{c}_j^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{k=i}^{j-1} n_k} n_i (1 - n_j) |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.21)$$

$$\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{1 + \sum_{k=i}^{j-1} n_k} n_i (1 - n_j) |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.22)$$

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{k=i}^{j-1} n_k} (1 - n_i) n_j |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.23)$$

$$\hat{c}_j \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{1 + \sum_{k=i}^{j-1} n_k} (1 - n_i) n_j |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.24)$$

$$\hat{c}_i \hat{c}_j |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{k=i}^{j-1} n_k} n_i n_j |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.25)$$

$$\hat{c}_j \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{1 + \sum_{k=i}^{j-1} n_k} n_i n_j |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.26)$$

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{\sum_{k=i}^{j-1} n_k} (1 - n_i) (1 - n_j) |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.27)$$

$$\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle_A = (-1)^{1 + \sum_{k=i}^{j-1} n_k} (1 - n_i) (1 - n_j) |\dots, 1 - n_i, \dots, 1 - n_j, \dots\rangle_A \quad (8.28)$$

これより  $\{A, B\} = \{B, A\}$  も用いてそれぞれの反交換関係は次のようになる。

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} = \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0 \quad (i \neq j) \quad (8.29)$$

よって示された。  $\square$

**命題 8.5** (Q21-53(i)(ii)).

Fermi 粒子系における消滅演算子  $\hat{c}_i$  と生成演算子  $\hat{c}_i^\dagger$  は互いに Hermite 共役である。  $\diamond$

**証明**

次のように計算することで Hermite 共役であることがわかる。

$$\langle n_1, \dots, n_i, \dots |_A (\hat{c}_i | n'_1, \dots, n'_i, \dots \rangle_A) = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n'_j} n'_i \langle n_1, \dots, n_i, \dots | n'_1, \dots, 1 - n'_i, \dots \rangle_A \quad (8.30)$$

$$= (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n'_j} n'_i \delta_{n_1 n'_1} \cdots \delta_{n_i, 1 - n'_i} \cdots \quad (8.31)$$

$$= (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n'_j} (1 - n_i) \delta_{n_1 n'_1} \cdots \delta_{1 - n_i, n'_i} \cdots \quad (8.32)$$

$$= (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n'_j} (1 - n_i) \langle n_1, \dots, 1 - n_i, \dots | n'_1, \dots, n'_i, \dots \rangle_A \quad (8.33)$$

$$= \langle n_1, \dots, n_i, \dots |_A \hat{c}_i | n'_1, \dots, n'_i, \dots \rangle_A \quad (8.34)$$

$\square$

**命題 8.6** (Q21-54(i)(ii)(iii)(iv)).

個数演算子  $\hat{n}_i$  と全粒子数演算子  $\hat{N}$  は Hermite 演算子であり、それぞれの固有値はそれぞれ  $n_i, N$  となる。  $\diamond$

**証明**

Fermi 系の個数演算子  $\hat{n}_i$  と全粒子数演算子  $\hat{N}$  は次のように展開でき、Hermite 演算子であることがわかる。

$$\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i \quad \hat{n}_i^\dagger = (\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i)^\dagger = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i = \hat{n}_i \quad (8.35)$$

$$\hat{N} = \sum_{i \in I} \hat{n}_i \quad \hat{N}^\dagger = \sum_{i \in I} \hat{n}_i^\dagger = \sum_{i \in I} \hat{n}_i = \hat{N} \quad (8.36)$$

$$(8.37)$$

また完全正規直交系の粒子数表示  $|(n_i)_{i \in I}\rangle_A$  の固有値は次のようになる.

$$\hat{n}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = (-1)^{2 \sum_{j=1}^{i-1} n_j} n_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A = n_i |\dots, n_i, \dots\rangle_A \quad (8.38)$$

$$\hat{N} |(n_i)_{i \in I}\rangle_A = \sum_{i \in I} \hat{n}_i |(n_i)_{i \in I}\rangle_A = \sum_{i \in I} n_i |(n_i)_{i \in I}\rangle_A = N |(n_i)_{i \in I}\rangle_A \quad (8.39)$$

□

#### 定義 8.7.

真空状態  $|\text{vac}\rangle$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} \hat{c}_i |\text{vac}\rangle = 0 & (i \in I) \\ \langle \text{vac} | \text{vac} \rangle = 1 \end{cases} \quad (8.40)$$

#### 命題 8.8 (Q21-55(i)).

真空状態  $|\text{vac}\rangle$  は粒子が 1 つもない状態  $|0, \dots, 0, \dots\rangle$  と同じである.

◇

#### 証明

個数演算子  $\hat{n}_i$  を適用すると  $n_i = 0$  であり,  $|0, \dots, 0, \dots\rangle$  であることがわかる.

$$\hat{n}_i |\text{vac}\rangle = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i |\text{vac}\rangle = 0 \quad (8.41)$$

□

#### 定理 8.9 (Q21-55(ii)).

任意の完全正規直交系の元は真空状態を用いて表現できる.

$$|(n_i)_{i \in I}\rangle = \hat{c}_{i_1}^\dagger \cdots \hat{c}_{i_N}^\dagger |\text{vac}\rangle \quad (i_1 < \cdots < i_N) \quad (8.42)$$

◇

#### 証明

適用する順番が大きい順である為, それ以前の粒子数は必ず 0 となる. これより次のように計算できる.

$$\hat{c}_{i_1}^\dagger \cdots \hat{c}_{i_N}^\dagger |\text{vac}\rangle = \hat{c}_{i_1}^\dagger \cdots \hat{c}_{i_N}^\dagger |0, \dots, 0, \dots\rangle = |(n_i)_{i \in I}\rangle \quad (8.43)$$

□

## 9 Bose, Fermi 粒子系の消滅演算子 $\hat{b}_i$ と生成演算子 $\hat{b}_i^\dagger$

**定義 9.1** (Bose, Fermi 粒子系の統一).

まず Bose 粒子系と Fermi 粒子系を統一した系の Hilbert 空間を  $\mathcal{H}_{\text{M.P.}}$  と定義する.

$$\mathcal{H}_{\text{M.P.}} := \begin{cases} \mathcal{H}_{\text{Bose}} & (\text{Bose}) \\ \mathcal{H}_{\text{Fermi}} & (\text{Fermi}) \end{cases} \quad (9.1)$$

更に消滅演算子や行列式, 交換関係の統一的な表記を次のように定義する.

$$\hat{b}_i = \begin{cases} \hat{a}_i & (\text{Bose}) \\ \hat{c}_i & (\text{Fermi}) \end{cases}, \quad \det^{(\pm)} = \begin{cases} \text{per} & (+) \\ \det & (-) \end{cases}, \quad [\hat{A}, \hat{B}]_{\mp} = \begin{cases} [\hat{A}, \hat{B}] & (-) \\ \{\hat{A}, \hat{B}\} & (+) \end{cases} \quad (9.2)$$

その上で個数演算子  $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$  と全粒子数演算子  $\hat{N} = \sum_{i \in I} \hat{n}_i$  を定義する.

今までの Bose, Fermi 粒子系の定義, 定理を統一的に表記する.

