2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 5 回（2022 年 6 月 22 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して、関数

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})$$

を定義すると $H_n(x)$ は n 次の多項式である。この時、以下の問いに答えよ。

(1) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ とおくと、$y' + xy = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) (1) の等式を $n+1$ 回微分することで、$y^{(n+2)} + xy^{(n+1)} + (n+1)y^{(n)} = 0$ が成り立つことを示せ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0.$$

問題の多項式 $H_n(x)$ のことを n 次のエルミート多項式といいます。

解答

(1) $y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xy$ より、$y' + xy = 0$ である。

(2) $y' + xy = 0$ の両辺を $n+1$ 回微分することを考える。ライプニッツの公式（定理 2.2.3）と $(x)' = x$, $(x)'' = 0$ より、

$$(xy)^{(n+1)} = {}_{n+1}C_0 xy^{(n+1)} + {}_{n+1}C_1 \cdot y^{(n)} = xy^{(n+1)} + (n+1)y^{(n)}.$$

よって、

$$y^{(n+2)} + xy^{(n+1)} + (n+1)y^{(n)} = 0.$$

(3) 計算すると

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} y^{(n)}.$$

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} y^{(n)} + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} y^{(n+1)} \\ &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} (xy^{(n)} + y^{(n+1)}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n''(x) &= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} (xy^{(n)} + y^{(n+1)}) + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} (y^{(n)} + xy^{(n+1)} + y^{(n+2)}) \\ &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} ((1 + x^2)y^{(n)} + 2xy^{(n+1)} + y^{(n+2)}). \end{aligned}$$

よって (2) を使うと

$$\begin{aligned} H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} ((1 + x^2)y^{(n)} + 2xy^{(n+1)} + y^{(n+2)} - x(xy^{(n)} + y^{(n+1)}) + ny^{(n)}) \\ &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} (y^{(n+2)} + xy^{(n+1)} + (n+1)y^{(n)}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

宿題 $\boxed{4}$

$e^\pi < 24$ を示せ。ここで、e はネピアの定数、π は円周率であり、$e < 3$ と $3.14 < \pi < 3.15$ は認めてよい。電卓は有理数の四則演算に限って使ってよいこととする。ヒント：$e^\pi = e^3 e^{\pi-3}$ と考える。

e^π はゲルフォントの定数と呼ばれ $e^\pi = 23.1406926327\cdots$ です。この手の近似値の計算において具体的な値を考えるのは最後までしないようにしましょう。

解答　e^x のマクローリン展開から、ある $0 < \theta < 1$ が存在して、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

なので $0 \leq x \leq 1$ に対して、ラグランジュの剰余項は

$$\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

と評価できることから、

$$e^x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

が成り立つことに注意する。$x = \pi - 3$ と $n = 2$ とすれば、$e^{\pi-3} < 1 + (\pi - 3) + \frac{1}{2}(\pi - 3)^2 + \frac{3}{6}(\pi - 3)^3$ より、

$$e^\pi = e^3 e^{\pi-3} < e^3\left(1 + (\pi - 3) + \frac{1}{2}(\pi - 3)^2 + \frac{3}{6}(\pi - 3)^3\right) < e^3\left(1 + 0.15 + \frac{1}{2}0.15^2 + \frac{3}{6}0.15^3\right)$$

であり、マクローリン展開で $x = 1$ と $n = 4$ とすれば $e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{3}{120}$ である。以上より

$$e^\pi < \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{3}{120}\right)^3 \left(1 + 0.15 + \frac{1}{2}0.15^2 + \frac{3}{6}0.15^3\right)$$

であり、電卓を使えば右辺は 24 より小さいことがわかるので $e^\pi < 24$ が示された。

解説　e^x のマクローリン展開で直接 e^π を評価しようとすると、π や 3.15 が 1 より大きくて剰余項を評価するのが大変になります。そこで解答例では $\pi - 3$ に取りかえることで剰余項がすぐに小さくなるように工夫しています（ただしその場合 e の評価が必要になります）。