2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 6 回（2022 年 12 月 21 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

重積分

$$\iint_{[0,1]^2} \left|\sqrt{1-x^2}-y\right| dxdy$$

を計算せよ。

絶対値の中の値の符号によって積分領域を二つに分けましょう。問題 $\boxed{2}$ では極座標変換することを奨めましたが、この問題はしない方がよいです。

解答　まず領域 $[0,1]^2$ を $E_1 = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ と $E_2 = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y \geq \sqrt{1-x^2}\}$ に分けると、

$$\left|\sqrt{1-x^2}-y\right| = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}-y & ((x,y) \in E_1), \\ y-\sqrt{1-x^2} & ((x,y) \in E_2) \end{cases}$$

である。よって、

$$\iint_{[0,1]^2} \left|\sqrt{1-x^2}-y\right| dxdy = \iint_{E_1} (\sqrt{1-x^2}-y)dxdy + \iint_{E_2} (y-\sqrt{1-x^2})dxdy.$$

重積分をともに y で先に積分することを考えると $E_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$, $E_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1\}$ より

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,1]^2} \left|\sqrt{1-x^2}-y\right| dxdy &= \int_0^1 \left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (\sqrt{1-x^2}-y)dy\right\} dx + \int_0^1 \left\{\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (y-\sqrt{1-x^2})dy\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[\sqrt{1-x^2}y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - \sqrt{1-x^2}y\right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x^2 - \sqrt{1-x^2}\right) dx \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{7}{6} - \frac{\pi}{4}$。

宿題 $\boxed{4}$

積分

$$\int_0^1 \left\{\int_0^{y^2} ye^{2x}e^{-x^2}dx\right\} dy$$

を計算せよ。

e^{-x^2} はガウス関数と呼ばれ不定積分を計算するのは困難なので、y で先に積分しましょう。解答例では式でさらっと書いていますが、積分領域は図にするとわかりやすいです。

解答　y で先に積分することを考えると、重積分としての積分領域は $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ なので、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\{\int_0^{y^2} ye^{2x}e^{-x^2}dx\right\} dy &= \int_0^1 \left\{\int_{\sqrt{x}}^1 ye^{2x}e^{-x^2}dy\right\} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2e^{2x}e^{-x^2}\right]_{\sqrt{x}}^1 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)e^{2x}e^{-x^2}dx = \int_0^1 \frac{e}{2}(1-x)e^{-(x-1)^2}dx = \left[\frac{e}{4}e^{-(x-1)^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{e}{4}(1-e^{-1}) = \frac{1}{4}(e-1).
\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{1}{4}(e-1)$。