# 微分積分学 2

中安淳

2023 年 12 月 4 日

# 目次

# 第 1 章

# 組

## 1.1 組と直積

$N$ 個の集合 $X_1, \cdots, X_N$ を考える $(N = 1, 2, 3, \cdots)$。それぞれの集合から元 $x_1 \in X_1, \cdots, x_N \in X_N$ を取り出し、この順に並べた $(x_1, \cdots, x_N)$ を $x_1, \cdots x_N$ の順序組あるいは単に**組**という。特に $N = 2$ のときは組の代わりに**対**と呼ぶことがある。

二つの組 $(x_1, \cdots, x_N)$ と $(y_1, \cdots, y_N)$ が等しいのは $x_1 = y_1$ から $x_N = y_N$ のすべてが成り立つ場合である。ここに順序を無視する集合の外延記法 $\{x_1, \cdots, x_N\}$ と組 $(x_1, \cdots, x_N)$ の大きな違いがある。一方で数列の記法 $(x_n)_n$ も組 $(x_1, \cdots, x_N)$ 同様順序を持つので同じ丸かっこを使って表現されるが、数列の各元は同一の集合の元であるのに対して、組の集合は $X_1$ から $X_N$ の中で異なるものがあっても許されているという違いがある。

組 $(x_1, \cdots, x_N)$ 全体からなる集合を $X_1, \cdots, X_N$ の**直積**といい $X_1 \times \cdots \times X_N$ と表す。「積」と呼ばれるのは元の個数を考えると、$X_1, \cdots, X_N$ が有限集合でそれぞれ $m_1, \cdots, m_N$ 個の元からなる場合 $X_1 \times \cdots \times X_N$ も有限集合で元の個数は積 $m_1 \cdots m_N$ になることによる。

各集合 $X_1, \cdots, X_N$ が同一の集合 $X$ であるとき、それらの直積 $X_1 \times \cdots \times X_N = X \times \cdots \times X$ を簡単に $X^N$ と表すことにする。また、$N = 1$ のときの $X^1$ は $X$ と同一視する。

## 1.2 多変数関数

$X_1, \cdots, X_N, Y$ を集合として、元 $x_1 \in X_1, \cdots, x_N \in X_N$ が与えられて $Y$ の元 $y$ が対応する場合、この対応（写像）のことを多変数写像という。多変数写像を

$$F : X_1 \times \cdots \times X_N \to Y$$

や

$$F : x_1 \in X_1, \cdots, x_N \in X_N \mapsto y \in Y$$

と表す。また、組 $(x_1, \cdots, x_N)$ に対して対応する $y$ のことを $F(x_1, \cdots, x_N)$ と書き、多変数写像 $F$ のことを $F(x_1, \cdots, x_N)$ や $y = F(x_1, \cdots, x_N)$ などと書くこともある。このように多変数写像は直積や組の概念と密接な関係を持つ。より一般に直積 $X_1 \times \cdots \times X_N$ の部分集合 $U$ の元から $Y$ の元への対応も多変数写像といい、

$$F : U \to Y$$

や

$$F : (x_1, \cdots, x_N) \in U \mapsto y \in Y$$

などと表す。

**例 1.2.1** (射影)**.** 単純だが基礎的な多変数写像は**射影**であり、$i = 1, \cdots, N$ に対して

$$\mathrm{pr}_i : x_1 \in X_1, \cdots, x_N \in X_N \mapsto x_i \in X_i.$$

として定義される。

写像の行き先 $Y$ が $\mathbb{R}$ のような数の集合の場合、写像 $F$ は**多変数関数**と呼ばれる。その中でも $N = 2$ の二変数関数の典型例は加減乗除のような演算子である。つまり以下は二変数関数とみなすことができる。

1. $+ : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}.$
2. $- : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto x - y \in \mathbb{R}.$
3. $\times : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto xy \in \mathbb{R}.$
4. $\div : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{y} \in \mathbb{R}.$
5. $\max : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto \max\{x, y\} \in \mathbb{R}.$
6. $\min : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto \min\{x, y\} \in \mathbb{R}.$

# 第 2 章

# 空間

## 2.1 点と空間

平面上の点は座標軸を定めるとその座標を読み取ることで 2 つの（実）数の組（対）が対応する。また、三次元空間は 3 つの実数の組が対応する。しかしながら空間が何かと聞かれたら幾何学的な問題となり難しいので、本テキストでは逆に $N = 1, 2, 3, \cdots$ として $N$ 個の実数 $x_1, \cdots, x_N$ の組 $P = (x_1, \cdots, x_N)$ のことを $N$ 次元空間上の**点**と呼び、$N$ 次元空間上の点をすべて集めたものを $N$ 次元**空間**ということにする。つまり $N$ 次元空間とは実数の直積 $\mathbb{R}^N$ に他ならない。$N = 1$ のとき、つまり $\mathbb{R}^1$ は**直線**といい、$N = 2$ のとき、つまり $\mathbb{R}^2$ は**平面**という。$N$ 次元空間の点の集合つまり $N$ 次元空間の部分集合のことを $N$ 次元**点集合**と呼ぶことがある。

$N$ 次元空間上の点 $P = (x_1, \cdots, x_N)$ に対して、実数 $x_i$ を $P$ の**第 $i$ 成分**という。ただし、$i = 1, \cdots, N$ である。点 $P$ に対して、第 $i$ 成分を $P_i$ または $P^i$ と表すことがある。この節では点を大文字の $P$ を使って書いているが以降では $a$ や変数の場合は $x$ など小文字を用いることもある。

$N$ 次元空間上の演算において最も基礎的になるのは（ユークリッド）距離である。つまり、2 点 $P = (x_1, \cdots, x_N)$, $Q = (y_1, \cdots, y_N)$ 間の**距離** $d(P, Q)$ をピタゴラスの定理にもとづき

$$d(P, Q) = d((x_1, \cdots, x_N), (y_1, \cdots, y_N)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_N - x_N)^2}$$

と定義する。

距離の満たす重要な性質として次がある。

1. （正値性）任意の点 $P$, $Q$ に対して $d(P, Q) \geq 0$。
2. （同一性）任意の点 $P$, $Q$ に対して $d(P, Q) = 0$ と $P = Q$ は同値。
3. （対称性）任意の点 $P$, $Q$ に対して $d(P, Q) = d(Q, P)$。
4. （三角不等式）任意の点 $P$, $Q$, $R$ に対して $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$。

点 $a \in \mathbb{R}^N$ と正の数 $r > 0$ に対して、$a$ から半径 $r$ 内の点の集合

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(a, x) < r\}, \quad \overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(a, x) \leq r\}$$

をそれぞれ点 $a$ の $r$ を半径とする**開円板**と**閉円板**という。また、閉円板に関しては $r = 0$ でも $\overline{B}_0(a) = \{a\}$ として定義する。

## 2.2 空間ベクトル

$N$ 次元空間上の 2 点 $P = (x_1, \cdots, x_N)$, $Q = (y_1, \cdots, y_N)$ を取ると成分同士を引くことで別の実数の組

$$\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, \cdots, y_N - x_N)$$

が定義できる。この $\overrightarrow{PQ}$ のことを点 $P$ から点 $Q$ への $N$ **次元空間ベクトル**あるいは単に**ベクトル**という。

$N$ 次元空間ベクトル全体も、実数の組全体であり、$N$ 次元空間同様 $\mathbb{R}^N$ と表すが、空間と空間ベクトル全体では使える演算が異なることに注意する。実際、ベクトル $u = (u_1, \cdots, u_N)$ と $v = (v_1, \cdots, v_N)$ に対して加法

$$u + v = (u_1 + v_1, \cdots, u_N + v_N)$$

が定義でき、ベクトル $u = (u_1, \cdots, u_N)$ と実数 $a$ に対して定数乗法

$$au = (au_1, \cdots, au_N)$$

が定義できる。また、2 つのベクトル $u = (u_1, \cdots, u_N)$ と $v = (v_1, \cdots, v_N)$ に対して、

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_N v_N$$

を $u$ と $v$ の**内積**といい、

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_N^2}$$

を $u$ の**大きさ**または**ノルム**という。

ベクトルは以下の性質を満たす。

1.（加法の結合法則）任意のベクトル $u, v, w$ に対して $(u + v) + w = u + (v + w)$。
2.（加法の交換法則）任意のベクトル $u, v$ に対して $u + v = v + u$。
3.（両立法則）任意のベクトル $u$ と実数 $a, b$ に対して $a(bu) = (ab)u$。
4.（分配法則）任意のベクトル $u, v$ と実数 $a, b$ に対して $a(u + v) = au + av$、$(a + b)u = au + bu$。
5.（零ベクトル）$0 = (0, \cdots, 0)$ は零元である。つまり任意のベクトル $u$ に対して $u + 0 = 0 + u = u$。
6.（逆ベクトル）任意のベクトル $u$ に対して $u + x = x + u = 0$ が成り立つようなベクトル $x = -u$ がただ一つ存在する。
7.（単位元）1 は単位元である。つまり任意のベクトル $u$ に対して $1 \cdot u = u$ が成り立つ。
8.（内積の対称性）任意のベクトル $u, v$ に対して $u \cdot v = v \cdot u$。
9.（内積の多重線形性）任意のベクトル $u, v, w$ に対して $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$、$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$。
10.（内積の正定値性）任意のベクトル $u$ に対して $u \cdot u \geq 0$ であり、$u \cdot u = 0$ と $u = 0$ は同値である。
11.（ノルムの正値性）任意のベクトル $u$ に対して $\|u\| \geq 0$ であり、$\|u\| = 0$ と $u = 0$ は同値である。
12.（ノルムの斉次性）任意のベクトル $u$ と実数 $a$ に対して $\|au\| = |a|\|u\|$。
13.（三角不等式）任意のベクトル $u, v$ に対して $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$。

空間ベクトル $u = (u_1, \cdots, u_N)$ と $v = (v_1, \cdots, v_N)$ に対して、距離をその差のノルムとする、つまり

$$d(u, v) = \|v - u\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \cdots + (v_N - u_N)^2}$$

とすると、空間上の点に対する距離と同等のものが定義できる。もちろんこのベクトルの距離も空間上の点の距離と同様の性質を持つ。

ちなみに複素数も平面や平面ベクトル同様集合的には $\mathbb{R}^2$ であるが、複素数には乗法と除法が備わっていてさらに豊かな構造を持っている。また、直線 $\mathbb{R}^1$ は実数全体 $\mathbb{R}$ と同一視されるが、直線ベクトルのノルムは実数の絶対値と同質なものである。

空間上の点 $P = (P_1, \cdots, P_N)$ と空間ベクトル $u = (u_1, \cdots, u_N)$ に対して $P$ を $u$ だけ**平行移動**して空間上の点

$$P + u = (P_1 + u_1, \cdots, P_N + u_N)$$

を得ることができる。

## 2.3 矩形と有界性

実数の集合において重要な役割を果たしていたのが区間であるが、$N$ 次元空間あるいは $N$ 次元空間ベクトルの空間でそれに相当するのが矩形（長方形）であり区間の直積に相当する。特に有界閉区間に当たる有界閉矩形が重要であり、$2N$ 個の実数 $a_1 \leq b_1, \cdots, a_N \leq b_N$ で定まる点集合 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ を**有界閉矩形**と呼ぶ。

点集合 $X$ を考える。つまり、$X$ は $N$ 次元空間 $\mathbb{R}^N$ の部分集合である。ここで実数 $a_1 \leq b_1, \cdots, a_N \leq b_N$ が存在して $X \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ が成り立つとき、$X$ は**有界**であるという。つまり $X$ を被覆する有界閉矩形が存在すると言い換えることができる。

一般的な教科書では有界性を円で定義されることが多いが、矩形で定義しても円で定義しても同じである。

**命題 2.3.1.** 点集合 $X$ に対して、$X \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ となる有界閉矩形 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ が存在することと $X \subset \overline{B}_R(0)$ となる半径 $R \geq 0$ が存在することは同値である。ただし、$0 = (0, \cdots, 0)$ である。

【証明】 有界閉矩形 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ で被覆できたとすると $L = \max\{|a_1|, |b_1|, \cdots, |a_N|, |b_N|\}$ として有界閉矩形 $[-L, L]^N$ でも被覆でき、$R = \sqrt{N}L$ とすればよい。閉円板 $\overline{B}_R(0)$ で被覆できたとすると、有界閉矩形 $[-R, R]^N$ でも被覆できる。 【証明終わり】

本テキストで矩形を用いるのは点列の収束の議論で区間の問題に帰着させたり、リーマン積分を区間の類推で定義するためである。

自明なことであるが有界閉矩形は有界であることに注意する。

空でない有界な集合に対してそれを被覆する最も小さい有界閉矩形が存在して、以下のようにして構成できる。

**命題 2.3.2.** $X$ を空でない有界な $N$ 次元点集合とする。このとき、$i = 1, \cdots, N$ に対して以下で $\bar{a}_i, \bar{b}_i$ を定めると、$[\bar{a}_1, \bar{b}_1] \times \cdots \times [\bar{a}_N, \bar{b}_N]$ は有界閉矩形であり、$X \subset [\bar{a}_1, \bar{b}_1] \times \cdots \times [\bar{a}_N, \bar{b}_N]$ であり、$X \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ ならば $[\bar{a}_1, \bar{b}_1] \times \cdots \times [\bar{a}_N, \bar{b}_N] \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ を満たす。

$$\bar{a}_i = \sup\{a \in \mathbb{R} \mid X \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_i \geq a\}\}, \quad \bar{b}_i = \inf\{b \in \mathbb{R} \mid X \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_i \leq b\}\}.$$

このような矩形を空でない有界な点集合の**最小被覆有界閉矩形**と呼ぶ。

## 2.4 点列の極限

数列を思い出すとこれは自然数 $n$ に対し数（自然数、整数、有理数、実数、複素数など）を対応させることで、無限に連なる数の並びを表現したものであった。これと同様の発想で数の代わりに $N$ 次元空間上の点あるいは $N$ 次元空間ベクトル $a_n$ をならべたもの $(a_n)$ を $N$ 次元**点列**という。

数列に対して極限が（存在したら）あったように、点列に対しても極限の概念を導入する。このとき、数列の極限は絶対値を使って定義していたのに対して、点列では距離を使って定義することが重要である。つまり、点列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $n \to \infty$ で点 $a$ に収束するとは

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 $N$ が存在して、$N$ 以上のすべての自然数 $n$ に対して $d(a, a_n) < \varepsilon$ が成り立つ

ことを言う。このことは言い換えると $n \to \infty$ で非負の実数列 $(d(a, a_n))_n$ が $0$ に収束することと同値である。こちらの表現の方が単純なので本テキストでは以下のように点列の極限を定義する。

**定義 2.4.1** (点列の極限). 点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $n\to\infty$ で点 $a$ に**収束する**あるいは $a$ が $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の $n\to\infty$ での**極限である**とは $n\to\infty$ で

$$d(a,a_n)\to 0$$

が成り立つことをいう。点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が何らかの数に収束する時この点列は**収束する**といい、そうでない時**発散する**という。

**例 2.4.2.** $a$ を定点として定点列 $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限は $a$ である。

極限は存在したら一意である。

**命題 2.4.3.** 点列 $(a_n)$ が収束したらその極限は一つしかない、つまり $(a_n)$ が $a$ に収束し $b$ にも収束したとすると $a=b$ である。

【証明】　三角不等式より

$$d(a,b)\leq d(a,a_n)+d(b,a_n)$$

で、$n$ についての極限を取ると右辺は 0 に収束するのではさみうちの原理より $d(a,b)=0$ がわかる。よって、距離の同一性より $a=b$ である。【証明終わり】

**定理 2.4.4.** $(a_n)$ を点列、$a$ を点とする。もし $(a_n)$ の任意の部分列 $(a_{n_k})$ が $a$ に部分列収束する、つまり $a$ に収束する部分列 $(a_{n_{k_l}})$ が存在するとき、$(a_n)$ は $a$ に収束する。

【証明】【証明終わり】

## 2.5 連続関数

この節では主に多変数関数 $f:\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の極限や連続性について見ていく。このとき直積 $\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ を $N$ 次元空間 $\mathbb{R}^N$ と同一視すると関数 $f$ は空間上の点からの一変数関数のように見なすことができ、点列の収束のところで見たように実数だったら絶対値を使っていたところを距離に置き換えることで、極限が定義できる。

より詳しくは $N=1,2,3,\cdots$ として、$N$ 次元点集合 $X$ 上で定義された実数値関数 $f:X\to\mathbb{R}$ を考える。点 $a$ は、任意の正の数 $\delta$ に対して $0<d(a,x)<\delta$ を満たす $x\in X$ が存在するとして、このような $a$ を $X$ の**極限点**という。点列の収束が距離を用いることで数列の収束に帰着できたように、連続性も連続性の度合いを用いて簡潔に記述する、

