

# 電磁気学

Anko

2023 年 7 月 23 日

## 目次

1	真空中の電磁気学	2
1.1	電荷	2
1.2	電磁ポテンシャルとゲージ変換	3
1.3	遅延ポテンシャル	6
1.4	Coulomb 力	6
1.5	電気双極子	7
2	真空中の電磁波	8
2.1	導波管での電磁場の伝搬	9
3	特殊相対論と電磁場	9
4	導体と電場	9
4.1	静電誘導	10
4.2	静電遮蔽	10
5	誘電体と電場	10
5.1	誘電体の基礎	10
5.2	コンデンサーの極板	12
5.3	常誘電体	12

# 1 真空中の電磁気学

定義 (Maxwell の方程式).

電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  に対して次のような式が成り立つ。

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$c^2 \int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ただし電荷密度  $\rho(t, \mathbf{r}) = qn$ , 電流密度  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = qn\mathbf{v}$  とする。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5)$$

定義 (Lorentz 力).

電荷  $q$  の質点が電磁場から受ける力は次のように表される。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6)$$

これらの法則で電磁気学が完結する。

## 1.1 電荷

定理 1.1 (電荷の保存則).

連続の方程式を満たし、電荷は保存する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (7)$$

◇

証明

式 (4) の両辺の発散を計算することで連続の方程式を導出する。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \left( \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (8)$$

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial t}{\partial \nabla} \cdot \mathbf{E} \quad (9)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (10)$$

連続の方程式の両辺を空間微分することで電荷が保存することが分かる。

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dV = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12)$$

□

定理 1.2.

真空中での電磁場のエネルギー

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (13)$$

◇

定義 (Poynting ベクトル).

エネルギーの流れの密度単位時間に単位面積を通過するエネルギー

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (14)$$

## 1.2 電磁ポテンシャルとゲージ変換

定理 1.3 (電位とベクトルポテンシャル).

次を満たす  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$  が存在し、 $\phi$  を電位、 $\mathbf{A}$  をベクトルポテンシャルという。

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (16)$$

◇

証明

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (17)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (18)$$

Maxwell の方程式に代入すると

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (21)$$

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\nabla \times (-\nabla\phi) = 0 \quad (23)$$

□

定理 1.4.

Maxwell の方程式は電磁ポテンシャルを用いて次のように表される。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (25)$$

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (26)$$

$$-\nabla^2\mathbf{A} + \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{j} \quad (27)$$

◇

証明

Maxwell の方程式に電磁ポテンシャルを代入すると次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{j} \end{array} \right. \quad (28)$$

□

定理 1.5 (ゲージ変換).

任意の関数  $\chi(\mathbf{r}, t)$  として次のゲージ変換は不変に保つ。

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (29)$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (30)$$

◇

証明

電磁場に代入すると不変に保つことがわかる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\chi) \quad (31)$$

$$= -\nabla\phi + \nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi \quad (32)$$

$$= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (33)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) \quad (34)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\chi \quad (35)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A} \quad (36)$$

□

定義.

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を満たすゲージをクーロンゲージ (Coulomb gauge) と呼ぶ。

命題 1.6.

元々の  $\mathbf{A}$  に対して適切に  $\chi$  を選んでゲージ変換後のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$  がクーロンゲージ条件を満たすようにする。 ◇

証明

クーロンゲージのとき Maxwell 方程式は次のようになる。

$$-\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (37)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2\right)\mathbf{A} + \nabla\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \mu_0\mathbf{j} \quad (38)$$

特に静電磁場においてベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  は Poisson 方程式を満たす。

$$-\nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \quad (39)$$

また  $\chi(\mathbf{r}, t)$  について Poisson 方程式を満たす。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \iff \nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (40)$$

これより  $\chi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\phi(\mathbf{r}, t)$  は次のように表される。

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (41)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (42)$$

特に静電磁場のときベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は次のように書ける。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (43)$$

□

**定義.**

次の式を満たすゲージをローレンツゲージ (Lorenz gauge) と呼ぶ。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (44)$$

**命題 1.7.**

ローレンツゲージのとき

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \chi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (45)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (46)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (47)$$

◇

### 1.3 遅延ポテンシャル

### 1.4 Coulomb 力

**定理 1.8.**

位置  $\mathbf{r}'$  にある点電荷  $Q$  が位置  $\mathbf{r}$  にある点電荷  $q$  に及ぼす Coulomb 力  $\mathbf{F}$  は次のように表

される。

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (48)$$

◇

証明

電位から電場を求めて Coulomb 力を示す。

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (49)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (50)$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (51)$$

□

## 1.5 電気双極子

命題 1.9 (電気双極子).

位置  $\mathbf{r}$  での電位は点電荷  $-Q$  点電荷  $+Q$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (52)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \quad (53)$$

◇

証明

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (54)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{d} \quad (55)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (56)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (57)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \quad (58)$$

□

命題 1.10 (極座標で表した電気双極子).

