

KALKULUS I

MUH1B3

Program Perkuliahan Dasar dan Umum
(PPDU)
Telkom University



- **Fungsi**

TUJUAN PEMBELAJARAN

- Menentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi dari R ke R
- Menggambar grafik fungsi linear dan fungsi kuadrat
- Membedakan fungsi ganjil dan fungsi genap
- Menggunakan pergeseran untuk menggambar grafik fungsi
- Menentukan komposisi fungsi
- Menentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi komposisi

2.1 FUNGSI DAN GRAFIK

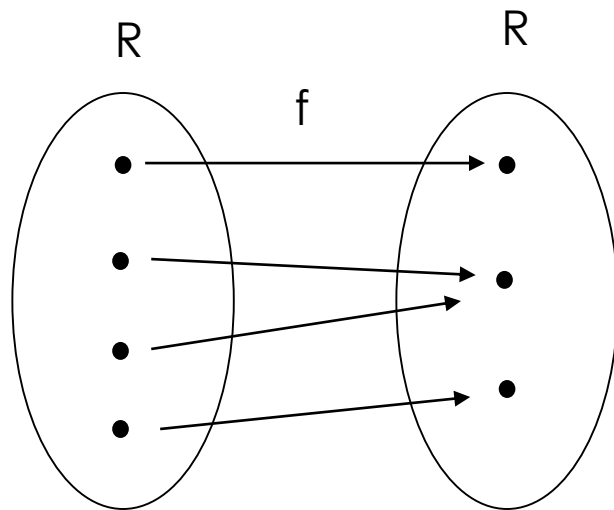
Definisi : Fungsi dari R (bilangan real) ke R adalah suatu aturan yang mengaitkan (memadankan) **setiap** $x \in R$ dengan tepat satu $y \in R$

Notasi : $f: R \longrightarrow R$
 $x \mapsto y = f(x)$

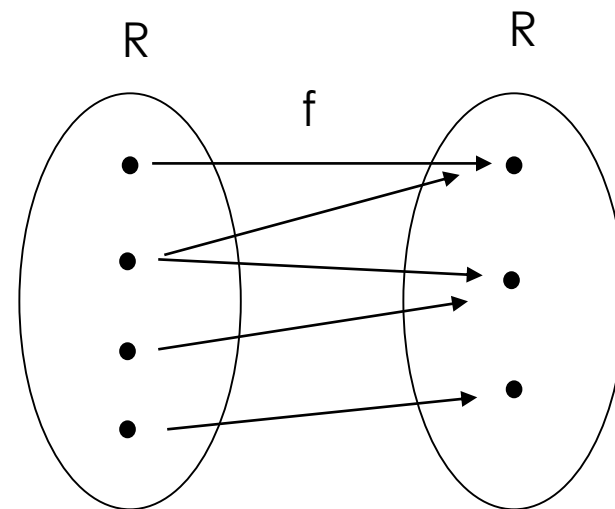
x disebut peubah bebas, y peubah tak bebas

Contoh

1. $f(x) = x^2 + 2x + 4$
2. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
3. $f(x) = x^2, -2 \leq x \leq 3$



f suatu fungsi



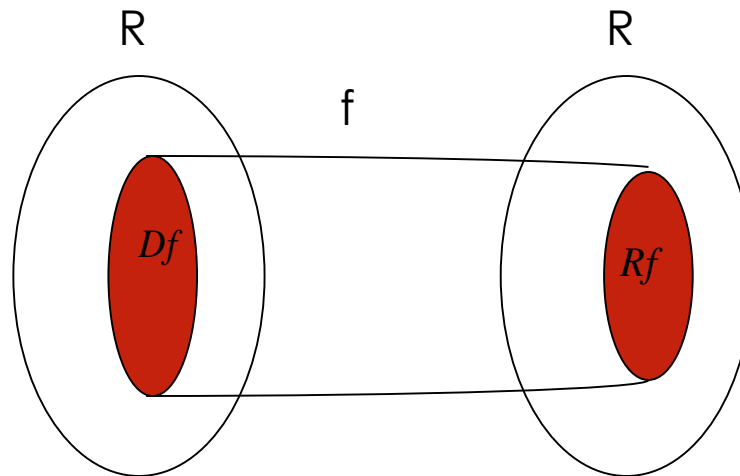
f bukan fungsi

Domain / daerah asal dari $f(x)$, notasi **D_f** ,
yaitu

$$D_f = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$$

Daerah nilai / Range dari $f(x)$, notasi **R_f** ,
yaitu

$$R_f = \{f(x) \in R \mid x \in D_f\}$$



Contoh Tentukan daerah asal dan daerah nilai dari

$$1. f(x) = x^2 + 2x + 4$$

$$2. f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

Jawab :

