2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第4回宿題解答例

中安淳

2023年6月2日

宿題 $\boxed{17}$

任意の正方行列 X は対称行列 S と交代行列 A の和

$$X = S + A$$

と表すことができ、このような対称行列 S と交代行列 A は一意であることを示せ。

存在を示す問題では具体的に（今回は X を使って）表して、一意性の証明は条件を満たすものが二つあったとしてそれらが等しいことを示します。

解答　$S = \frac{1}{2}(X + {}^tX)$ と $A = \frac{1}{2}(X - {}^tX)$ とすれば、

$${}^tS = S = \frac{1}{2}(X + {}^tX), \quad {}^tA = -A = \frac{1}{2}({}^tX - X) \quad S + A = X$$

なので、条件を満たす。また、$X = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$ となる対称行列 S_1, S_2 と交代行列 A_1, A_2 があったとする時、

$$S_1 - S_2 = A_2 - A_1$$

である。ここで $S = S_1 - S_2$ は ${}^tS = {}^tS_1 - {}^tS_2 = S_1 - S_2 = S$ なので対称行列で、$A = A_2 - A_1$ は ${}^tA = {}^tA_2 - {}^tA_1 = -A_2 + A_1 = -A$ なので交代行列である。これらが等しいので $S = A$ は対称行列かつ交代行列なので、${}^tS = S = -S$ つまり $S = A$ は零行列に他ならない。したがって $S_1 = S_2$, $A_1 = A_2$ なので一意性が言えた。

宿題 $\boxed{18}$

行基本変形

- 第 i 行と第 j 行を入れかえる

は実は他の二つの行基本変形

- 第 i 行を c 倍する $(c \neq 0)$ と
- 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える $(i \neq j)$

のみを用いることでも実現できる。このことを踏まえて、基本行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を他の基本行列

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

の積として表せ。

解答　行列 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の下の行に上の行を足して、上の行から下の行を引いて、上の行を -1 倍して、下の行から上の行を引けば、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -b \\ a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

で行の交換になる。これを基本行列で考えることで

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。