2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 4 回（2022 年 6 月 1 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ の増減と凹凸を調べて、最大点、最小点、変曲点を答えよ。

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

解答　f の導関数を計算すると、

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

よって、$f'(x) = 0$ を解くと $x = \pm 1$ であり、f は $(-\infty, -1]$ で狭義単調減少し、$[-1, 1]$ で狭義単調増加し、$[1, \infty)$ で狭義単調減少する。

また、2 次の導関数を計算すると、

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2) \cdot 4x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

よって、$f''(x) = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{3}$ であり、$f(x)$ は $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ で上に凸、$x \in (-\sqrt{3}, 0)$ で下に凸、$x \in (0, \sqrt{3})$ で上に凸、$x \in (\sqrt{3}, \infty)$ で下に凸である。

以上のことと、$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ より、$f(x)$ の最大点は $x = 1$ で最小点は $x = -1$ であり、変曲点は $x = 0, \pm\sqrt{3}$ である。

宿題 $\boxed{4}$

次の極限の値を計算せよ。

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

ヒント：何らかの方法で関数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ の微分の問題に帰着させ、対数を取って微分する。この方法で極限 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\log(1+x) - x}{x^2}$ の計算に問題が帰着されるはず。

解答　$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおくと、これは $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ で微分可能で $\lim_{x\to 0} f(x) = e$ なので、ロピタルの定理より極限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$ が存在したとすると、

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - f(x)}{x} = -\lim_{x\to 0} f'(x).$$

ここで $f'(x)$ について、$f(x) > 0$ より $\log f(x) = \frac{1}{x}\log(1+x)$ を微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2}\log(1+x) + \frac{1}{x}\frac{1}{1+x} = -\frac{(1+x)\log(1+x) - x}{x^2(1+x)}$$

$x \to 0$ とするとき $1 + x \to 1$ であることから $\frac{(1+x)\log(1+x)-x}{x^2}$ の極限を計算すると、ロピタルの定理より、

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

したがって $\lim_{x\to 0} f(x) = e$ に注意して $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{e}{2}$ であり、問題の答えは

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e}{2}.$$