1. Karena fungsi $f(x)$ selalu terdefinisi untuk setiap x maka

$$D_f = \{x \in R\} = (-\infty, \infty)$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + 3 \quad \Rightarrow \quad R_f = [3, \infty)$$

$$2. D_f = \{x \in R \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$$

$$\text{Karena } \sqrt{x} \geq 0 \text{ untuk } x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1 + \sqrt{x} \geq 1$$

$$\downarrow$$

$$R_f = [1, \infty)$$

GRAFIK FUNGSI

Misal $y = f(x)$, himpunan titik

$$\{(x, y) \mid x \in D_f, y \in R_f\}$$

disebut grafik fungsi f

Grafik fungsi sederhana

a. Fungsi linear

$$f(x) = ax + b$$

Grafik berupa garis lurus

Cara menggambar : tentukan titik potong dgn sumbu x dan sumbu y

Contoh

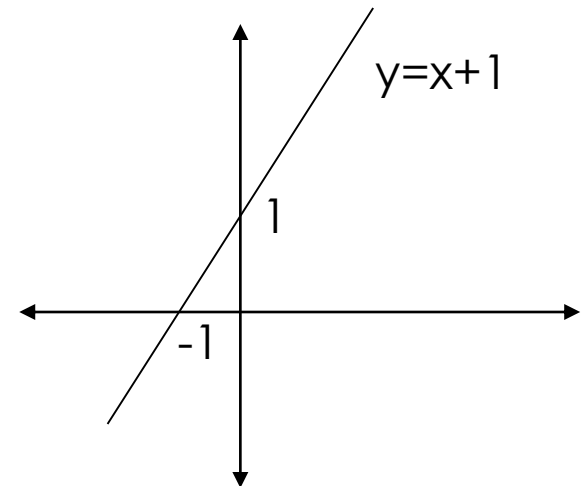
Gambarkan grafik $y = x + 1$

Titik potong dgn sumbu x

$$y = 0 \longrightarrow x = -1 \longrightarrow (-1, 0)$$

Titik potong dgn sumbu y

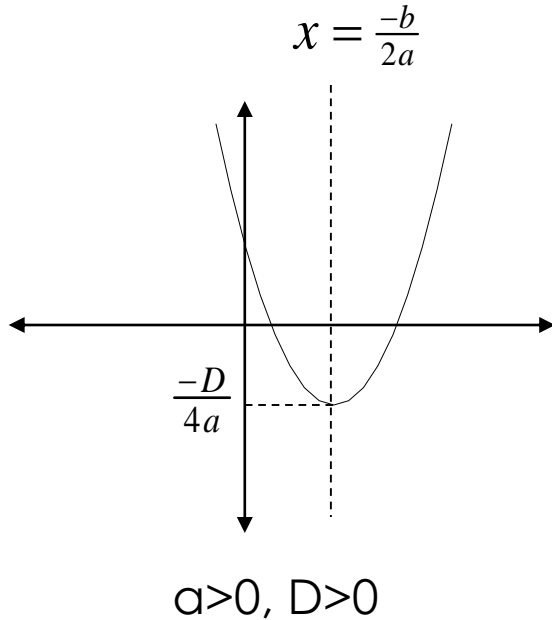
$$x = 0 \longrightarrow y = 1 \longrightarrow (0, 1)$$



