

# 2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

## 第 3 回問題解答例

中安淳

2023 年 5 月 19 日

### 問題 11

$n$  次正則行列  $A, B$  に対して、積  $AB$  も正則行列で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つことを示せ。

逆行列を取る時には積の順序を入れ替える必要があるという話題です。逆行列の候補がわかっている問題ではそれが逆行列であることを示せばよいです。

**解答**  $B^{-1}A^{-1}$  が  $AB$  の逆行列であることを示せばよい。 $A^{-1}$  は  $A$  の逆行列で  $B^{-1}$  は  $B$  の逆行列なので、

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

より、 $AB$  は正則で逆行列は  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  で与えられる。

### 問題 12

行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  の 10 乗つまり

$$A^{10} = AAAAAAAAAA$$

を求めよ。

とりあえず  $A^2$  を計算して法則性を見つけましょう。

**解答** 計算すると

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9+12+9 & 18+24+18 & 27+36+27 \\ 6+8+6 & 12+16+12 & 18+24+18 \\ 3+4+3 & 6+8+6 & 9+12+9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 60 & 90 \\ 20 & 40 & 60 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} = 10A. \end{aligned}$$

よって、

$$A^{10} = 10A^9 = \cdots = 10^9 A.$$

従って答えは  $A^{10} = 10^9 \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  である。

$A$  の構造について次のことに気が付けば面倒な計算を避けることができます。

**別解** 行列  $A$  について

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3)$$

が成り立つので、

$$(1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 4 + 3 = 10$$

に注意すれば、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) = 10A$$

である。以下は同様。