**定義 2.5.1** (空間上の関数の極限). $f$ を点集合 $X$ 上の実数値関数、$a$ を $X$ の極限点、$l$ を実数とする。関数 $f(x)$ が $x\to a$ で実数 $l$ に**収束する**あるいは $l$ が $f(x)$ の $x\to a$ での**極限である**とは連続性の度合い $\omega_a$ が存在し任意の $x\in X$ に対して

$$|f(x)-l|\leq\omega_a(d(a,x))$$

が成り立つことをいう。

今後の議論の展開の中で値域が実数でなく $\mathbb{R}^M$ $(M=1,2,3,\cdots)$ である場合に拡張する必要がありそのために極限の概念を拡張しておく。

**定義 2.5.2** (空間上の $\mathbb{R}^M$ 値関数の極限). $F$ を点集合 $X$ 上の $\mathbb{R}^M$ 値関数、$a$ を $X$ の極限点、$L$ を $\mathbb{R}^M$ の点とする。関数 $F(x)$ が $x \to a$ で点 $L$ に**収束する**あるいは $L$ が $F(x)$ の $x \to a$ での**極限である**とは連続性の度合い $\omega_a$ が存在し任意の $x \in X$ に対して

$$d(L, F(x)) \leq \omega_a(d(a, x))$$

が成り立つことをいう。

$\mathbb{R}^M$ 値関数の極限を調べるには各成分の極限を調べれば十分である。

**命題 2.5.3.** $f_1, \cdots, f_M$ を点集合 $X$ 上の実数値関数として $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_M(x))$ により $\mathbb{R}^M$ 値関数 $F$ を定める。$a$ を $X$ の極限点、$L = (l_1, \cdots, l_M)$ を $\mathbb{R}^M$ の点とする。

このとき、関数 $F(x)$ が $x \to a$ で点 $L$ に収束することは、各 $i = 1, \cdots, M$ に対して関数 $f_i(x)$ が $x \to a$ で実数 $l_i$ に収束することと同値である。

【証明】 $F(x)$ が収束するならばの方が簡単で、

$$|f_i(x) - l_i| \leq d(L, F(x)) \leq \omega_a(d(a, x))$$

であることから直ちに従う。

各 $f_i(x)$ が収束する場合は

$$|f_i(x) - l_i| \leq \omega_a^i(d(a, x))$$

となる連続性の度合い $\omega_a^i$ が存在し、新しい連続性の度合いを $\omega_a(r) = \max\{\omega_a^1(r), \cdots, \omega_a^M(r)\}$ として取ると、

$$d(L, F(x)) = \sqrt{(f_1(x) - l_1)^2 + \cdots + (f_M(x) - l_M)^2} \leq \sqrt{\omega_a^1(d(a, x))^2 + \cdots + \omega_a^M(d(a, x))^2} \leq \sqrt{M}\omega_a(d(a, x))$$

なので $F(x)$ も収束する。 【証明終わり】

今後 $N$ 変数関数の極限や連続性も $\mathbb{R}^M$ 値に拡張すべきだが、実数値の場合だけ明記して $\mathbb{R}^M$ 値の場合の定義等は省略する。

$N$ 変数関数は点 $(a_1, \cdots, a_N)$ から点 $(x_1, \cdots, x_N)$ の距離が

$$d((a_1, \cdots, a_N), (x_1, \cdots, x_N)) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_N - a_N)^2}$$

で与えられることから以下のようにして定義される。

**定義 2.5.4** (多変数関数の極限). $f$ を $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $X$ 上で定義された $N$ 変数実数値関数、$(a_1, \cdots, a_N)$ を $X$ の極限点、$l$ を実数とする。

$N$ 変数関数 $f(x_1, \cdots, x_N)$ が $(x_1, \cdots, x_N) \to (a_1, \cdots, a_N)$ で実数 $l$ に**収束する**あるいは $l$ が $f(x_1, \cdots, x_N)$ の $(x_1, \cdots, x_N) \to (a_1, \cdots, a_N)$ での**極限である**とは連続性の度合い $\omega_{(a_1, \cdots, a_N)}$ が存在し任意の $(x_1, \cdots, x_N) \in X$ に対して

$$|f(x_1, \cdots, x_N) - l| \leq \omega_{(a_1, \cdots, a_N)}(\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_N - a_N)^2})$$

が成り立つことをいう。

極限が定義できると一変数関数と同様に連続性が定義できる。以下では多変数関数の場合を述べるが、空間上の関数でも同様である。

**定義 2.5.5** (多変数関数の連続性)**.** $f$ を $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $X$ 上で定義された $N$ 変数実数値関数、$(a_1,\cdots,a_N)$ を $X$ の極限点であり $X$ は $(a_1,\cdots,a_N)$ を元として含むとする。ここで $f(x_1,\cdots,x_N)$ が $(x_1,\cdots,x_N)\to(a_1,\cdots,a_N)$ で $f(a_1,\cdots,a_N)$ に収束する、つまり

$$\lim_{(x_1,\cdots,x_N)\to(a_1,\cdots,a_N)} f(x_1,\cdots,x_N)=f(a_1,\cdots,a_N)$$

の時、関数 $f(x_1,\cdots,x_N)$ は点 $(x_1,\cdots,x_N)=(a_1,\cdots,a_N)$ であるいは関数 $f$ は点 $(a_1,\cdots,a_N)$ で**連続**であるという。

**定義 2.5.6** (多変数連続関数)**.** $f$ を $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $X$ 上で定義された $N$ 変数実数値関数として、$X$ の点はすべて $X$ の極限点であるとする。ここで、すべての点 $(a_1,\cdots,a_N)\in X$ で $f$ が連続である時、関数 $f$ は集合 $X$ 上の**連続関数**であるという。

注意 2.5.7. 以上のことをまとめると $N$ 変数実数値関数 $f(x_1,\cdots,x_N)$ が $(x_1,\cdots,x_N)=(a_1,\cdots,a_N)$ で連続であることは連続性の度合い $\omega_{(a_1,\cdots,a_N)}$ が存在し

$$|f(x_1,\cdots,x_N)-f(a_1,\cdots,a_N)|\le\omega_{(a_1,\cdots,a_N)}(\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_N-a_N)^2})$$

が成り立つことと同値である。

多変数あるいは空間上の連続関数の典型例として射影と距離が挙げられる。

**命題 2.5.8** (射影の連続性)**.** $i=1,\cdots,N$ として、以下の射影は連続関数である。

$$\mathrm{pr}_i : x_1\in\mathbb{R},\cdots,x_N\in\mathbb{R}\mapsto x_i\in\mathbb{R}.$$

【証明】 次の不等式が成り立つことからすぐわかる。

$$|x_i-a_i|\le\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_N-a_N)^2}.$$

【証明終わり】

**命題 2.5.9** (距離の連続性)**.** 点 $\hat{a}\in\mathbb{R}^N$ を固定し、距離から定まる関数 $f(x)=d(\hat{a},x)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の連続関数である。

【証明】 三角不等式より

$$|f(x)-f(a)|=|d(\hat{a},x)-d(\hat{a},a)|\le d(a,x)$$

なので、$f$ は連続関数である。 【証明終わり】

注意 2.5.10. 実は距離を定める関数 $d$ は $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 上の連続関数である。実際、三角不等式より

$$|d(x,y)-d(a,b)|=|(d(x,y)-d(a,y))+(d(a,y)-d(a,b))|\le d(a,x)+d(b,y)\le 2\sqrt{d(a,x)^2+d(b,y)^2}$$

で、これは $d$ が連続関数であることを意味している。

一変数関数同様に以下の連続性に関する性質がある。

**命題 2.5.11** (点列連続性)**.** 関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で連続であることは

$a$ に収束する任意の点列 $(a_n)$ に対して、数列 $(f(a_n))$ が $f(a)$ に収束する

ことと同値である。

【証明】 $f(x)$ が $x = a$ で連続として、$a$ に収束する点列 $(a_n)$ を考える。$\varepsilon > 0$ に対して、連続性からある $\delta > 0$ が存在して $d(a, x) < \delta$ を満たす任意の点 $x$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である。さらにこの $\delta > 0$ に対して、数列の収束から自然数 $N$ が存在して $n \geq N$ を満たす任意の自然数 $n$ に対して $d(a, a_n) < \delta$ である。よって、$x$ として $a_n$ を考えることで、十分大きいすべての $n$ に対して $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$、つまり $f(a_n) \to f(a)$ を得る。

逆に $a$ に収束する任意の点列 $(a_n)$ に対して $f(a_n) \to f(a)$ のとき、$f$ の連続性を示すが、背理法で連続でなかったとする。この時、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、任意の $\delta > 0$ に対して $d(a, x) < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ となる点 $x$ が存在する。ここで $n = 1, 2, 3, \cdots$ ごとに $\delta = \frac{1}{n}$ を考えて上記の条件を満たす $x$ が存在することからそのうち一つを $a_n$ とおく。そうして点列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めるとき、$d(a, a_n) < \frac{1}{n}$ なので $(a_n)$ は $a$ に収束する。一方で $|f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ より $(f(a_n))$ は $f(a)$ に収束しないので仮定に矛盾する、よって $f(x)$ は $x = a$ で連続である。 【証明終わり】

**命題 2.5.12** (連続関数の合成関数)**.** $F$ を $N$ 次元点集合 $X$ 上の $\mathbb{R}^M$ 値関数、$g$ を $M$ 次元点集合 $Y$ 上の実数値関数であって $F(X) \subset Y$ を満たすとする。

ここで関数 $F(x)$ が点 $x = a \in X$ で連続で、関数 $g(y)$ が点 $y = F(a) \in Y$ で連続である時、合成関数 $g(F(x))$ は点 $x = a$ で連続である。

各種演算は二変数連続関数の典型例である。

**命題 2.5.13** (演算の連続性)**.** 以下の演算によって定義される関数は連続関数である。

1. $+ : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$.
2. $- : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto x - y \in \mathbb{R}$.
3. $\times : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto xy \in \mathbb{R}$.
4. $\div : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$.
5. $\max : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto \max\{x, y\} \in \mathbb{R}$.
6. $\min : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \mapsto \min\{x, y\} \in \mathbb{R}$.

【証明】 定義域から点 $(a, b)$ を固定する。

1. 三角不等式より
$$|(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \leq |x - a| + |y - b| \leq 2\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$
よって加法 $+$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の連続関数である。
2. 三角不等式より
$$|(x - y) - (a - b)| = |(x - a) - (y - b)| \leq |x - a| + |y - b| \leq 2\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$
よって減法 $-$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の連続関数である。
3. 三角不等式より $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ とおくと
$$|xy - ab| = |(xy - xb) + (xb - ab)| \leq |x||y - b| + |x - a||b| \leq |x - a||y - b| + |a||y - b| + |x - a||b| \leq r^2 + (|a| + |b|)r.$$

ここで、各 $(a,b)$ ごとに $\lim_{r\to 0+}(r^2+(|a|+|b|)r)=0$ より、乗法 $\times$ は $(a,b)$ で連続であり、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の連続関数である。

4. 最初に $(a,b)$ に十分近い $(x,y)$ のみ考えることで $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\frac{|b|}{2}$、特に $|y-b|\leq\frac{|b|}{2}$ で $|y|\geq\frac{|b|}{2}$ としてよいことに注意する。三角不等式より $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ とおくと

$$|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}|=\frac{|xb-ay|}{|b||y|}=\frac{|(xb-xy)+(xy-ay)|}{|b||y|}\leq\frac{|x||y-b|}{|b||y|}+\frac{|x-a|}{|b|}\leq 2\frac{r^2+|b|r}{|b|^2}+\frac{r}{|b|}.$$

ここで、各 $(a,b)$ ごとに $\lim_{r\to 0+}(2\frac{r^2+|b|r}{|b|^2}+\frac{r}{|b|})=0$ より、除法 $\div$ は $(a,b)$ で連続であり、$\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ 上の連続関数である。

5. 一般に

$$\max\{x,y\}=\frac{x+y}{2}+\frac{|y-x|}{2}$$

が成り立ち、連続関数の合成になっているので、最大 max は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の連続関数である。

6. 一般に

$$\min\{x,y\}=\frac{x+y}{2}-\frac{|y-x|}{2}$$

が成り立ち、連続関数の合成になっているので、最小 min は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の連続関数である。

【証明終わり】

連続性を調べるときにしばしば直面するのが $N=2$ で 1 点 $(a,b)$ がくりぬかれた領域では連続だが、その点は極限を考えなければならない場合である。そのような時は極座標 $(x,y)=(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$ $(r>0)$ を用いるとよい。

**命題 2.5.14** (極限と極座標)**.** $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ として、$f$ を $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\{(a,b)\}$ 上で定義された二変数実数値関数とする。このとき、二変数関数 $f(x,y)$ が $(x,y)\to(a,b)$ で実数 $l$ に収束することの必要十分条件は

$$\lim_{r\to 0+}\sup_{\theta}|f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-l|=0$$

が成り立つことである。

特に、$f$ を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上で定義された二変数実数値関数とするとき、二変数関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続であることの必要十分条件は

$$\lim_{r\to 0+}\sup_{\theta}|f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b)|=0$$

が成り立つことである。

**例 2.5.15.** 二変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

を考える。このとき

$$|f(r\cos\theta,r\sin\theta)-f(0,0)|=\frac{|r^2\cos\theta\sin\theta|}{r}=r|\cos\theta\sin\theta|\leq r\to 0\quad(r\to 0).$$

したがって、$f$ は $(0,0)$ で連続であるので、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の連続関数である。

**例 2.5.16.** 二変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

を考える。この関数は原点 $(0,0)$ を除いた領域では連続であるが、原点の周りの点 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ においては

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$$

で $r\to 0$ としたときの極限 $\cos\theta\sin\theta$ が $\theta$ に依る（例えば $\theta=0$ だとこの値は 0 だが $\theta=\frac{\pi}{4}$ だと $\frac{1}{2}$ で一定でない)。つまり極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在しないので、$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続でない。

## 2.6　開集合と閉集合と有界閉集合

点集合 $A$ を考える。つまり、$A$ は $N$ 次元空間 $\mathbb{R}^N$ の部分集合である。

$A$ が開集合であるとは境界がないつまり開いているということで、境界上の点はどんなに近くを見ても $A$ の点と $A$ でない点が存在するものなので、次のように表現される。

**定義 2.6.1** (開集合)**.** $A$ を $N$ 次元点集合とする。ここで、任意の点 $a\in A$ に対して半径 $r>0$ が存在して $B_r(a)\subset A$ が成り立つとき、$A$ は**開集合**であるという。

閉集合は何かについて閉じているということであるが、極限について閉じている場合をいい、以下のとおりである。

**定義 2.6.2** (閉集合)**.** $A$ を $N$ 次元点集合とする。ここで、任意の収束する $A$ 上の点列 $(a_n)$ $(a_n\in\mathbb{R}^N)$ に対して極限 $a$ が $A$ の元であるとき、$A$ は**閉集合**であるという。

注意 2.6.3. 定義より空集合 $\emptyset$ と空間全体 $\mathbb{R}^N$ はともに開集合であり閉集合でもある。

開集合と閉集合は次の命題の意味で表裏の関係にある。

**命題 2.6.4** (開集合と閉集合の関係)**.** $A$ を $N$ 次元点集合とする。

- $A$ が開集合であるとき、補集合 $A^c$ は閉集合である。
- $A$ が閉集合であるとき、補集合 $A^c$ は開集合である。

【証明】

- $A$ を開集合とするとき、補集合 $A^c$ 上の収束する点列 $(a_n)$ と極限 $a$ を考える。ここでもし $a\in A$ だとすると $B_r(a)\subset A$ となる半径 $r>0$ が存在する。ここで点列の収束性から十分大きい自然数 $n$ に対して $a_n\in B_r(a)\subset A$ であり、$a_n\in A^c$ に矛盾する。したがって $a\in A^c$ なので、$A^c$ は閉集合である。
- $A$ を閉集合として、補集合 $A^c$ 上の点 $a\in A^c$ を考える。ここでもし $A^c$ が開集合でないとすると、任意の $r>0$ に対して $d(a,x)<r$ かつ $x\in(A^c)^c=A$ となる点 $x$ が存在する。ここで $n=1,2,3,\cdots$ ごとに $r=\frac{1}{n}$ を考えて上記の条件を満たす $x$ が存在することからそのうち一つを $a_n$ とおく。そうして点列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めるとき、$(a_n)$ は $A$ 上の点列であり $a\in A^c$ に収束するがこれは $A$ が閉集合であることに矛盾する。したがって $A^c$ は開集合である。

【証明終わり】

開集合・閉集合の判定は連続関数をもとに考えるとよい。

**命題 2.6.5** (開集合・閉集合と連続関数). $f(x)$ を $N$ 次元空間上の連続関数とする。このとき、次の $N$ 次元点集合はいずれも開集合である。

- $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0\}$.
- $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) < 0\}$.
- $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > 0\}$.

また、次の $N$ 次元点集合はいずれも閉集合である。

- $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) = 0\}$.
- $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \leq 0\}$.
- $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \geq 0\}$.

