2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 5 回（2022 年 12 月 7 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

直角三角形で 3 辺の長さの和が一定の値 $l > 0$ であるもののうち面積が最大になるものが存在する（認めてよい)。その三角形を求めてその時の面積も答えよ。

答えは直角二等辺三角形の時だと予想はつきますが、どうやって示すのかが重要です。

解答　直角をはさむ 2 辺の長さを x と y とおくと $(x > 0,\ y > 0)$、斜辺の長さは $\sqrt{x^2+y^2}$ なので 3 辺の長さの和は $x + y + \sqrt{x^2+y^2}$ で三角形の面積は $\frac{1}{2}xy$ である。よってこの問題は $x > 0, y > 0$ が条件

$$\varphi(x,y) = x + y + \sqrt{x^2+y^2} - l = 0$$

を満たしながら動くときの $f(x,y) = \frac{1}{2}xy$ の最大を求める問題に他ならない。

ここで $\varphi_x(x,y) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} > 1, \varphi_y(x,y) = 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} > 1$ より、$\varphi(x,y) = 0$ の点はすべて正則点であることに注意する。よって、ラグランジュの未定乗数法（講義ノート第 8 回ページ 2）より最大となる点で次が満たされる。

$$f_x(x,y) - \lambda\varphi_x(x,y) = \frac{1}{2}y - \lambda\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0, \quad f_y(x,y) - \lambda\varphi_y(x,y) = \frac{1}{2}x - \lambda\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0,$$

ここから $x = y$ になることを示す。第 1 式と第 2 式から λ を消去すると

$$\lambda = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2(x+\sqrt{x^2+y^2})} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{2(y+\sqrt{x^2+y^2})}$$

よって、

$$y^2 + y\sqrt{x^2+y^2} = x^2 + x\sqrt{x^2+y^2}.$$

ここから $x = y$ または $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 0$ を得るが、$x > 0,\ y > 0$ なので後者はありえない。よって $x = y$ であり、$x + y + \sqrt{x^2+y^2} = l$ から $x = y = \frac{l}{2+\sqrt{2}}$ を得る。

以上より面積が最大になるのは直角二等辺三角形の時で、その面積は

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2.$$

注意　最大の存在はいったん $x = 0$ または $y = 0$ の点も考慮に入れると有界閉集合上の連続関数の最大・最小なので存在しそれらの点では達成できないことから示せます。

宿題 $\boxed{4}$

2 変数関数 $\varphi(x,y)$ を C^2 級関数とする。点 (a,b) において $\varphi(a,b) = 0, \varphi_y(a,b) \neq 0$ を仮定すると、陰関数定理より (a,b) の近くで方程式 $\varphi(x,y) = 0$ は $y = \eta(x)$ と解けるのであった。ここでさらに $\varphi_x(a,b) = 0$ かつ $\varphi_{xx}(a,b)\varphi_y(a,b) < 0$（つまり $\varphi_{xx}(a,b)$ と $\varphi_y(a,b)$ が異符号）のとき、陰関数 $y = \eta(x)$ は $x = a$ で極小になることを示せ。

基本的には陰関数の極大・極小の議論を抽象化させるだけです。

解答　陰関数定理より陰関数 $y = \eta(x)$ の微分は

$$\eta'(x) = -\frac{\varphi_x(x,\eta(x))}{\varphi_y(x,\eta(x))}.$$

ここで $\varphi_x(a,b) = 0$ なので $\eta'(a) = 0$ である。極小を示すために二階微分を計算すると、

$$\eta''(x) = -\frac{(\varphi_{xx}(x,\eta(x)) + \varphi_{xy}(x,\eta(x))\eta'(x))\varphi_y(x,\eta(x)) - \varphi_x(x,\eta(x))(\varphi_{yx}(x,\eta(x)) + \varphi_{yy}(x,\eta(x))\eta'(x))}{\varphi_y(x,\eta(x))^2}.$$

$x = a$ を考えると、$\eta'(a) = 0$ であることと $\varphi_x(a,b) = 0$ であることから、

$$\eta''(a) = -\frac{\varphi_{xx}(a,b)\varphi_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)^2} = -\frac{\varphi_{xx}(a,b)}{\varphi_y(a,b)}.$$

よって、$\varphi_{xx}(a,b)\varphi_y(a,b) < 0$ のとき、$\eta''(a) > 0$ なので、$y = \eta(x)$ は $x = a$ で極小となる。

注意　$\varphi_{xx}(a,b)$ と $\varphi_y(a,b)$ が同符号のときは極大となり、$\varphi_{xx}(a,b) = 0$ の時はこれでは判定できません。