2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 4 回（2021 年 12 月 1 日）問題解答例

問題 1

x, y が実数全体を動くとき、次の関数 $f(x,y)$ の極大・極小を答えよ。

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x + 4y - 1.$$

関数の極大・極小は、まず 1 階偏導関数が 0 になるという連立方程式を解き極大点・極小点の候補を見つけ、さらにその点でのヘッセ行列を調べるとだいたいのことがわかるのでした。

解答　$f(x,y)$ の 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y) = 2x + 2y - 6, \quad f_y(x,y) = 2x + 4y + 4.$$

ここから (a,b) を極大・極小となる点とすると

$$f_x(a,b) = 2a + 2b - 6 = 0, \quad f_y(a,b) = 2a + 4b + 4 = 0$$

を満たす。この連立方程式を解いて、$(a,b) = (8,-5)$。

$f(x,y)$ の 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 2, \quad f_{yy}(x,y) = 4.$$

よって、$(a,b) = (8,-5)$ でのヘッセ行列は

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式の値は $2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 > 0$ で、$1,1$ 成分 $f_{xx}(a,b)$ も正なので、$(8,-5)$ は極小点である。

以上より $f(x,y)$ は $(x,y) = (8,-5)$ で極小となりその値は $f(8,-5) = -35$ で、極大はない。

問題 2

$f(x,y)$ を C^1 級関数として、次の 2 変数関数 z を考える。

$$z = (x^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

ここで極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をして $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とするとき、z を $r, \theta, \frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$ で表せ。

解答　まず $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を $r, \theta, \frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$ で表す。$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を偏微分して、

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta.$$

これを $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ について解いて、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta. \tag{1}$$

よってこれを代入して、

$$\begin{aligned} z &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\left(\frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin\theta\right) + 2r^2\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta\right) \\ &= \{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta + 2r^2\cos\theta\sin^2\theta\}\frac{\partial g}{\partial r} + \{-r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta + 2r\cos^2\theta\sin\theta\}\frac{\partial g}{\partial \theta} \\ &= r^2\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} + r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

注意　式 (1) は教科書例 5.1.10 2) の極座標逆変換の式にほかなりません。