2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 4 回（2021 年 6 月 2 日）宿題解答例

宿題 1

θ を実数として、$\cos\theta \neq 0$ を満たしているとする。この時、x, y, z, w に関する次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta - z\cos\theta + w\sin\theta = 2\cos\theta, \\ x\sin\theta + y\cos\theta - z\sin\theta - w\cos\theta = 0, \\ x\cos\theta + y\sin\theta + z\cos\theta - w\sin\theta = 0, \\ -x\sin\theta + y\cos\theta + z\sin\theta + w\cos\theta = 0. \end{cases}$$

順番に掃き出していっても解けますが、以下では変形する順番をやや工夫しています。

解答　拡大係数行列は以下になり、行基本変形を行う。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta & \sin\theta & 2\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

第 1 行に第 3 行を足し、第 2 行に第 4 行を足して、

$$\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 2\cos\theta \\ 0 & 2\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

第 1 行と第 2 行を $2\cos\theta \neq 0$ で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 1 行の $\cos\theta$ 倍と第 2 行の $\sin\theta$ 倍を引き、第 4 行から第 1 行の $-\sin\theta$ 倍と第 2 行の $\cos\theta$ 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}.$$

第 3 行を $\cos\theta \neq 0$ で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tan\theta & -1 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行の $\sin\theta$ 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tan\theta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta + \sin\theta\tan\theta & 2\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tan\theta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\cos\theta} & 2\sin\theta \end{pmatrix}.$$

第 4 行を $\cos\theta$ 倍して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tan\theta & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 4 行の $\tan\theta$ 倍を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\sin^2\theta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}.$$

よって、解は $(x, y, z, w) = (1, 0, 2\sin^2\theta - 1, 2\sin\theta\cos\theta)$ である。

注意　解の表示は $(1, 0, 1 - 2\cos^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta)$ や $(1, 0, -\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ としても同じものを表しているので正解です。

高度な方法になりますが、2 次回転行列 $R(\theta)$ を使って長方形分割すれば以下のようにして解くこともできます。

別解 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと、拡大係数行列は以下の形になっている。

$$\begin{pmatrix} R(\theta) & -R(\theta) & 2\cos\theta\boldsymbol{e} \\ R(-\theta) & R(\theta) & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

上の行に $R(\theta)$ の逆行列 $R(-\theta)$ を左からかけて、

$$\begin{pmatrix} E & -E & 2\cos\theta R(-\theta)\boldsymbol{e} \\ R(-\theta) & R(\theta) & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

下の行から上の行に左から $R(-\theta)$ をかけたものを引いて、

$$\begin{pmatrix} E & -E & 2\cos\theta R(-\theta)\boldsymbol{e} \\ O & R(\theta)+R(-\theta) & -2\cos\theta R(-2\theta)\boldsymbol{e} \end{pmatrix}.$$

ここで $R(\theta)+R(-\theta) = 2\cos\theta E$ なので、下の行を $2\cos\theta \neq 0$ で割って、

$$\begin{pmatrix} E & -E & 2\cos\theta R(-\theta)\boldsymbol{e} \\ O & E & -R(-2\theta)\boldsymbol{e} \end{pmatrix}.$$

上の行に下の行を足して、

$$\begin{pmatrix} E & O & (2\cos\theta R(-\theta) - R(-2\theta))\boldsymbol{e} \\ O & E & -R(-2\theta)\boldsymbol{e} \end{pmatrix}.$$

ここから解は $(x,y,z,w) = (1,0,1-2\cos^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta)$ であることがわかる。

注意 長方形分割された行列に対しても以下の行基本変形を拡張したものを考えることができます。

(i) ある行のまとまりに逆行列を左からかける。
(ii) ある行のまとまりに行列を左からかけたものを別の行のまとまりに足す。
(iii) 2 つの行のまとまりを入れ替える。

これらは同値変形なので今回の問題を上記のように解くことができるのですが、実はこれらの変形は通常の 1 行ごとの行基本変形を何回か使ったものとして書くことができます。

実際 (ii) と (iii) は簡単で (i) は逆行列は存在するなら基本行列の積としてあらわすことができる[*1]ことからわかります。例えば、今回の解答のように 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 $A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ をかけることを考えると $(ad-bc \neq 0)$、$a \neq 0$ の場合は $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を第 1 行を a で割って第 2 行から第 1 行の c 倍を引き第 2 行を $\frac{ad-bc}{a}$ で割り第 1 行から第 2 行の $\frac{b}{a}$ 倍を引くことで単位行列になることから、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られ次のように書くことができます。

$$\begin{pmatrix} E & O & O \\ O & A^{-1} & O \\ O & O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & O \\ \boldsymbol{0} & 1 & -\frac{b}{a} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 & 1 & \boldsymbol{0} \\ O & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & O \\ \boldsymbol{0} & 1 & 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 & \frac{a}{ad-bc} & \boldsymbol{0} \\ O & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & O \\ \boldsymbol{0} & 1 & 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -c & 1 & \boldsymbol{0} \\ O & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & O \\ \boldsymbol{0} & \frac{1}{a} & 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 & 1 & \boldsymbol{0} \\ O & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & E \end{pmatrix}.$$

右辺の行列はどれも基本行列なので、これにより (i) は行基本変形の合成として得られることがわかります。なお、$a = 0$ の時は $c \neq 0$ ならば最初に行の入れ替えを行ってから同じようなことをすればよいです。$a = c = 0$ は $ad-bc \neq 0$ に反するので除外されています。

[*1] 齋藤正彦、線形代数学、東京図書、2014 年、2.3.3【コメント】1) 参照

2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 4 回（2021 年 6 月 2 日）宿題解答例

宿題 2

a を実数として、次の 4 次正方行列の階数を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

解答　与えられた行列を基本変形していく。まず、第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の a 倍を引き、第 3 行から第 1 行を引き、第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

ここで、$a=1$ の時、この行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので、階数は 1 である。

以下では $a \neq 1$ の時を考える。第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行と第 4 行を $1-a \neq 0$ で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 2 行の $1+a$ 倍を引き、第 4 行から第 2 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行の $a+2$ 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}.$$

よって、$a+3=0$ の時は階数は 3 で、そうでない場合は 4 である。

以上より求める階数は、$a=1$ の時 1 で、$a=-3$ の時 3 で、どちらでもない場合は 4 である。

2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 4 回（2021 年 6 月 2 日）宿題解答例

この問題には別解として「全ての行を足し合わせる」という以下の解法が知られています。

別解　第 1 行に他の行を足して、

$$\begin{pmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

ここで $a+3=0$ の時つまり $a=-3$ の時を考えると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 2 行を引き、第 4 行から第 2 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行を 4 で割って、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

よって、階数は 3 である。

一方で $a+3\neq 0$ の時は、第 1 行を $a+3$ で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

第 2 行、第 3 行、第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

よって、$a-1=0$ の時は階数は 1 で、そうでない場合は 4 である。

以上より求める階数は、$a=-3$ の時 3 で、$a=1$ の時 1 で、どちらでもない場合は 4 である。

解説　この問題は 4 次から n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

に一般化することができ $(n=2,3,\cdots)$、階数は $a=1$ の時 1、$a=1-n$ の時 $n-1$、それら以外の時 n となります。