まず生成演算子, 消滅演算子の定義は次のように書ける.

$$\begin{cases} \hat{b}_i \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_{\substack{\mu \in X \\ i_\mu = i}} (\pm 1)^\mu \det^{(\pm)} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_{\mu-1}}\rangle \quad |\phi_{i_{\mu+1}}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \\ \hat{b}_i^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det^{(\pm)} [|\phi_i\rangle \quad |\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \end{cases} \quad (9.3)$$

そしてその交換関係・反交換関係は次のようになる.

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger]_{\mp} = \delta_{ij}, \quad [\hat{b}_i, \hat{b}_j]_{\mp} = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger]_{\mp} = 0 \quad (9.4)$$

真空状態  $|\text{vac}\rangle$  をこのように定義する.

$$\begin{cases} \hat{b}_i |\text{vac}\rangle = 0 & (i \in I) \\ \langle \text{vac} | \text{vac} \rangle = 1 \end{cases} \quad (9.5)$$

$$|(n_i)_{i \in I}\rangle = \prod_{i \in I} \frac{(\hat{b}_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |\text{vac}\rangle \quad (9.6)$$

$$\det^{(\pm)} [|\phi_{i_{\sigma(1)}}\rangle \cdots |\phi_{i_{\sigma(N)}}\rangle] = (\pm 1)^\sigma \det^{(\pm)} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \quad (9.7)$$

$$|\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} [|\phi_{i_1}\rangle \cdots |\phi_{i_N}\rangle] \quad (9.8)$$

## 10 演算子の粒子数表示: 1 粒子演算子とその和、2 粒子演算子とその和の導入

現実の粒子系における観測量はある 1 つの相互作用に関して関与する粒子数は 1 個か 2 個しかない. これを 1 粒子演算子, 2 粒子演算子と呼ぶ.

**定義 10.1** ( $n$  粒子演算子).

Hilbert 空間  $\mathcal{H}^{(n)}$  において粒子交換に関して対称な演算子を  $n$  粒子演算子と呼ぶ. このとき  $n$  粒子演算子  $\hat{f}$  を Hilbert 空間  $\mathcal{H}^{(N)}$  の粒子  $\mu_1, \dots, \mu_n$  に対して埋め込んだ演算子を  $\hat{f}_{\mu_1 \dots \mu_n}$  と書く. そして  $n$  粒子演算子の粒子対に関する和  $\hat{f}^{\text{tot}}$  を次のように定義する.

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_1 < \dots < \mu_n}} \hat{f}_{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (10.1)$$

特に量子力学では今のところ 3 粒子以上が相互に作用することはない為に 1 粒子演算子と 2 粒子演算子のみが扱われる. そして  $\mathcal{H}^{(N)}$  において明らかに状態が  $\{|\phi_i\rangle\}_{i \in I}$  を用いて表現されているならば添字を用いて表示すると定義する.

$$|i_1 \dots i_N\rangle = |\phi_{i_1}\rangle \dots |\phi_{i_N}\rangle \quad (10.2)$$

**例 10.2.**

例えば Hamiltonian 演算子  $\hat{H}$  は 1 粒子演算子の粒子に関する和  $\hat{h}^{\text{tot}}$  と 2 粒子演算子の粒子対に関する和  $\hat{v}^{\text{tot}}$  で表現できる. 外部から磁場  $B$  をかけた多電子原子を考える. 原子番号  $Z$  の多電子原子を考えることにします. 原点に電荷  $+Ze$  を持ち無限に重い原子核が位置しているとします. その回りに、 $N$  個のそれぞれが電荷  $-e$  と質量  $m_e$  を持つ電子が運動しているとします. この原子が中性原子の状態にあるならば  $N = Z$  であり、また、自然数  $n = 1, 2, \dots$  に関して  $n$  個の陽イオンの状態にあるならば  $N = Z - n$  であります. この  $N$  個の電子という同種粒子からなる物理系を記述する Hamiltonian 演算子  $\hat{H}$  は次のように与えられます.  $\hat{H} = \hat{h}^{\text{tot}} + \hat{v}^{\text{tot}}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \sum_{\mu=1}^N \hat{\mathbf{p}}_{\mu}^2 - Ze^2 \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{|\hat{\mathbf{r}}_{\mu}|} + e^2 \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq N} \frac{1}{|\hat{\mathbf{r}}_{\mu} - \hat{\mathbf{r}}_{\nu}|} + \frac{e}{2m_e c} (\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8m_e c^2} \sum_{\mu=1}^N (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}_{\mu})^2 \quad (10.3)$$

$$\hat{h}_{\mu} = \frac{1}{2m_e} \hat{\mathbf{p}}_{\mu}^2 - \frac{Ze^2}{|\hat{\mathbf{r}}_{\mu}|} + \frac{e}{2m_e c} (\hat{\mathbf{l}}_{\mu} + 2\hat{\mathbf{s}}_{\mu}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8m_e c^2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}_{\mu})^2 \quad (10.4)$$

$$\hat{v}_{\mu\nu} = \frac{e^2}{|\hat{\mathbf{r}}_{\mu} - \hat{\mathbf{r}}_{\nu}|} \quad (10.5)$$

◇

## 11 $n$ 粒子演算子の和の粒子数表示

Bose, Fermi 粒子系や 1, 2 粒子演算子を分ける理由がよく分からなかったので 1 つにまとめました. これらの章の採点については難しければ 0 点でいいです. 2 粒子演算子において  $\alpha, \beta$  の定義がよろしくないです.

**定理 11.1.**



$n$  粒子演算子について次のような性質が認められる.

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \hat{P}(\sigma) \hat{f}^{\text{tot}} \hat{P}^\dagger(\sigma) \quad (11.1)$$

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_\nu \neq \mu_\xi}} \hat{f}_{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (11.2)$$

◇

### 証明

置換に関して対称な演算子であるから  $\mu_1, \dots, \mu_n$  番目の状態の置換に対して不変であり, その他の添字については置換しても両側で対応を取れているのでこちらも置換に対して不変である.

$$\langle i_1 \dots i_N | \hat{P}(\sigma) \hat{f}^{\text{tot}} \hat{P}^\dagger(\sigma) | j_1 \dots j_N \rangle = \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_1 < \dots < \mu_n}} \langle i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(N)} | \hat{f}_{\mu_1 \dots \mu_n} | j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(N)} \rangle \quad (11.3)$$

$$= \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_1 < \dots < \mu_n}} \langle i_1 \dots i_N | \hat{f}_{\mu_1 \dots \mu_n} | j_1 \dots j_N \rangle \quad (11.4)$$

$$= \langle i_1 \dots i_N | \hat{f}^{\text{tot}} | j_1 \dots j_N \rangle \quad (11.5)$$

また置換に対して対称であるから次のようにも変形できる.

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_1 < \dots < \mu_n}} \hat{f}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_n \neq \mu_{n'}}} \hat{f}_{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (11.6)$$

□

例 11.2 (Q21-58, Q21-59, Q21-60).

1 粒子演算子  $\hat{h}$ , 2 粒子演算子  $\hat{v}$  についても上の定理が成り立つ.

$$\hat{h} = \hat{P}(\sigma) \hat{h} \hat{P}^\dagger(\sigma) \quad (11.7)$$

$$\hat{v} = \hat{P}(\sigma) \hat{v} \hat{P}^\dagger(\sigma). \quad (11.8)$$

例えば 2 粒子演算子  $\hat{v}$  について交換演算子で置換すると

$$\langle ji | v | lk \rangle = \langle ji | \hat{E} \hat{v} \hat{E}^\dagger | lk \rangle = \langle ij | v | kl \rangle \quad (11.9)$$

となる.

