2019 年度応用数理 D 第 4 回レポート解答例

中安淳

2019 年 11 月 6 日

問題 1

3 元連立方程式

$$
\begin{aligned}
10x_1 + x_2 + x_3 &= 6,\\
x_1 + 10x_2 + x_3 &= 6,\\
x_1 + x_2 + 10x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

を考える。初期値 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1, 1, 1)$ からガウス・ザイデル反復法を適用することで、$x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ を求めよ。

問題 1 の解答

各方程式の両辺を 10 で割って

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3 &= \frac{3}{5},\\
\frac{1}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 &= \frac{3}{5},\\
\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + x_3 &= \frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

ガウス・ザイデル法より順番に計算していくと、

$$
x_1^{(1)} = \frac{2}{5}, \quad x_2^{(1)} = \frac{23}{50}, \quad x_3^{(1)} = \frac{257}{500}, \quad x_1^{(2)} = \frac{2513}{5000}, \quad x_2^{(2)} = \frac{24917}{50000}, \quad x_3^{(2)} = \frac{249953}{500000}.
$$

よって

$$
x^{(2)} = \left(\frac{2513}{5000}, \frac{24917}{50000}, \frac{249953}{500000} \right).
$$

問題 2

対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値を考える。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) $x^{(0)} = {}^t(1,1)$ を初期値として累乗法を適用し、3 ステップ目でのレイリー商および誤差上限を求めよ。ただし、1 ステップ目は $x = x^{(0)}$, $y = Ax^{(0)}$ と取ったもののことを指すとし、結果は小数点以下 4 桁に丸めて答えること。

問題 2 の解答

(1) A の固有方程式は

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

ここで、

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 9 & -4 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 9)(\lambda - 3) - 16 = \lambda^2 - 12\lambda + 11 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 11) \end{aligned}$$

なので、A の固有値は $\lambda = 1, 11$。

(2) 計算すると

$$x^{(0)} = {}^t(1,1), \quad x^{(1)} = {}^t(13,7), \quad x^{(2)} = {}^t(145,73), \quad x^{(3)} = {}^t(1597,799)$$

なので、レイリー商は

$$q = \frac{x^{(2)} \cdot x^{(3)}}{|x^{(2)}|^2} = \frac{289892}{26354} = 10.999924110192001\cdots$$

で丸めて 10.9999。誤差上限は

$$\delta = \sqrt{\frac{|x^{(3)}|^2}{|x^{(2)}|^2} - q^2} = \sqrt{\frac{3188810}{26354} - \frac{289892^2}{26354^2}} = 0.027548000303692272\cdots$$

で丸めると 0.0275。