【証明】 $A = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \leq 0\}$ が閉集合であることを示す。$A$ 上の収束する点列 $(a_n)$ とその極限 $a$ を考える。このとき、$f(a_n) \leq 0$ であり、$f$ が連続関数なので $f(a_n) \to f(a)$ であることから、$f(a) \leq 0$ が従う。よって、$a \in A$ であるから、$A$ は閉集合である。

$\leq$ が $=$ や $\geq$ になっている場合も同様に示される。開集合の方は任意の集合 $B$ に対して $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B^c))^c$ から従う。 【証明終わり】

注意 2.6.6. 一般に定義域も値域も開集合・閉集合が定義されるような集合（位相空間という）であるならば、開集合の連続関数による逆像は開集合で、閉集合の連続関数による逆像は閉集合となっている。

開集合・閉集合は共通部分と和集合について閉じている。

**命題 2.6.7** (開集合・閉集合の演算). $A$, $B$ を $N$ 次元点集合とする。

- $A$, $B$ が開集合であるとき、共通部分 $A \cap B$ も開集合である。
- $A$, $B$ が開集合であるとき、和集合 $A \cup B$ も開集合である。
- $A$, $B$ が閉集合であるとき、共通部分 $A \cap B$ も閉集合である。
- $A$, $B$ が閉集合であるとき、和集合 $A \cup B$ も閉集合である。

【証明】

- $A$, $B$ が開集合として、共通部分 $A \cap B$ を考える。任意の点 $a \in A \cap B$ を固定すると、$a \in A$ で $A$ は開集合なので、$B_{r_A}(a) \subset A$ となる半径 $r_A > 0$ が存在し、$a \in B$ で $B$ は開集合なので、$B_{r_B}(a) \subset B$ となる半径 $r_B > 0$ が存在する。よって $r = \min\{r_A, r_B\} > 0$ とおくと、$B_r(a) \subset A \cap B$ となるので、$A \cap B$ は開集合である。
- $A$, $B$ が開集合として、和集合 $A \cup B$ を考える。任意の点 $a \in A \cup B$ を固定する。
  - $a \in A$ のとき、$A$ は開集合なので、$B_r(a) \subset A \subset A \cup B$ となる半径 $r > 0$ が存在する。
  - $a \in B$ のとき、$B$ は開集合なので、$B_r(a) \subset B \subset A \cup B$ となる半径 $r > 0$ が存在する。

  よっていずれの場合でも $A \cup B$ は開集合であることが示された。
- 残る閉集合に関する命題はド・モルガンの法則 $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ が成り立つことから従う。

【証明終わり】

有界な閉集合である**有界閉集合**が一次元での有界閉区間に相当し今後いろいろなところで出てくる。

**命題 2.6.8.** 有界閉矩形は有界閉集合である。

【証明】 有界閉矩形 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_N,b_N]$ 上の点列 $(x_n)=((x_n^1,\cdots,x_n^N))$ が $x=(x^1,\cdots,x^N)$ に収束したとすると、各 $i=1,\cdots,N$ に対して $a_i\le x_n^i\le b_i$ なので $a_i\le x^i\le b_i$、つまり極限 $x=(x^1,\cdots,x^N)$ は $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_N,b_N]$ の元である。したがって、$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_N,b_N]$ は閉集合である。有界閉矩形は明らかに有界なので、有界閉集合である。【証明終わり】

**定理 2.6.9** (ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理)**.** 有界な点列つまりある有界閉矩形上の点列は収束する部分列を持つ。

【証明】 $(x_n)=((x_n^1,\cdots,x_n^N))$ を有界閉矩形 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_N,b_N]$ 上の点列とする。このとき、$a_1\le x_n^1\le b_1$ であるから、一次元のボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から部分列 $(x_{n_k}^1)$ であってある実数 $x^1$ に収束するものが存在する。さらに $a_2\le x_{n_k}^2\le b_2$ であるから、再度一次元のボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から部分列 $(x_{n_{k_j}}^2)$ であってある実数 $x^2$ に収束するものが存在する。これを繰り返していけば点列 $(x_n)$ のある部分列 $(x_{n_k})$ であってある点 $x=(x^1,\cdots,x^N)$ に収束するものが取れる。【証明終わり】

**系 2.6.10.** $X$ を有界閉集合とする。このとき任意の $X$ 上の点列 $(a_n)$ に対して、収束する部分列が存在してその極限は $X$ の元である。

【証明】 $X$ は有界閉矩形で被覆できるので、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より、点列 $(a_n)$ は少なくとも部分列を取れば収束する。さらに $X$ は閉集合なので、極限は $X$ の元である。【証明終わり】

$N$ 次元空間上の有界閉集合はしばしば**コンパクト集合**とも呼ばれる。

**命題 2.6.11.** $X$ を有界閉集合として、$f$ を $X$ 上の関数、$l$ を定数とする。ここで任意の収束する点列 $(a_n)$ に対して $(f(a_n))$ が $l$ に収束するとき、任意の（収束するとは限らない）点列 $(a_n)$ に対して $(f(a_n))$ は $l$ に収束する。

有界閉集合上の点列なので部分列を取れば収束するが、この定理の重要な点は部分列を取らなくても $(f(a_n))$ は収束することにある。

【証明】 $(a_n)$ の任意の部分列 $(a_{n_k})$ に対して収束部分列 $(a_{n_{k_l}})$ が取れて、仮定より $(f(a_{n_{k_l}}))$ は $l$ に収束するので $f(a_n)$ は $l$ に収束する。【証明終わり】

## 2.7　最大値最小値定理

一変数関数では有界閉区間に対して成立する最大値最小値定理は多変数関数では有界閉集合に対して自然に拡張される。

**定理 2.7.1** (最大値最小値定理)**.** 関数 $f$ を空でない有界閉集合 $X$ 上の実数値連続関数とする。この時、関数 $f$ は $X$ 上で最大と最小を持つ。

証明は区間縮小法によってもできるが、ここではボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理を用いた簡潔なものを紹介する。

【証明】 最大について示す。$f$ の $X$ 上の上限を $l \in \bar{\mathbb{R}}$ とおくと、$X$ が空集合でないので $l \neq -\infty$ であり、$f(a_n) \to l$ となる $X$ 上の点列 $(a_n)$ が存在する。ここで $X$ は有界閉集合より $(a_n)$ は収束する部分列 $(a_{n_k})$ をもち極限を $a \in X$ とおくと、$f$ は連続関数なので $f(a_{n_k}) \to f(a)$ である。よって $l = f(a)$ であり、上限を達成することができたので、$f$ は $X$ 上で最大となる。

最小についても同様なので証明は省略する。【証明終わり】

## 2.8 多変数の中間値の定理

最大値最小値定理と比較して中間値の定理は幾分人工的な拡張である。

まず、$N$ 次元の議論を一次元に帰着させるために弧状連結性を導入する。

**定義 2.8.1** (弧状連結)**.** $X$ を $N$ 次元点集合とする。ここで、$X$ の任意の二点 $x, y$ に対して $x$ と $y$ を結ぶ $X$ 上の連続な曲線 $c : [0, 1] \to X$ が存在するとき、$X$ は弧状連結であるという。

**定理 2.8.2** (中間値の定理)**.** 関数 $f$ を弧状連結な集合 $X$ 上の実数値連続関数とする。このとき、任意の $x, y \in X$ に対して、$f$ は $X$ 上で $f(x)$ と $f(y)$ の間の値を全て取る。言い換えると、簡単のため $f(x) \leq f(y)$ とすると、$[f(x), f(y)] \subset f(X)$ である。

注意 2.8.3. この定理は抽象化すると弧状連結集合の連続関数による像は弧状連結であると表現できる。

【証明】 弧状連結性から $x$ と $y$ を結ぶ $X$ 上の連続な曲線 $c : [0, 1] \to X$ が存在する。ここで $f$ と $c$ の合成関数 $f(c(t)) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は連続関数であり $f(c(0)) = f(x)$, $f(c(1)) = f(y)$ なので、一変数での中間値の定理から $f(x)$ と $f(y)$ の間の値を全て取る。よって、$f$ は $f(x)$ と $f(y)$ の間の値を全て取る。【証明終わり】

この定理は実質的に一変数の中間値の定理と同等である。より多次元らしさがある拡張が次のブラウアーの不動点定理として知られる定理である。

**定理 2.8.4** (ブラウアーの不動点定理)**.** 有界閉矩形 $E$ からそこへの連続写像 $F$ は不動点、つまり $F(x) = x$ となる点 $x \in E$ を持つ。

しかしながらブラウアーの不動点定理の証明は大変難しく本テキストの範囲を逸脱するので詳細は省略する。

中間値の定理（の高次元版）は弧状連結の定義から直ちに従ったが、偏微分に関するいくつかの定理を考える際には曲線を軸に沿った折れ線で取り直す必要がある。次の補題はそのことを保証する。

**補題 2.8.5.** $X$ を $\mathbb{R}^N$ の開集合として、$X$ の二点を結ぶ $X$ 上の連続な曲線 $c : [0, 1] \to X$ が存在するとする。この時、ある $l > 0$ が存在して曲線上のすべての点 $c(t) = (x_1, \cdots, x_N)$ に対して、$[x_1 - l, x_1 + l] \times \cdots \times [x_N - l, x_N + l] \subset X$ が成り立つ。特にそのような二点は $x_1, \cdots, x_N$ 軸に並行ないくつかの線分で結ばれる。

【証明】 曲線を $C$、$X$ の補集合を $X^c$ とおいて、関数 $x \in C, y \in X^c \mapsto d(x, y)$ が正の最小値を持つことを示せばよい。まず $X = \mathbb{R}^N$ の時は $l$ は何でもよいので除外する。仮定より、$C$ は空でない有界閉集合で $X^c$ は閉集合で、$x \in C, y \in X^c$ に対して $d(x, y)$ は正値で連続関数である。ここで、$C$ を含みつつ $X^c$ と共通部分を持つような矩形に制限することで $X^c$ は有界と見なすことができて、最大値最小値定理より最小距離 $m$ が存在する。あとは $l = \frac{1}{\sqrt{N}} m$ とすればよい。【証明終わり】

## 2.9　一様連続性

一変数の時同様多変数でも一様連続性が定義され、いくつかの場面で登場する。

**定義 2.9.1** (一様連続関数)**.** $N$ 次元点集合上の実数値関数 $f$ に対して、連続性の度合い $\omega$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対して

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega(d(x, y))$$

が成り立つとき、$f$ は $X$ 上の**一様連続関数**であるという。

重要なこととして有界閉集合上の連続関数は自動的に一様連続関数である。

**定理 2.9.2** (有界閉集合上の連続関数、ハイネ・カントールの定理)**.** 有界閉集合 $X$ 上の実数値連続関数 $f$ は $X$ 上一様連続である。

【証明】　【証明終わり】

# 第 3 章

# 偏微分

## 3.1 偏微分

多変数関数の微分の基礎は偏微分である。ここではまず偏微分係数を定義してから偏微分導関数を定義する。

**定義 3.1.1** (偏微分)**.** $f(x_1, \cdots, x_N)$ を $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $X$ 上で定義された $N$ 変数実数値関数、$i = 1, \cdots, N$ とする。

$(a_1, \cdots, a_N)$ を $X$ の内点、つまり半径 $r > 0$ が存在して $B_r(a) \subset X$ が成り立つとする。ここで他の成分は固定して第 $i$ 成分だけ動かした時の微分係数の極限

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_N) - f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_N)}{x_i - a_i}$$

が存在するとき $f$ は点 $(a_1, \cdots, a_N)$ で $x_i$ について**偏微分可能**であるといい、極限を**偏微分係数**という。関数 $y = f(x_1, \cdots, x_N)$ の点 $(a_1, \cdots, a_N)$ で $x_i$ についての偏微分係数を

$$f_{x_i}(a_1, \cdots, a_N), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_N), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(x_1, \cdots, x_N) = (a_1, \cdots, a_N)} \quad \left.\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x_1, \cdots, x_N))\right|_{(x_1, \cdots, x_N) = (a_1, \cdots, a_N)},$$

$$\left. y_{x_i} \right|_{(a_1, \cdots, a_N)}, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{(a_1, \cdots, a_N)}$$

などで表す。

$X$ を開集合、つまり $X$ の点がすべて内点である場合を考える。$X$ のすべての点で関数 $f$ が $x_i$ について偏微分可能であるとき $f$ は $X$ 上 $x_i$ について偏微分可能であるという。この時、$(x_1, \cdots, x_N) \in X$ に対して偏微分係数 $f_{x_i}(x_1, \cdots, x_N)$ を対応させる集合 $X$ 上の実数値関数を $f$ の $x_i$ についての**偏微分導関数**という。$y = f(x_1, \cdots, x_N)$ の $x_i$ についての偏微分導関数を

$$f_{x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x_1, \cdots, x_N)), \quad y_{x_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

などで表す。

方向 $x_i$ と点 $(a_1, \cdots, a_N)$ を決めるごとに偏微分係数は実数であり、偏微分導関数は $X$ 上の実数値関数である。偏微分導関数はしばしば**偏導関数**と略される。

偏微分係数および偏微分導関数は一変数の通常の微分をもとにして定義しているので、それに対する命題の類が成り立つ。つまり、和と定数倍の微分や積の微分、商の微分、一変数関数との合成関数の微分は第 $i$ 成分以外の変数は固定されていることに注意して行うことができる。ただし、多変数関数との合成関数の微分は後で述べる別の扱いをする必

要があることに注意する。

**例 3.1.2.** 原点からの距離で定まる二変数関数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

の $x$ 偏微分を考える。$y$ を固定するごとに $x$ について微分すると、$(x,y)\neq(0,0)$ においては偏微分可能で

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となる。$(x,y)=(0,0)$ においては $f(x,0)=|x|$ なので、これは $x$ について偏微分可能でない。同様にして $f(x,y)$ の $y$ 偏微分は $(x,y)\neq(0,0)$ においては偏微分可能で

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となり、$(x,y)=(0,0)$ においては偏微分可能でない。

**例 3.1.3.** 例 2.5.16 の二変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

を考える。この関数は少なくとも $(x,y)\neq(0,0)$ においては偏微分可能で商の微分などから

$$f_x(x,y)=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

がわかる。$(x,y)=(0,0)$ においても偏微分の定義から

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

となり、偏微分可能である。しかしながら、例 2.5.16 で見た通りこの関数 $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続ではない。このことは多変数関数においては偏微分可能であっても連続とは限らないことを表している。

**定義 3.1.4** (勾配). $N$ 変数関数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_N)$ が点 $x=a$ において各 $x_i$ について偏微分可能であるとするとき、偏微分係数を順番に並べて得られる $N$ 次元ベクトル

$$\nabla f(a)=(f_{x_1}(a),\cdots,f_{x_N}(a))$$

を $f(x)$ の点 $x=a$ での**勾配**という。

注意 3.1.5. 勾配はベクトルとして考えるのが自然であり、内積が定義できることに注意する。

本来勾配は後で述べる全微分可能な点で意味をなす概念であるが、その全微分可能性の定義でこのベクトル $\nabla f(a)$ を利用するため本テキストではここで勾配を導入する。

## 3.2 全微分

**定義 3.2.1** (全微分). $f(x)$ を $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $X$ 上で定義された $N$ 変数実数値関数、$a$ を $X$ の内点とする。ここ

で、$f(x)$ が点 $x = a$ で各方向に偏微分可能であって、勾配を使った極限の式

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a) \cdot (x - a)|}{\|x - a\|} = 0$$

が成り立つとき、関数 $f(x)$ は点 $x = a$ で**全微分可能**であるという。

注意 3.2.2. 全微分可能の条件を連続性の度合い $\omega_a$ を使って表すと

$$|f(x) - f(a) - \nabla f(a) \cdot (x - a)| \leq \|x - a\| \omega_a(\|x - a\|)$$

がすべての $x \in X$ で成り立つということである（$x = a$ のときは両辺ともに 0 で不等号は成立することに注意する）。

注意 3.2.3. テキストによっては全微分

$$\mathrm{d}f = f_{x_1}(a)\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_{x_N}(a)\mathrm{d}x_N$$

というものを導入することがある。これは微分形式の理論で有用であるが、本テキストではそこまで必要にならない。勾配が代わりの役割を果たす。

**例 3.2.4.** $N$ 次元定ベクトル $v$ との内積で定まる $N$ 変数関数

$$f(x) = v \cdot x$$

を考える。この関数は $\mathbb{R}^N$ 全体で全微分可能であり、勾配は

$$\nabla f(x) = v$$

となる。

**例 3.2.5.** 定点 $a$ からの距離の二乗で定まる $N$ 変数関数

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2$$

を考える。この関数は $\mathbb{R}^N$ 全体で全微分可能であり、勾配は

$$\nabla f(x) = x - a$$

となる。

**例 3.2.6.** 定点 $a$ からの距離で定まる $N$ 変数関数

$$f(x) = \|x - a\|$$

を考える。この関数は $x \neq a$ で全微分可能であり、勾配は

$$\nabla f(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|}$$

となる。

**命題 3.2.7** (全微分可能性と連続性)**.** $f(x)$ を $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $X$ 上で定義された $N$ 変数実数値関数、$a$ を $X$ の内点とする。ここで、$f(x)$ が点 $x = a$ で全微分可能ならば $f(x)$ は $x = a$ で連続である。

