2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 6 回（2021 年 6 月 30 日）宿題解答例

宿題 1

正方行列 N がある $n=1,2,3,\cdots$ で $N^n=O$ を満たす時、$E-N$ の逆行列を求めることで $E-N$ は正則行列であることを示せ。ただし、E は N と同じサイズの単位行列で O は零行列である。

解答

$$(E-N)(E+N+N^2+\cdots+N^{n-1})=E-N^n=E$$

より、$E-N$ は逆行列 $E+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$ を持つので、正則行列である。

$E+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$ がどうしても思いつかない場合は、以下のようにして計算することも一応できます。

別解　$A=E-N$ とおくと、$N^n=O$ であることから、

$$(E-A)^n=E-{}_nC_1A+{}_nC_2A^2-\cdots+(-1)^n{}_nC_nA^n=O.$$

よって、$A({}_nC_1E-{}_nC_2A+\cdots-(-1)^n{}_nC_nA^{n-1})=E$ なので、$A=E-N$ の逆行列は ${}_nC_1E-{}_nC_2A+\cdots-(-1)^n{}_nC_nA^{n-1}=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_nC_kA^{k-1}$。これを計算すると、

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_nC_kA^{k-1}=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_nC_k(E-N)^{k-1}=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_nC_k\sum_{l=0}^{k-1}{}_{k-1}C_l(-N)^l=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=l+1}^{n}(-1)^{k+l+1}{}_nC_k{}_{k-1}C_lN^l.$$

ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{k=l+1}^{n}(-1)^{k+l+1}{}_nC_k{}_{k-1}C_l&=\sum_{k=l+1}^{n}(-1)^{k+l+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(k-1)!}{l!(k-1-l)!}=\frac{n!}{l!(n-l-1)!}\sum_{k=l+1}^{n}(-1)^{k+l+1}\frac{1}{k}{}_{n-l-1}C_{k-l-1}\\&=\frac{n!}{l!(n-l-1)!}\sum_{i=0}^{n-l-1}(-1)^i\frac{1}{i+l+1}{}_{n-l-1}C_i=\frac{n!}{l!(n-l-1)!}\int_0^1(1-x)^{n-l-1}x^l\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

以上より、$E-N$ の逆行列は $\sum_{l=0}^{n-1}N^l$ であり、$E-N$ は正則行列である。

宿題 2

2 つの置換

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&5\end{pmatrix},\quad\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&1&6&2&7&5&3\end{pmatrix}$$

について、置換 $\sigma^{-1}\tau\sigma$ を計算し、その符号 $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma)$ を求めよ。

解答　まず σ は次のように書くことができる。

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&4&5&3&6&7\end{pmatrix}.$$

また、

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&5&3&4&6&7\end{pmatrix}.$$

よって、

$$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&1&6&2&7&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&4&5&3&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&4&2&7&6&5&3\end{pmatrix},$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&5&3&4&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&4&2&7&6&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&1&7&6&4&5\end{pmatrix}.$$

これを互換の積にすると、

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&7&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&7\end{pmatrix}.$$

よって、その符号は

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma)=(-1)^5=-1.$$

以上より、$\sigma^{-1}\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&1&7&6&4&5\end{pmatrix}$ で $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma)=-1$。