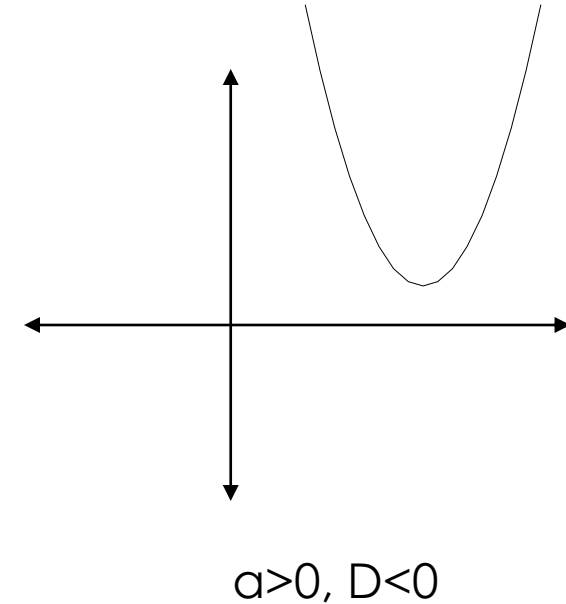
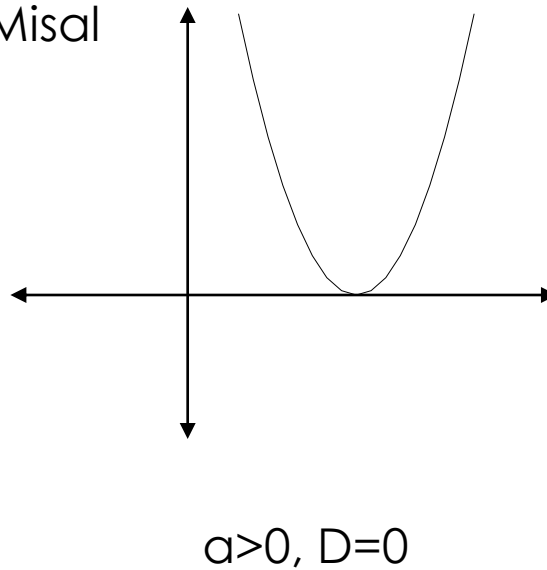
b. Fungsi Kuadrat