【証明】 三角不等式とコーシー・シュワルツの不等式より

$$|f(x) - f(a)| \leq |\nabla f(a) \cdot (x - a)| + \|x - a\| \omega_a(\|x - a\|) \leq \|\nabla f(a)\| \|x - a\| + \|x - a\| \omega_a(\|x - a\|).$$

ここで $x \to a$ で最右辺は 0 に収束するので、$f(x)$ は $x = a$ で連続である。 【証明終わり】

## 3.3　合成関数の微分

一変数関数 $f(x), g(y)$ の合成関数の微分とは

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$$

であったが、これの多変数関数版を考えたい。$f(x)$ が多変数関数 $f(x) = f(x_1, \cdots, x_N)$ の場合は $g(f(x))$ も多変数関数で偏微分を考えると

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g(f(x))) = g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \nabla(g(f(x))) = g'(f(x))\nabla f(x)$$

となるが、問題は $g(y)$ が多変数関数 $g(y) = g(y_1, \cdots, y_N)$ の場合である。このとき $f(x)$ は $\mathbb{R}^N$ 値関数 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_N(x))$ である必要があり、$g(f(x))$ は（$f(x)$ が一変数関数ならば）一変数関数となるのでその微分を考える価値がある。この関数が $x = a$ で微分可能であるとは各 $f_i(x)$ が $x = a$ で微分可能であることをいい、

$$f'(a) = (f_1'(a), \cdots, f_N'(a))$$

と定義する。

**命題 3.3.1** (合成関数の微分)**.** $\mathbb{R}^N$ 値関数 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_N(x))$ が点 $x = a$ で微分可能で $N$ 変数関数 $g(y) = g(y_1, \cdots, y_N)$ が点 $y = f(a)$ で全微分可能とする。この時、合成関数 $f(g(x))$ も $x = a$ で微分可能で、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(f(x)))\Big|_{x=a} = \nabla g(f(a)) \cdot f'(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a))f_1'(a) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_N}(f(a))f_N'(a)$$

が成立する。

【証明】 $g(y)$ は $y = b = f(a)$ で全微分可能なので、

$$|g(y) - g(b) - \nabla g(b) \cdot (y - b)| \leq \|y - b\|\omega_b(\|y - b\|)$$

である。ここから $y = f(x)$, $b = f(a)$ を代入し、

$$|g(f(x)) - g(f(a)) - \nabla g(f(a)) \cdot (f(x) - f(a))| \leq \|f(x) - f(a)\|\omega_b(\|f(x) - f(a)\|).$$

これを $|x - a|$ で割って $x \to 0$ とすれば、

$$\left|\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} - \nabla g(f(a)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \leq \left\|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right\|\omega_b(\|f(x) - f(a)\|) \to \|f'(a)\| \cdot 0 = 0.$$

よって、

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \nabla g(f(a)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \nabla g(f(a)) \cdot f'(a)$$

である。【証明終わり】

注意 3.3.2. 積の微分公式は多変数の合成関数の微分から導出することができる。つまり積の関数 $h(x, y) = xy$ の偏微分は $h_x(x, y) = y$, $h_y(x, y) = x$ なので、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(h(f(x), g(x))) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

がわかる。

## 3.4　連続微分可能性

例 3.1.3 で見たように、偏微分可能と連続とは分離された概念であるが、連続（偏）微分可能ならば（全）微分可能なので連続性も従うという事実が知られている。

**定義 3.4.1** (連続微分可能性). $\mathbb{R}^N$ の開部分集合 $X$ 上の実数値関数 $f$ が各変数 $x_i$ に対して偏微分可能で導関数 $\nabla f$ が $X$ 上の連続関数である時、$f$ は $X$ 上**連続微分可能**であるという。

注意 3.4.2. $\nabla f$ が連続関数のところは各偏微分導関数 $f_{x_i}$ が連続関数と読みかえられる。

**命題 3.4.3** (連続微分可能ならば全微分可能). $\mathbb{R}^N$ の開部分集合 $X$ 上の実数値関数 $f$ が連続微分可能ならば、$f$ は $X$ 上の各点で全微分可能である。

【証明】 証明は点 $a = (a_1, \cdots, a_N) \in X$ とその近傍の点 $x = (x_1, \cdots, x_N) \in X$ について、$x$ から $a$ へ $x_1, \cdots, x_N$ 軸に沿って近づけるという方法で行う。そのためにまず各 $x_i$ に対して次の値を評価する。

$$|f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) - f(x_1, \cdots, a_i, \cdots, x_N) - f_{x_i}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_N)(x_i - a_i)|$$

ここで $x \mapsto f(x_1, \cdots, x, \cdots, x_N)$ に対する平均値の定理より $0 \leq \theta \leq 1$ が存在して、

$$\begin{aligned} &|f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) - f(x_1, \cdots, a_i, \cdots, x_N) - f_{x_i}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_N)(x_i - a_i)| \\ &\quad \leq |(f_{x_i}(x_1, \cdots, \theta a_i + (1-\theta)x_i, \cdots, x_N) - f_{x_i}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_N))(x_i - a_i)| \end{aligned}$$

したがって、$\omega$ を $\nabla f$ の連続性の度合いとして、

$$\begin{aligned} &|f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) - f(x_1, \cdots, a_i, \cdots, x_N) - f_{x_i}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_N)(x_i - a_i)| \\ &\quad \leq \omega(\|(x_1, \cdots, \theta a_i + (1-\theta)x_i, \cdots, x_N) - (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_N)\|)|x_i - a_i| \\ &\quad \leq \omega(\|x - a\| + |(\theta a_i + (1-\theta)x_i) - a_i|)|x_i - a_i| \end{aligned}$$

ここで $0 \leq \theta \leq 1$ なので、

$$|(\theta a_i + (1-\theta)x_i) - a_i| = (1-\theta)|x_i - a_i| \leq |x_i - a_i|$$

よって、

$$\begin{aligned} &|f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) - f(x_1, \cdots, a_i, \cdots, x_N) - f_{x_i}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_N)(x_i - a_i)| \\ &\quad \leq \omega(2\|x - a\|)|x_i - a_i| \leq \omega(2\|x - a\|)\|x - a\| \end{aligned}$$

である。あとはこれを用いることで、

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(a) - \nabla f(a) \cdot (x - a)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} |f(a_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, x_N) - f_{x_i}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_N)(x_i - a_i)| \\ &\leq N\omega(2\|x - a\|)\|x - a\|. \end{aligned}$$

よって、$f$ は全微分可能である。　【証明終わり】

**定理 3.4.4.** 弧状連結な開集合 $X$ 上の関数 $f$ がすべての内点 $x$ で全微分可能であり $\nabla f(x) = 0$ を満たすならば、$f$ は定数関数である。

【証明】 補題 2.8.5 より $X$ の任意の二点 $x, y$ は $x_1, \cdots, x_N$ 軸に並行ないくつかの線分で結ばれて、それぞれの線分で偏微分が 0 なので、$f(x) = f(y)$ が成り立つ。【証明終わり】

注意 3.4.5. この定理の偏微分版つまり $f_{x_i}(x) = 0$ ならば $f(x)$ は $x_i$ について定数関数は一般には成り立たない。反例としてはコの字形の領域により与えられる。

## 3.5 高階の偏微分

$N$ 変数関数 $f$ の $x_i$ 偏微分導関数 $f_{x_i}$ はやはり $N$ 変数関数なので引き続き $x_j$ での偏微分導関数を（存在すれば）考えることができる。

**定義 3.5.1** (高階偏微分)**.** $\mathbb{R}^N$ の開部分集合 $X$ 上の関数 $f$ が変数 $x_i$ に対して偏微分可能で導関数 $f_{x_i}$ が各変数 $x_j$ で偏微分可能である時、$f$ は $X$ 上二回偏微分可能であるといい、偏微分導関数

$$f_{x_i x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

を $f$ の**二階偏微分導関数**という。同様にして、$i_1, \cdots, i_n = 1, \cdots, N$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して偏微分導関数 $f_{x_{i_1} \cdots x_{i_n}}$ を $f$ の $n$ 階偏微分導関数という。すべての $n$ 階偏微分導関数が連続の時、$f$ は $X$ 上で $C^n$ **級**であるという。

注意 3.5.2. $C^1$ 級であることは連続微分可能であることと全く同値である。

この定義によると $N$ 変数関数の $n$ 階偏微分導関数は $N^n$ 個あるが、実際にはいくつかは等しい。

**定理 3.5.3** (シュワルツの定理)**.** $f(x, y)$ を二変数関数として $(a, b)$ を定義域の内点とする。ここで $(a, b)$ の近傍において $f_x$, $f_y$, $f_{xy}$ が存在して $f_{xy}$ が $(a, b)$ で連続ならば、$f_{yx}$ も存在して

$$f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$$

が成り立つ。

【証明】 $h, k \neq 0$ として、平均値の定理を二回用いると

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) = h(f_x(a+\alpha h, b+k) - f_x(a+\alpha h, b)) = hk f_{xy}(a+\alpha h, b+\beta k)$$

となる $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ が存在することがわかる。ここで $f_{xy}$ は連続より、$\omega$ を連続性の度合いとして

$$|f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) - hk f_{xy}(a, b)| \leq |hk|\omega(\sqrt{\alpha^2 h^2 + \beta^2 k^2}) \leq |hk|\omega(\sqrt{h^2 + k^2})$$

となることがわかる。あとは先に $k$ で割って極限を取ってから次いで $h$ で割って極限を取ることで、

$$|f_y(a+h, b) - f_y(a, b) - h f_{xy}(a, b)| \leq |h|\omega(|h|),$$
$$\left| \lim_{h \to 0} \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} - f_{xy}(a, b) \right| \leq 0.$$

したがって $f_{yx}(a, b)$ が存在して、その値は $f_{xy}(a, b)$ に一致する。【証明終わり】

この定理は 3 変数以上の多変数関数に対しても任意の二つの変数に対して適用することで偏微分の順序交換をすることができ、3 回以上微分可能な関数に対しても定理を繰り返し用いることで任意の偏微分の順序交換をすることができる。例えば $C^3$ 級の $N$ 変数関数に対して、

$$f_{x_i x_j x_k} = f_{x_k x_j x_i}$$

などが成り立つ。

一回偏微分を並べて勾配ベクトルが得られたように二回偏微分を並べてヘッセ行列と呼ばれるものが定義される。

**定義 3.5.4** (ヘッセ行列). $N$ 次元点集合上の実数値関数 $f(x) = f(x_1, \cdots, x_N)$ が内点 $x = a$ の近傍で二回偏微分可能な時、$N$ 次正方行列

$$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(a) & \cdots & f_{x_1 x_N}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_N x_1}(a) & \cdots & f_{x_N x_N}(a) \end{pmatrix}$$

を $f(x)$ の $x = a$ での**ヘッセ行列**という。

注意 3.5.5. $f$ が $C^2$ 級関数の時、シュワルツの定理よりヘッセ行列は実対称行列である。

## 3.6　極値問題

点集合上の関数 $f$ がどのような点で最大または最小になるかという極値問題は様々な場面で現れる重要な問題である。一変数の時と同様にこの問題に一定の指針を与えるのが次の最大値原理である。

**定理 3.6.1** (最大値原理). $N$ 次元点集合 $X$ 上の関数 $f$ が $X$ の内点 $a$ で最大または極大または最小または極小とする。ここで、$f$ が $a$ で $x_i$ について偏微分可能であるとすると、$f_{x_i}(a) = 0$ が成立する。特に $f$ が $a$ で全微分可能ならば $\nabla f(a) = 0$ が成り立つ。

この定理により最大点や最小点では勾配が 0 である（勾配が消えているという）ものの中にあるか境界上にあることがわかる。特に境界を持たない点集合である開集合での極値問題は勾配が消える点を調べたので十分である。

そのような勾配が消える点を停留点と呼ぶ。

**定義 3.6.2** (停留点). $N$ 次元開集合 $X$ 上の関数 $f$ が内点 $a$ で $\nabla f(a) = 0$ を満たす時、$a$ を $f$ の**停留点**という。

**例 3.6.3.** 二次式

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

は

$$f_x(x, y) = 2ax + by + d, \quad f_y(x, y) = bx + 2cy + e$$

より、$f$ の停留点は連立方程式

$$2ax + by + d = 0, \quad bx + 2cy + e = 0$$

の解 $(x, y)$ である。この連立一次方程式は

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、係数行列が逆行列を持つつまり行列式が非零なので

$$\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2 \neq 0$$

の時、停留点は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

と求まる。

一般には $N$ 次実対称行列 $A$ と $N$ 次元実ベクトル $\boldsymbol{b}$ と実数 $c$ に対して、二次式

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + c$$

を考えると

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

である。よって、$\det A \neq 0$ の時は停留点は

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2} A^{-1} \boldsymbol{b}$$

と求まる。

停留点であることは極大や極小であることの必要条件であるが、逆は一般には成り立たない。

**例 3.6.4.** 二次式

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x, y) = -x^2 - y^2, \quad f_3(x, y) = x^2 - y^2,$$

の停留点はいずれも原点 $(0, 0)$ である。しかしながら、極大極小については分かれて、$f_1$ の場合は最小、$f_2$ の場合は最大、$f_3$ の場合は最大でも最小でもないことになる。$f_3$ については $x$ 軸方向には最小で $y$ 軸方向には最大となっている。

十分条件つまり実際に極大や極小になることを保証する条件としてヘッセ行列の正または負定値であることがある。

**定理 3.6.5.**

**例 3.6.6.**

## 3.7 陰関数定理

$xy$ 平面上の図形の表示方法はいろいろあるが最も表現できる対象の範囲が広いのが方程式 $f(x, y) = 0$ による表示である。この図形は $x$ を固定するごとに方程式を $y$ について解くことで、$y = g(x)$ と関数のグラフとして表示できることが期待される。このような方程式から定まる関数のことを**陰関数**という。例えば円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ を $y$ について解くことで $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ とするということが同期である。実際にはこの例のように陰関数は一般に複数あったり（多価という）また存在しないこともあるが、一意（正確には一価）な陰関数が存在することを保証するのが陰関数定理である。一般的な陰関数定理の要点は以下のとおりである。つまり、$f(a, b) = 0$ となるような点 $(a, b)$ において $y$ 偏微分 $f_y(a, b)$ が消えていない時、$(a, b)$ の近くで $f(x, y) = 0$ は $y = g(x)$ と陰関数表示される。また陰関数 $f(x)$ は $f(x, g(x)) = 0$ を満たすので、$f$ も $g$ も $C^1$ 級であればこれを微分して、

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) g'(x) = 0,$$

つまり

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

を得る。これは $y = g(x)$ と設定しているので、

$$y' = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

とも書くことができる。

**定理 3.7.1** (陰関数定理１). 二変数実数値関数 $f(x,y)$ を点 $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の近傍で定義された $C^1$ 級関数で $f(a,b)=0$ とする。ここで $f_y(a,b) \neq 0$ の時、ある半径 $r, R > 0$ が存在して、各 $x \in B_r(a)$ に対して $y \in B_R(b)$ の範囲で $f(x,y)=0$ を満たす $y$ が一意に存在しそれを $g(x)$ とおくと $g$ は $C^1$ 級であり、

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \tag{3.7.1}$$

が成り立つ。

【証明】 $f_y(a,b) < 0$ の場合も同様なので、$f_y(a,b) > 0$ の場合だけ証明する。仮定より $f_y$ は連続関数なので、半径 $r_1, R_2 > 0$ が存在して $B_{r_1}(a) \times B_{R_1}(b)$ 上の全ての $(x,y)$ で

$$f_y(x,y) \geq \frac{1}{2} f_y(a,b) > 0$$

となる。ここで $x \in B_{r_1}(a)$ を固定するごとに $f(x,y)$ は $y$ について $[b-R_1, b+R_1]$ で狭義単調増加であることに注意する。よって

$$f(a, b-R_1) < f(a,b) = 0 < f(a, b+R_1)$$

より、$f$ の連続性から $r_1$ より小さい半径 $r_2 > 0$ が存在して任意の $x \in B_{r_2}(a)$ に対して

$$f(x, b-R_1) < 0 < f(x, b+R_1)$$

が成り立つ。したがって $x \in B_{r_2}(a)$ ごとに中間値の定理と $f(x,y)$ の $y$ についての単調性より $f(x,y)=0$ となる $y$ が一意に存在してこれを $g(x)$ とおくと $g(a)=b$ である。以降では $g(x)$ の $x \in B_{r_2}(a)$ での微分可能性を見る。テイラーの定理より $h \neq 0$ に対して、$y = g(x)$, $k = g(x+h) - g(x)$ とおくと、テイラーの定理より

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + f_x(x+\alpha h, y+\beta k)h + f_y(x+\alpha h, y+\beta k)k$$

となる $0 \leq \alpha, \beta < 1$ が存在する。ここで $y, k$ の定め方から $f(x+h, y+k) = f(x,y) = 0$ であるから、

$$\frac{k}{h} = \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\frac{f_x(x+\alpha h, y+\beta k)}{f_y(x+\alpha h, y+\beta k)}$$

