2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2022 年 7 月 20 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の広義積分の値を計算せよ。
$$\int_0^1 \log x dx.$$
ただし、$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ は認めてよいこととする。

**解答**　不定積分を計算すると
$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x\log x - \int x\frac{1}{x} dx = x\log x - x + C$$
よって広義積分は
$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}[x\log x - x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-1-\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon) = -1$$
よって答えは $-1$。

**注意**　$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ については教科書問 2.3.1 に載っていますが、$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定形に対するロピタルの定理を認めたら次のように示すこともできます。
$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

問題 $\boxed{2}$

$s>0$ を定数とするとき、次の広義積分は収束することを示せ。
$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx.$$

**解答**　広義積分を
$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx + \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$$
と分け、それぞれの収束をいう。

前半の収束のためにある定数 $C$ を使って任意の $x\geq 1$ に対して $0\leq e^{-x}x^{s-1}\leq \frac{C}{x^2}$ となることを示す。そのためには関数 $g(x)=e^{-x}x^{s+1}$ が有界を示せばよい。実際、微分を計算すると
$$g'(x) = -e^{-x}x^{s+1} + (s+1)e^{-x}x^s = (s+1-x)e^{-x}x^s$$
より、$g(x)$ は $[0,s+1]$ で単調増加し $[s+1,\infty)$ で単調減少するので、$g(x)\leq g(s+1)=e^{-s-1}(s+1)^{s+1}$。したがって $C=g(s+1)$ とすれば $0\leq e^{-x}x^{s-1}\leq\frac{C}{x^2}$ が成立する。ここで広義積分 $\int_1^\infty \frac{C}{x^2}dx$ は収束するので、広義積分 $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ も収束する。

残った $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ については $e^{-x}x^{s-1}\leq x^{s-1}$ であり、$s>0$ に注意すれば $\int_0^1 x^{s-1}dx$ は収束する（教科書例題 3.5.2）ので、$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ も収束する。

以上より広義積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束することがわかった。