◇

**定理 11.3** (Q21-61(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)(vii)(viii), Q21-62, Q21-63(i)(ii)(iii), Q21-64(i)(ii)(iii), Q21-65(i)(ii)(iii), Q21-66(i)(ii), Q21-67(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)(vii)(viii)(ix)(x)(xi)(xii)(xiii)(xiv)(xv)(xvi), Q21-68, Q21-69(i)(ii)(iii)(iv), Q21-70(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)(vii)(viii), Q21-71(i)(ii)(iii), Q21-72(i)(ii)(iii), Q21-73(i)(ii)(iii), Q21-74(i)(ii), Q21-75(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)(vii)(viii)(ix)(x)(xi)(xii)(xiii)(xiv)(xv)(xvi), Q21-76, Q21-77(i)(ii)(iii)(iv)).

Bose, Fermi 粒子系の Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{\text{M.P.}}$  において  $n$  粒子演算子  $\hat{f}$  の和  $\hat{f}^{\text{tot}}$  は消滅, 生成演算子  $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$  を用いて次のように表現できる.

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in I \\ k_1, \dots, k_n \in I}} \langle j_1 \dots j_n | f | k_1 \dots k_n \rangle \hat{b}_{j_1}^\dagger \dots \hat{b}_{j_n}^\dagger \hat{b}_{k_1} \dots \hat{b}_{k_n} \quad (11.10)$$

◇

証明

 $n$  粒子演算子を適用する

$$\hat{f}^{\text{tot}} \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} [ |i_1\rangle \cdots |i_N\rangle ] = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma \hat{f}^{\text{tot}} \hat{P}^\dagger(\sigma) |i_1 \cdots i_N\rangle \quad (11.11)$$

ここで完全性を用いて次のように単位演算子の分解ができる.

$$\sum_{j_1, \dots, j_n \in I} |j_1 \cdots j_n\rangle \langle j_1 \cdots j_n| = \hat{1} \quad (11.12)$$

これより  $\hat{f}^{\text{tot}} \hat{P}(\sigma)$  は次のように変形できる.

$$\hat{f}^{\text{tot}} \hat{P}(\sigma) |i_1 \cdots i_N\rangle \quad (11.13)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_\nu \neq \mu_\xi}} \hat{f}_{\mu_1 \cdots \mu_n} |i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(N)}\rangle \quad (11.14)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_\nu \neq \mu_\xi}} \sum_{j_1, \dots, j_n \in I} |j_1 \cdots j_n\rangle \langle j_1 \cdots j_n| \hat{f}_{\mu_1 \cdots \mu_n} |i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(N)}\rangle \quad (11.15)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_\nu \neq \mu_\xi}} \sum_{j_1, \dots, j_n \in I} |i_{\sigma(1)} \cdots j_1 \cdots j_n \cdots i_{\sigma(N)}\rangle \langle j_1 \cdots j_n | f | i_{\sigma(\mu_1)} \cdots i_{\sigma(\mu_n)}\rangle \quad (11.16)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in I \\ k_1, \dots, k_n \in I}} \langle j_1 \cdots j_n | f | k_1 \cdots k_n\rangle \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_\nu \neq \mu_\xi \\ i_{\sigma(\mu_\nu)} = k_\nu}} |i_{\sigma(1)} \cdots \underbrace{j_1}_{\mu_1} \cdots \underbrace{j_n}_{\mu_n} \cdots i_{\sigma(N)}\rangle \quad (11.17)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in I \\ k_1, \dots, k_n \in I}} \langle j_1 \cdots j_n | f | k_1 \cdots k_n\rangle \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_\nu \neq \mu_\xi \\ i_{\sigma(\mu_\nu)} = k_\nu}} \hat{P}(\sigma) |i_1 \cdots \underbrace{j_1}_{\sigma(\mu_1)} \cdots \underbrace{j_n}_{\sigma(\mu_n)} \cdots i_N\rangle \quad (11.18)$$

そして総和の変数を  $\mu_\nu \rightarrow \sigma^{-1}(\alpha_\nu)$  と書き換えて総和の順序を交換することで permutation に変形できる.

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \in X \\ \mu_\nu \neq \mu_\xi \\ i_{\sigma(\mu_\nu)} = k_\nu}} (\pm 1)^\sigma \hat{P}^\dagger(\sigma) |i_1 \cdots \underbrace{j_\nu}_{\sigma(\mu_\nu)} \cdots i_N\rangle \quad (11.19)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in X \\ \alpha_\nu \neq \alpha_\xi \\ i_{\alpha_\nu} = k_\nu}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma \hat{P}^\dagger(\sigma) |i_1 \cdots \underbrace{j_\nu}_{\alpha_\nu} \cdots i_N\rangle \quad (11.20)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in X \\ \alpha_1 < \cdots < \alpha_n \\ i_{\alpha_\nu} = k_\nu}} \det^{(\pm)} [ |i_1\rangle \cdots \underbrace{|j_\nu\rangle}_{\alpha_\nu} \cdots |i_N\rangle ] \quad (11.21)$$

次に消滅, 生成演算子  $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$  の定義を用いてそれぞれ後ろから, 前からの順番で適用していくことで次

のように変形できる.

$$\sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_n \\ i_{\alpha_\nu} = k_\nu}} \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} \left[ |i_1\rangle \dots |i_{\alpha_\nu-1}\rangle \quad |j_\nu\rangle \quad |i_{\alpha_\nu+1}\rangle \dots |i_N\rangle \right] \quad (11.22)$$

$$= \hat{b}_{k_n}^\dagger \dots \hat{b}_{k_1}^\dagger \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_n \\ i_{\alpha_\nu} = k_\nu}} \frac{(\pm 1)^{\sum_\nu \alpha_\nu}}{\sqrt{(N-n)!}} \det^{(\pm)} \left[ |i_1\rangle \dots |i_{\alpha_\nu-1}\rangle \quad |i_{\alpha_\nu+1}\rangle \dots |i_N\rangle \right] \quad (11.23)$$

$$= \hat{b}_{k_n}^\dagger \dots \hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_1} \dots \hat{b}_{k_n} \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} \left[ |i_1\rangle \dots |i_{\alpha_\nu-1}\rangle \quad |i_{\alpha_\nu}\rangle \quad |i_{\alpha_\nu+1}\rangle \dots |i_N\rangle \right] \quad (11.24)$$

結局, 次のように変形できることがわかる.

$$\hat{f}^{\text{tot}} \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} \left[ |i_1\rangle \dots |i_N\rangle \right] \quad (11.25)$$

$$= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in I \\ k_1, \dots, k_n \in I}} \langle j_1 \dots j_n | f | k_1 \dots k_n \rangle \hat{b}_{j_1}^\dagger \dots \hat{b}_{j_n}^\dagger \hat{b}_{k_1} \dots \hat{b}_{k_n} |\phi_{i_1} \dots \phi_{i_N}\rangle_S \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} \left[ |i_1\rangle \dots |i_N\rangle \right] \quad (11.26)$$

さらに全粒子数  $N$  の Hilbert 空間における  $n$  粒子演算子を一般の Bose 粒子系に埋め込むことで  $\mathcal{H}_{Bose}$  上では次のように表現できる.

