

多様体

anko9801

2023 年 11 月 15 日

目次

1	ユークリッド空間	2
2	2

1 ユークリッド空間

ユークリッド空間 \mathbb{R}^n はすべての多様体の原型となるもの。すべての多様体は局所的に \mathbb{R}^n のように見える。実ベクトル空間 V, W

$$\text{Hom}(V, W) \ni f : V \rightarrow W \quad (1.1)$$

$$\alpha^i : \sum v^i e_i \mapsto v^i \quad (1.2)$$

$$\begin{array}{ccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad (1.3)$$

座標関数 α^i

曲面の接平面上にあるベクトルを接ベクトルという。

\mathbb{R}^n の点 p における接空間 $T_p(\mathbb{R}^n), T_p\mathbb{R}^n$ の元を接ベクトルという。

2

定義 (線形写像).

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \quad (2.1)$$

$$L(rv) = rL(v) \quad (2.2)$$

定義 (コベクトル).

ベクトル空間上の k 変数交代多重線形関数は次数 k の多重コベクトル

$$V = \text{span}\{e_i\} \quad (2.3)$$

$$T_p(\mathbb{R}^n) = \text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\} \quad (2.4)$$

余接空間

$$T_p^*(\mathbb{R}^n), T_p^*\mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

定義 (テンソル積).

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k)g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \quad (2.6)$$

$$\sigma f(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad (2.7)$$

$$Sf = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma f \quad (2.8)$$

$$Af = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma f \quad (2.9)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g) \quad (2.10)$$

$$f(\dots, v_{i+1}, v_i, \dots) = -f(\dots, v_i, v_{i+1}, \dots) \quad (2.11)$$

$$f(v_1, \dots, v_k) = 0 \quad (2.12)$$