2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2021 年 10 月 27 日）問題解答例

問題 1

整級数
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n$$
を計算せよ。次の整級数の公式を用いてよい。
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$
なお、これら 4 つの整級数の収束半径はいずれも 1 である。

解答　計算する整級数の係数を部分分数分解すると、
$$\frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} = n - \frac{2n}{(n+1)(n+2)} = n + \frac{2}{n+1} - \frac{4}{n+2}.$$
よって、
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{2}{n+1} - \frac{4}{n+2} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n.$$
ここで、第 1 項は問題文の 2 番目の公式より $\frac{x}{(1-x)^2}$ である。3 番目の公式から
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} = -\log(1-x) - x.$$
よって、（x が 0 でない場合は）それぞれ x, x^2 で割ることで、求める整級数の計算結果は
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n = \begin{cases} \frac{x}{(1-x)^2} - 2\frac{\log(1-x)}{x} + 4\frac{\log(1-x)+x}{x^2} & 0 < |x| < 1 \text{ の時、} \\ 0 & x = 0 \text{ の時。} \end{cases}$$

注意　ちなみに 3 つの公式の導出は以下の通りです。1 つめは等比級数にほかならず、収束する条件は $|x| < 1$ です。2 つめは等比級数を項別微分して、
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
で両辺に x をかけることで得られます。3 つめは等比級数を項別積分して、
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log(1-x)$$
です。

問題 2

ネイピア数 e を底とする指数関数 e^x は次の整級数による表示（テーラー展開・マクローリン展開）が知られている。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots .$$

ここではこの整級数を e^x の定義として、以下のことを証明せよ。

(1) 収束半径は ∞ である。
(2) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, $e^0 = 1$.
(3) 任意の x に対して、$e^x e^{-x} = 1$。
(4) 任意の実数 x に対して、$e^x > 0$。
(5) 任意の x, y に対して、指数法則 $e^{x+y} = e^x e^y$ が成り立つ。

解答

(1) $a_n = \frac{1}{n!} > 0$ とおくと、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって、教科書命題 4.2.7 1) より収束半径は ∞ である。

(2) 整級数を項別微分して、

$$\frac{d}{dx}e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x.$$

また、$x = 0$ の場合を考えると $e^0 = 1$ である。

(3) $e^x e^{-x}$ を微分すると (2) より、

$$\frac{d}{dx}(e^x e^{-x}) = \frac{d}{dx}(e^x) e^{-x} + e^x \frac{d}{dx}(e^{-x}) = e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = 0.$$

よって、$e^x e^{-x}$ は定数関数なので $x = 0$ の場合を考えることで $e^x e^{-x} = e^0 e^{-0} = 1$。

(4) $x \geq 0$ の時、整級数は正項級数であり初項は 1 なので、$e^x \geq 1 > 0$。さらに (2) より、$e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$。よって、任意の実数 x に対して $e^x > 0$ である。

(5) $e^{x+y} e^{-x}$ を y を固定して x についての関数と考えて (3) 同様微分すると、

$$\frac{d}{dx}(e^{x+y} e^{-x}) = \frac{d}{dx}(e^{x+y}) e^{-x} + e^{x+y} \frac{d}{dx}(e^{-x}) = e^{x+y} e^{-x} - e^{x+y} e^{-x} = 0.$$

よって、$e^{x+y} e^{-x}$ は x によらないので、$x = 0$ の場合を考えることで $e^{x+y} e^{-x} = e^y e^{-0} = e^y$。したがって両辺に e^x をかけて (3) を使うと $e^{x+y} = e^x e^y$ がわかる。

解説　この問題は指数関数の整級数による特徴づけと微分による特徴づけ (2)、指数法則 (5) という重要な性質についての問題で、解答例は (3)(5) を微分で、(4) を整級数で証明していますが、(3)(5) を整級数で証明したり、(4) を微分で証明したりすることも可能です。