2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 6 回（2022 年 7 月 6 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k+n}}.$$

この手の極限は区分求積法の考え方を利用して積分の計算に帰着させます。

解答　変形すると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{\frac{k}{n}+1}}$$

なので、関数 $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ は $[0,1]$ 上連続であることに注意して区分求積法（教科書系 3.1.11）より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k+n}}=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

ここで $t=\sqrt{x+1}$ と置換すると $x=t^2-1,\ \frac{dx}{dt}=2t$ より

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt=\int_1^{\sqrt{2}}2(t^2-1)dt=\left[\frac{2}{3}t^3-2t\right]1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$$

以上より答えは $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})$。

問題 $\boxed{2}$

次の積分の極限を計算せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{x^2+1}dx.$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{e^x}dx.$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{\cosh x}dx.$

解説　いったん arctan などを使って定積分を計算し、$\lim_{t\to\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2}$ などを使って極限を計算します。

解答

(1) 計算すると、

$$\int_0^t\frac{1}{x^2+1}dx=[\arctan x]_0^t=\arctan t\to\frac{\pi}{2}$$

よって答えは $\frac{\pi}{2}$。

(2) 計算すると、

$$\int_0^t\frac{1}{e^x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^t=1-e^{-t}\to 1$$

よって答えは $\frac{\pi}{2}$。

(3) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ に注意して、

$$\int_0^t\frac{1}{\cosh x}dx=\int_0^t\frac{\cosh x}{\cosh^2 x}dx=\int_0^t\frac{\cosh x}{\sinh^2 x+1}dx.$$

$(\sinh x)'=\cosh x$ より

$$\int_0^t\frac{\cosh x}{\sinh^2 x+1}dx=[\arctan(\sinh x)]_0^t=\arctan(\sinh t)$$

ここで $t\to\infty$ とすると $\sinh t\to\infty$ なので、最右辺は $\frac{\pi}{2}$ に収束する。よって答えは $\frac{\pi}{2}$。