◇

命題 1.11 (電気四重極子).

◇

命題 1.12 (電気双極子放射).

◇

## 2 真空中の電磁波

命題 2.1.

$\rho = 0$   $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  において  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  は波動方程式を満たす。

◇

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (59)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (60)$$

定理 2.2.

真空中に伝搬する電磁波の複素数解は波数  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  を用いて次のように表される。

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (61)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \mathbf{B}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (62)$$

ただし電磁波の分散関係は光速度  $c$  を用いて  $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$  と与えられ、振動方向  $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}^2$  は進行方向  $\mathbf{k}$  と直交する。 $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$  なお、物理的な電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , 磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  はそれらの複素表現の実部を取ることで求められる。

◇

証明



波動方程式に代入して成り立つことを示す。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla^2 \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (63)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) (-|\mathbf{k}|^2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (64)$$

$$= \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) (-\omega^2(\mathbf{k})) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (65)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (66)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \quad (67)$$

磁束密度も同様にして示せる。  $\square$

## 2.1 導波管での電磁場の伝搬

## 3 特殊相対論と電磁場

## 4 導体と電場

定義 (導体).

時間が経つと

1. 導体内部に電場は存在しない。
2. 導体内部に電荷はなく、表面のみに電荷が分布する。

等電位面、誘導電荷

導体全体で電位は一定、

定理 4.1.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (68)$$

$\diamond$

## 4.1 静電誘導

命題 4.2 (半無限導体と点電荷).

鏡像法

◇

命題 4.3 (一様外部電場中の導体球).

◇

## 4.2 静電遮蔽

導体によって囲まれた空間内の電場は外部の電場に影響されず内部の電荷のみで決まる。

# 5 誘電体と電場

## 5.1 誘電体の基礎

定義 (誘電体).

誘電体は外から電場を作用させると正の電荷と負の電荷は逆向きに変位し、電氣的に分極して微視的な電気双極子を作る。これを電気分極 (electric polarization) といい、電気分極によって電場は弱められる。このとき電気分極による電気双極子モーメント密度を  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  と表す。

定義.

誘電体に関しては仮想的な電荷を導入することで真空中の電磁気学を近似的に適用できる。これを分極電荷 (polarization charge) という。

誘電体内部と誘電体表面における分極電荷の電荷密度を  $\rho_P(\mathbf{r}), \sigma_P(\mathbf{r})$  とおくと、電気分極  $\mathbf{P}$  を用いて次のように表される。対照的に真電荷の電荷密度を  $\rho_e(\mathbf{r})$

$$\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (69)$$

$$\sigma_P(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \quad (70)$$

定理 5.1 (誘電体のガウスの法則).

誘電体による分極電荷を含むガウスの法則は次のように書ける。

$$\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \rho_e(\mathbf{r}) \, dV \iff \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (71)$$

◇

証明

誘電体の中の巨視的な電場  $\mathbf{E}$  は外部電場  $\mathbf{E}_e$  と分極電場  $\mathbf{E}_P$  からなる。

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \varepsilon_0 \int_{\partial V} (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_P) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (72)$$

$$= \int_V \rho_e \, dV + \int_V \rho_P \, dV + \int_{S_P} \sigma_P \, dS \quad (73)$$

$$= \int_V \rho_e \, dV + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) \, dV - \int_{S_P} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (74)$$

$$= \int_V \rho_e \, dV - \int_{\partial V + S_P} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (75)$$

これより  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$  とおくことで求まる。

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \rho_e \, dV \quad (76)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (77)$$

□

定義.

電束密度を  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$  とおく。

定理 5.2 (境界条件).

誘電体の境界面において磁場がないとき次の境界条件を満たす。

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (78)$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (79)$$

◇

証明

Maxwell の方程式より

$$0 = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = D_{1\perp} \Delta S + D_{2\perp} (-\Delta S) \quad (80)$$

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (81)$$

$$0 = \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1\parallel} l - E_{2\parallel} l \quad (82)$$

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (83)$$

□

定理 5.3 (誘電体のエネルギー).

$$u_e = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{P} \quad (84)$$

◇

定理 5.4.

マクスウェルの応力

◇

## 5.2 コンデンサーの極板

## 5.3 常誘電体

定義.

電場に比例して電気分極が現れる場合を常誘電相 (paraelectric phase) といい、そのような誘電体を常誘電体という。この電気分極は電気感受率 (electric susceptibility)  $\chi$  を用いて次のように表される。

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (85)$$

電場を掛けなくても微視的な電気双極子が一方向に揃った電気分極は大きな値をとる。これを自発分極 (spontaneous polarization) といい、このような物質を強誘電体 (ferroelectrics) という。