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in I \\ k_1, \dots, k_n \in I}} \langle j_1 \dots j_n | f | k_1 \dots k_n \rangle \hat{b}_{j_1}^\dagger \dots \hat{b}_{j_n}^\dagger \hat{b}_{k_n} \dots \hat{b}_{k_1} \quad (11.27)$$

□

## 12 1 粒子状態の完全正規直交系の取り替え

定理 12.1 (Q21-79(i)(ii)(iii)).

2 つの完全正規直交系  $(|\phi_i\rangle)_{i \in I}, (|\phi'_i\rangle)_{i \in I'}$  に対してそれぞれの消滅, 生成演算子  $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger, \hat{b}'_i, \hat{b}'_i^\dagger$  は次のような関係式が成り立つ.

$$\hat{b}'_i = \sum_{j \in I} \langle \phi'_i | \phi_j \rangle \hat{b}_j \quad (12.1)$$

$$\hat{b}'_i{}^\dagger = \sum_{j \in I} \langle \phi_j | \phi'_i \rangle \hat{b}_j^\dagger \quad (12.2)$$

◇

証明

生成演算子の定義より次のように計算できる.

$$\hat{b}'_i{}^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} \left[ |\phi'_{i_1}\rangle \dots |\phi'_{i_N}\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det^{(\pm)} \left[ |\phi'_i\rangle \quad |\phi'_{i_1}\rangle \dots |\phi'_{i_N}\rangle \right] \quad (12.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det^{(\pm)} \left[ \sum_{j \in I} |\phi_j\rangle \langle \phi_j | \phi'_i \rangle \quad |\phi'_{i_1}\rangle \dots |\phi'_{i_N}\rangle \right] \quad (12.4)$$

$$= \sum_{j \in I} \langle \phi_j | \phi'_i \rangle \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det^{(\pm)} \left[ |\phi_j\rangle \quad |\phi'_{i_1}\rangle \dots |\phi'_{i_N}\rangle \right] \quad (12.5)$$

$$= \sum_{j \in I} \langle \phi_j | \phi'_i \rangle \hat{b}_j^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \det^{(\pm)} \left[ |\phi'_{i_1}\rangle \dots |\phi'_{i_N}\rangle \right] \quad (12.6)$$

これを Hermite 共役を取ると示される.

$$\hat{b}_i'^{\dagger} = \sum_{j \in I} \langle \phi_j | \phi_i' \rangle \hat{b}_j^{\dagger} \quad (12.7)$$

$$\hat{b}_i' = \sum_{j \in I} \langle \phi_i' | \phi_j \rangle \hat{b}_j \quad (12.8)$$

□

さらに完全正規直交系を入れ替えると次のような式が成り立つ. (Q21-79(iv))

$$\hat{b}_i = \sum_{j \in I} \langle \phi_i | \phi_j' \rangle \hat{b}_j' \quad (12.9)$$

$$\hat{b}_i^{\dagger} = \sum_{j \in I} \langle \phi_j' | \phi_i \rangle \hat{b}_j'^{\dagger} \quad (12.10)$$

**命題 12.2** (Q21-80).

ある完全正規直交系の生成消滅演算子について交換・反交換関係が成り立つことは他の完全正規直交系でも成り立つことと同値である. ◇

**証明**

$\hat{b}_i', \hat{b}_i'^{\dagger}$  について交換・反交換関係が成り立つとき  $\hat{b}_i, \hat{b}_i^{\dagger}$  についても成り立つことを示す.

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j]_{\mp} = \left[ \sum_{k \in I} \langle \phi_i | \phi_k' \rangle \hat{b}_k', \sum_{l \in I} \langle \phi_l' | \phi_j \rangle \hat{b}_l^{\dagger} \right]_{\mp} = \sum_{k \in I} \sum_{l \in I} \langle \phi_i | \phi_k' \rangle \langle \phi_l' | \phi_j \rangle [\hat{b}_k', \hat{b}_l^{\dagger}]_{\mp} \quad (12.11)$$

$$= \sum_{k \in I} \sum_{l \in I} \langle \phi_i | \phi_k' \rangle \langle \phi_l' | \phi_j \rangle \delta_{kl} = \sum_{k \in I} \langle \phi_i | \phi_k' \rangle \langle \phi_k' | \phi_j \rangle = \langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (12.12)$$

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j]_{\mp} = \left[ \sum_{k \in I} \langle \phi_i | \phi_k' \rangle \hat{b}_k', \sum_{l \in I} \langle \phi_j | \phi_l' \rangle \hat{b}_l' \right]_{\mp} = \sum_{k \in I} \sum_{l \in I} \langle \phi_i | \phi_k' \rangle \langle \phi_j | \phi_l' \rangle [\hat{b}_k', \hat{b}_l']_{\mp} = 0 \quad (12.13)$$

$$[\hat{b}_i^{\dagger}, \hat{b}_j^{\dagger}]_{\mp} = \left[ \sum_{k \in I} \langle \phi_k' | \phi_i \rangle \hat{b}_k'^{\dagger}, \sum_{l \in I} \langle \phi_l' | \phi_j \rangle \hat{b}_l^{\dagger} \right]_{\mp} = \sum_{k \in I} \sum_{l \in I} \langle \phi_k' | \phi_i \rangle \langle \phi_j | \phi_l' \rangle [\hat{b}_k'^{\dagger}, \hat{b}_l^{\dagger}]_{\mp} = 0 \quad (12.14)$$

完全正規直交系を入れ替えれば逆も示せるので同値であることがわかる. □

## 13 場の演算子の導入

**定義 13.1** (場の演算子).

スピン  $s$  を持つ 1 粒子系について考える.

その Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{single}$  の完全正規直交系を  $(|\phi_i\rangle)_{i \in I}$  とする代わりに粒子の位置座標  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  とスピンの  $z$  成分  $s_z \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$  の固有状態  $|\mathbf{r}, s_z\rangle$  からなる完全正規直交系とする. このときの消滅演算子  $\hat{b}_{\mathbf{r}, s_z}'$  を場の演算子  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z)$  と定義する. また粒子数密度演算子  $\hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z)$  を次のように定義する.

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z) := \hat{\phi}^{\dagger}(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) \quad (13.1)$$

今までの消滅, 生成演算子  $\hat{b}_i, \hat{b}_i^{\dagger}$  から場の演算子へ書き換える. (Q21-81(i)(ii), Q21-82, Q21-83, Q21-84, Q21-85(i)(ii))

**定理 13.2.**

ある固有状態  $|\phi_i\rangle$  に関して位置座標・スピンの  $z$  成分により表示を固定した波動関数を  $\phi_i(\mathbf{r}, s_z) := \langle \mathbf{r}, s_z | \phi_i \rangle$  とする. 場の演算子とその Hermite 共役  $\hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger$  と消滅, 生成演算子  $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$  は互いに表現できる.

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{r}, s_z) \hat{b}_i \quad \hat{b}_i = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \phi_i^*(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) \quad (13.2)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) = \sum_{i \in I} \phi_i^*(\mathbf{r}, s_z) \hat{b}_i^\dagger \quad \hat{b}_i^\dagger = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \phi_i(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \quad (13.3)$$

◇

**証明**

まず場の演算子は消滅, 生成演算子を用いて次のように表現できる.