ここで最右辺は $x, h$ について有界なので、$h \to 0$ とすると $k \to 0$ であり、再右辺は収束するので最終的に

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$$

を得る。よって $g$ は微分可能で特に連続であり、再右辺は連続なので $g'$ も連続つまり $g$ は $C^1$ 級である。【証明終わり】

そして陰関数の滑らかさは方程式の滑らかさまで上がることが知られている。

**系 3.7.2.** $f$ が $C^n$ 級の時、陰関数 $g$ も $C^n$ 級である。

【証明】 $f$ が $C^2$ 級の時、$f_x$ と $f_y$ は $C^1$ 級で定理より $g$ も $C^1$ 級なので (3.7.1) の両辺は $C^1$ 級であり、$g$ は $C^2$ 級である。この議論を繰り返し用いることで $f$ が $C^n$ 級ならば $g$ も $C^n$ 級であることがわかる。【証明終わり】

## 3.8　ラグランジュの未定乗数法

閉集合 $X$ 上で関数 $f(x)$ の最大最小を考える問題は、内部では停留点になるので、あとは境界上での最大最小の問題となり、しばしば境界が $g(x)=0$ の形をしているときに**束縛条件** $g(x)=0$ のもとでの $f(x)$ の最大最小を考えること

になる。このような問題に絶大な威力を発揮するのが（ラグランジュの）未定乗数法である。つまり $f(x)$ の停留点を考えるのではなく、未定乗数と呼ばれる新しい変数 $k$ を使って定義される関数

$$F(x,k) = f(x) - kg(x)$$

の停留点 $(x,k) = (a,k)$ を考えればよい。つまり、

$$\nabla_x F(a,k) = \nabla f(a) - k\nabla g(a) = 0, \quad F_k(a,k) = -g(a) = 0$$

を満たす点 $x = a$ が最大最小を達成する点の候補である。実際には $\nabla g(a) \neq 0$ という条件もつくことに注意する。$f, g$ を二変数関数とすると、$g(x) = 0$ で一つの変数に束縛がついてそれを $f(x)$ に代入すると一変数関数の最大最小を考えることにはなるが、未定乗数法ではあえて変数を増やし三変数関数 $F(x,k)$ を考えるという不思議な方法である。

**定理 3.8.1** (ラグランジュの未定乗数法)**.** $f(x,y)$, $g(x,y)$ を二変数 $C^1$ 級関数として、点 $(x,y)$ が束縛条件 $g(x,y) = 0$ を満たしながら動くときに $f(x,y)$ が点 $(x,y) = (a,b)$ で最大または極大または最小または極小とする。このとき $\nabla g(a,b) = 0$ または

$$\nabla f(a,b) = k\nabla g(a,b)$$

となる実数 $k$ が存在する。

証明は陰関数定理を用いて一変数関数に帰着させる。

【証明】 $\nabla g(a,b) \neq 0$ つまり $g_x(a,b) \neq 0$ または $g_y(a,b) \neq 0$ の時を考えて、変数 $x, y$ の対称性より $g_y(a,b) \neq 0$ の場合を考える。このとき陰関数定理が使えて、点 $(a,b)$ の近くでは $g(x,y) = 0$ を満たす点 $(x,y)$ は $y = y(x)$ と解けて

$$y'(x) = -\frac{g_x(x,y(x))}{g_y(x,y(x))}$$

となるのであった。ここで一変数関数 $h(x) = f(x,y(x))$ は $x = a$ で最大または極大または最小または極小より

$$h'(a) = f_x(a,y(a)) + f_y(a,y(a))y'(a) = f_x(a,b) - f_y(a,b)\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} = 0$$

が満たされる。したがって

$$f_x(a,b) = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} g_x(a,b)$$

であり、自明なこととして

$$f_y(a,b) = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} g_y(a,b)$$

なので、$k = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$ とおけば定理の結論が得られる。$g_x(a,b) \neq 0$ の場合も全く同様である。 【証明終わり】

**例 3.8.2.**

# 第 4 章

# 重積分

## 4.1 重積分

一変数の積分は関数のグラフがなす図形の面積という側面と微分の逆作用素としての側面があったが、多変数の積分すなわち重積分はどちらかというとグラフのなす図形の体積によって定義される。

一変数の定積分を思い出すと有界閉区間上定義された関数を定義域を分割して分割の幅を小さくしていくのであった。それと同様のことを $N$ 次元有界閉矩形 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ 上の有界な $N$ 変数関数 $f(x_1, \cdots, x_N)$ について考える。各区間 $[a_i, b_i]$ を分割 $a_i = p_0^i \leq p_1^i \leq p_2^i \leq p_3^i \leq \cdots \leq p_{K_i}^i = b_i$ してその分割を $P_i$ とおく。**上リーマン和**と**下リーマン和**は次によって定義される。

$$\overline{S}(f, P_1, \cdots, P_N) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \cdots \sum_{k_N=1}^{K_N} \sup_{x_1 \in [p_{k_1-1}^1, p_{k_1}^1]} \cdots \sup_{x_N \in [p_{k_N-1}^N, p_{k_N}^N]} f(x_1, \cdots, x_N)(p_{k_1}^1 - p_{k_1-1}^1) \cdots (p_{k_N}^N - p_{k_N-1}^N),$$
$$\underline{S}(f, P_1, \cdots, P_N) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \cdots \sum_{k_N=1}^{K_N} \inf_{x_1 \in [p_{k_1-1}^1, p_{k_1}^1]} \cdots \inf_{x_N \in [p_{k_N-1}^N, p_{k_N}^N]} f(x_1, \cdots, x_N)(p_{k_1}^1 - p_{k_1-1}^1) \cdots (p_{k_N}^N - p_{k_N-1}^N).$$

このリーマン和は一変数の場合と同様に大小関係について良い性質を持っており、上リーマン和の $P_1, \cdots, P_N$ についての下限を上積分、下リーマン和の上限を下積分としてそれらが一致するとき $f$ は有界閉矩形 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ 上で**重積分可能**あるいは**重可積分**または重積分は収束するといい値を**重積分**

$$\int \cdots \int_{[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]} f(x_1, \cdots, x_N) \, \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_N)$$

と表す。この時の $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ を**積分領域**、$f$ を**被積分関数**と呼ぶ。

定義としては上記の通りであるがいちいち成分を書いていたら大変なのでいくつかの記号を導入して記述を短縮する。まず、$x = (x_1, \cdots, x_N)$ として、積分領域を $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ と被積分関数を $f(x)$ と表す。分割 $P_1, \cdots, P_N$ に対して $P = (P_1, \cdots, P_N)$ とおくと $P$ は積分領域 $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ を $K_1 \cdots K_N$ 個に分割したものと考えられ、分割の一つの部分を $C = [p_{k_1-1}^1, p_{k_1}^1] \times \cdots \times [p_{k_N-1}^N, p_{k_N}^N]$ とおいて、その $N$ 次元**面積**を $\mathrm{area}(C) = (p_{k_1}^1 - p_{k_1-1}^1) \cdots (p_{k_N}^N - p_{k_N-1}^N)$ とする。この時、上リーマン和と下リーマン和は以下のようになる。

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{C \in P} \sup_C f \, \mathrm{area}(C), \quad \underline{S}(f, P) = \sum_{C \in P} \inf_C f \, \mathrm{area}(C).$$

さらに上積分と下積分は以下で定義される。

$$\overline{\int}_D f(x) \, \mathrm{d}x = \overline{S}(f) = \inf_P \sum_{C \in P} \sup_C f \, \mathrm{area}(C), \quad \underline{\int}_D f(x) \, \mathrm{d}x = \underline{S}(f) = \sup_P \sum_{C \in P} \inf_C f \, \mathrm{area}(C).$$

$f$ が有界閉矩形 $D$ 上で重積分可能であるとはこの二つの値が一致する場合で重積分は

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x$$

と表される。

有界閉矩形 $\tilde{D}$ の部分集合つまり有界集合 $D$ 上の関数 $f$ の重積分は 0 で定義域を $\tilde{D}$ に拡張する。つまり

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in D) \\ 0 & (x \in \tilde{D} \setminus D) \end{cases}$$

として、$\tilde{f}$ が $\tilde{D}$ 上で重積分可能なとき $f$ は $D$ 上で重積分可能といい、

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

と定義する。

$f$ が定数関数 1 の時の重積分

$$\int_D 1\,\mathrm{d}x = \int_D \mathrm{d}x$$

が収束する時、有界な積分領域 $D$ は**面積確定**といい、重積分の値を $D$ の面積といい $\mathrm{area}(D)$ と表す。$D$ が有界閉矩形の場合の面積は重積分の定義で現れた面積と一致する。

$\mathrm{area}(D) = 0$ となるような集合 $D$ を**面積零集合**という。面積零集合上の（有界）関数の積分は常に 0 である。

重積分では一変数の場合の定積分と同様のことが成立する。

**定理 4.1.1** (連続関数の可積分性)**.** 有界閉集合は面積確定であり、有界閉集合上の連続関数は積分可能である。

**命題 4.1.2** (重積分の線形性)**.** 有界集合 $D$ 上の積分可能な関数 $f, g$ と実数 $c$ に対して、

$$\int_D (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_D f(x)\,\mathrm{d}x + \int_D g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_D cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_D f(x)\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。

**命題 4.1.3** (重積分の大小関係)**.** 有界集合 $D$ 上の積分可能な関数 $f, g$ が各 $x \in D$ に対して $f(x) \leq g(x)$ を満たすとき、

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_D g(x)\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。特に有界集合 $D$ 上で積分可能な関数 $f$ に対して、

$$\left|\int_D f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_D |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。

**命題 4.1.4** (積分領域の分割)**.** 二つの有界集合 $D_1, D_2$ 上で積分可能な関数 $f$ に対して $f$ は $D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2$ 上

でも積分可能で、

$$\int_{D_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_1\cup D_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_1\cap D_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。特に $D_1\cap D_2$ が面積零集合のとき

$$\int_{D_1\cup D_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。

【証明】 $D_1\cap D_2$ が空集合の時を示す。$D_1\cup D_2$ 上定義された関数 $f$ に対して、

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & (x\in D_1) \\ 0 & (x\notin D_1) \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & (x\in D_2) \\ 0 & (x\notin D_2) \end{cases}$$

とおけば、$f = f_1 + f_2$ より

$$\int_{D_1\cup D_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_1\cup D_2} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_1\cup D_2} f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

を得る。$D_1\cap D_2$ が空集合とは限らない時は $E = D_1\cap D_2$, $E_1 = D_1\setminus D_2$, $E_2 = D_2\setminus D_1$ とおけば $E, E_1, E_2$ は互いに共通部分が空であり $D_1 = E\cup E_1$, $D_2 = E\cup E_2$, $D_1\cup D_2 = E\cup E_1\cup E_2$ なので、

$$\int_{D_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{D_1\cup D_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{D_1\cap D_2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

であることがわかる。 【証明終わり】

## 4.2　累次積分

重積分は定積分同様定義にもとづいて具体的に積分を計算するのはかなり大変である。さらに重積分の場合には微分積分学の基本定理のようなものがない。そこで実用上は重積分を積分の積分とみなすことで一変数の定積分に帰着させるということが行われる。この積分の積分のことを累次積分といい、次の定理が基本になる。

**定理 4.2.1** (累次積分)**.** $A, B$ を有界集合として、$f(x,y)$ を $A\times B$ 上の積分可能関数とする。ここで各 $x\in A$ に対して $f(x,y)$ は $y$ について $B$ 上積分可能としてその積分値を $F(x)$ とする時、$F(x)$ は $A$ 上積分可能であって

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_A F(x)\,\mathrm{d}x = \int_A\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。同様に各 $y\in B$ に対して $f(x,y)$ は $x$ について $A$ 上積分可能としてその積分値を $G(y)$ とする時、$G(y)$ は $B$ 上積分可能であって

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_B G(y)\,\mathrm{d}y = \int_B\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。特に各積分が収束するならば $N$ 変数関数 $f(x_1,\cdots,x_N)$ について

$$\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_N,b_N]} f(x_1,\cdots,x_N)\,\mathrm{d}(x_1,\cdots,x_N) = \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_N}^{b_N} f(x_1,\cdots,x_N)\,\mathrm{d}x_N\cdots\mathrm{d}x_1$$

が成り立つ。

【証明】 まず一般に $f(x,y)$ が上に有界の時、上積分について

$$\overline{\iint}_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \geq \overline{\int}_A \overline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

が成り立つことを示す。$A$ の分割の一つの矩形を $C_A$、$B$ のを $C_B$ とおくと

$$\overline{\int}_{C_A} \overline{\int}_{C_B} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int}_{C_A} \overline{\int}_{C_B} \sup_{x\in C_A, y\in C_B} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \sup_{C_A\times C_B} f|C_A||C_B|$$

なので、これらを集めることで上の上積分についての不等式を得る。同様にして下積分について

$$\underline{\iint}_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \leq \underline{\int}_A \underline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

も得る。ここで

$$\underline{\iint}_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \leq \underline{\int}_A \underline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int}_A \overline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int}_A \overline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \overline{\iint}_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,,$$

$$\underline{\iint}_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \leq \underline{\int}_A \underline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int}_A \underline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int}_A \overline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \overline{\iint}_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

なので、重積分可能条件より最左辺と最右辺が等しいことから全ての等号が成り立つ、つまり

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_A \underline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A \overline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

である。特に $y$ について積分可能性があれば定理の前半部分が証明される。後半も同様（証明省略）。 【証明終わり】

**系 4.2.2** (フビニの定理)**.** $A, B$ を面積確定集合として、$f(x,y)$ を $A\times B$ 上の積分可能関数とする。ここで各 $x\in A$ に対して $f(x,y)$ は $y$ について $B$ 上積分可能、各 $y\in B$ に対して $f(x,y)$ は $x$ について $A$ 上積分可能とする時、

$$\int_A \int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_B \int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。つまり積分順序の交換ができる。

**系 4.2.3** (変数分離の重積分)**.** 変数分離された関数 $f(x)g(y)$ に対して

$$\iint_{A\times B} f(x)g(y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x \int_B g(y)\,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。

**例 4.2.4.** 重積分

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} xy\,\mathrm{d}(x,y)$$

を考える。これを重積分の定義に従って計算すると、特殊な分割として二つの区間 $[0,1]$ を $K=1,2,3,\cdots$ 等分して $k,l=1,\cdots,K$ に対して $(x,y)=(\frac{k}{K},\frac{l}{K})$ での値を考えることで

$$I = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} \frac{k}{K}\frac{l}{K}\frac{1}{K^2} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{K^4}\cdot\frac{1}{2}K(K+1)\cdot\frac{1}{2}K(K+1) = \frac{1}{4}$$

を得る。一方で累次積分を使うと、

$$I = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

と計算される。一般に数列和の計算は大変で積分の方が計算しやすいので、積分の積分すなわち累次積分を利用すると良い。

上記の例では $x$ と $y$ が対称であったが、非対称な問題ではどちらの変数で先に積分するかで計算の手間が変わる場合がある。そのような問題では原始関数が計算しやすい方の変数で先に積分すると良い。

**例 4.2.5.** 重積分

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} x^2 y e^{xy^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

を考える。$x$ で先に積分すると、原始関数が

$$\begin{aligned}\int x^2 y e^{xy^2}\,\mathrm{d}x &= \int x^2 \frac{1}{y}(e^{xy^2})'\,\mathrm{d}x = x^2\frac{1}{y}e^{xy^2} - \int 2x\frac{1}{y}e^{xy^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x^2\frac{1}{y}e^{xy^2} - \int 2x\frac{1}{y^3}(e^{xy^2})'\,\mathrm{d}x = x^2\frac{1}{y}e^{xy^2} - 2x\frac{1}{y^3}e^{xy^2} + \int 2\frac{1}{y^3}e^{xy^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x^2\frac{1}{y}e^{xy^2} - 2x\frac{1}{y^3}e^{xy^2} + 2\frac{1}{y^5}e^{xy^2} + C\end{aligned}$$

より、

$$\int_0^1 x^2 y e^{xy^2}\,\mathrm{d}x = \left[x^2\frac{1}{y}e^{xy^2} - 2x\frac{1}{y^3}e^{xy^2} + 2\frac{1}{y^5}e^{xy^2}\right]_0^1 = \frac{1}{y}e^{y^2} - 2\frac{1}{y^3}e^{y^2} + 2\frac{1}{y^5}e^{y^2} - 2\frac{1}{y^5}$$

となり、頑張れば

$$\int \frac{1}{y}\left(e^{y^2} - 2\frac{1}{y^3}e^{y^2} + 2\frac{1}{y^5}e^{y^2} - 2\frac{1}{y^5}\right)\mathrm{d}y = \frac{e^{y^2}y^2 - e^{y^2} + 1}{2y^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}y^2 + \cdots$$

がわかるので、最初の重積分は

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{y}e^{y^2} - 2\frac{1}{y^3}e^{y^2} + 2\frac{1}{y^5}e^{y^2} - 2\frac{1}{y^5}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

である。その一方 $y$ で先に積分すると、原始関数が

$$\int x^2 y e^{xy^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}xe^{xy^2} + C$$

より、

$$\int_0^1 x^2 y e^{xy^2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}xe^{xy^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}x$$

なので、

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(xe^x - e^x) - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

