

# 2023 年度京都大学微分積分学（演義）B

## 第 3 回問題と宿題 \*

中安淳

2023 年 10 月 31 日

### 問題 11

次の極限を求めよ。

- (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - x - y^2 + y}{x - y}.$
- (2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$
- (3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2}.$

### 問題 12

次の集合  $E$  の境界  $\partial E$  を求めて、 $E$  は開集合かどうか閉集合かどうかそして有界かどうかそれぞれ答えよ（答えのみでよい）。

- (1)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$
- (2)  $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$
- (3)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y = 1\}.$
- (4)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}.$

### 宿題 13

点列の極限の一意性を示せ。つまり点列  $\{P_n\}$  に対して  $P_n \rightarrow P$  となる点  $P$  と  $P_n \rightarrow Q$  となる点  $Q$  が存在したら  $P = Q$  であることを示せ。

### 宿題 14

分母が 0 にならない範囲で定義された次の二変数関数を考える。

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{e^x + e^y - x - y - 2}.$$

- (1)  $f(x, y)$  は原点を除く平面上で定義されて、その上で連続であることを示せ。
- (2) 極限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  を求めよ。