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) = \hat{b}'_{\mathbf{r}, s_z} = \sum_{i \in I} \langle \mathbf{r}, s_z | \phi_i \rangle \hat{b}_i = \sum_{i \in I} \phi_i(\mathbf{r}, s_z) \hat{b}_i \quad (13.4)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) = \hat{b}_i^{\dagger \dagger} = \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \mathbf{r}, s_z \rangle \hat{b}_i^\dagger = \sum_{i \in I} \phi_i^*(\mathbf{r}, s_z) \hat{b}_i^\dagger \quad (13.5)$$

逆に消滅, 生成演算子は次のように表現できる.

$$\hat{b}_i = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \langle \phi_i | \mathbf{r}, s_z \rangle \hat{b}'_{\mathbf{r}, s_z} = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \phi_i^*(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) \quad (13.6)$$

$$\hat{b}_i^\dagger = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \langle \mathbf{r}, s_z | \phi_i \rangle \hat{b}_i^{\dagger \dagger} = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \phi_i(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \quad (13.7)$$

□

**定理 13.3.**

場の演算子とその Hermite 共役の交換・反交換関係

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z), \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z)]_\mp = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{s_z s'_z} \quad (13.8)$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z), \hat{\phi}(\mathbf{r}', s'_z)]_\mp = [\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z), \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z)]_\mp = 0 \quad (13.9)$$

◇

**証明**

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z), \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z)]_\mp = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{s_z s'_z} \quad (13.10)$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z), \hat{\phi}(\mathbf{r}', s'_z)]_\mp = [\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z), \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z)]_\mp = 0 \quad (13.11)$$

□

**定理 13.4.**

粒子数密度演算子

$$\hat{N} = \sum_{i \in I} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z) \quad (13.12)$$

◇

証明

□

**定義 13.5** (複数の同種粒子の場合).

スピン  $s$  を持つ複数の同種粒子がある系を考える. まず真空状態  $|\text{vac}\rangle$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z)|\text{vac}\rangle = 0 & (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, s_z = -s, \dots, s) \\ \langle \text{vac}|\text{vac}\rangle = 1 \end{cases} \quad (13.13)$$

このとき複数の粒子状態は真空状態に場の演算子の Hermite 共役を適用することで表現できる.

$$|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N}\rangle := \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z,1}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_N, s_{z,N})|\text{vac}\rangle \quad (13.14)$$

**定理 13.6** (Q21-86(i)).

置換すると次のようになる.

$$|(\mathbf{r}_{\sigma(\mu)}, s_{z\sigma(\mu)})_{\mu \in X}\rangle = (\pm 1)^\sigma |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N}\rangle \quad (13.15)$$

◇

証明

$$|(\mathbf{r}_{\sigma(\mu)}, s_{z\sigma(\mu)})_{\mu \in X}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_{\sigma(1)}, s_{z\sigma(1)}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_{\sigma(N)}, s_{z\sigma(N)})|\text{vac}\rangle \quad (13.16)$$

$$= (\pm 1)^\sigma \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_N, s_{zN})|\text{vac}\rangle \quad (13.17)$$

$$= (\pm 1)^\sigma |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X}\rangle \quad (13.18)$$

□

$$|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X}\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma |(\mathbf{r}_{\sigma(\mu)}, s_{z\sigma(\mu)})_{\mu \in X}\rangle \quad (13.19)$$

**定理 13.7** (Q21-86(ii)).

正規直交関係については次のようになる.

$$((\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X} | (\mathbf{r}'_\mu, s'_{z\mu})_{\mu \in X'}) = \delta_{NN'} \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\sigma(1)}) \delta_{s_{z1} s'_{z\sigma(1)}} \cdots \delta(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}'_{\sigma(N)}) \delta_{s_{zN} s'_{z\sigma(N)}} \quad (13.20)$$

◇

証明

まずは  $N = N'$  の場合を考える.

$$((\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X} | (\mathbf{r}'_\mu, s'_{z\mu})_{\mu \in X}) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma ((\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X} | (\mathbf{r}'_{\sigma(\mu)}, s'_{z\sigma(\mu)})_{\mu \in X}) \quad (13.21)$$

$$= \frac{1}{N!^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma \langle \text{vac} | \hat{\phi}(\mathbf{r}_N, s_{zN}) \cdots \hat{\phi}(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(1)}, s'_{z\sigma(1)}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(N)}, s'_{z\sigma(N)}) | \text{vac} \rangle \quad (13.22)$$

TODO:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}_N, s_{zN}) \cdots \hat{\phi}(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(1)}, s'_{z\sigma(1)}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(N)}, s'_{z\sigma(N)}) \quad (13.23)$$

$$= \hat{\phi}(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(1)}, s'_{z\sigma(1)}) \cdots \hat{\phi}(\mathbf{r}_N, s_{zN}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(N)}, s'_{z\sigma(N)}) \quad (13.24)$$

真空状態について交換関係・反交換関係を用いて次のように計算できる.

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) | \text{vac} \rangle = \pm \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) | \text{vac} \rangle + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{s_z s'_z} | \text{vac} \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{s_z s'_z} | \text{vac} \rangle \quad (13.25)$$

これを帰納的に適用することで次のように計算できる.

$$\langle \text{vac} | \hat{\phi}(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(1)}, s'_{z\sigma(1)}) \cdots \hat{\phi}(\mathbf{r}_N, s_{zN}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}'_{\sigma(N)}, s'_{z\sigma(N)}) | \text{vac} \rangle \quad (13.26)$$

$$= \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\sigma(1)}) \delta_{s_{z1} s'_{z\sigma(1)}} \cdots \delta(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}'_{\sigma(N)}) \delta_{s_{zN} s'_{z\sigma(N)}} \langle \text{vac} | \text{vac} \rangle \quad (13.27)$$

$$= \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\sigma(1)}) \delta_{s_{z1} s'_{z\sigma(1)}} \cdots \delta(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}'_{\sigma(N)}) \delta_{s_{zN} s'_{z\sigma(N)}} \quad (13.28)$$

よって

$$((\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X} | (\mathbf{r}'_\mu, s'_{z\mu})_{\mu \in X}) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\sigma(1)}) \delta_{s_{z1} s'_{z\sigma(1)}} \cdots \delta(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}'_{\sigma(N)}) \delta_{s_{zN} s'_{z\sigma(N)}} \quad (13.29)$$

となる.  $N \neq N'$  の場合, Bose, Fermi 粒子系どちらも粒子数が異なる状態の内積は 0 より固有状態の内積も 0 となる.  $\square$

**定理 13.8** (Q21-86(iii)).

単位演算子の分解は次のようになる.

$$\hat{1} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \cdots \sum_{s_{zN}=-s}^s \int d\mathbf{r}_N |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X}) \langle (\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X} | \quad (13.30)$$

$\diamond$

証明

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \cdots \sum_{s_{zN}=-s}^s \int d\mathbf{r}_N |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X}) \langle (\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X} | (\mathbf{r}'_\mu, s'_{z\mu})_{\mu \in X'}) \quad (13.31)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \cdots \sum_{s_{zN}=-s}^s \int d\mathbf{r}_N |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in X}) \quad (13.32)$$

$$\delta_{NN'} \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (\pm 1)^\sigma \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\sigma(1)}) \delta_{s_{z1} s'_{z\sigma(1)}} \cdots \delta(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}'_{\sigma(N)}) \delta_{s_{zN} s'_{z\sigma(N)}} \quad (13.33)$$

$$= \frac{1}{N'!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{N'}} (\pm 1)^\sigma |(\mathbf{r}'_{\sigma(\mu)}, s'_{z\sigma(\mu)})_{\mu \in X'}) \quad (13.34)$$

$$= |(\mathbf{r}'_\mu, s'_{z\mu})_{\mu \in X'}) \quad (13.35)$$

□

定理 13.9 (Q21-86(iv)(v)(vi)).

