

相対性理論

Anko

2023 年 8 月 27 日

目次

1	特殊相対性理論	2
2	一般相対性理論	3
2.1	座標系	4
2.2	様々な座標系における演算	4
2.3	局所平坦性定理	8
2.4	曲がった時空での物理	13

1 特殊相対性理論

定義 (Einstein の相対性原理).

自然法則は全ての慣性系において同じ形になる。

定義 (光速不変の原理).

光の速度は全ての慣性系で、光源の速度によらず一定である。

定義 (共変ベクトル・反変ベクトル).

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

時刻 $t \in \mathbb{R}$ と場所 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ をまとめた時空点 $x = (x^\mu)$ を次の反変ベクトルで表す。

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, \mathbf{r}(t)) \quad (2)$$

x による微分を共変ベクトルとして次のように定義する。

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) := \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (3)$$

命題 1.

$$g < 0$$

◇

証明

$$g_{\mu\nu} = M\eta_{\mu\nu}M^\top \quad (4)$$

$$g = \det(\eta_{\mu\nu}) \det(M)^2 = -\det(M)^2 < 0 \quad (5)$$

□

定義 (世界間隔).

$$ds^2 = (c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (c d\tau)^2 \quad (6)$$

これらを元に四元速度、四元加速度、四元運動量

$$u^\mu(t) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \dot{\mathbf{r}}) \quad (7)$$

$$a^\mu(t) = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \gamma(0, \ddot{\mathbf{r}}) \quad (8)$$

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(c, \dot{\mathbf{r}}) \quad (9)$$

$$j^\mu(x) := (c\rho, \mathbf{j}) \quad (10)$$

$$(11)$$

運動方程式

$$m \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (12)$$

作用

$$\delta S = \int \varepsilon^\mu \delta x_\mu d\tau = 0 \quad (13)$$

2 一般相対性理論

公理 (アインシュタインの等価原理).

加速系と重力場の系は局所的には原理的に区別できない。

例えば宇宙人によって部屋に閉じ込められたとき地球と同じ重力があるからといって地球にいるとは限らない。

2.1 座標系

定義 (デカルト座標).

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad (14)$$

定義 (極座標).

ユークリッド平面においてデカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換は次のように定義する。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (15)$$

逆に極座標 (r, θ) からデカルト座標 (x, y) へは次のようになる。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (17)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (18)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \quad (19)$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (20)$$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \cdot (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \quad (21)$$

$$= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) \cdot (-r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y) \quad (23)$$

$$= -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (24)$$

2.2 様々な座標系における演算

どのような座標系においても同じ形の式を作る。異なる座標系での内積

定義 (座標系の基底ベクトル).

座標変換によって基底ベクトルによる

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \mathbf{e}_{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} \mathbf{e}_{\beta} \quad (25)$$

ある座標系において基底ベクトル同士の内積を計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ といい、場所の複雑な関数である。

$$\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (26)$$

また基底ベクトルの微分による係数をクリストッフェル記号といい、 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ と書く。

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\mu} \quad (27)$$

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1} \quad (28)$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \quad (29)$$

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta} \quad (30)$$

ベクトル $\mathbf{A} = A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$ を基底で微分 $\nabla_{\beta} \mathbf{A} = \partial \mathbf{A} / \partial x^{\beta} = A^{\alpha}_{;\beta} \mathbf{e}_{\alpha}$ について

$$A^{\alpha}_{;\beta} \mathbf{e}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (A^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}) = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \mathbf{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = A^{\alpha}_{,\beta} \mathbf{e}_{\alpha} + A^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\mu} \quad (31)$$

より

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + A^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \quad (32)$$

これを共変微分という。スカラー場 ϕ について微分と共変微分をすることについて

$$\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_{,\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \quad (33)$$

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\beta,\alpha} + \phi_{,\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = \phi_{,\alpha,\beta} + \phi_{,\mu} \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \quad (34)$$

であり、 $\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\beta;\alpha}$ であるから

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \quad (35)$$

となる。

共変ベクトルについても共変微分すると

$$A_{\alpha;\mu} = (g_{\alpha\beta}A^\beta)_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu}A^\beta + g_{\alpha\beta}A^\beta_{;\mu} = g_{\alpha\beta;\mu}A^\beta + A_{\alpha;\mu} \quad (36)$$

