2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2021 年 7 月 14 日）宿題解答例

宿題 1

対角成分が全て 2 で、その隣の成分が全て 1 で、その他の成分が全て 0 である、次の n 次正方行列の行列式の値 d_n を求めよ $(n=1,2,3,\cdots)$。

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

解答　第 1 行に関する余因子展開をして、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

さらに一番後ろの行列を第 1 列について余因子展開して、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

以上により、漸化式

$$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} \quad (n=3,4,5,\cdots)$$

を得る。この漸化式を解くことを考えると、まず $d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2}$ と変形でき、$d_n - d_{n-1} = d_2 - d_1$ を得る。ここで、$d_1 = 2,\ d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ なので、

$$d_n - d_{n-1} = 1$$

である。よって、d_n は初項が $d_1 = 2$ で公差が 1 の等差数列なので

$$d_n = n+1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

である。

宿題 2

3 次関数 $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ のグラフが平面上の 4 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) を通るとする。ただし、x_1, x_2, x_3, x_4 は相異なる数である。この時、以下の問いに答えよ。

(1) 係数 a_0, a_1, a_2, a_3 が満たす連立一次方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた連立一次方程式はただ一つ解を持つことを示せ。

解答

(1)

$$\begin{cases} a_0 + x_1a_1 + x_1^2a_2 + x_1^3a_3 = y_1, \\ a_0 + x_2a_1 + x_2^2a_2 + x_2^3a_3 = y_2, \\ a_0 + x_3a_1 + x_3^2a_2 + x_3^3a_3 = y_3, \\ a_0 + x_4a_1 + x_4^2a_2 + x_4^3a_3 = y_4. \end{cases}$$

(2) 係数行列の行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

が 0 でないことを示せばよい。第 2 行、第 3 行、第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ 0 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 \\ 1 & x_4 + x_1 & x_4^2 + x_4x_1 + x_1^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

同様に第 2 行、第 3 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{aligned} D &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2^2 + (x_3 - x_2)x_1 \\ 0 & x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2^2 + (x_4 - x_2)x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2^2 + (x_3 - x_2)x_1 \\ x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2^2 + (x_4 - x_2)x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_3 + x_2 + x_1 \\ 1 & x_4 + x_2 + x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3). \end{aligned}$$

ここで、x_1, x_2, x_3, x_4 は相異なる数なので、$D \neq 0$ である。よって、連立一次方程式はただ一つ解を持つ。

解説　この問題は多項式補間に関するもので、連立一次方程式を解いて係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めることもできますが、かなり複雑になります。よりすっきりした多項式の表示として次のラグランジュ補間が知られています。

$$\begin{aligned} y =& y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \\ &+ y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}. \end{aligned}$$