2022年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第2回（2022年4月27日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ が実数 α に数列 $\{b_n\}$ が実数 β にそれぞれ収束するとする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は有界である、つまりある実数 $M>0$ が存在して全ての n に対して $|a_n| \leq M$ となることを示せ。
(2) 数列 $\{a_n b_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束することを示せ。

講義ノートに載っている問題ですが重要な考え方を含んでいるので証明をしっかりできるようになりましょう。

解答

(1) 数列 $\{a_n\}$ が実数 α に収束することの定義は "$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}\ n\geq N \implies |a_n-\alpha|<\varepsilon$" なので、$\varepsilon=1$ とすることで、ある自然数 N が存在して N 以上のすべての自然数 n に対して、$|a_n-\alpha|<1$。ここから三角不等式より、

$$|a_n| \leq |a_n-\alpha|+|\alpha| \leq |\alpha|+1.$$

これが $n\geq N$ に対して成り立ち、$n<N$ となる自然数 n は有限個なので、

$$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N-1}|,|\alpha|+1\}\geq 1$$

とすればすべての自然数 n に対して $|a_n|\leq M$ である。つまり、数列 $\{a_n\}$ は有界である。

(2) 三角不等式を使って $|a_nb_n-\alpha\beta|$ を評価すると、

$$|a_nb_n-\alpha\beta| = |a_n(b_n-\beta)-(a_n-\alpha)\beta| \leq |a_n||b_n-\beta|+|\beta||a_n-\alpha|. \tag{1}$$

(1) より $|a_n|\leq M$ とできるので、

$$|a_nb_n-\alpha\beta| \leq M|b_n-\beta|+|\beta||a_n-\alpha|. \tag{2}$$

ここで講義ノート定理 2.22 1. と 2. より n についての極限を取ると右辺は 0 に収束する。よって、はさみうちの原理（講義ノート問 1(iv)）より $|a_nb_n-\alpha\beta|\to 0$ つまり数列 $\{a_nb_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束する。

注意

- (2) について、(2) が得られたらはさみうちの原理を使ってすぐに結論を導いていますが、極限の定義に立ち返ると以下のように書くこともできます。
  $\varepsilon>0$ に対して、$a_n\to\alpha$ の定義から $\frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}>0$ に対して自然数 N_a が存在して任意の N_a 以上の自然数 n に対して $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}$ が成立する。$b_n\to\beta$ の定義から $\frac{\varepsilon}{2M}>0$ に対して自然数 N_b が存在して任意の N_b 以上の自然数 n に対して $|b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2M}$ が成立する。よって、$N=\max\{N_a,N_b\}$ とおくと任意の N 以上の自然数 n に対して

$$|a_nb_n-\alpha\beta| \leq M|b_n-\beta|+|\beta||a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{|\beta|\varepsilon}{2|\beta|+1} < \varepsilon.$$

  よって、$|a_nb_n-\alpha\beta|\to 0$ である。
- 一方で (1) から直ちに結論を導くのは議論が飛躍しているので収束する数列の有界性を先に示すのが重要です。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 4 月 27 日）問題解答例

問題 $\boxed{2}$

次の漸化式によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

(1) この数列 $\{a_n\}$ は各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $a_n \geq \sqrt{2}$ を満たすことを示せ。ヒント：相加・相乗平均の関係式。

(2) この数列 $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ。

(3) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

ニュートン法による平方根の計算を背景とした解けない漸化式の極限に関する問題です。

解答

(1) $n = 1$ の時、$a_1 = 2 > \sqrt{2}$ なので、条件が成立する。$n = 1, 2, 3, \cdots$ で成立するつまり $a_n \geq \sqrt{2}$ の時、相加・相乗平均の関係式（任意の $a, b > 0$ に対して $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ、講義ノート定理 2.28）を使えば、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$$

なので、$n + 1$ でも成立する。以上より数学的帰納法から、各 n に対して $a_n \geq \sqrt{2}$ が成立する。

(2) 各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $a_{n+1} \leq a_n$ を示せばよい。計算して (1) を使うと、

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(-a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0.$$

よって数列 (a_n) は単調減少である。

(3) (2) より数列 (a_n) は単調減少で (1) より下に有界でもあるので、実数の連続性（講義ノート公理 3）より何らかの実数 α に収束する。ここで $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので漸化式から、

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right).$$

これを解くと $\alpha = \pm\sqrt{2}$ である。ここで (1) より $a_n \geq \sqrt{2}$ で講義ノート問 1(iii) から $\alpha \geq \sqrt{2}$ が従うので $\alpha = \sqrt{2}$ 以外ありえない。以上より極限は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$。

注意　(3) は次のようにしても示すことができます。

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq \frac{1}{2}|a_n - \sqrt{2}|$$

よって、

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|a_1 - \sqrt{2}| \to 0.$$

しかし、今回の問題のように数列の単調性と有界性を示した後だと収束することが保証されてすぐに極限を求めることができます。