2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第2回問題解答例

中安淳

2023年4月28日

問題 $\boxed{7}$

次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

定義に従って計算します。行列の和は成分ごと、積は横かける縦と覚えましょう。和は交換則が成り立つのに対し、積は交換則が一般には成り立たないのがポイントです。

解答

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$.

問題 $\boxed{8}$

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の16乗つまり

$$A^{16} = AAAAAAAAAAAAAAAA$$

を求めよ。

工夫すれば以下のようにして計算できます。

解答　計算すれば、

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix},$$

$$A^8 = A^4A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^8 & 8a^7 \\ 0 & a^8 \end{pmatrix},$$

$$A^{16} = A^8A^8 = \begin{pmatrix} a^8 & 8a^7 \\ 0 & a^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^8 & 8a^7 \\ 0 & a^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{16} & 16a^{15} \\ 0 & a^{16} \end{pmatrix}.$$

よって答えは

$$A^{16} = \begin{pmatrix} a^{16} & 16a^{15} \\ 0 & a^{16} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

この問題の場合、A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の導出ができるので以下のように解くこともできます。

別解1　A^2, A^3 を計算すれば

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \tag{2}$$

と予想ができる。そこで数学的帰納法で予想が正しいことを証明する。実際、$n = 1$ の時は成立していて、$n = k$ で成立つまり $A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ と仮定する時、

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となるので $n = k+1$ でも成立する。よって (2) を得るので、答えは (1) である。

別解2　$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$A = aE + X$ で $X^2 = O$ なので、二項定理から

$$A^n = (aE + X)^n = a^nE + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}X = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

を得る。よって答えは (1) である。