となる。計算結果は同じだが、そこに行き着く労力には大きな差がある。特に先に原始関数が簡単にわかる方で計算することで次の積分がより計算しやすい形になっている。

以上は長方形領域での議論であるが、一般の形状の積分領域においては $x$（または $y$）を固定すると $y$ $(x)$ の動く範囲が $x$ $(y)$ によって変わることになる。つまり、$(x,y)$ が動く集合 $D \subset A \times B$ が $x \in A$ を固定するごとに $y$ が $B(x)$ を動くとすると

$$D = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B(x)\}$$

と表されて、この時 $D$ は**縦線集合**と呼ばれる。同様に $y \in B$ を固定するごとに $x$ が $A(y)$ を動くとすると

$$D = \{(x, y) \mid y \in B, x \in A(y)\}$$

と表されて、この時 $D$ は**横線集合**と呼ばれる。

**系 4.2.6** (一般領域での累次積分)**.** $f(x, y)$ を縦線集合 $D = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B(x)\}$ 上の積分可能な関数であり各 $x \in A$ に対して $f(x, y)$ は $y$ について $B(x)$ 上積分可能とする時、

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_A \int_{B(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。$f(x, y)$ を横線集合 $D = \{(x, y) \mid y \in B, x \in A(y)\}$ 上の積分可能な関数であり各 $y \in B$ に対して $f(x, y)$ は $x$ について $A(y)$ 上積分可能とする時、

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_B \int_{A(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。

よくある適用例は積分の積分が与えられた時に積分順序を入れ替えることである。その場合には縦線集合と横線集合の変換をする必要があるので注意する。

**例 4.2.7.** $x$ 軸と $y$ 軸と直線 $x + y = 1$ で囲まれた部分を $D$ とおいて重積分

$$I = \iint_D xy\,\mathrm{d}(x, y)$$

を考える。この時、$D$ は縦線集合

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$$

とみなせるので、

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

と計算される。

**例 4.2.8.** 積分の積分

$$I = \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

を考える。実は $e^{-y^2}$ は原始関数が初等関数では表せない関数なので、このままでは内側の積分が計算できない。そこで積分の順序交換を行うために積分領域を縦線集合から横線集合に変更すると

$$\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\} = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$$

より、

$$I = \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^y e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right] = \frac{e-1}{2e}$$

と計算される。

特に $f$ を定数関数 1 とすると集合の体積（今までは面積と呼んでいたが次数が上がるので体積と呼ぶ）について次が得られる。

**系 4.2.9** (カヴァリエリの原理)**.** 縦線集合 $D = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B(x)\}$ の体積は

$$\mathrm{vol}(D) = \int_A \mathrm{area}(B(x))\,\mathrm{d}x$$

で与えられ、横線集合 $D = \{(x,y) \mid y \in B, x \in A(y)\}$ の体積は

$$\mathrm{vol}(D) = \int_B \mathrm{area}(A(y))\,\mathrm{d}y$$

で与えられる。

**例 4.2.10.** 単位球 $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ の体積を考える。これは縦線集合あるいは横線集合として

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq +\sqrt{1-x^2-y^2}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq +1, x^2+y^2 \leq 1-z^2\} \end{aligned}$$

として表される。そのため半径 $r$ の円板を $D(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r^2\}$ として、

$$\mathrm{vol}(B) = \iint_{D(1)} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^{+1} \mathrm{area}(D(\sqrt{1-z^2}))\,\mathrm{d}z$$

と二通りの計算法があることがわかる。球の体積について詳しくは次章で述べる。

## 4.3　広義重積分

$N$ 次元有界集合 $D$ 上の有界関数 $f$ で定義された重積分

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x$$

であるが、全体集合 $\mathbb{R}^N$ やその開集合などもっと一般の集合 $X$ に対してその上の有界とは限らない関数の重積分を定義したいことがある。このような積分を広義重積分と呼ぶ。

本テキストで紹介する広義重積分は積分領域を有界閉集合で内側から近似するという方法で定義する。

**定義 4.3.1** (積分領域の近似列)**.** 点集合 $X$ に対して次を満たす有界閉集合の列 $(D_n)$ を $X$ の**近似列**という。

- 各自然数 $n$ に対して $D_n \subset X$ と $D_{n+1} \supset D_n$ が成り立つ。
- 任意の $x \in X$ に対してある自然数 $n$ が存在して $x \in D_n$ である。

つまり $D_n$ は単調に大きくなって $\bigcup_n D_n = X$ が成り立つ。

なお、開集合やそれに類する基本的な点集合 $X$ には近似列が存在することに注意する。近似列が存在しないのは無理数の集合のような病的な場合である。以下では点集合 $X$ は近似列を持つものとする。

ここで、広義積分 $\int_X f(x)\,\mathrm{d}x$ を有界閉集合上の積分 $\int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ の極限として捉えたいが、近似列の取り方によって極限が変わると困るのでそれがないことを保証する必要がある。

$X$ 上の関数 $f$ であって $X$ に包含される任意の有界閉集合 $D$ 上で（有界かつ）積分可能な時、$f$ は**局所重積分可能**という。連続関数は局所可積分である。

**定義 4.3.2** (広義重積分). $X$ 上の非負値の局所重積分可能関数 $f$ が

$$\inf_{(D_n)} \liminf_n \int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{(D_n)} \limsup_n \int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

を満たすとき $X$ 上で**広義重積分可能**といい、その値を

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x$$

と表し**広義重積分**という。ただし、この式において下限と上限は近似列 $(D_n)$ について取る。

非負値とは限らない $X$ 上の関数 $f$ に対してはその正部分と負部分

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

の両方が広義重積分可能な時、$f$ は**広義重積分可能**といい、

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_X f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_X f^-(x)\,\mathrm{d}x$$

を $f$ の $X$ 上での**広義重積分**という。

注意 4.3.3. この広義重積分は一変数関数にも定義され、区間上では一変数の広義積分と一致することに注意する。

重積分可能性と同様に広義重積分可能性を個別の問題で確認するのは大変なので、十分条件（実際には必要十分条件になる）として次の定理を示す。

**補題 4.3.4** (非負値関数の広義重積分可能性). $X$ 上の非負値局所重積分可能関数 $f$ に対して、$f$ が $X$ 上で広義重積分可能であることは、$X$ のある近似列 $(D_n)$ が存在して、

$$\sup_n \int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

が成り立つことと同値である。

【証明】 $f$ が広義重積分可能という条件は任意の近似列に対するとても強い条件なので、ある近似列に対して数列 $(\int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x)_n$ は収束し特に有界である。逆について、$f$ が非負値より数列 $(\int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x)_n$ は単調増加であり、仮定より有界なので収束する。この極限値を $I$ とおく。ここで別の近似列 $(D'_n)$ に対して、$m = m_n$ を十分大きくとれば $D'_n \subset D_{m_n}$ とできる。よって、

$$\int_{D'_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{D_{m_n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$$

なので、数列 $(\int_{D'_n} f(x)\,\mathrm{d}x)_n$ も有界で収束し極限値を $I'$ とおくと $I' \leq I$ が成り立つ。$(D_n)$ と $(D'_n)$ を入れ替えて同じ議論をすれば $I \leq I'$ がわかるので、二つ目の条件が成り立つ。【証明終わり】

注意 4.3.5. $(\int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x)_n$ が有界でない時は、

$$\lim_n \int_{D'_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$

が成り立つ。

**定理 4.3.6** (広義重積分可能性)**.** $X$ 上の局所重積分可能関数 $f$ に対して以下の条件は同値である。

1. $f$ は $X$ 上で広義重積分可能である。
2. $|f|$ は $X$ 上で広義重積分可能である。
3. $X$ のある近似列 $(D_n)$ が存在して、

$$\sup_n \int_{D_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

が成り立つ。

この定理により今回の広義重積分可能性は絶対収束を意味する。

【証明】 二つ目と三つ目の条件の同値性は補題から従う。二つ目の条件が成り立つ時、$f^+(x), f^-(x) \leq |f(x)|$ より、$f^+, f^-$ はともに非負値広義重積分可能より一つ目の条件が成り立つ。一つ目の条件が成り立つ時、$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ も広義重積分可能である。 【証明終わり】

以下では広義重積分を広義積分の広義積分つまり広義累次積分として計算する手法を紹介する。

**定理 4.3.7** (広義累次積分)**.** $X, Y$ を集合として、$f(x,y)$ を $X \times Y$ 上の広義積分可能関数とする。ここで各 $x \in X$ に対して $f(x,y)$ は $y$ について $Y$ 上広義積分可能とする時、

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。同様に各 $y \in Y$ に対して $f(x,y)$ は $x$ について $X$ 上広義積分可能とする時、

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。

【証明】 $X$ の近似列として $(A_n)$ を $Y$ の近似列として $(B_n)$ をそれぞれ取ると、$(A_n \times B_n)$ は $X \times Y$ の近似列になっていることに注意する。$f$ は広義積分可能より

$$\iint_{(X\times Y)\setminus(A_n\times B_n)} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) \to 0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{A_n\times B_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) - \int_{A_n}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right| \\
&\quad \leq \int_{A_n}\int_{Y\setminus B_n} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \iint_{(X\times Y)\setminus(A_n\times B_n)} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) \to 0
\end{aligned}$$

なので、定理が証明される。後半部分も同様（証明省略)。 【証明終わり】

**例 4.3.8.** $X = (0,1]^2$ 上の二変数関数

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

の積分を考える。この関数は $(x,y) = (0,0)$ では発散することに注意する。ここで $y$ で先に積分すると

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

で、$x$ で先に積分すると

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_0^1\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$$

となり積分順序の交換が行えない例となっている。これは $f$ が $X$ 上で広義重積分可能でないことに起因しており、実際 $X$ の近似列として $D_n = [n^{-1},1]\times(0,1]$ として取るのと $D_n' = (0,1]\times[n^{-1},1]$ を取るのとで積分値が上記の通り異なっている。

## 4.4 変数変換の公式

**定理 4.4.1** (重積分の変数変換)**.** $x=\Phi(u)$ は $u$ が動く開集合 $U$ を $x$ が動く開集合 $X$ に一対一に移す $C^1$ 級変換としてヤコビアンの値は全ての $u\in U$ で非零とする。この時、$X$ 上の広義積分可能な連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f(\Phi(u))|\det J\Phi(u)|\,\mathrm{d}u$$

が成り立つ。

この定理の重要な点は $x=\Phi(u)$ と変数変換すると $\mathrm{d}x = |\det J\Phi(u)|\,\mathrm{d}u$ と考えられるところである。一変数の置換積分の際にはなかった絶対値がついているのは積分の向きが重積分では考慮されていないためである。

**系 4.4.2** (一次変換)**.** 二次元の一次変換 $x=au+bv, y=cu+dv$ を考えると、ヤコビアン $ad-bc$ が非零である限り

$$\iint_X f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_U f(au+bv,cu+dv)|ad-bc|\,\mathrm{d}(u,v)$$

が成り立つ。

**系 4.4.3** (極座標変換)**.** 二次元の極座標変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を考えると、

$$\iint_X f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_U f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}(r,\theta)$$

が成り立つ。

変数変換の公式の証明をするために次の補題を準備する。

**補題 4.4.4.** $D$ を有界閉集合として $f$ をその上の連続関数とする。この時、連続性の度合い $\omega$ が存在して次のようにできる。$P$ を $D$ の分割つまり $D$ の有界閉部分集合 $E$ の集合で、任意の $E_1,E_2\in P$ に対して $E_1\cap E_2$ は面積零集合で $\bigcup_{E\in P} E = D$ を満たすとする。この時、各 $E$ の任意の点 $\hat{x}\in E$ に対して

$$\left|\sum_{E\in P} f(\hat{x})\,\mathrm{area}(E) - \int_D f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \omega(\max_{E\in P}\mathrm{diag}(E))\,\mathrm{area}(D)$$

が成り立つ。ただし、$\mathrm{diag}(E)$ は $E$ の二点の最大距離つまり

$$\mathrm{diag}(E) = \sup_{x,y\in E} d(x,y)$$

を表す。

この補題は重積分の定義で分割を小さな長方形でしていたのをもっと一般の図形で分割しても積分値は変わらないことを意味している。

【証明】 $f$ は $D$ 上一様連続より連続性の度合いを $\omega$ とすると、

$$\begin{aligned}\left|\sum_{E\in P} f(\hat{x})\,\mathrm{area}(E) - \int_D f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{E\in P}\int_E f(\hat{x})\,\mathrm{d}x - \sum_{E\in P}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sum_{E\in P}\int_E |f(x)-f(\hat{x})|\,\mathrm{d}x \\ &\le \sum_{E\in P}\int_E \omega(\mathrm{diag}(E))\,\mathrm{d}x \le \omega(\max_{E\in P}\mathrm{diag}(E))\,\mathrm{area}(D)\end{aligned}$$

である。　【証明終わり】

注意 4.4.5. ここでは $f$ は連続関数として証明したが、より一般の重積分可能関数に対しても類似の結果を得ることができる。

【重積分の変数変換の証明】 まず、$f$ が定数関数 1 で $\Phi(u)$ がベクトル $u$ に行列 $A$ をかける操作 $\Phi(u) = Au$ として $U = [0,1]^N$ の場合を考える。この時、$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_N \end{pmatrix}$ として、$X$ は $N$ 個の $N$ 次元ベクトル $a_1, \cdots, a_N$ が張る平行四辺形（の $N$ 次元版）であり、示すべき式は

$$\mathrm{area}(X) = |\det A|$$

となる。このことの証明は省略する。平行移動すれば $\Phi(u) = Au + b$ で $U$ が有界閉矩形 $D$ の時も

$$\mathrm{area}(\Phi(D)) = |\det A|\,\mathrm{area}(D)$$

が成り立つことに注意する。

次に一般の $C^1$ 級変換 $x = \Phi(u)$ と $U$ が点 $P_0(u_1, \cdots, u_N)$ を含み一辺の長さが $h > 0$ の正方形（の $N$ 次元版）$D_{u,h} = [u_1, u_1 + h] \times \cdots \times [u_N, u_N + h]$ の場合について、

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{area}(\Phi(D_{u,h}))}{\mathrm{area}(D_{u,h})} = |\det J\Phi(u)|$$

が成り立つことを示す。ただし、$\mathrm{area}(D_{u,h}) = h^N$ であることに注意する。TODO

一般の $f, \Phi, U$ と $U$ の有界閉部分集合 $D$ に対して、

$$\int_{\Phi(D)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(\Phi(u))|\det J\Phi(u)|\,\mathrm{d}u \tag{4.4.1}$$

を示す。ここで $u \in D$ についての関数 $f(\Phi(u))|\det J\Phi(u)|$ は連続なので右辺の重積分は収束することに注意する。$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して、全空間 $\mathbb{R}^N$ を一辺の長さが $h = 2^{-n}$ の $N$ 次元正方形 $D_{u,h}$ $(u = (hi_1, \cdots, hi_N)$, $i_1, \cdots, i_N \in \mathbb{Z})$ に分割する。$P_n$ を $U$ に含まれながら $D$ と共通部分を持つような正方形 $D_{u,h}$ 全体として、$P_n$ の正方形を $\Phi$ で移した図形 $E_x$ $(x = \Phi(u))$ の集合を $Q_n$ とおく。この時、

$$\sum_{E_x\in Q_n} f(x)\,\mathrm{area}(E_x) \to \int_{\Phi(D)} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \sum_{D_{u,h}\in P_n} f(\Phi(u))|\det J\Phi(u)|\,\mathrm{area}(D_{u,h}) \to \int_D f(\Phi(u))|\det J\Phi(u)|\,\mathrm{d}u$$

であることに注意する。ここで、

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{E_x \in Q_n} f(x)\,\mathrm{area}(E_x) - \sum_{D_{u,h} \in P_n} f(\Phi(u)) |\det J\Phi(u)|\,\mathrm{area}(D_{u,h}) \right| \\
&\quad \leq \sum_{D_{u,h} \in P_n} |f(\Phi(u))| |\mathrm{area}(\Phi(D_{u,h})) - |\det J\Phi(u)|\,\mathrm{area}(D_{u,h})| \\
&\quad \leq \sum_{D_{u,h} \in P_n} |f(\Phi(u))| |\det J\Phi(u)|\,\mathrm{area}(D_{u,h}) \omega(h)
\end{aligned}
$$

なので、$n \to \infty$ とすると $h \to 0$ であり $\omega(h) \to 0$ より等式 (4.4.1) が得られる。

　最後に定理の広義積分に関する等式であるが、$U$ の適当な近似列 $(D_n)$ を取れば証明される。　【証明終わり】

# 第 5 章

# 関数列

## 5.1 各点収束と一様収束

関数列とは共通の定義域をもつ関数からなる列のことである。つまり、自然数 $n$ に対して集合 $X$ 上の実数値関数 $f_n$ が与えられた時、$(f_n)$ を $X$ 上の**関数列**という。各関数が同じ種類の関数の場合が重要であり、各 $f_n$ が連続関数ならば連続関数列などのように表現する。

