2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 3 回（2022 年 5 月 18 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cosh\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

ヒント：公式 $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$ を示して、ネピアの定数の定義に帰着させる。より詳しくは自然対数を取って $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ を使うと楽。

解答　まず、実数 x に対して公式 $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$ を示す。実際、$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ にもとづいて右辺を計算すると、

$$1 + 2\sinh^2 x = 1 + 2\frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = 1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x$$

である。

これを使えば、極限を取りたい数列の自然対数を取ったものは

$$n^2\log\left(\cosh\frac{1}{n}\right) = n^2\log\left(1 + 2\sinh^2\frac{1}{2n}\right) = \left(\sqrt{2}n\sinh\frac{1}{2n}\right)^2\frac{\log\left(1 + 2\sinh^2\frac{1}{2n}\right)}{2\sinh^2\frac{1}{2n}}$$

と変形でき、$n\to\infty$ とすると $2\sinh^2\frac{1}{2n}\to 0$ なので、$\frac{\log\left(1+2\sinh^2\frac{1}{2n}\right)}{2\sinh^2\frac{1}{2n}}\to 1$ である。あとは

$$\sqrt{2}n\sinh\frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sinh\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

なので、

$$n^2\log\left(\cosh\frac{1}{n}\right) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

より求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cosh\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

宿題 $\boxed{4}$

方程式

$$e^x = |x|^e$$

は実数解を少なくとも 2 つ持つことを示せ。ただし、e は $2 < e < 3$ を満たす定数である。

中間値の定理を使って方程式の解の存在をいう問題です。もう片方の解 $x = e$ は直接見つける必要があります。

解答　$f(x) = e^x - |x|^e$ とおくとこれは $\mathbb{R}$ 上の連続関数である。

ここで、

- $f(e) = e^e - |e|^e = 0$ より $x = e$ は解である。
- $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ で $f(-1) = e^{-1} - |-1|^e = e^{-1} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$ より中間値の定理（講義ノート 4 定理 2.53）より $f(c) = 0$ となる $-1 < c < 0$ が存在し解である。

以上より $-1 < c < 0 < e$ なので、2 つの実数解 c, e を得た。