2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 6 回（2022 年 12 月 27 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

x, y が実数全体を動くとき、次の関数 $f(x,y)$ の極大・極小を答えよ。

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x + 4y - 1.$$

関数の極大・極小は、まず 1 階偏導関数が 0 になるという連立方程式を解き極大点・極小点の候補を見つけ、さらにその点での 2 階偏微分係数を調べるとだいたいのことがわかるのでした。

解答　$f(x,y)$ の 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y) = 2x + 2y - 6, \quad f_y(x,y) = 2x + 4y + 4.$$

ここから (a,b) を極大・極小となる点とすると

$$f_x(a,b) = 2a + 2b - 6 = 0, \quad f_y(a,b) = 2a + 4b + 4 = 0$$

を満たす。この連立方程式を解いて、$(a,b) = (8,-5)$。

$f(x,y)$ の 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 2, \quad f_{yy}(x,y) = 4.$$

よって、$(a,b) = (8,-5)$ での 2 階の偏微分係数は

$$f_{xx}(a,b) = 2, \quad f_{xy}(a,b) = f_{xy}(a,b) = 2, \quad f_{yy}(a,b) = 4.$$

ここで教科書第 6 章定理 14 を使うことを考えると、

$$D = f_{xy}(a,b)^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -4 < 0$$

かつ $f_{xx}(a,b) = 2 > 0$ なので、$(a,b) = (8,-5)$ は極小点である。

以上より $f(x,y)$ は $(x,y) = (8,-5)$ で極小となりその値は $f(8,-5) = -35$ で、極大はない。

問題 $\boxed{2}$

一般に $\varphi(x,y)$, $f(x,y)$ を C^1 級関数とし、(x,y) が $\varphi(x,y)=0$ という条件を満たしながら動く時 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で広義の極値を取るならば、$\varphi_x(a,b)=\varphi_y(a,b)=0$ または $F(x,y)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ として $F_x(a,b)=F_y(a,b)=0$ が成り立つような定数 λ が存在する（ラグランジュの乗数法、教科書第 6 章定理 15 参照)。
このことを利用して条件 $2x^2+4xy+5y^2=1$ の下での関数 x^2+y^2 の最大・最小を答えよ。

解答　$\varphi(x,y)=2x^2+4xy+5y^2-1$, $f(x,y)=x^2+y^2$ とおくとこれらは C^1 級関数で、偏導関数は

$$\varphi_x(x,y)=4x+4y,\quad \varphi_y(x,y)=4x+10y,$$
$$f_x(x,y)=2x,\quad f_y(x,y)=2y.$$

問題文のラグランジュの乗数法より、最大・最小となる (a,b) においては $\varphi_x(a,b)=\varphi_y(a,b)=0$ または $f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0$ であるが、$\varphi_x(a,b)=\varphi_y(a,b)=0$ の場合は $4a+4b=4a+10b=0$ で $a=b=0$ となりこれは $\varphi(x,y)=0$ 上の点ではないので解なしである。よってある定数 λ が存在して $f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0$ であり、つまり

$$2a-\lambda(4a+4b)=2b-\lambda(4a+10b)=0$$

が成り立つ必要がある。よって

$$\begin{pmatrix}1-2\lambda & -2\lambda\\ -2\lambda & 1-5\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

となる。係数行列が逆行列を持つときは $(a,b)=(0,0)$ となり、これは $\varphi(x,y)=0$ 上の点ではないので不適である。よって逆行列を持たない、つまり行列式の値が 0 なので、

$$\det\begin{pmatrix}1-2\lambda & -2\lambda\\ -2\lambda & 1-5\lambda\end{pmatrix}=(1-2\lambda)(1-5\lambda)-4\lambda^2=6\lambda^2-7\lambda+1=0.$$

これを解くと $\lambda=1,\frac{1}{6}$ である。

- $\lambda=1$ のとき、連立方程式は $a+2b=0$ と同値でこれを $\varphi(a,b)=0$ つまり $2a^2+4ab+5b^2=1$ と連立させて解くと、$(a,b)=(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}),(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ となり、$f(a,b)=1$ である。
- $\lambda=\frac{1}{6}$ のとき、連立方程式は $2a-b=0$ と同値でこれを $\varphi(a,b)=0$ つまり $2a^2+4ab+5b^2=1$ と連立させて解くと、$(a,b)=(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}),(-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}})$ となり、$f(a,b)=\frac{1}{6}$ である。

以上より答えは $(x,y)=(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}),(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ のとき最大値 1 となり、$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}),(-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}})$ のとき最小値 $\frac{1}{6}$ となる。

注意　今回の問題では λ の値と f の値が一致しましたが、一般にはそうならない（はず）なので、きちんと f の値を計算する必要があります。

注意　$\lambda=1,\frac{1}{6}$ は二次形式 $2x^2+4xy+5y^2$ の係数行列 $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ の固有値 $1,6$ の逆数です。