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z)|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} = \left( \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu) \delta_{s_z s_{z\mu}} \right) |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \quad (13.36)$$

$$\hat{N}|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} = N|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \quad (13.37)$$

◇

証明

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) = \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) \quad (13.38)$$

$$= \pm \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{s_z s'_z} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \quad (13.39)$$

$$= \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{s_z s'_z} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) \quad (13.40)$$

$$= \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) \hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{s_z s'_z} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', s'_z) \quad (13.41)$$

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z)|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z,1}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_N, s_{z,N}) |\text{vac}\rangle \quad (13.42)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z,1}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_N, s_{z,N}) \hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z) |\text{vac}\rangle \quad (13.43)$$

$$+ \left( \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu) \delta_{s_z s_{z\mu}} \right) \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z,1}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_N, s_{z,N}) |\text{vac}\rangle \quad (13.44)$$

$$= \left( \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu) \delta_{s_z s_{z\mu}} \right) |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \quad (13.45)$$

$$\hat{N}|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \hat{\rho}(\mathbf{r}, s_z) |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \quad (13.46)$$

$$= \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \left( \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu) \delta_{s_z s_{z\mu}} \right) |(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \quad (13.47)$$

$$= N|(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})_{\mu \in \mathbb{Z}_N} \quad (13.48)$$

□

定理 13.10.

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \frac{1}{n!} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \cdots \sum_{s_{zn}=-s}^s \int d\mathbf{r}_n \sum_{s'_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_1 \cdots \sum_{s'_{zn}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_n \quad (13.49)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_n, s_{zn}) \langle \mathbf{r}_1, s_{z1}, \dots, \mathbf{r}_n, s_{zn} | f | \mathbf{r}'_1, s'_{z1}, \dots, \mathbf{r}'_n, s'_{zn} \rangle \hat{\phi}(\mathbf{r}'_n, s'_{zn}) \cdots \hat{\phi}(\mathbf{r}'_1, s'_{z1}) \quad (13.50)$$

◇



証明

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in I \\ j_1, \dots, j_n \in I}} \langle \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_n} | f | \phi_{j_1} \cdots \phi_{j_n} \rangle \hat{b}_{i_1}^\dagger \cdots \hat{b}_{i_n}^\dagger \hat{b}_{j_n} \cdots \hat{b}_{j_1} \quad (13.51)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \cdots \sum_{s_{zn}=-s}^s \int d\mathbf{r}_n \sum_{s'_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_1 \cdots \sum_{s'_{zn}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_n \quad (13.52)$$

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in I \\ j_1, \dots, j_n \in I}} \phi_{i_1}^*(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \cdots \phi_{i_n}^*(\mathbf{r}_n, s_{zn}) \phi_{j_1}(\mathbf{r}'_1, s'_{z1}) \cdots \phi_{j_n}(\mathbf{r}'_n, s'_{zn}) \langle \mathbf{r}_1, s_{z1}, \dots, \mathbf{r}_n, s_{zn} | f | \mathbf{r}'_1, s'_{z1}, \dots, \mathbf{r}'_n, s'_{zn} \rangle \quad (13.53)$$

$$\phi_{i_1}(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \cdots \phi_{i_n}(\mathbf{r}_n, s_{zn}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_n, s_{zn}) \phi_{j_n}^*(\mathbf{r}'_n, s'_{zn}) \hat{\phi}(\mathbf{r}'_n, s'_{zn}) \cdots \phi_{j_1}^*(\mathbf{r}'_1, s'_{z1}) \hat{\phi}(\mathbf{r}'_1, s'_{z1}) \quad (13.54)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \cdots \sum_{s_{zn}=-s}^s \int d\mathbf{r}_n \sum_{s'_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_1 \cdots \sum_{s'_{zn}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_n \quad (13.55)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \cdots \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_n, s_{zn}) \langle \mathbf{r}_1, s_{z1}, \dots, \mathbf{r}_n, s_{zn} | f | \mathbf{r}'_1, s'_{z1}, \dots, \mathbf{r}'_n, s'_{zn} \rangle \hat{\phi}(\mathbf{r}'_n, s'_{zn}) \cdots \hat{\phi}(\mathbf{r}'_1, s'_{z1}) \quad (13.56)$$

□

例 13.11 (Q21-87, Q21-88, Q21-89(i)(ii), Q21-90, Q21-91(i)(ii)(iii)(iv), Q21-92).

1 粒子演算子, 2 粒子演算子の和も同様に成り立ち, よくある物理系では次の関数を選ぶ.

$$\hat{h} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \quad (13.57)$$

$$\hat{v} = V(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}_1, \mathbf{r}_2, \hat{\mathbf{s}}_2) \quad (13.58)$$

$$\hat{h}^{\text{tot}} = \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \sum_{s_{z2}=-s}^s \int d\mathbf{r}_2 \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \langle \mathbf{r}_1, s_{z1} | h | \mathbf{r}_2, s_{z2} \rangle \hat{\phi}(\mathbf{r}_2, s_{z2}) \quad (13.59)$$

$$= \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \sum_{s'_z=-s}^s \int d\mathbf{r}' \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \langle \mathbf{r}, s_z | \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \right] | \mathbf{r}', s'_z \rangle \hat{\phi}(\mathbf{r}', s'_z) \quad (13.60)$$

$$= \sum_{s_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \sum_{s'_z=-s}^s \int d\mathbf{r}' \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \langle \mathbf{r}, s_z | \mathbf{r}', s'_z \rangle \nabla_{\mathbf{r}}^2 + \langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle \langle s_z | V(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) | s'_z \rangle \right] \hat{\phi}(\mathbf{r}', s'_z) \quad (13.61)$$

$$= \sum_{s_z=-s}^s \sum_{s'_z=-s}^s \int d\mathbf{r} \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, s_z) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \delta_{s_z s'_z} \Delta_{\mathbf{r}} + V_{s_z s'_z}(\mathbf{r}) \right] \hat{\phi}(\mathbf{r}, s'_z) \quad (13.62)$$

