2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2021 年 7 月 14 日）問題解答例

問題 1

a, b, c, x, y, z を実数として、行列式に関する次の恒等式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = 0.$$

基本変形を使った解答　与えられた行列の第 2 行から第 1 行を引き、第 3 行から第 1 行を引くことで、

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b-a & b-a & b-a \\ c-a & c-a & c-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

最後の等式は第 2 行と第 3 行が等しいことによる。

多重線形性を使った解答　$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、与えられた行列式は $\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}+x\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+z\boldsymbol{v} \end{vmatrix}$ と表され、多重線形性から、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}+x\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}+z\boldsymbol{v} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + yz\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} \\ &\quad + x\begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + xz\begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} + xy\begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

余因子展開を使った解答　第 1 行に関する余因子展開をして、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} &= (a+x)\begin{vmatrix} b+y & b+z \\ c+y & c+z \end{vmatrix} - (a+y)\begin{vmatrix} b+x & b+z \\ c+x & c+z \end{vmatrix} + (a+z)\begin{vmatrix} b+x & b+y \\ c+x & c+y \end{vmatrix} \\ &= (a+x)(bz+cy-by-cz) + (a+y)(bx+cz-bz-cx) + (a+z)(by+cx-bx-cy) \\ &= (b-c)[(a+x)(z-y)+(a+y)(x-z)+(a+z)(y-x)] = 0. \end{aligned}$$

問題 2

(1) 線形独立な 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ が張る平行四辺形 $\{a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v} \mid 0 \le a, b \le 1\}$ の面積 A について、次の問いに答えよ。

(i) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ がなす角度を θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とおく時、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が張る三角形に対して余弦定理を適用することで、$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$ が成立することを示せ。

(ii) $A^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2$ を示せ。

(iii) 行列式を使って、$A^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2$ が成立することを示せ。

(2) 線形独立な 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ が張る平行六面体 $\{a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w} \mid 0 \le a, b, c \le 1\}$ の体積 V について、次の問いに答えよ。

(i) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の外積を $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ で定める時、$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に直交し、大きさが $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が張る平行四辺形の面積 A に等しいことを示せ。

(ii) $V = |(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|$ を示せ。

(iii) 行列式を使って、$V^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}^2$ が成立することを示せ。

2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2021 年 7 月 14 日）問題解答例

解答

(1) (i) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が張る三角形に対して余弦定理を適用することで、

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta.$$

ここから、

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta.$$

(ii) $A = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta$ なので、(i) より、

$$A^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\sin^2\theta = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2(1-\cos^2\theta) = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\left(1 - \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}{|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2}\right) = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2.$$

(iii) (ii) より成分で計算することで、

$$A^2 = (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2) - (u_1v_1+u_2v_2)^2 = u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2 = (u_1v_2-u_2v_1)^2 = \left|\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\right|^2.$$

(2) (i) まず、

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u} = (u_2v_3-u_3v_2)u_1 + (u_3v_1-u_1v_3)u_2 + (u_1v_2-u_2v_1)u_3 = 0,$$
$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v} = (u_2v_3-u_3v_2)v_1 + (u_3v_1-u_1v_3)v_2 + (u_1v_2-u_2v_1)v_3 = 0$$

より、$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に直交する。
また、大きさについて、

$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|^2 = (u_2v_3-u_3v_2)^2 + (u_3v_1-u_1v_3)^2 + (u_1v_2-u_2v_1)^2.$$

一方で $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が張る平行四辺形の面積を (1)(i), (ii) と同様に考えることで $A^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2$ なので、

$$\begin{aligned}
A^2 &= (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2) - (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \\
&= u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_2v_2u_3v_3 - 2u_3v_3u_1v_1 \\
&= (u_1v_2-u_2v_1)^2 + (u_2v_3-u_3v_2)^2 + (u_3v_1-u_1v_3)^2 = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|^2
\end{aligned}$$

したがって、$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = A$ である。

(ii) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が張る平面と $\boldsymbol{w}$ がなす角度を ϕ $(0^\circ < \phi < 180^\circ)$ とおくと、

$$V = A|w|\sin\phi.$$

ここで $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ がなす角度は $90^\circ - \phi$ または $\phi + 90^\circ$ または $\phi - 90^\circ$ または $270^\circ - \phi$ になり、どの場合でも

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos(\pm 90^\circ \pm \phi) = \pm A|\boldsymbol{w}|\sin\phi.$$

よって、$V = |(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|$ が成立する。

(iii) 行列式 $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$ の第 3 列に関する余因子展開をして、

$$\left|\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}\right| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_3 = (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}.$$

よって (ii) より、

$$V^2 = \left|\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}\right|^2.$$