関数列の収束として容易に思いつくのが次の各点収束である。

**定義 5.1.1** (各点収束)**.** $(f_n)$ を集合 $X$ 上の関数列とする。各 $x \in X$ に対して値の列 $(f_n(x))_n$ は実数列だがこれが収束する時、収束先を $f(x)$ とおくと $(f_n)$ は $f$ に $X$ 上**各点収束**するという。このとき各点収束先 $f$ を**極限関数**といい、$\lim_n f_n$ と表現することがある。

$X$ 上の関数列の各点収束先は $X$ 上の関数である。しかしながら連続関数列が各点収束しても収束先は連続関数とは限らない。

**例 5.1.2.** 直線上の連続関数列を $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ nx & (0 \le x \le \frac{1}{n}) \\ 1 & (x \ge \frac{1}{n}) \end{cases}$$

で定義する。この関数列は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

に各点収束するが、これは連続ではない。

関数列の重要な応用例として定積分の列の極限の問題を関数列の収束先の定積分で捉えるという、極限と積分の交換があるがこのままでは極限関数の可積分性も怪しい状況になる。

そこで各点収束に代わる関数列の収束性として一様収束を導入する。

**定義 5.1.3** (一様収束)**.** $(f_n)$ を集合 $X$ 上の関数列とし、$f$ を $X$ 上の関数とする。ここで実数列 $(\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|)_n$ が $0$ に収束する時、$(f_n)$ は $f$ に $X$ 上**一様収束**するという。つまり、

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

が成り立つということであり、右辺の $\|f_n - f\|$ を関数 $f_n - f$ の**一様収束ノルム**あるいは**上限ノルム**という。

一様収束は各点収束より強い条件であり、一様収束のことを強収束、各点収束のことを弱収束と表現したりする。関数列 $f_n$ においては添え字 $n$ は自然数であったがこれを実数や平面の点に拡張したものを一般に関数族という。

**定義 5.1.4** (関数族)**.** $N$ 次元空間の点 $b$ を極限点とする点集合 $Y$ に対して二変数関数 $f(x,y)$ を $x \in X$ と点 $y \in Y$ に対して定義するとき、$f(x,y)$ を $b$ の近くの点 $y$ に対して $x \in X$ の関数を対応させる**関数族**と呼ぶことにする。

ここで、各 $x \in X$ ごとに $y \to b$ で $f(x,y)$ が収束するとき、収束先を $l(x) = \lim_{y\to b} f(x,y)$ と書いて $f(x,y)$ は $y \to b$ で $l(x)$ に**各点収束**するといい、$y \to b$ で $\sup_{x\in X} |f(x,y) - l(x)| \to 0$ となるとき、$f(x,y)$ は $y \to b$ で $l(x)$ に**一様収束**するという。

関数族 $f$ が一様収束するための十分条件は二変数関数の連続性で表される。

**命題 5.1.5.** $X$ は有界閉集合とする。$f(x,y)$ を $X \times Y$ 上の連続関数とするとき、$Y$ の極限点 $b$ で $b \in Y$ になっているものに対して、関数族 $f(x,y)$ は $y \to b$ で $l(x) = f(x,b)$ に一様収束する。

【証明】 $b$ に収束する $Y$ 上の点列 $(y_n)$ を固定する。各 $y_n$ に対して最大値最小値定理より $|f(x_n,y_n) - f(x_n,b)| = \sup_{x\in X} |f(x,y_n) - f(x,b)|$ となる $x \in X$ が存在する。ここで $(x_n)$ が収束するとき $x_n \to a$ とおくと、

$$\sup_{x\in X} |f(x,y_n) - f(x,b)| = |f(x_n,y_n) - f(x_n,b)| \to |f(a,b) - f(a,b)| = 0$$

なので、命題 2.6.11 より $(x_n)$ が収束しなくても $\sup_{x\in X} |f(x,y_n) - f(x,b)| \to 0$ である。あとは命題 2.5.11 より $y \to b$ で $\sup_{x\in X} |f(x,y) - f(x,b)| \to 0$ がわかる。【証明終わり】

関数列に対して級数をとったものが関数項級数である。

**定義 5.1.6** (関数項級数)**.** 集合 $X$ 上の関数列 $(f_n(x))_{n=0}^{\infty}$ に対して級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

のことを**関数項級数**という。

より詳しくは $N = 0,1,2,3,\cdots$ に対して、第 $N$ 項までの**部分和**

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_N(x)$$

を取り、関数列 $(F_N(x))_{N=0}^{\infty}$ を定める。ここで $(F_N(x))$ が各点収束または一様収束するとき、関数項級数 $\sum_n f_n(x)$ は**各点収束**または**一様収束**するという。

この定義を見てわかる通り関数項級数の理論は関数列の理論がそのまま適用できるが、さらに特別な取り扱いができる。また、べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

は関数項級数の特殊な場合である。

さらに一変数広義積分も考えられる。

**定義 5.1.7** (関数項積分)**.** 集合 $X$ 上の関数族 $f(x,y)$ に対して $f(x,y)$ は $y\in[c,b)$ について連続として広義積分

$$\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

のことを**関数項積分**という。

より詳しくは $t\in[c,b)$ に対して、$[c,t]$ 上の積分

$$F(x,t)=\int_c^y f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

を取り、関数族 $F(x,t)$ を定める。ここで $F(x,t)$ が $t\to b$ で各点収束または一様収束するとき、関数項積分 $\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ は**各点収束**または**一様収束**するという。

**定理 5.1.8** (ワイエルシュトラスの M 判定法)**.** 集合 $X$ に対して以下が成り立つ。

- $X$ 上の関数項級数 $\sum_n f_n(x)$ について、非負数列 $(M_n)$ であって
$$|f_n(x)|\le M_n,\quad \sum_n M_n<\infty$$
を満たすものがあるとき、関数項級数 $\sum_n f_n(x)$ は $X$ 上一様収束する。
- $X$ 上の関数項積分 $\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ について、非負連続関数 $M(y)$ であって
$$|f(x,y)|\le M(y),\quad \int_c^b M(y)<\infty$$
を満たすものがあるとき、関数項積分 $\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ は $X$ 上一様収束する。

【証明】　級数に対してのみ示す。まず各 $x\in X$ に対して、級数 $\sum_n f_n(x)$ は

$$\sum_n |f_n(x)|\le\sum_n M_n<\infty$$

より絶対収束する。つまり関数項級数 $\sum_n f_n(x)$ は $X$ 上各点収束するので収束先を $F(x)$ とおくと、

$$\left|\sum_{n\le N} f_n(x)-F(x)\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|f_n(x)|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}M_n.$$

ここで最右辺は $x$ によらない数で $N\to\infty$ とすると

$$\sup_{x\in X}\left|\sum_{n\le N} f_n(x)-F(x)\right|\le\sum_n M_n-\sum_{n\le N}M_n\to 0$$

なので、$\sum_n f_n(x)$ は $X$ 上一様収束することが示された。 【証明終わり】

**例 5.1.9.** 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する。

**例 5.1.10** (高木関数)**.** 関数項級数

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s(2^n x)}{2^n},\quad s(t)=\max_{n\in\mathbb{Z}}\{t-n\}$$

は $0 \leq s(t) \leq 1$ に注意すれば、$\mathbb{R}$ 上絶対収束し $T$ は連続関数である。その一方で $T$ は至る所微分不可能であることが知られていて、高木関数と呼ばれる。

## 5.2　一様収束と連続性

いくらかの仮定のもとで連続関数の一様収束極限は連続関数である。

**命題 5.2.1** (一様収束と連続性)**.** $X$ の全ての点が $X$ の極限点となるような集合 $X$ に対して以下が成り立つ。

- 連続関数の列 $(f_n)$ が関数 $f$ に $X$ 上一様収束するとき、$f$ は $X$ 上の連続関数である。
- 連続関数の族 $f(x,y)$ が $y \to b$ で関数 $l$ に $X$ 上一様収束するとき、$l$ は $X$ 上の連続関数である。
- 連続関数の列 $(f_n)$ に対して関数項級数 $\sum_n f_n(x)$ が $X$ 上一様収束するとき、$\sum_n f_n(x)$ は $X$ 上の連続関数である。
- $X \times [c,b)$ 上の連続関数 $f(x,y)$ に対して関数項積分 $\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ が $X$ 上一様収束するとき、$\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ は $X$ 上の連続関数である。

また、上記の内容は連続を一様連続に置き換えても成立する。

【証明】　最初の関数列に対してのみ示す。任意の $a, x \in X$ と自然数 $n$ に対して、

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \leq 2\|f_n - f\| + \omega_{f_n,a}(d(a,x))$$

が成り立つ。よって、$\varepsilon > 0$ に対して、十分大きい $n$ を一つ取ることで $\|f_n - f\| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ とでき、その $n$ に対して $\omega_{f_n,a}(\delta) < \frac{1}{3}\varepsilon$ となる $\delta > 0$ を取れば、$d(a,x) < \delta$ なる $x \in X$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立ち、$f$ は連続である。一様連続も同様。【証明終わり】

**命題 5.2.2** (点列収束)**.** $X$ を全ての点が $X$ の極限点となるような集合として、$(f_n)$ を $X$ 上の連続関数列、$f$ を $X$ 上の連続関数とする。ここで $(f_n)$ が $f$ に $X$ 上一様収束するならば、$X$ 上の任意の収束する点列 $x_n \to x$ に対して $f_n(x_n) \to f(x)$ が成り立つ。また $X$ を有界閉集合とするとき、逆も成り立つ。

【証明】　$f$ が $X$ 上の連続関数であることに注意して、差を評価すると

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\| + \omega_{f,x}(d(x,x_n)) \to 0.$$

よって $f_n(x_n) \to f(x)$ が成り立つ。

逆については各自然数 $n$ に対して、$|f_n(x) - f(x)|$ は有界閉集合 $X$ 上の連続関数より最大値を達成する点 $a_n \in X$ が存在して、

$$|f_n(a_n) - f(a_n)| = \|f_n - f\|$$

が成り立つ。ここで $(a_n)$ は収束するとして $a_n \to a$ とおくと仮定より

$$|f_n(a_n) - f(a_n)| \to |f(a) - f(a)| = 0.$$

よって命題 2.6.11 より、$\|f_n - f\| \to 0$ が従い、一様収束が言えた。【証明終わり】

## 5.3　極限と積分の順序交換

関数列や関数族、関数項級数は一様収束の下で積分との順序交換ができる。

**定理 5.3.1** (極限と積分の交換). 面積確定集合 $X$ に対して以下が成り立つ。

- $(f_n)$ を $X$ 上の積分可能な関数の列とする。ここで $(f_n)$ がある関数 $f = \lim_n f_n$ に $X$ 上一様収束するとき、$f$ も $X$ 上積分可能で
$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \lim_n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
が成り立つ。
- $f(x, y)$ を点 $b$ の近くの点 $y$ に対して $x \in X$ で積分可能な関数を対応させる関数の族とする。ここで $f(x, y)$ が $y \to b$ で $X$ 上一様収束するとき、$l(x) = \lim_{y\to b} f(x, y)$ も $X$ 上積分可能で
$$\int_X l(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \lim_{y\to b} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to b} \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}x$$
が成り立つ。
- $(f_n)$ を $X$ 上の積分可能な関数の列とする。ここで関数項級数 $\sum_n f_n(x)$ が $X$ 上一様収束するとき、$F(x) = \sum_n f_n(x)$ も $X$ 上積分可能で
$$\int_X F(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \sum_n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_n \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
が成り立つ。

最後の関数項級数に対する定理はしばしば項別積分と呼ばれる。

【証明】 最初の関数列に対してのみ示す。差を評価すると
$$\left|\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_X f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_X \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f_n - f\|\,\mathrm{area}(X) \to 0.$$
よって定理の内容が従う。 【証明終わり】

## 5.4　極限と微分の順序交換

微分積分学の基本定理より微分と積分はつながっている関係で、極限と積分の交換の内容をもとに極限と微分の交換を示すことができる。

**定理 5.4.1** (極限と微分の交換). 開区間 $X$ に対して以下が成り立つ。

- $(f_n)$ を $X$ 上の $C^1$ 級関数の列とする。ここで $(f_n')$ がある関数に $X$ 上一様収束し $f_n(a)$ が収束するような点 $a$ が存在するとき、$(f_n)$ は $X$ 上各点収束し $f = \lim_n f_n$ も $X$ 上微分可能で
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_n f_n(x)\right) = \lim_n f_n'(x)$$
が成り立つ。
- $f(x, y)$ を点 $b$ の近くの点 $y$ に対して $x \in X$ で $C^1$ 級関数を対応させる関数の族とする。ここで $f_x(x, y)$ が $y \to b$ で $X$ 上一様収束し $f(a, y)$ が収束するような点 $a$ が存在するとき、$f(x, y)$ は $X$ 上各点収束し

$l(x) = \lim_{y\to b} f(x,y)$ も $X$ 上微分可能で

$$l'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b} f_x(x,y)$$

が成り立つ。

- $(f_n)$ を $X$ 上の $C^1$ 級関数の列とする。ここで関数項級数 $\sum_n f_n'(x)$ が $X$ 上一様収束し $\sum_n f_n(a)$ が収束するような点 $a$ が存在するとき、$\sum_n f_n(x)$ は $X$ 上各点収束し $F(x) = \sum_n f_n(x)$ も $X$ 上微分可能で

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_n f_n(x)\right) = \sum_n f_n'(x)$$

が成り立つ。

最後の関数項級数に対する定理はしばしば項別微分と呼ばれる。

【証明】 最初の関数列に対してのみ示す。$x \in X$ を固定する。微分積分学の基本定理より

$$f_n(x) = \int_a^x f_n'(x)\,\mathrm{d}x + f_n(a).$$

仮定より右辺は収束するので、

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \int_a^x f_n'(x)\,\mathrm{d}x + \lim_n f_n(a) = \int_a^x \lim_n f_n'(x)\,\mathrm{d}x + \lim_n f_n(a).$$

この両辺を微分して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_n f_n(x)\right) = \lim_n f_n'(x)$$

を得る。【証明終わり】

## 5.5 微分と積分の順序交換

微分は極限で定義されるので、極限と積分の交換の内容をもとに微分と積分の交換を示すことができる。

**定理 5.5.1** (積分記号下の微分、微分と積分の交換)**.** $X$ を面積確定集合、$Y$ を開区間とする。$X \times Y$ 上定義された二変数関数 $f(x,y)$ が各 $y \in Y$ に対して $x \in X$ で積分可能で各 $x \in X$ に対して $y \in Y$ について $C^1$ 級で $y \to b$ で $f_y(x,y)$ は $f_y(x,b)$ に一様収束するとする。このとき、$f_y(x,b)$ も $x \in X$ で積分可能で

$$\int_X f_y(x,b)\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigg|_{y=b}$$

が成り立つ。

【証明】 微分の定義より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\bigg|_{y=b} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_X f(x,b+h)\,\mathrm{d}x - \int_X f(x,b)\,\mathrm{d}x}{h} = \lim_{h\to 0}\int_X \frac{1}{h}(f(x,b+h) - f(x,b))\,\mathrm{d}x$$

なので、$h \to 0$ で $\frac{1}{h}(f(x,b+h) - f(x,b))$ が $f_y(x,b)$ に一様収束することを示せばよい。$f(x,y)$ は $y$ について $C^1$ 級であることから、微分積分学の基本定理より

$$\frac{1}{h}(f(x,b+h) - f(x,b)) = \frac{1}{h}\int_0^h f_y(x,b+r)\,\mathrm{d}r$$

なので、

$$\sup_{x\in X}\left|\frac{1}{h}\int_0^h f_y(x,b+r)\,\mathrm{d}r - f_y(x,b)\right| \le \frac{1}{h}\int_0^h \sup_{x\in X}\left|f_y(x,b+r)-f_y(x,b)\right|\mathrm{d}r\,.$$

ここで $f_y(x,y)$ が一様収束するという仮定より連続性の度合い $\omega$ が存在して、これは単調増加であることに注意すると $h\to 0$ で

$$\sup_{x\in X}\left|\frac{1}{h}\int_0^h f_y(x,b+r)\,\mathrm{d}r - f_y(x,b)\right| \le \frac{1}{h}\int_0^h \omega(r)\,\mathrm{d}r \le \frac{1}{h}\int_0^h \omega(h)\,\mathrm{d}r = \omega(h)\to 0.$$

よって $\frac{1}{h}(f(x,b+h)-f(x,b))$ は $f_y(x,b)$ に一様収束し、定理が証明される。　【証明終わり】

# 第 6 章

# 種々の計算

## 6.1 正測体と正軸体の体積

正測体とは線分、正方形、立方体といったものを次元について一般化したもので、原点を中心とした半径 $a > 0$ の $N$ 次元**正測体**を

$$C_N(a) = \{(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|\} \leq a\}$$

として定義される。これは $C_N(a) = [-a, a]^N$ とも表記されるため、一辺の長さが $2a$ とも言えるが、次に述べる正軸体との兼ね合いで半径という用語を使って表現する。この $N$ 次元正測体の体積は $N$ 次元立方体の体積なので、

$$\mathrm{vol}(C_N(a)) = (2a)^N = 2^N a^N$$

である。

正軸体は線分、正方形、正八面体の一般化で、原点を中心とした半径 $a > 0$ の $N$ 次元**正軸体**を

$$D_N(a) = \{(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid |x_1| + \cdots + |x_N| \leq a\}$$

