2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
補充問題解答例

中安淳

2023 年 7 月 18 日

補充問題 $\boxed{31}$

r, θ, ϕ を実数として、次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$.

この行列式は微分積分学で重積分を極座標に変数変換する時に出てきます。

解答

(1) サラスの公式に基づいて計算すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} &= \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta) \cdot \sin\theta \\ &= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r. \end{aligned}$$

よって答えは r である。

(2) サラスの公式に基づいて計算すると

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + r\cos\theta\cos\phi \cdot r\sin\theta\cos\phi \cdot \cos\theta \\ &\quad + (-r\sin\theta\sin\phi) \cdot \sin\theta\sin\phi \cdot (-r\sin\theta) \\ &\quad - 0 - \sin\theta\cos\phi \cdot r\sin\theta\cos\phi \cdot (-r\sin\theta) \\ &\quad - (-r\sin\theta\sin\phi) \cdot r\cos\theta\sin\phi \cdot \cos\theta \\ &= r^2(\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\theta + \sin^3\theta\sin^2\phi \\ &\qquad + \sin^3\theta\cos^2\phi + \sin\theta\sin^2\phi\cos^2\theta) \\ &= r^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta) \\ &= r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

よって答えは $r^2\sin\theta$ である。

補充問題 $\boxed{32}$

θ を実数として、次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

解答　行列式を D とおいて、基本変形して計算すると、

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 0 & 0 & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 0 & 0 & -2\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= 4\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & 0 & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= 4\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & 0 & -\cos\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

列の入れ替えをして、

$$D = 4\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}.$$

したがって、

$$\begin{aligned} D &= 4\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} \\ &= 4(-\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \\ &= 4\cos^2 2\theta. \end{aligned}$$

よって答えは $4\cos^2 2\theta$ である。

補充問題 33

a, b, c, x, y, z を実数として、行列式に関する次の恒等式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = 0.$$

（多重）線形性を使った解答　$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、与えられた行列式は $\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}+x\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+z\boldsymbol{v} \end{vmatrix}$ と表され、多重線形性と同じ列があると行列式は 0 であるという事実から、

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}+x\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+z\boldsymbol{v} \end{vmatrix} \\ &\quad = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} \\ &\qquad + y \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + yz \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} \\ &\qquad + x \begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + xz \begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} \\ &\qquad + xy \begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

基本変形を使った解答　与えられた行列の第 2 行から第 1 行を引き、第 3 行から第 1 行を引くことで、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b-a & b-a & b-a \\ c-a & c-a & c-a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

最後の等式は第 2 行と第 3 行が等しいことによる。

注意　サラスの公式をもとに計算しても示すことができますが、項数がとても多くなります。その場合は余因子展開をすると見通しよく計算することができます。

補充問題 34

対角成分が全て 2 で、その隣の成分が全て 1 で、その他の成分が全て 0 である、次の n 次正方行列の行列式の値 d_n を求めよ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)。

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

解答　第 1 行に関する余因子展開をして、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

さらに一番後ろの行列を第 1 列について余因子展開して、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

以上により、漸化式

$$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

を得る。この漸化式を解くことを考えると、まず $d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2}$ と変形でき、$d_n - d_{n-1} = d_2 - d_1$ を得る。ここで、$d_1 = 2,\ d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ なので、

$$d_n - d_{n-1} = 1$$

である。よって、d_n は初項が $d_1 = 2$ で公差が 1 の等差数列なので

$$d_n = n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。