$$\hat{v}^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \sum_{s_{z2}=-s}^s \int d\mathbf{r}_2 \sum_{s_{z3}=-s}^s \int d\mathbf{r}_3 \sum_{s_{z4}=-s}^s \int d\mathbf{r}_4 \quad (13.63)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_2, s_{z2}) \langle \mathbf{r}_1, s_{z1}, \mathbf{r}_2, s_{z2} | v | \mathbf{r}_3, s_{z3}, \mathbf{r}_4, s_{z4} \rangle \hat{\phi}(\mathbf{r}_4, s_{z4}) \hat{\phi}(\mathbf{r}_3, s_{z3}) \quad (13.64)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \sum_{s_{z2}=-s}^s \int d\mathbf{r}_2 \sum_{s'_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_1 \sum_{s'_{z2}=-s}^s \int d\mathbf{r}'_2 \quad (13.65)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_2, s_{z2}) \langle \mathbf{r}_1, s_{z1}, \mathbf{r}_2, s_{z2} | V(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}_1, \mathbf{r}_2, \hat{\mathbf{s}}_2) | \mathbf{r}'_1, s'_{z1}, \mathbf{r}'_2, s'_{z2} \rangle \hat{\phi}(\mathbf{r}'_2, s'_{z2}) \hat{\phi}(\mathbf{r}'_1, s'_{z1}) \quad (13.66)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_{z1}=-s}^s \sum_{s'_{z1}=-s}^s \int d\mathbf{r}_1 \sum_{s_{z2}=-s}^s \sum_{s'_{z2}=-s}^s \int d\mathbf{r}_2 \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, s_{z1}) \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_2, s_{z2}) V_{s_{z1}, s_{z2}, s'_{z1}, s'_{z2}} \hat{\phi}(\mathbf{r}_2, s'_{z2}) \hat{\phi}(\mathbf{r}_1, s'_{z1}) \quad (13.67)$$

$$V_{s_z s'_z}(\mathbf{r}) = \langle s_z | V(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) | s'_z \rangle = \langle s'_z | V(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) | s_z \rangle^* = V_{s'_z s_z}(\mathbf{r})^* \quad (13.68)$$

$$V_{s_{z1} s_{z2} s'_{z1} s'_{z2}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle s_{z1} s_{z2} | V(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}_1, \mathbf{r}_2, \hat{\mathbf{s}}_2) | s'_{z1} s'_{z2} \rangle \quad (13.69)$$

$$= \langle s'_{z1} s'_{z2} | V(\mathbf{r}_1, \hat{\mathbf{s}}_1, \mathbf{r}_2, \hat{\mathbf{s}}_2) | s_{z1} s_{z2} \rangle^* \quad (13.70)$$

$$= V_{s'_{z1} s'_{z2} s_{z1} s_{z2}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)^* \quad (13.71)$$

◇

**定義 13.12** (省略記法).

ある粒子  $\mu$  の位置座標  $\mathbf{r}_\mu \in \mathbb{R}^3$  とスピンの  $z$  成分  $s_{z\mu} = -s, -s+1, \dots, s-1, s$  の組  $(\mathbf{r}_\mu, s_{z\mu})$  を  $\mu$  とラベル付けする. ラベル  $\mu$  と  $\mathbb{Z}$  への随伴関手は省略する. つまり次のように

$$\sum_{\mu} f(\mu) = \sum_{s_z=-s}^s \sum_{s'_z=-s}^s \int d\mathbf{r} f(s_{z\mu}, s'_{z\mu}, \mathbf{r}_\mu) \quad (13.72)$$

$$(1, \dots, N | 1', \dots, N') = \delta_{NN'} \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N') \quad (13.73)$$

$$\hat{1} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{1, \dots, N} |1, \dots, N\rangle \langle 1, \dots, N| \quad (13.74)$$

$$\hat{f}^{\text{tot}} = \frac{1}{n!} \sum_{1, \dots, 2n} \hat{\phi}^\dagger(1) \cdots \hat{\phi}^\dagger(n) \langle 1 \cdots n | f | n+1 \cdots 2n \rangle \hat{\phi}(2n) \cdots \hat{\phi}(n+1) \quad (13.75)$$

$$\hat{h}^{\text{tot}} = \sum_{1,2} \hat{\phi}^\dagger(1) \langle 1|h|2 \rangle \hat{\phi}(2) \quad (13.76)$$

$$= \sum_1 \hat{\phi}^\dagger(1) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 + V(1) \right] \hat{\phi}(1) \quad (13.77)$$

$$\hat{v}^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_{1,2,3,4} \hat{\phi}^\dagger(1) \hat{\phi}^\dagger(2) \langle 12|v|34 \rangle \hat{\phi}(4) \hat{\phi}(3) \quad (13.78)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1,2} \hat{\phi}^\dagger(1) \hat{\phi}^\dagger(2) V(1,2) \hat{\phi}(2) \hat{\phi}(1) \quad (13.79)$$

$$\begin{cases} [\hat{\phi}(\mu), \hat{\phi}^\dagger(\nu)]_{\mp} = \delta(\mu, \nu) \\ [\hat{\phi}(\mu), \hat{\phi}(\nu)]_{\mp} = [\hat{\phi}^\dagger(\mu), \hat{\phi}^\dagger(\nu)]_{\mp} = 0 \end{cases} \quad (13.80)$$

## 14 量子化された場の理論は粒子数を固定しない多体系の量子力学に等しい。

**定義 14.1** (場の理論).

このとき Schrödinger 方程式は次のように書ける.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (14.1)$$

ただし場の理論の状態  $|\Psi(t)\rangle$  と Hamiltonian  $\hat{H}$  は次のように展開できる.

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{1,\dots,N} \Psi(1,\dots,N;t) |1,\dots,N\rangle \quad (14.2)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{one}} + \hat{H}_{\text{two}} = \sum_1 \hat{\phi}^\dagger(1) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 + V(1) \right] \hat{\phi}(1) + \frac{1}{2} \sum_{1,2} \hat{\phi}^\dagger(1) \hat{\phi}^\dagger(2) V(1,2) \hat{\phi}(2) \hat{\phi}(1) \quad (14.3)$$

$N$  粒子の多体系の波動関数

**定理 14.2** (Q21-93).

展開係数の粒子の置換に関する対称性

$$\Psi(\sigma(1), \dots, \sigma(N); t) = (\pm 1)^\sigma \Psi(1, \dots, N; t) \quad (14.4)$$

◇

**証明**

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{1,\dots,N} \Psi(1,\dots,N;t) |1,\dots,N\rangle \quad (14.5)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{1,\dots,N} \Psi(\sigma(1), \dots, \sigma(N); t) |\sigma(1), \dots, \sigma(N)\rangle \quad (14.6)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{1,\dots,N} (\pm 1)^\sigma \Psi(\sigma(1), \dots, \sigma(N); t) |1,\dots,N\rangle \quad (14.7)$$

□

定理 14.3 (Q21-94(i)(ii)(iii)(iv)(v)).

$$[\hat{H}, \hat{N}] = 0 \quad (14.8)$$

◇

証明

$$(1, \dots, N | \Psi(t)) = \sum_{N'=0}^{\infty} \sum_{1', \dots, N''} \Psi(1', \dots, N''; t) (1, \dots, N | 1', \dots, N'') \quad (14.9)$$

$$= \sum_{N'=0}^{\infty} \sum_{1', \dots, N''} \Psi(1', \dots, N''; t) \delta_{NN'} \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N'') \quad (14.10)$$

$$= \sum_{1', \dots, N'} \Psi(1', \dots, N'; t) \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N') \quad (14.11)$$

$$= \Psi(1, \dots, N; t) \quad (14.12)$$

$$[\hat{H}, \hat{N}] = \hat{H}_{\text{one}} + \hat{H}_{\text{two}} = \sum_1 \hat{\phi}^\dagger(1) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 + V(1) \right] \hat{\phi}(1) + \frac{1}{2} \sum_{1,2} \hat{\phi}^\dagger(1) \hat{\phi}^\dagger(2) V(1, 2) \hat{\phi}(2) \hat{\phi}(1) \quad (14.13)$$