として定義される。この正軸体の体積はカヴァリエリの原理より次数についての帰納法で求めることができる。つまり、$D_{N+1}(a)$ において $x_{N+1} = y$ を固定した時の切り口は $D_N(a - |y|)$ より

$$\mathrm{vol}(D_{N+1}(a)) = \int_{-a}^{+a} \mathrm{area}(D_N(a - |z|))\,\mathrm{d}z = 2\int_0^1 \mathrm{area}(D_N((1-t)a))a\,\mathrm{d}t\,.$$

ここで $D_1(a)$ は長さ $2a$ の線分より、$\mathrm{vol}(D_N(a)) = c_N a^N$ とできると考えられ、

$$\mathrm{vol}(D_{N+1}(a)) = 2\int_0^1 c_N(1-t)^N a^{N+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{N+1} c_N a^{N+1}$$

よって、

$$c_{N+1} = \frac{2}{N+1} c_N, \quad c_1 = 2$$

なので、$c_N = \frac{2^N}{n!}$ であり、

$$\mathrm{vol}(D_N(a)) = \frac{2^N}{n!} a^N$$

を得る。

## 6.2　球の体積

原点を中心とした半径 $a > 0$ の $N$ 次元**球**

$$B_N(a) = \{(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1^2 + \cdots + x_N^2 \le a^2\}$$

の体積を考える。正軸体の体積同様、カヴァリエリの原理より

$$\mathrm{vol}(B_{N+1}(a)) = \int_{-a}^{+a} \mathrm{area}(B_N(\sqrt{a^2 - z^2}))\,\mathrm{d}z = 2\int_0^1 \mathrm{area}(B_N(\sqrt{1-t^2}a))a\,\mathrm{d}t$$

で $B_1(a) = 2a$ なので、$\mathrm{vol}(B_N(a)) = c_N a^N$ とできることがわかる。このとき $c_N$ を求めることは積分

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{N}{2}}\,\mathrm{d}t$$

の計算に帰着される。この計算はできないことはないが面倒なのでここでは別のアプローチを取る。つまりカヴァリエリの原理を適用するときに 2 変数分使って $D(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$ として

$$\mathrm{vol}(B_{N+2}(a)) = c_{N+2}a^{N+2} = \int_{D(a)} \mathrm{area}(B_N(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}))\,\mathrm{d}z = \int_{D(a)} c_N \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}^N\,\mathrm{d}z$$

となり、極座標変換 $x = ar\cos\theta, y = ar\sin\theta$ により

$$c_{N+2}a^{N+2} = c_N a^{N+2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}^N r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi c_N a^{N+2} \int_0^1 \sqrt{1-r^2}^N r\,\mathrm{d}r = \frac{2}{N+2}\pi c_N a^{N+2}.$$

つまり、

$$c_{N+2} = \frac{2\pi}{N+2}c_N, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = \pi$$

より $c_N$ を $N$ の偶奇に分けて計算すると

$$\mathrm{vol}(B_N(a)) = \begin{cases} \frac{2^M \pi^{M-1}}{(2M-1)(2M-3)\cdots 3\cdot 1}a^{2M-1} & (N = 2M-1) \\ \frac{2^M \pi^M}{(2M)(2M-2)\cdots 4\cdot 2}a^{2M} & (N = 2M) \end{cases}$$

がわかる。なおこれはガンマ関数 $\Gamma(s)$ を使えば、$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ より、

$$\mathrm{vol}(B_N(a)) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}a^N$$

と表すことができる。

## 6.3　ガウス積分

ガウス積分とはガウス関数の広義積分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

のことである。

ここでは重積分の極座標変換を用いたガウス積分の計算を紹介する。まず、重積分にするためにガウス積分の二乗を考えると

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x, y)$$

となる。ここで極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をするとヤコビアンは $r$ で $xy$ 平面での $\mathbb{R}^2$（正確には面積零集合である $x$ 軸の 0 以上の部分を除いたもの）は $r\theta$ 平面での $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ に対応するので、

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \pi.$$

以上よりガウス積分の値 $I = \sqrt{\pi}$ を得る。感覚的な説明としてはこの通りだが、細かいことを言うと広義累次積分の定理が使えるのは広義重積分が収束する場合なので、先に広義重積分を極座標変換で収束することを示しておく方が厳密な議論としては適切である。

この他にも $x > 0$ を固定した時の $y = xs$ という変換により

$$I^2 = 2\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+s^2)x^2} x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\,.$$

ここでフビニの定理より

$$I^2 = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{-(1+s^2)x^2} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \pi$$

となる。

## 6.4 ベータ関数

ガンマ関数が階乗の実数への拡張だったように、二項係数の実数への拡張がベータ関数である。ベータ関数は二変数である。二項係数は階乗を使って表されるように、ベータ関数 $B(x,y)$ はガンマ関数 $\Gamma$ を使って

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

となるように設計される。実際のところ上記をベータ関数の定義としても良いが、ここでは以下のようにして定義する。

**定義 6.4.1** (ベータ関数)**.** 二つの正の実数 $x, y$ に対して積分

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

を対応させる関数を**ベータ関数**という。

$0 < x < 1$ または $0 < y < 1$ の場合、この積分は広義積分となるが $t = 0, 1$ の周辺で $t$ の $-1$ より大きい次数なので積分は常に収束し、ベータ関数は $(0,\infty)^2$ で定義される。

ここで $t = \cos^2\theta$ と置換することで

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

であることに注意する。

**定理 6.4.2** (ベータ関数とガンマ関数). $x, y > 0$ に対して

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

が成り立つ。

【証明】 ガンマ関数は $t = u^2$ と置換し

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}\,\mathrm{d}p$$

であることに注意する。よって、

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-u^2-v^2}\,\mathrm{d}(u,v)$$

である。ここで極座標変換 $u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$ することで

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2x+2y-1}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta e^{-r^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \Gamma(x+y)B(x,y)$$

を得る。 【証明終わり】

## 6.5 ディリクレ積分

条件収束するシンク関数の広義積分の値は

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi,\quad \int_0^\infty \operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

であり、**ディリクレ積分**として知られている。ここではディリクレ積分の値を一様収束を使った議論で導出する。

まず、$x \neq 0$ に対して

$$\int_0^1 \cos xy\,\mathrm{d}y = \left[\frac{\sin xy}{x}\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x} = \operatorname{sinc}x$$

であることに注意する。$\operatorname{sinc}x = 0$ なので、さらにこの式は $x = 0$ でも成立する。そのためディリクレ積分は累次積分

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_0^1 \cos xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

となることから積分の順序交換をしたいが、この $[0,\infty)\times[0,1]$ 上の広義積分は絶対収束しないので直接は利用できない。そこで常套手段として $x \to \infty$ で早く減少する $e^{-ax}$ $(a > 0)$ を付け加えた重積分

$$I = \iint_{[0,\infty)\times[0,1]} e^{-ax}\cos xy\,\mathrm{d}(x,y)$$

を代わりに考える。この積分は

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,1]} \left|e^{-ax}\cos xy\right|\mathrm{d}(x,y) \leq \iint_{[0,\infty)\times[0,1]} e^{-ax}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} < \infty$$

なので、広義積分可能である。先に $x$ で積分することを考えると $b \in [0,1]$ に対して

$$\int e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos bx - \frac{b}{a}\int e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{-ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$$

より

$$\int e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{a^2+b^2}e^{-ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}e^{-ax}\sin bx + C$$

なので、

$$I = \int_0^1\int_0^\infty e^{-ax}\cos xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{a}{a^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \arctan\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} - \arctan a,$$

つまり

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \arctan a$$

を得る。ここで $e^{-ax}\operatorname{sinc}x$ は $(a,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上の連続関数で、$|\operatorname{sinc}x|\le 1$ よりワイエルシュトラスの M 判定法から左辺の広義積分は $a\in[0,\infty)$ について一様収束するので、収束先も連続関数であることから

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

上記の方法は $a,x,y$ という三つの変数の組み合わせをうまく取り替えることでディリクレ積分を計算したが、$x>0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}$$

であることに注目するとディリクレ積分は累次積分

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

の積分の順序交換に帰着される。これは $t>0$ を固定すると

$$\int_0^t\int_0^\infty \left|e^{-xy}\sin x\right|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{x}|\sin x|\,\mathrm{d}x \le \int_0^t \mathrm{d}x = t < \infty$$

より、積分の順序交換により

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\int_0^t e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}(y\sin x+\cos x)\right]_{x=0}^t \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-ty}}{1+y^2}(y\sin t+\cos t)\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{1+y^2}(y\sin t+\cos t)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

あとは $t\to\infty$ として最後の積分項が 0 に収束することを示す。実際、

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{1+y^2}(y\sin t+\cos t)\,\mathrm{d}y\right| \le \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{1+y^2}|y\sin t+\cos t|\,\mathrm{d}y \le \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y \le \int_0^\infty e^{-ty}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{t} \to 0$$

であるので、ディリクレ積分とその収束の速さ

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \left|\int_0^t \operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{1}{t}$$

が正当化される。

## 6.6　フレネル積分

次の条件収束する広義積分とその値

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{\infty} \sin t^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を**フレネル積分**という。$x = t^2$ と置換することでこの積分は

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

に帰着される。ここではこのフレネル積分の値をディリクレ積分の値の二つ目の導出法を参考に計算する。

まず、ガウス積分により $x > 0$ に対して

$$\int_0^{\infty} e^{-xy^2} \,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

であるから

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy^2} \sin x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

となる。これはやはり $b > 0$ を固定すると

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{b}\int_0^{\infty} \left| e^{-xy^2} \sin x \right| \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^{b} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \le \int_0^{b} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} b\sqrt{b}^3 < \infty$$

なので、積分の順序交換により

$$\begin{aligned}
\int_0^{b} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{b}\int_0^{\infty} e^{-xy^2} \sin x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\int_0^{b} e^{-xy^2} \sin x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \left[ -\frac{e^{-xy^2}}{1+y^4}(y^2 \sin x + \cos x) \right]_{x=0}^{b} \mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1+y^4} - \frac{e^{-by^2}}{1+y^4}(y^2 \sin b + \cos b) \right) \mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{e^{-by^2}}{1+y^4}(y^2 \sin b + \cos b) \,\mathrm{d}y \,.
\end{aligned}$$

ここで

$$\left| \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{e^{-by^2}}{1+y^4}(y^2 \sin b + \cos b) \,\mathrm{d}y \right| \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-by^2} \,\mathrm{d}y \le \frac{1}{\sqrt{b}}$$

なので、フレネル積分とその収束の速さ

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \left| \int_0^{b} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{b}}$$

を得る。

## 6.7　バーゼル問題

バーゼル問題とは正の整数の自乗の逆数の和

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$$

を考える問題である。答えから述べるとこの級数は収束してその値は $\frac{\pi^2}{6}$ である。バーゼル問題を解く方法は様々なものが知られているが、ここではこれまでの知識でこの問題に取り組んでみる。答えに円周率が出ることから計算途中に円の面積や三角関数が現れることに注意する。

# 第 7 章

# 積分の極限

## 7.1 一様収束とディニの補題

## 7.2 アルツェラの定理

## 7.3 リーマン・ルベーグの補題

**定理 7.3.1** (リーマン・ルベーグの補題)**.** $f$ を有界閉区間 $[a,b]$ を含む開区間上の $C^1$ 級関数とする。この時、$n=1,2,3,\cdots$ として

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つ。

【証明】 cos について示す。部分積分により

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)'\mathrm{d}x = \frac{1}{n}[f(x)\sin nx]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\,.$$

よって、$n\to\infty$ で

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x - 0\right| \leq \frac{1}{n}|f(b)| + \frac{1}{n}|f(a)| + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x \to 0$$

なので、定理の等式を得る。sin の式も同様なので詳細は省略する。 【証明終わり】

## 7.4 周期関数の積分

**定理 7.4.1** (周期関数の積分)**.** $[a,b]$ を有界閉区間として、$f(x,y)$ を $[a,b]\times\mathbb{R}$ 上の連続関数であって $y$ について周期 $L>0$ を持つ、つまり

$$f(x,y+L) = f(x,y)$$

が成り立つものとする。この時、$\varepsilon>0$ や $n=1,2,3,\cdots$ として

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,nx)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{L}\int_0^L f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ。特に連続関数 $f(x)g(y)$ に対しては

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f(x)g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,\frac{1}{L}\int_0^L g(y)\,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。

注意 7.4.2. この定理は容易に多次元化される。

【証明】 まず、$L=1$ の時のみ考えれば十分なことを示す。実際、$f(x,y)$ が $y$ について周期 $L$ の時、

$$\bar{f}(x,y) = f(x,Ly)$$

とおくと $\bar{f}(x,y)$ は $y$ について周期 1 であり

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{L}\int_0^L \bar{f}\left(x,\frac{y}{L}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \bar{f}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

となる。

そのため $f(x,y)$ は $y$ について周期 1 として、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,nx)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

を示す（$\varepsilon$ の方は同様に示されるので詳細は省略する)。$y=nx$ と置換すると

$$\int_a^b f(x,nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{an}^{bn} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y$$

である。ここで積分区間 $[an,bn]$ からできるだけ多くの周期 1 の部分を取り出すことをする。$[an]$ を $an$ と $bn$ の間の整数で最も $an$ に近いものとし、$[bn]$ を $an$ と $bn$ の間の整数で最も $bn$ に近いものとする。ただし、そのような整数が存在することが問題になるが、$a=b$ の場合は積分が 0 になるので等式が言えて $a\neq b$ の場合は $n$ を十分大きく取ればよい。$|an-[an]|\le 1$, $|bn-[bn]|\le 1$ に注意する。この時、

$$\int_a^b f(x,nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{an}^{[an]} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{n}\int_{[an]}^{[bn]} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{n}\int_{[bn]}^{bn} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y$$

で、右辺の最初と最後の項は $f$ が有界閉矩形上の連続関数より有界であることから

$$\left|\frac{1}{n}\int_{an}^{[an]} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y\right| \le \frac{1}{n}\int_{an}^{[an]}\sup|f|\,\mathrm{d}y \le \frac{1}{n}\sup|f| \to 0$$

となる。真ん中の項を変形すると

$$\frac{1}{n}\int_{[an]}^{[bn]} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{n}\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_{k-1}^{k} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{n}\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_0^1 f\left(\frac{y+k-1}{n},y+k-1\right)\mathrm{d}y$$

で、$f(x,y)$ は $y$ について周期 1 なので、

$$\frac{1}{n}\int_{[an]}^{[bn]} f\left(\frac{y}{n},y\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{n}\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_0^1 f\left(\frac{y+k-1}{n},y\right)\mathrm{d}y = \int_0^1\frac{1}{n}\sum_{k=[an]+1}^{[bn]} f\left(\frac{k-1+y}{n},y\right)\mathrm{d}y$$

となる。

ここで最右辺の被積分関数は $y$ を固定するごとに定積分 $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ のリーマン和になっているので、区分求積法により $n\to\infty$ で積分に収束することを言いたいがそのためにこの収束が $y$ について一様収束になっていることを示す。$0\leq y\leq 1$ に対して定積分 $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ の方を変形すると

$$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{[an]/n} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{[an]/n}^{[bn]/n} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{[bn]/n}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

で、

$$\left|\int_a^{[an]/n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^{[an]/n}\sup|f|\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{n}\sup|f|\to 0$$

である。ここで

$$\int_{[an]/n}^{[bn]/n} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

であり、$f$ は有界閉矩形上の連続関数より一様連続で連続性の度合い $\omega$ があるので、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=[an]+1}^{[bn]} f\left(\frac{k-1+y}{n},y\right)-\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leq\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\left|\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1+y}{n},y\right)-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\leq\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x,y)-f\left(\frac{k-1+y}{n},y\right)\right|\mathrm{d}x\\
&\leq\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\omega\left(\left|x-\frac{k-1+y}{n}\right|\right)\mathrm{d}x\leq\sum_{k=[an]+1}^{[bn]}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\omega(n^{-1})\,\mathrm{d}x\leq\frac{[bn]-[an]}{n}\omega(n^{-1})\\
&\leq(b-a)\omega(n^{-1})\to 0.
\end{aligned}$$

ここから一様収束が言えるので、以上の内容をまとめると

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x,nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{n}\sum_{k=[an]+1}^{[bn]} f\left(\frac{k-1+y}{n},y\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

であり、$f(x,y)$ は $[a,b]\times[0,1]$ 上積分可能なので積分の順序交換をして、定理の等式を得る。　【証明終わり】

# 参考文献

[N1] 中安淳、微分積分学 1、2022 年。https://ankys.github.io/notes/calc1t.pdf

[N2] 中安淳、線形代数学 1、2023 年。https://ankys.github.io/notes/lina1t.pdf

[O] 小澤徹、非有界区間に於ける広義リーマン積分の条件収束、2008 年 12 月。http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/

[Y] 吉田伸生、ちょっとマニアック な(?)級数・積分の計算、2019 年 6 月 24 日。http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~noby/pdf/mania.pdf

# 索引