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

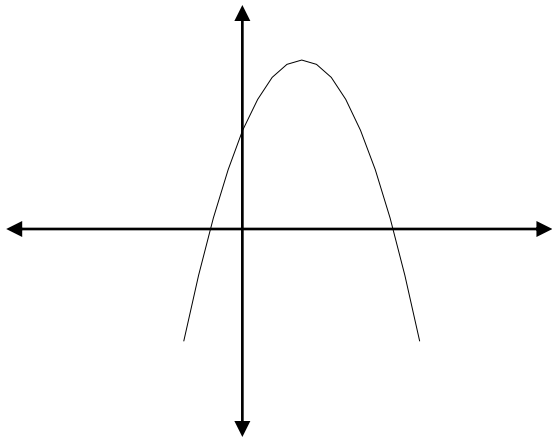
Grafik berupa parabola. $D = b^2 - 4ac$



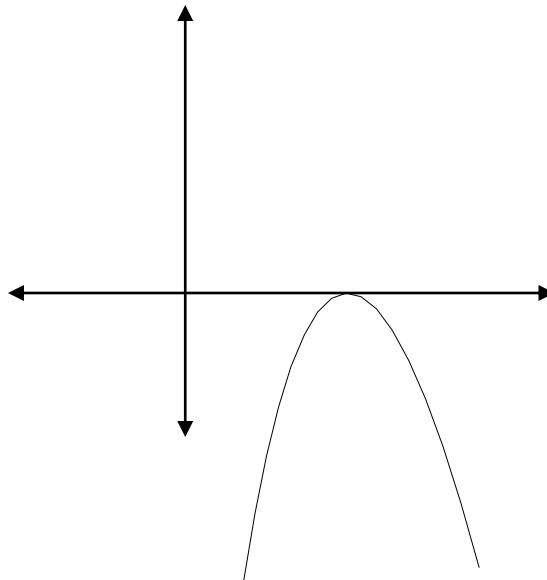
Misal



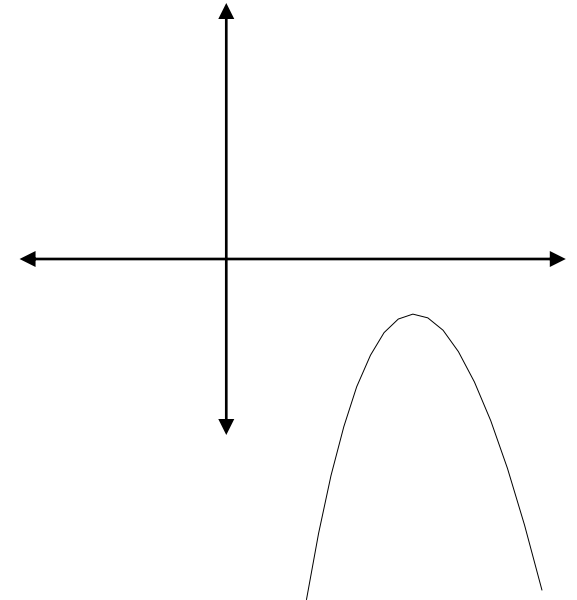
$a < 0, D > 0$



$a < 0, D = 0$



$a < 0, D < 0$



MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI DENGAN PERGESERAN

- Jika diketahui grafik fungsi $y = f(x)$, maka :
- Grafik $y = f(x-h) + k$ diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = f(x)$
 - (i) sejauh h satuan ke kanan jika h positif dan k satuan ke atas jika k positif;
- Grafik $y = f(x+h) - k$ diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = f(x)$
 - (ii) sejauh h satuan ke kiri jika h negatif dan k satuan ke bawah jika k negatif.

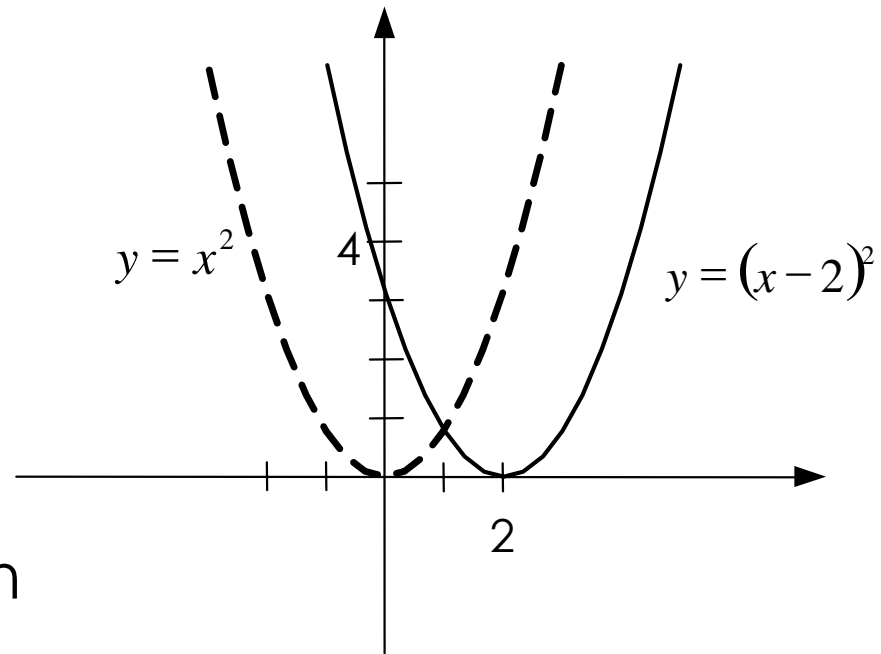
CONTOH PERGESERAN

1. Gambarkan grafik fungsi

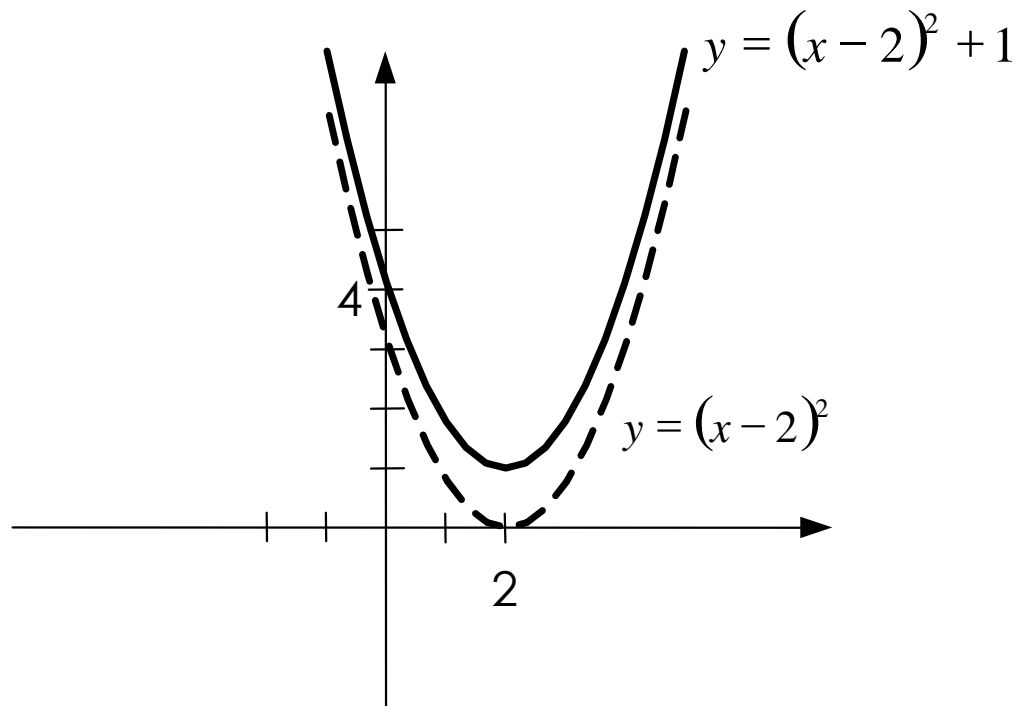
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 5 \\ &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5 \\ &= (x - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$y = (x - 2)^2$$

