2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 5 月 11 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

教科書注意 1.4.19 にあるように、複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は（絶対）収束し e^z とおくと、オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が成り立つ。ここではこれを三角関数の定義とする、つまり e^{ix} の実部を $\cos x$、虚部を $\sin x$ とすることにより、等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

が成立することを示せ。ただし、指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w \ (z, w \in \mathbb{C})$ が成立することは認めてよい。

解答　まず、$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ を示す。

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots, \\
e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots, \\
e^{-ix} &= 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{ix^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

より、

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

であり、$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ がわかる。

ここで $e^{ix}e^{-ix}$ を考えると、

$$e^{ix}e^{-ix} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

一方で、指数法則より

$$e^{ix}e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1.$$

以上より $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を得る。

宿題 $\boxed{4}$

実数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が単調減少であり $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすとする。この時、教科書定理 1.4.13 にあるように交代級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

は収束するが、さらに各 $N = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} a_n \right| \leq a_{N+1}$$

が成り立つことを示せ。

解答　変形すると、

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} a_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-N-1} a_n \right| = |a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \cdots|.$$

ここで $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が単調減少より $a_{N+1} \geq a_{N+2}, a_{N+3} \geq a_{N+4}, \cdots$ なので、

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} a_n \right| = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \cdots.$$

さらに $a_{N+2} \geq a_{N+3}, a_{N+4} \geq a_{N+5}, \cdots$ より、

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} a_n \right| \leq a_{N+1}.$$

ほしかった式が示された。