より最初と結果を比較することで次のテンソル方程式が成り立つ。

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \quad (37)$$

また計量テンソルの共変微分を計算すると

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\nu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\mu\beta} = 0 \quad (38)$$

より、これを添字を変えたものを

$$g_{\alpha\beta,\mu} = g_{\nu\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} + g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\mu\beta} \quad (39)$$

$$g_{\mu\alpha,\beta} = g_{\nu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\beta} + g_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\beta\alpha} \quad (40)$$

$$g_{\beta\mu,\alpha} = g_{\nu\mu}\Gamma^\nu_{\beta\alpha} + g_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} \quad (41)$$

適切に足し引きして両辺に $\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}$ を掛けると

$$2g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} \quad (42)$$

$$\Gamma^\nu_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) \quad (43)$$

よりクリストッフェル記号を計量テンソルで表すことができる。

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (44)$$

テンソル方程式

テンソルの共変微分は次のようになる。

$$V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}V^\mu \quad (45)$$

$$P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}P_\mu \quad (46)$$

$$T^{\alpha\beta}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}T^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\mu\gamma}T^{\alpha\mu} \quad (47)$$

更に

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \quad (48)$$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (49)$$

例 2 (デカルト座標).

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\mu = 0 \quad (51)$$

$$A^\alpha_{;\beta} = A^\alpha_{,\beta} = A_{\alpha,\beta} \quad (52)$$

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} \quad (53)$$

◇

例 3 (極座標).

$$\Lambda^\beta_\alpha = \begin{pmatrix} \Lambda^x_r & \Lambda^y_r \\ \Lambda^x_\theta & \Lambda^y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (55)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (56)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \Gamma^r_{rr} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{rr} \mathbf{e}_\theta = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \Gamma^r_{r\theta} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{r\theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta r} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{\theta r} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = \Gamma^r_{\theta\theta} \mathbf{e}_r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta = -r \mathbf{e}_r \quad (61)$$

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial \alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} A^\mu \quad (62)$$

$$= \frac{\partial A^r}{\partial r} + \frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A^r \quad (63)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} A^\theta \quad (64)$$

◇

2.3 局所平坦性定理

定理 4.

任意の計量 $g_{\alpha\beta}$ は座標変換することである点で平坦な計量となる。

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (65)$$

◇

証明

一般相対論において計量は 3 つの正の固有値と 1 つの負の固有値を持つ。これより任意の計量 $g_{\alpha\beta}$ に対して次のように定式化できる。

$$g_{\mu\nu}(x^\gamma) = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} + O[(x^\gamma - \mathcal{P})^2] \quad (66)$$

つまり次のように書ける。

$$g_{\mu\nu}|_{\mathcal{P}} = \Lambda^\alpha_\mu|_{\mathcal{P}} \Lambda^\beta_\nu|_{\mathcal{P}} g_{\alpha\beta}|_{\mathcal{P}} = \eta_{\mu\nu} \quad (67)$$

$$g_{\mu\nu,\gamma}|_{\mathcal{P}} = 0 \quad (68)$$

$$g_{\mu\nu,\gamma\lambda}|_{\mathcal{P}} \neq 0 \quad (69)$$

これらはそれぞれ 10 個、 $10 \times 4 = 40$ 個、 $10 \times 10 = 100$ 個の独立な成分を持つ。それぞれのテンソルをテイラー展開する。

$$\Lambda^\alpha_\mu = \Lambda^\alpha_\mu|_{\mathcal{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma) \frac{\partial \Lambda^\alpha_\mu}{\partial x^\gamma} \Big|_{\mathcal{P}} + \frac{1}{2} (x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda) \frac{\partial^2 \Lambda^\alpha_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\gamma} \Big|_{\mathcal{P}} + \cdots \quad (70)$$

$$= \Lambda^\alpha_\mu|_{\mathcal{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma) \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} \Big|_{\mathcal{P}} + \frac{1}{2} (x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda) \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\gamma \partial x^\mu} \Big|_{\mathcal{P}} + \cdots \quad (71)$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}|_{\mathcal{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma) \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \Big|_{\mathcal{P}} + \frac{1}{2} (x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda) \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda \partial x^\gamma} \Big|_{\mathcal{P}} + \cdots \quad (72)$$

$$g_{\mu\nu}(x) = [\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta}]_{\mathcal{P}} + (x^\gamma - x_0^\gamma) \left[\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta,\lambda} + \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_{\nu,\lambda} g_{\alpha\beta} + \Lambda^\alpha_{\mu,\lambda} \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta} \right]_{\mathcal{P}} \quad (73)$$

$$+ \frac{1}{2} (x^\gamma - x_0^\gamma)(x^\lambda - x_0^\lambda) [\cdots]_{\mathcal{P}} + \cdots \quad (74)$$

