2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2022 年 10 月 25 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続な関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ がある連続な関数 $f(x)$ に $[a,b]$ 上一様収束するとする。このとき、不定積分 $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt$ で定まる（連続な）関数の列 $\{F_n(x)\}_n$ も不定積分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ に $[a,b]$ 上一様収束することを示せ。

解答　計算すると、

$$F_n(x)-F(x)=\int_a^x (f_n(t)-f(t))dt, \quad |F_n(x)-F(x)|\le \int_a^x |f_n(t)-f(t)|dt.$$

$$\sup_{x\in[a,b]}|F_n(x)-F(x)|\le \sup_{x\in[a,b]}\int_a^x |f_n(t)-f(t)|dt=\int_a^b |f_n(t)-f(t)|dt.$$

最後の等号は $\int_a^x |f_n(t)-f(t)|dt$ の被積分関数が非負なので x について単調増加であることによる。ここで $\{f_n(x)\}_n$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上一様収束するので $\{|f_n(x)-f(x)|\}_n$ は 0 に一様収束する。したがって、極限と積分の順序交換（教科書第 5 章定理 10）より、$\int_a^b |f_n(t)-f(t)|dt\to\int_a^b 0dx=0$。よって、$\sup_{x\in[a,b]}|F_n(x)-F(x)|\to 0$ なので、$\{F_n(x)\}_n$ は $F(x)$ に $[a,b]$ 上一様収束する。

宿題 $\boxed{4}$

以下の級数は絶対収束か条件収束か発散かそれぞれ答えてそのことを示せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^2}.$

解答

(1) この級数は発散する。なぜなら収束したとすると、数列 $\{(-1)^n\}$ は 0 に収束しなければならないが、この数列は発散するからである。

(2) この級数は条件収束する。まず、$a_n=\frac{1}{\log n}$ は n について単調減少し、$n\to\infty$ で 0 に収束する。よってライプニッツの定理（教科書第 5 章定理 3）より交代級数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$ は収束することがわかる。一方で絶対収束はしないことを示す。対応する正項級数は $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$ である。ここで一般に $x>0$ に対して $\log(1+x)\le x$ より、

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}\ge\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

であり、右辺の級数は発散するので、$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ も発散する。以上より問題の級数は条件収束であることがわかる。

(3) この級数は条件収束する。まず、$a_n=\frac{1}{(\log n)^2}$ は n について単調減少し、$n\to\infty$ で 0 に収束する。よってライプニッツの定理（教科書第 5 章定理 3）より交代級数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)}$ は収束することがわかる。一方で絶対収束はしないことを示す。対応する正項級数は $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^2}$ である。ここである定数 c が存在して不等式 $\frac{1}{(\log x)^2}\ge\frac{c}{x}$ $(x\ge 2)$ が成り立つことを示す。そのためには関数 $f(x)=\frac{(\log x)^2}{x}$ が上に有界を示せばよい。微分すると

$$f'(x)=\frac{\log x(2-\log x)}{x^2}$$

なのでこの関数は $x=e^2$ で最大値 $f(e^2)=\frac{4}{e^2}$ を取る。したがって

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^2}\ge\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{e^2}{4}}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{e^2}{4}}{n}$$

であり、右辺の級数は発散するので、$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ も発散する。以上より問題の級数は条件収束であることがわかる。