→ $y = x^2$ digeser sejauh
2 ke kanan



Kemudian $y = (x - 2)^2$ digeser sejauh 1 ke atas
maka akan terbentuk $y = (x - 2)^2 + 1$



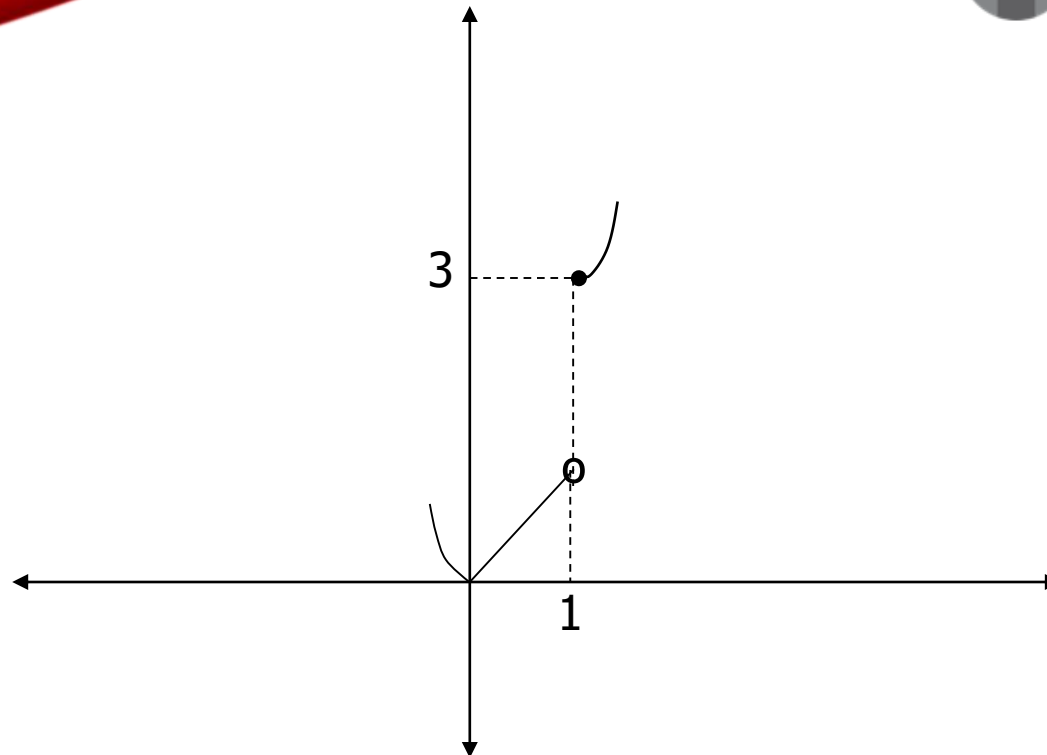
c. Fungsi Banyak Aturan

Bentuk umum

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(x) \end{cases}$$

Contoh Gambarkan grafik

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 2 + x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$



Untuk $x \leq 0$

$$f(x) = x^2$$

Grafik: parabola

Untuk $0 < x < 1$

$$f(x) = x$$

Grafik: garis lurus

Untuk $x \geq 1$

$$f(x) = 2 + x^2$$

Grafik: parabola

2.2 JENIS-JENIS FUNGSI

1. Fungsi polinom (suku banyak)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Fungsi suku banyak terdefinisi dimana-mana(\mathbb{R})

2. Fungsi Rasional :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

dengan $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan fungsi polinom , dan $q(x) \neq 0$.

