2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2022 年 7 月 13 日）問題解答例

**問題 1**

次の広義積分の値を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\cosh x}dx.$

**解説**　広義積分の定義に従って、いったん arctan などを使って定積分を計算し、$\lim_{t\to\infty}\arctan t = \frac{\pi}{2}$ などを使って極限を計算します。

**解答**

(1) 計算すると、

$$\int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan x]_0^t = \arctan t \to \frac{\pi}{2} \quad (t\to\infty)$$

よって答えは $\frac{\pi}{2}$。

(2) 計算すると、

$$\int_0^t \frac{1}{e^x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1-e^{-t} \to 1 \quad (t\to\infty)$$

よって答えは 1。

(3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ に注意して、

$$\int_0^t \frac{1}{\cosh x}dx = \int_0^t \frac{\cosh x}{\cosh^2 x}dx = \int_0^t \frac{\cosh x}{\sinh^2 x+1}dx.$$

$(\sinh x)' = \cosh x$ より

$$\int_0^t \frac{\cosh x}{\sinh^2 x+1}dx = [\arctan(\sinh x)]_0^t = \arctan(\sinh t)$$

ここで $t\to\infty$ とすると $\sinh t\to\infty$ なので、最右辺は $\frac{\pi}{2}$ に収束する。よって答えは $\frac{\pi}{2}$。

**問題 2**

次の広義積分は収束するか発散するか答えよ。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

この積分はガウス積分などと呼ばれ、値は $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ですが計算できるようになるのはもう少し単元が進んでからです。ここでは広義積分が収束するかどうかだけチェックすればよくて、そのために収束がわかる別の関数で評価するのでした。

**解答**　ある定数 $C$ を使って $0\le e^{-x^2}\le \frac{C}{x^2}$ となることを示す。そのためには関数 $x^2e^{-x^2}$ が有界を示せばよく、$y\ge 0$ に対して関数 $g(y)=ye^{-y}$ が有界を示せばよい。実際、微分を計算すると

$$g'(y) = e^{-y} - ye^{-y} = (1-y)e^{-y}$$

より、$g(y)$ は $[0,1]$ で単調増加し $[1,\infty)$ で単調減少するので、$g(y)\le g(1)=e^{-1}$。したがって $C=e^{-1}$ とすれば $0\le e^{-x^2}\le\frac{C}{x^2}$ が成立する。ここで広義積分 $\int_1^\infty \frac{C}{x^2}dx$ は収束するので、広義積分 $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ も収束する。残った $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ は有界閉区間上の連続関数の定積分である。以上より広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束することがわかった。

解答例では収束の十分条件を考察していますが、次のようにすればもっと簡単に証明することもできます。

**別解**　関数 $e^y$ にテイラーの定理を用いると $y\ge 0$ に対して $0<\theta<1$ が存在して

$$e^y = 1+y+\frac{e^{\theta y}}{2}y^2 > y$$

よって $y=x^2$ として整理して、$e^{-x^2}\le\frac{1}{x^2}$ を得る。以下は同様なので省略。