2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 3 回（2022 年 5 月 25 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

$f(x)$ を正の値、$g(x)$ を実数値を取る関数とするとき、次で定まる関数 F の導関数を求めよ。

$$F(x) = f(x)^{g(x)}.$$

答えの式は覚える必要はありませんが、いつでも導出できるようにしましょう。

解答　対数を取って微分すると、

$$\log F(x) = g(x) \log f(x).$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = g'(x) \log f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

よって、答えは

$$F'(x) = \left(g'(x) \log f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) f(x)^{g(x)}.$$

注意　検算のため、$f(x) = x$, $g(x) = \alpha$ を当てはめてみると、

$$F'(x) = \left(0 \log x + \alpha \frac{1}{x} \right) x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

になり正しいことがわかります。他にも答えの知っている場合を当てはめて検算してみましょう。

宿題 $\boxed{4}$

問題 $\boxed{2}$ で示した通り、$\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ は連続関数であった。ここではさらに導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示し、その微分係数 $f''(0)$ を求めよ。

解答　問題 $\boxed{2}$ より

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

だったので、微分係数の定義より、

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cos h - \sin h}{h^3}.$$

ここでロピタルの定理を使って、

$$\lim_{h \to 0} \frac{h \cos h - \sin h}{h^3} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - h \sin h - \cos h}{3h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin h}{3h} = -\frac{1}{3}.$$

よって、求める答えは $f''(0) = -\frac{1}{3}$。

注意　ちなみにこの問題の関数 f は何度でも微分可能な関数（C^{∞} 級）です。定義に従って導関数を順番に計算して証明するのは大変ですが、後で習うべき級数の理論を知っていると簡単に証明できます。