$\Lambda^\alpha_\mu|_{\mathcal{P}}$, $\Lambda^\alpha_{\mu,\gamma}|_{\mathcal{P}}$, $\Lambda^\alpha_{\mu,\gamma\lambda}|_{\mathcal{P}}$ は偏微分の対称性よりそれぞれ $4 \times 4 = 16$ 個、 $4 \times 10 = 40$ 個、 $4 \times 20 = 80$ 個を持つ。

$$g_{\mu\nu}|_{\mathcal{P}} = \Lambda^\alpha_\mu|_{\mathcal{P}} \Lambda^\beta_\nu|_{\mathcal{P}} g_{\alpha\beta}|_{\mathcal{P}} = \eta_{\mu\nu} \quad (75)$$

の 10 個の方程式を満たすことは $\Lambda^\alpha_\mu|_{\mathcal{D}}$ の 16 個の成分によってできる。残りの 6 個の成分はローレンツ変換の自由度に対応している。(速度の 3 成分とある軸による回転の 3 成分)

$$g_{\mu\nu,\gamma}|_{\mathcal{D}} = 0 \quad (76)$$

については 40 個と 40 個でなんとか満たすことができる。

$$g_{\mu\nu,\gamma\lambda}|_{\mathcal{D}} = 0 \quad (77)$$

を満たすことについては 100 個に対して 80 個で不可能である。 \square

命題 5.

長さ dl と体積 $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ について

$$dl = |\mathbf{A}| d\lambda \quad (78)$$

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (79)$$

\diamond

証明

長さ dl を計算する。

$$dl = |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} \quad (80)$$

$$= \left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right|^{1/2} d\lambda \quad (81)$$

$$= |g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta|^{1/2} d\lambda \quad (82)$$

$$= \sqrt{|\mathbf{A}^2|} d\lambda \quad (83)$$

体積 $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ について

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (84)$$

$$= \begin{vmatrix} \partial x^0 / \partial x'^0 & \partial x^0 / \partial x'^1 & \partial x^0 / \partial x'^2 & \partial x^0 / \partial x'^3 \\ \partial x^1 / \partial x'^0 & \partial x^1 / \partial x'^1 & \partial x^1 / \partial x'^2 & \partial x^1 / \partial x'^3 \\ \partial x^2 / \partial x'^0 & \partial x^2 / \partial x'^1 & \partial x^2 / \partial x'^2 & \partial x^2 / \partial x'^3 \\ \partial x^3 / \partial x'^0 & \partial x^3 / \partial x'^1 & \partial x^3 / \partial x'^2 & \partial x^3 / \partial x'^3 \end{vmatrix} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (85)$$

$$= \det(\Lambda^\alpha_\beta) dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (86)$$

$\det(\Lambda^\alpha_\beta)$ について計算すると

$$(g_{\alpha\beta}) = (\Lambda^\alpha_\beta)(\eta_{\alpha\beta})(\Lambda^\alpha_\beta)^T \quad (87)$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = \det(\Lambda^\alpha_\beta) \det(\eta_{\alpha\beta}) \det(\Lambda^\alpha_\beta) = -\det(\Lambda^\alpha_\beta)^2 \quad (88)$$

$$\det(\Lambda^\alpha_\beta) = \sqrt{-g} \quad (89)$$

となるから

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (90)$$

となる。 \square

局所慣性系

ある点 \mathcal{P} が局所慣性系となっているとき

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (91)$$

$$g_{\alpha\beta,\mu} = 0 \implies \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0 \quad (92)$$

定理 6 (発散の公式).