$N \neq N'$  のとき

$$(1, \dots, N | \hat{H} | 1', \dots, N'') \quad (14.14)$$

□

定理 14.4 (Q21-94(v)(vi)(vii)(viii)(ix)(x)(xi)(xii)(xiii)(xiv)(xv)(xvi)(xvii)(xviii)(xix)(xx)(xxi)(xxii)(xxiii)(xxiv)(xxv)(xxvi)(xxvii)(xxviii)).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(1, \dots, N; t) = \left( \sum_{I=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_I + V(I) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq I \leq N \\ 1 \leq J \leq N \\ I \neq J}} V(I, J) \right) \Psi(1, \dots, N; t) \quad (14.15)$$

◇

証明

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(1, \dots, N; t) = \sum_{N'=0}^{\infty} \sum_{1', \dots, N''} (1, \dots, N | \hat{H} | 1', \dots, N'') \Psi(1', \dots, N''; t) \quad (14.16)$$

$$= \sum_{1', \dots, N'} (1, \dots, N | \hat{H} | 1', \dots, N') \Psi(1', \dots, N'; t) \quad (14.17)$$

$$\hat{H}_{\text{one}}|1', \dots, N') \quad (14.18)$$

$$= \sum_I \hat{\phi}^\dagger(I) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_I + V(I) \right] \hat{\phi}(I) \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.19)$$

$$= \sum_I \hat{\phi}^\dagger(I) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_I + V(I) \right] \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{J'=1'}^{N'} (\pm 1)^{J'} \delta(I, J') \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(J' - 1) \hat{\phi}^\dagger(J' + 1) \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.20)$$

$$= \sum_{J'=1'}^{N'} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_I \hat{\phi}^\dagger(I) \Delta_I \delta(I, J') + \sum_I \hat{\phi}^\dagger(I) V(I) \delta(I, J') \right] (\pm 1)^{J'} \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(J' - 1) \hat{\phi}^\dagger(J' + 1) \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.21)$$

$$= \sum_{J'=1'}^{N'} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{J'} \hat{\phi}^\dagger(J') + V(J') \hat{\phi}^\dagger(J') \right] (\pm 1)^{J'} \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(J' - 1) \hat{\phi}^\dagger(J' + 1) \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.22)$$

$$= \sum_{J'=1'}^{N'} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{J'} + V(J') \right] \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.23)$$

$$= \sum_{J'=1'}^{N'} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{J'} + V(J') \right] |1', \dots, N') \quad (14.24)$$

$$\hat{H}_{\text{two}}|1', \dots, N') \quad (14.25)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} \hat{\phi}^\dagger(I) \hat{\phi}^\dagger(J) V(I, J) \hat{\phi}(J) \hat{\phi}(I) \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.26)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(I) \hat{\phi}^\dagger(J) \hat{\phi}(J) \hat{\phi}(I) \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.27)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(I) \hat{\phi}^\dagger(J) \hat{\phi}(J) \sum_{K'=1'}^{N'} (\pm 1)^{K'} \delta(I, K') \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(K' - 1) \hat{\phi}^\dagger(K' + 1) \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.28)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(I) \sum_{K'=1'}^{N'} (\pm 1)^{K'} \delta(I, K') \sum_{\substack{L'=1' \\ K' \neq L'}}^{N'} \delta(J, L') \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(K' - 1) \hat{\phi}^\dagger(K' + 1) \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.29)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\substack{1' \leq K' \leq N' \\ 1' \leq L' \leq N' \\ K' \neq L'}} (\pm 1)^{K'} \delta(I, K') \delta(J, L') \hat{\phi}^\dagger(K') \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(K' - 1) \hat{\phi}^\dagger(K' + 1) \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.30)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\substack{1' \leq K' \leq N' \\ 1' \leq L' \leq N' \\ K' \neq L'}} \delta(I, K') \delta(J, L') \hat{\phi}^\dagger(1') \cdots \hat{\phi}^\dagger(N') |\text{vac}\rangle \quad (14.31)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \sum_{\substack{1' \leq K' \leq N' \\ 1' \leq L' \leq N' \\ K' \neq L'}} \delta(I, K') \delta(J, L') |1', \dots, N') \quad (14.32)$$

$$(1, \dots, N | \hat{H}_{\text{one}} | 1', \dots, N') = \sum_{I'=1'}^{N'} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{I'} + V(I') \right] (1, \dots, N | 1', \dots, N') \quad (14.33)$$

$$= \sum_{I'=1'}^{N'} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{I'} + V(I') \right] \delta_{NN} \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N') \quad (14.34)$$

$$= \sum_{I=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_I + V(I) \right] \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N') \quad (14.35)$$

$$(1, \dots, N | \hat{H}_{\text{two}} | 1', \dots, N') = \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \sum_{\substack{1' \leq K' \leq N' \\ 1' \leq L' \leq N' \\ K' \neq L'}} \delta(I, K') \delta(J, L') (1, \dots, N | 1', \dots, N') \quad (14.36)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{I,J} V(I, J) \sum_{\substack{1' \leq K' \leq N' \\ 1' \leq L' \leq N' \\ K' \neq L'}} \delta(I, K') \delta(J, L') \delta_{NN'} \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N') \quad (14.37)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq I \leq N \\ 1 \leq J \leq N \\ I \neq J}} V(I, J) \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N') \quad (14.38)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(1, \dots, N; t) = \sum_{1', \dots, N'} (1, \dots, N | \hat{H} | 1', \dots, N') \Psi(1', \dots, N'; t) \quad (14.39)$$

$$= \sum_{1', \dots, N'} \left( \sum_{I=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_I + V(I) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq I \leq N \\ 1 \leq J \leq N \\ I \neq J}} V(I, J) \right) \delta(1, 1') \cdots \delta(N, N') \Psi(1', \dots, N'; t) \quad (14.40)$$

$$= \left( \sum_{I=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_I + V(I) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq I \leq N \\ 1 \leq J \leq N \\ I \neq J}} V(I, J) \right) \Psi(1, \dots, N; t) \quad (14.41)$$

□

## 15 Heisenberg 表示での場の演算子の運動方程式

定理 15.1.

$$V_{s_{z0}s_{z1}s'_{z0}s'_{z1}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z; t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} \hat{\phi}(\mathbf{r}, s_z; t) + \sum_{s'_z=-s}^s V_{s_z s'_z}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}, s'_z; t) \quad (15.1)$$

◇

## 16 第二量子化 - 場の正準量子化の手続き

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, s_z; t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}, s_z; t) + \sum_{s'_z=-s}^s V_{s_z s'_z}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, s'_z; t) \quad (16.1)$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi^*(\mathbf{r}, s_z; t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{r}}\phi^*(\mathbf{r}, s_z; t) + \sum_{s'_z=-s}^s \phi^*(\mathbf{r}, s'_z; t)V_{s'_z s_z}(\mathbf{r}) \quad (16.2)$$

## 17 第二量子化 - 波動描像から粒子描像へ