

2023 年度京都大学微分積分学（演義）B

第 6 回問題と宿題 *

中安淳

2023 年 12 月 12 日

問題 23

次の重積分を計算せよ。

- (1) $\iint_{[1,2] \times [3,4]} (1+x+y+xy) dx dy.$
- (2) $\iint_{[0,1] \times [0,1]} x^2 y e^{xy^2} dx dy.$

問題 24

積分

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{-y^2} dy \right) dx$$

を計算せよ。

宿題 25

D_1 と D_2 を平面の面積確定集合として f をそれらの上で積分可能な関数とする時、

$$\begin{aligned} \iint_{D_1 \cup D_2} f(x) dx + \iint_{D_1 \cap D_2} f(x) dx \\ = \iint_{D_1} f(x) dx + \iint_{D_2} f(x) dx \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ。

ヒント：まず $D_1 \cap D_2$ が空集合の時の $\iint_{D_1 \cup D_2} f(x) dx = \iint_{D_1} f(x) dx + \iint_{D_2} f(x) dx$ を積分の線形性によって示す。

宿題 26

パラメータ $L > 0$ を含んだ重積分

$$I = \iint_{[0,L]^2} e^{-xy} \sin x dx dy$$

を二通りに計算することで、広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{\sin x}{x} dx$$

の値を求めよ。