Fungsi rasional terdefinisi dimana-mana kecuali dipembuat nol $q(x)$

contoh

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \text{ terdefinisi di mana}^2, \text{ kecuali di } x = 2, \text{ dan } x = -2$$

$$\longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

3. Fungsi genap dan fungsi ganjil

Definisi : Fungsi f disebut fungsi ganjil jika $f(-x) = -f(x)$
Grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik asal

contoh

$$f(x) = x^3 \text{ ganjil karena } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Fungsi f disebut fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$
Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu y

contoh

$$f(x) = x^2 \text{ genap karena } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

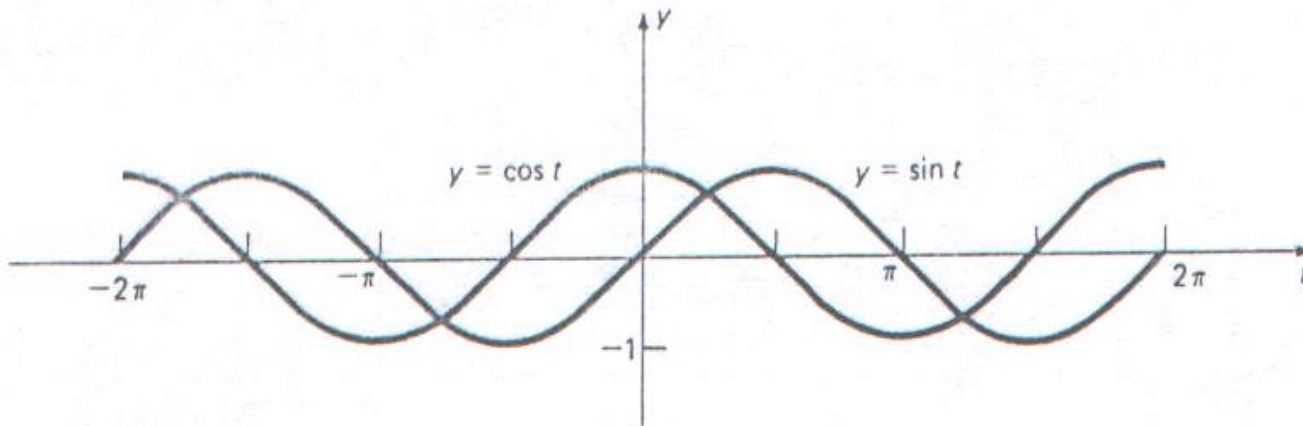
4. Fungsi periodik

Fungsi $f(x)$ disebut periodik dengan perioda p jika $f(x+p) = f(x)$.

Contoh

$f(x) = \sin x$ fungsi periodik dengan perioda 2π karena

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi) = \sin x \cos(2\pi) + \cos x \sin(2\pi) \\ &= \sin x = f(x) \end{aligned}$$



5. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

yaitu bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

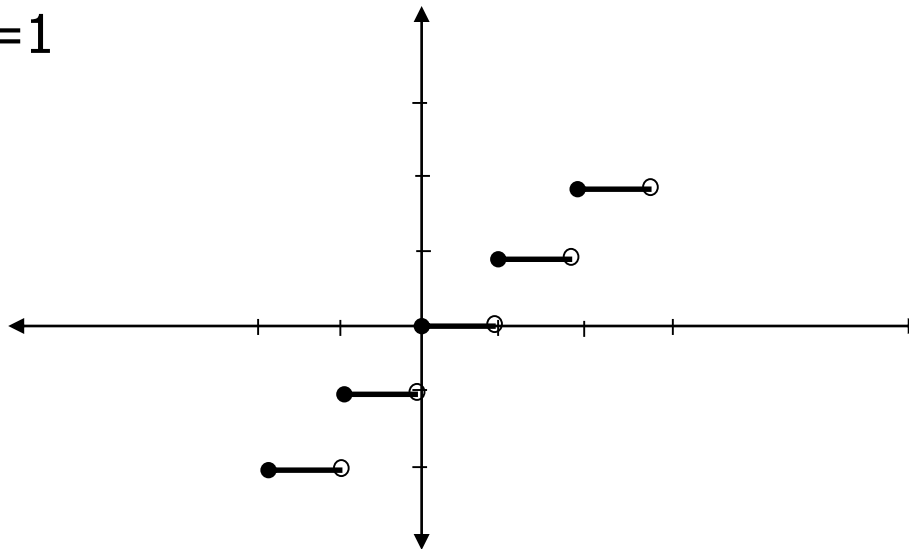
Notasi lain : $f(x) = [x]$

Contoh :

