2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 3 回（2021 年 11 月 17 日）問題解答例

問題 1

半径 1 の円の内部 D で C^1 級な関数のグラフ

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

の点 $(a, b, f(a, b))$ $((a, b) \in D)$ での接平面の方程式を求めよ。

与えられた曲面は xyz 空間の原点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面の一部です。

解答 偏導関数を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

ここで接平面の方程式は

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

なので、計算すると

$$\begin{aligned} z &= \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}(x - a) + \frac{-b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}(y - b) + \sqrt{1 - a^2 - b^2} \\ &= \frac{1 - ax - by}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

注意 高校で習っているはずの円 $x^2 + y^2 = 1$ の点 (a, b) での接線の方程式 $ax + by = 1$ の類推で、球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の点 (a, b, c) での接平面の方程式は $ax + by + cz = 1$ です。今回の問題では $c = \sqrt{1 - a^2 - b^2}$ なので、代入して z について解けば同じ式を得られていることがわかります。

問題 2

平面上の 2 点 (a, b) と (x, y) の距離を

$$d((a, b), (x, y)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

で定める。また、2 変数関数 $f(x, y)$ が任意の点 (a, b) と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ をとると $d((a, b), (x, y)) < \delta$ なる任意の点 (x, y) に対して $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$ が成り立つとき $f(x, y)$ は連続関数と言う。
それをふまえて次の 2 変数関数 $f(x, y)$ が連続関数であることを証明せよ。

$$f(x, y) = x + y.$$

解説 $f(x, y)$ が連続であることを示すには、$\lim_{r \to 0} h(r) = 0$ なる関数 h を使って

$$|f(x, y) - f(a, b)| \leq h(d((a, b), (x, y)))$$

と書けることを示せばよいです（ただし、h は a, b に依存してよいが x, y に依存してはいけない）。

解答 まず、

$$|f(x, y) - f(a, b)| = |x + y - a - b| \leq |x - a| + |y - b|.$$

ここで $|x - a| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, $|y - b| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ なので、

$$|f(x, y) - f(a, b)| \leq 2d((a, b), (x, y)).$$

よって、$\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ と取れれば、$d((a, b), (x, y)) < \delta$ なる任意の点 (x, y) に対して

$$|f(x, y) - f(a, b)| \leq 2d((a, b), (x, y)) < 2\delta = \varepsilon.$$

したがって $f(x, y)$ は連続関数である。