2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 3 回（2022 年 11 月 8 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

$\mathbb{R}$ 上で定義された次の関数 f は C^∞ 級であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

ヒント：整級数。

解答　$\sin x$ の整級数展開を考えると、

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

であり右辺の整級数の収束半径は ∞ であった。これを $x \neq 0$ で割ると、

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad (x \neq 0)$$

となり、右辺は整級数で $x = 0$ のときの値は $\frac{(-1)^0}{1!} = 1$ なので、結局

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

である。ここで右辺は収束半径 ∞ の整級数なので、$\mathbb{R}$ 全体で項別微分をすることができ（教科書第 5 章定理 15 の系）、$\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級である。

宿題 $\boxed{4}$

(1) 円周率 π について次の等式を示せ。

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{(2n+1)3^n}.$$

ヒント：逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の整級数による表示（テーラー展開・マクローリン展開）を考える。

(2) $\pi > 3.1$ を示せ。

ヒント：(1) の級数で $n = 2$ まで正確に計算して、それ以降は下から評価する。

解答

(1) 教科書第 5 章例 13 の逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の整級数による表示

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad |x| < 1$$

に $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{3}^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

よって、両辺に 6 をかけて、求める等式を得る。

(2) 小問 (1) の式

$$\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot 3^4} - \frac{2\sqrt{3}}{11 \cdot 3^5} + \cdots$$

で第 4 項以降を奇数番目の項を 0 で抑え偶数番目の項の $2n+1$ の部分を 7 で抑えることで、

$$\pi > 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^5} - \cdots = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3}\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{82\sqrt{3}}{45} - \frac{\sqrt{3}}{84}.$$

電卓で計算すると右辺の値は $3.13556\cdots$ より、$\pi > 3.1$ がわかる。

注意　電卓で小数の割り算や平方根を計算すると誤差が生じてしまう恐れがあります。厳密な証明を書くならば、示すべき式 $\frac{82\sqrt{3}}{45} - \frac{\sqrt{3}}{84} > 3.1$ の分母を払い 2 乗するなどして、整数の大小関係の式に同値変形してそれを示すのがよいでしょう。