2019 年度応用数理D第 10 回レポート解答例

中安淳

2020 年 1 月 6 日

問題 1

円板上のポアソン方程式のディリクレ問題

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -4 & x^2 + y^2 \leq 1, \\ u(x,y) = 0 & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

を格子幅 $h = \frac{1}{2}$ の差分法を使って解くことを考える。整数 i, j に対して格子点 $(x, y) = (ih, jh)$ での解の値の近似値を $u_{i,j}$ と表すことにする。

(1) 格子点 $O = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を考える。格子と境界の交点のうち O と近接する 2 つを A, B とする。正確には第一象限のうちで、$y = \frac{1}{2}$ と境界 $x^2 + y^2 = 1$ の交点を A、$x = \frac{1}{2}$ と境界 $x^2 + y^2 = 1$ の交点を B とする。ここで OA の間の距離を ah、OB の間の距離を bh とするとき、a, b を求めよ。

(2) 対称性

$$u_{0,1} = u_{1,0} = u_{0,-1} = u_{-1,0},$$

$$u_{1,1} = u_{-1,1} = u_{-1,-1} = u_{1,-1}$$

を仮定することにより、$u_{0,0}, u_{0,1}, u_{1,1}$ が満たす連立方程式を求めよ。

(3) (2) で得た連立方程式をガウス消去法で解くことにより、$u_{0,0}$ の値を求めよ。

問題 1 の解答

(1) $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ より、$OA = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ なので $a = \sqrt{3} - 1$。同様に $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ より、$OB = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ なので $b = \sqrt{3} - 1$。

(2) 点 $(0,0)$ での差分方程式を考えると

$$4u_{0,0} - u_{-1,0} - u_{1,0} - u_{0,-1} - u_{0,1} = 4h^2$$

で、対称性より

$$4u_{0,0} - 4u_{0,1} = 1.$$

点 $(0, \frac{1}{2})$ での差分方程式を考えると

$$4u_{0,1} - u_{-1,1} - u_{1,1} - u_{0,0} - u_{0,2} = 4h^2$$

で、対称性と境界条件 $u_{0,2} = 0$ より

$$-u_{0,0} + 4u_{0,1} - 2u_{1,1} = 1.$$

点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ での差分方程式を考えると近接する境界上の点は (1) の A, B であることに注意して

$$\frac{2(a+b)}{ab}u_{1,1} - \frac{2}{1+a}u_{0,1} - \frac{2}{a(1+a)}u_A - \frac{2}{1+b}u_{1,0} - \frac{2}{b(1+b)}u_B = 4h^2$$

で、対称性と境界条件 $u_A = u_B = 0$ と (1) より

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}u_{0,1} + \frac{4}{\sqrt{3}-1}u_{1,1} = 1.$$

以上より求める連立方程式は

$$\begin{cases} 4u_{0,0} - 4u_{0,1} = 1, \\ -u_{0,0} + 4u_{0,1} - 2u_{1,1} = 1, \\ -\frac{4}{\sqrt{3}}u_{0,1} + \frac{4}{\sqrt{3}-1}u_{1,1} = 1. \end{cases}$$

(3) 拡大係数行列を考え、行基本変形を行う。

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{第 2 行に第 1 行の } \frac{1}{4} \text{ 倍を足す})$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{3}-1} - \frac{8}{3\sqrt{3}} & 1 + \frac{5}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (\text{第 3 行に第 2 行の } \frac{4}{3\sqrt{3}} \text{ 倍を足す})$$

ここで、

$$\frac{4}{\sqrt{3}-1}-\frac{8}{3\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}+1)-\frac{8}{9}\sqrt{3}=\frac{10}{9}\sqrt{3}+2,$$

$$1+\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{9}\sqrt{3}+1$$

なので、第 3 行より

$$u_{1,1}=\frac{\frac{5}{9}\sqrt{3}+1}{\frac{10}{9}\sqrt{3}+2}=\frac{1}{2}.$$

さらに第 2 行より

$$3u_{0,1}-2u_{1,1}=\frac{5}{4}\quad\therefore u_{0,1}=\frac{3}{4}.$$

よって第 1 行より

$$4u_{0,0}-4u_{0,1}=1\quad\therefore u_{0,0}=1.$$