2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2022 年 10 月 5 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

(1) $f(x)$ を有界でない区間 $[a,\infty)$ 上の連続関数とする（a は実数)。このとき広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が収束することの定義を答えよ。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^x dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

解答

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ が収束すること。

(2) $t\to\infty$ において、

$$\int_0^t e^x dx = [e^x]_0^t = e^t - 1 \to +\infty.$$

よって広義積分 $\int_0^\infty e^x dx$ は収束しない（発散する)。

(3) $t\to\infty$ において、

$$\int_0^t e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t} + 1 \to 1.$$

よって広義積分 $\int_0^\infty e^{-x} dx$ は収束する。

(4) $t\to\infty$ において、

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1 \to 1.$$

よって広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ は収束する。

(5) $t\to\infty$ において、

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^t = \log t \to +\infty.$$

よって広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ は収束しない（発散する)。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2022 年 10 月 5 日）問題解答例

問題 $\boxed{2}$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 2, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

で定義して（$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数)、次の漸化式によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 2,\, a_{n+1} = g(a_n)\ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

(1) $f'(x)$ と $g(x)$ を計算せよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ は各 n に対して $a_n > 0$ を満たすことを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限 α を予想せよ。答えのみでよい。

(4) 数列 $\{a_n\}$ は各 n に対して $a_n \geq \alpha$ を満たすことを示せ。

(5) 数列 $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ。

(6) 数列 $\{a_n\}$ は α に収束することを示せ。

解答

(1) $f'(x) = 3x^2$、$g(x) = x - \frac{x^3-2}{3x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\frac{1}{x^2}$。

(2) $a_1 = 2 > 0$ であり、$a_n > 0$ と仮定すると $a_{n+1} = g(a_n) = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}\frac{1}{a_n^2} > 0$ である。よって数学的帰納法から、各 n に対して $a_n > 0$ が成立する。

(3) 極限を α とすると、漸化式 $a_{n+1} = g(a_n)$ で極限を取り（g の連続性から）$\alpha = g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ で、$f(\alpha) = \alpha^3 - 2 = 0$。したがって、$\alpha = \sqrt[3]{2}$ と予想される。

(4) $a_1 = 2 \geq \sqrt[3]{2}$ であり、あとは $x \geq \sqrt[3]{2}$ で $g(x) \geq \sqrt[3]{2}$ を示せば数学的帰納法から $a_n \geq \sqrt[3]{2}$ が従う。ここで、$x > \sqrt[3]{2}$ で

$$g'(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{x^3} > 0$$

なので、$g(x) \geq g(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$ である。以上より $a_n \geq \sqrt[3]{2}$ が成立する。

(5) $a_n \geq \sqrt[3]{2}$ より $f(a_n) \geq 0$、$f'(a_n) > 0$ である。よって、$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \leq a_n$ で、数列 $\{a_n\}$ は単調減少であることがわかる。

(6) (5) より数列 (a_n) は単調減少で (4) より下に有界でもあるので、単調な数列の収束性（参考書定理 1.4）より何らかの実数に収束する。あとは (3) と同じ議論を行うことで数列 $\{a_n\}$ は $\alpha = \sqrt[3]{2}$ に収束することがわかる。

注意　(4) は微分法を用いなくても相加平均・相乗平均の関係から

$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{2}$$

で示すこともできます。

解説　この問題のように $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ によって方程式 $f(x) = 0$ の解を見つけることをニュートン法といいます。