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\mu)_{,\mu} \quad (93)$$

\diamond

証明

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\mu\alpha,\beta}) \quad (94)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta})}_{\text{対称}} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \quad (95)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} \quad (96)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{,\mu} \quad (g_{,\mu} = gg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (97)$$

$$A^\alpha_{;\alpha} = A^\alpha_{,\alpha} + A^\mu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} \quad (98)$$

$$= A^\alpha_{,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}}A^\mu(\sqrt{-g})_{,\mu} \quad (99)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\mu)_{,\mu} \quad (100)$$

□

測地線

$$V^\alpha(B) - V^\alpha(A) = \int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = - \int_{x^2=b} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 \quad (101)$$

 $\delta V^\alpha =$ 最初に $\delta a e_\sigma$, 次に $\delta b e_\lambda$, そして $-\delta a e_\sigma$, 最後に $-\delta b e_\lambda$ の移動による V^α の変化 (102)

$$= - \int_{x^\lambda=b} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu dx^\sigma - \int_{x^\sigma=a+\delta a} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu dx^\lambda + \int_{x^\lambda=b+\delta b} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu dx^\sigma + \int_{x^\sigma=a} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu dx^\lambda \quad (103)$$

$$\approx \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu) dx^\sigma + \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu) dx^\lambda \quad (104)$$

$$\approx \delta a \delta b \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\mu) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} V^\mu) \right] \quad (105)$$

$$= \delta a \delta b [\Gamma^\alpha_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\mu\lambda}] V^\mu \quad (106)$$

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu \quad (107)$$

定義 (リーマンの曲率テンソル).

ぱっと見テンソルではないけどテンソルとなる。

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad (108)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^\lambda_{\beta\mu\nu} \quad (109)$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0 \iff \text{平坦な多様体} \quad (110)$$

定理 7.

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (111)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad (112)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (113)$$

◇

局所慣性系において $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$ であるから

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} \quad (114)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\beta,\mu\nu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) - \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\mu,\beta\nu} - g_{\beta\mu,\sigma\nu}) \quad (115)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) \quad (116)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}R_{\beta\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (117)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \quad (118)$$

これらについて次のような関係式が成り立つ。

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (119)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad (120)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0 \quad (121)$$

これよりテンソル方程式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (122)$$

これをビアンキの恒等式という。

定義.

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha} \quad (123)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (124)$$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \quad (125)$$

ビアンキ恒等式に対して $\alpha\mu$ 、 $\beta\nu$ の順に縮約を取ると

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (126)$$

$$g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}[R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] \quad (127)$$

$$= g^{\beta\nu}[R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^\mu] \quad (128)$$

$$= R_{;\lambda} + (-R_{\lambda;\nu}^\nu) + (-R_{\lambda;\mu}^\mu) \quad (129)$$

$$= R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\mu}^\mu \quad (130)$$

$$= (\delta_\lambda^\mu R - 2R_\lambda^\mu)_{;\mu} \quad (131)$$

$$= g_{\lambda\gamma}(g^{\mu\gamma}R - 2R^{\mu\gamma})_{;\mu} \quad (132)$$

これはアインシュタイン・テンソルを用いて

$$(\delta_\lambda^\mu R - 2R_\lambda^\mu)_{;\mu} = -2g_{\lambda\gamma}\left(R^{\mu\gamma} - \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}R\right)_{;\mu} = 0 \quad (133)$$

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (134)$$

となる。

2.4 曲がった時空での物理

1. 時空 (すべての事象の集合) は、メトリックをもった四次元多様体である。
2. メトリックは棒と時計で測ることができる。二つの近傍の点の間の棒に沿った距離は $|dx^2|^{1/2}$ であり、短時間に引き続いて起こる二つの事象を通過した時計の測る、それらの時間間隔は、 $|-dx^2|^{1/2}$ である。
3. 時空のメトリックは、適当な座標系を選ぶことによって任意の一点でローレンツ系での形 $\eta_{\alpha\beta}$ とすることである。
4. アインシュタインの等価原理: 重力作用を考えなくてよい局所的な物理実験はどんなものであっても自由落下する慣性系で測定すれば、特殊相対論の成り立つ平坦な時空でなされる実験と同じ結果を与える。

特殊相対論における粒子、エンロピー、四元運動量の保存則は次のように表された。

$$(nU^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (135)$$

$$U^\alpha S_{;\alpha} = 0 \quad (136)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (137)$$

これはアインシュタインの等価原理によってテンソル方程式が成り立つ。

$$(nU^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (138)$$

$$U^\alpha S_{;\alpha} = 0 \quad (139)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (140)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (141)$$

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + (1 - 2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (142)$$