2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2021 年 10 月 13 日）宿題解答例

宿題 1

漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$ で定まるフィボナッチ数列 (F_n) について、（正項）級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ は収束することを示せ。

この数列は一般項が計算できます。

解答　漸化式を解くと、

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

となる（詳細省略）。$a_n = \frac{1}{F_n}$ とおいて計算すると $-1 < \beta < 0 < 1 < \alpha$ に注意して、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \to \frac{1}{\alpha} < 1.$$

よって、ダランベールの判定法（教科書命題 4.1.13 1)）より正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ は収束する。

ちなみに以下のように漸化式から大雑把な評価をすることで一般項を求めることなく収束を示すこともできます。

別解　$F_1 \geq 0$, $F_2 \geq 0$ で帰納的に $F_n \geq 0$ がわかる。よって、$F_{n+2} \geq F_{n+1}$ なので、$F_2 = F_1$ より $F_{n+1} \geq F_n$ である。したがって $F_{n+2} \geq 2F_n$ が成り立つ。ここから $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $F_{2k} \geq 2^{k-1}F_2 = 2^{k-1}$, $F_{2k-1} \geq 2^{k-1}F_1 = 2^{k-1}$、つまり $F_n \geq \sqrt{2}^{n-2}$ を得る。正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^{n-2}}$ は収束するので、教科書命題 4.1.12 より、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ も収束する。

宿題 2

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ は収束するか答えよ。

ヒント：部分和を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n} \cos l + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sum_{l=1}^{k} \cos l$ と変形する。

解説　ディリクレの判定法が題材の問題です。解答の方針としてはヒントの変形をして、$\sum_{l=1}^{k} \cos l$ が有界になることを示せば $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ は k の -2 乗ぐらいの大きさなので問題 2 から収束が言えます。実際には以下の解答例のようにうまく計算することで問題 2 の知識を使わなくても解けます。また、和 $\sum_{l=1}^{k} \cos l$ は計算できます。

解答　$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $B_k = \sum_{l=1}^{k} \cos l$ と定義し $B_0 = 0$ とおく。この時 $\cos k = B_k - B_{k-1}$ なので、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k - B_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}B_k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}B_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)B_k + \frac{1}{n+1}B_n - B_0$$

となり、ヒントの式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k} = \frac{1}{n+1}B_n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)B_k$$

を得る。B_k を計算するために $e^{il} = \cos l + i \sin l$ とおく。この時、

$$B_k = \sum_{l=1}^{k} \cos l = \sum_{l=1}^{k} \frac{e^{il} + e^{-il}}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{i} - e^{i(k+1)}}{1 - e^{i}} + \frac{1}{2}\frac{e^{-i} - e^{-i(k+1)}}{1 - e^{-i}}$$

と計算できるので、

$$|B_k| \leq \frac{1}{|1 - e^{i}|} + \frac{1}{|1 - e^{-i}|} = \frac{2}{\sqrt{(1 - \cos 1)^2 + \sin^2 1}}$$

で最右辺を M とおくと $|B_k| \leq M < \infty$ である。よって、$n \to \infty$ とすると、$\frac{1}{n+1}B_n \to 0$ であり、

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)|B_k| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)M = M - \frac{1}{n+1}M \to M$$

で、つまり級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)B_k$ は絶対収束するので、教科書定理 4.1.22 より、特に収束している。以上のことをまとめると級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ は収束することがわかる。