

2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

第 3 回問題と宿題 *

中安淳

2023 年 5 月 9 日

問題 11

方程式 $x^2 + 3y^2 = 2$ で定まる楕円を $\frac{\pi}{4}$ 回転した図形は

$$\left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + 3y^2 = 2 \right\}$$

で表される。この図形の方程式を求めよ。

問題 12

a, b, c を実数として、2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を考える。 λ に関する方程式

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

を解いて二つの実数解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ を得たとして以下の問いに答えよ。ただし、 E は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

- (1) λ_1 と λ_2 がともに正になるための必要十分条件は $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$ であることを示せ。
- (2) λ_1 と λ_2 がともに負になるための必要十分条件は $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0$ であることを示せ。
- (3) λ_1 と λ_2 が異符号つまり $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ になるための必要十分条件は $ac - b^2 < 0$ であることを示せ。

宿題 13

p を 0 より大きく 1 より小さい実数として、2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

を考える。

- (1) λ に関する方程式

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

を解いて二つの解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ を求めよ。

- (2) $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ に対して

$$(\lambda E - A)x = 0$$

を満たす零ベクトルでないベクトル $x = x_1, x_2$ を一つずつ求めよ。

- (3) (1) の λ_1, λ_2 と (2) の x_1, x_2 に対して、2 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = (x_1 \quad x_2)$$

を定める時、

$$A = PDP^{-1}$$

が成り立つことを示せ。

宿題 14

A を 2 次正方行列として、 x_0 を平面ベクトルとし、平面ベクトル $x_n = A^n x_0$ を定める ($n = 1, 2, 3, \dots$)。ここで $\|x_0\| = \|x_1\| = \|x_2\| = \|x_3\| = 1$ である時、 $\|x_4\| = 1$ であることを示せ。ただし、 $\|x\|$ は平面ベクトル x の大きさ（長さ）を表す。