$$\lfloor 5,9 \rfloor = 5$$

$$\lfloor 1 \rfloor = 1$$

$$\lfloor -2,6 \rfloor = -3 \quad , \quad \lfloor -0,9 \rfloor = -1$$



2.3 OPERASI FUNGSI

A. Operasi aljabar

- **Definisi:** Misalkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai daerah asal D_f dan D_g , maka
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$
- $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$
- $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \quad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

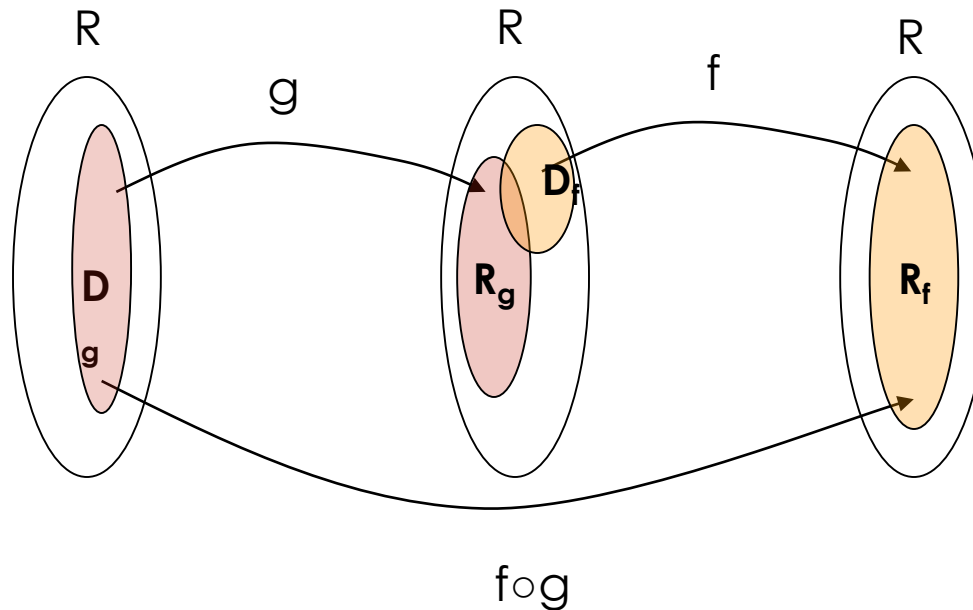
B. Fungsi Komposisi

Definisi: Komposisi dari fungsi $f(x)$ dengan $g(x)$ didefinisikan sebagai

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Syarat yang harus dipenuhi agar $f \circ g$ ada (terdefinisi) adalah

$$R_g \cap D_f \neq \emptyset$$



SIFAT-SIFAT FUNGSI KOMPOSISI

- $f \circ g \neq g \circ f$.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$R_{f \circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(t), t \in R_g\}$$

- **Contoh:**

Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 - 1$

Tentukan (jika ada) $f \circ g$ dan $D_{f \circ g}$, $R_{f \circ g}$

Jawab :

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow D_f = [0, \infty), R_f = [0, \infty)$$

$$g(x) = x^2 - 1 \longrightarrow D_g = R, R_g = [-1, \infty)$$

Karena

$$R_g \cap D_f = [-1, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty) \neq \emptyset$$

maka $f \circ g$ terdefinisi, dan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid x^2 - 1 \in [0, \infty)\} \\ &= \{x \in R \mid x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in R \mid (x-1)(x+1) \geq 0\} \\ &= (-\infty, -1] \cup [1, \infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{f \circ g} &= \{y \in R_f \mid y = f(t), t \in R_g\} \\ &= \{y \geq 0 \mid y = \sqrt{t}, t \geq -1\} = [0, \infty). \end{aligned}$$

Terima Kasih



**Telkom
University**

