2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第3回問題解答例

中安淳

2023年5月9日

問題 11

方程式 $x^2+3y^2=2$ で定まる楕円を $\frac{\pi}{4}$ 回転した図形は

$$\left\{\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid x^2+3y^2=2\right\}$$

で表される。この図形の方程式を求めよ。

解答 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ について解いて、

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}X+Y\\Y-X\end{pmatrix}.$$

これを $x^2+3y^2=2$ に代入して、

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2+\frac{3}{2}(Y-X)^2=2.$$

これを整理して答えの方程式は $X^2-XY+Y^2=1$ である。

問題 12

a,b,c を実数として、2次正方行列

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$$

を考える。λ に関する方程式

$$\det(\lambda E-A)=0$$

を解いて二つの実数解 $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ を得たとして以下の問いに答えよ。ただし、E は単位行列 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である。

(1) λ_1 と λ_2 がともに正になるための必要十分条件は $ac-b^2>0$ かつ $a>0$ であることを示せ。
(2) λ_1 と λ_2 がともに負になるための必要十分条件は $ac-b^2>0$ かつ $a<0$ であることを示せ。
(3) λ_1 と λ_2 が異符号つまり $\lambda_1\lambda_2<0$ になるための必要十分条件は $ac-b^2<0$ であることを示せ。

後期の微積で学習する2変数関数 $f(x,y)$ のヘシアン $\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$ による極値判定で使われる事実です。

解答 行列式を計算すると

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -b & \lambda-c\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-c)-b^2$$
$$=\lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)$$

より、解と係数の関係から $\lambda_1+\lambda_2=a+c$ と $\lambda_1\lambda_2=ac-b^2$ である。

(1) λ_1 と λ_2 がともに正になるための必要十分条件は $\lambda_1+\lambda_2>0$ かつ $\lambda_1\lambda_2>0$ より、$a+c>0$ かつ $ac-b^2>0$ である。ここで $ac>b^2\geq 0$ より、$ac-b^2>0$ のもとで $a+c>0$ と $a>0$（と $c>0$）は同値なので、$ac-b^2>0$ かつ $a>0$ と同値である。
(2) (1) と同様にすれば示される。
(3) $\lambda_1\lambda_2<0$ になるための必要十分条件なので、$ac-b^2<0$ である。