2022年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第1回（2022年4月13日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

集合 A, B, C に対して、

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

が成り立つことを示せ（図で説明するのではなく、式と文章で証明を書くのが望ましい）。

解説　集合が等しいことを言うには二つの包含関係

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

を示すのでした。

解答　まず $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示す。$x \in A \cap (B \cup C)$ とする。この時、$x \in A$ かつ $x \in B \cup C$ である。

- $x \in B$ の場合、$x \in A \cap B$ なので、$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ である。
- $x \in C$ の場合、$x \in A \cap C$ なので、$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ である。

よっていずれの場合も $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ なので、$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が示された。

次に $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示す。$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とする。

- $x \in A \cap B$ の場合、$x \in A$ であり $x \in B$ でもあり、後者から $x \in B \cup C$ なので、$x \in A \cap (B \cup C)$ である。
- $x \in A \cap C$ の場合、$x \in A$ であり $x \in C$ でもあり、後者から $x \in B \cup C$ なので、$x \in A \cap (B \cup C)$ である。

よっていずれの場合も $x \in A \cap (B \cup C)$ なので、$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ が示された。

以上より $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ である。

宿題 $\boxed{4}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を関数とする。この時、「ある $L \geq 0$ が存在して、任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ が成り立つ」という命題の否定を答えよ。

解説　命題 "$\exists x \in X \text{ s.t. } P(x)$" の否定は "$\forall x \in X\ \neg P(x)$" であり、命題 "$\forall x \in X\ P(x)$" の否定は "$\exists x \in X \text{ s.t. } \neg P(x)$" となるのでした。

解答　問題の命題は

$$\exists L \geq 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

と書くことができ、この否定を変形していくと

$$\neg(\exists L \geq 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|),$$

$$\forall L \geq 0\ \neg(\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|),$$

$$\forall L \geq 0\ \exists x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \neg(\forall y \in \mathbb{R}\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|),$$

$$\forall L \geq 0\ \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \neg(|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|),$$

$$\forall L \geq 0\ \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } |f(x) - f(y)| > L|x - y|.$$

よって答えは「任意の $L \geq 0$ に対して、ある $x, y \in \mathbb{R}$ が存在して、$|f(x) - f(y)| > L|x - y|$ が成り立つ」。

注意　今回の命題が真となるような関数 f をリプシッツ連続であるといいます。微分方程式の理論でよく現れる扱いやすい（ただし強い）連続性の概念の一つです。例えば $f(x) = x$ はリプシッツ連続ですが、$f(x) = x^2$ は（定義域が $\mathbb{R}$ の時は）リプシッツ連続ではありません。