2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 7 回（2023 年 1 月 11 日）問題解答例

問題$\boxed{1}$

次の広義重積分を計算せよ。

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dxdy.$$

解答　まず、関数 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$ は $\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y = x\}$ で値が定義できていないことに注意する。そこで $D = [0,1]^2$ の近似列を $n = 1,2,3,\cdots$ に対して $D_n = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid |x-y| \geq n^{-1}\}$（直角二等辺三角形が 2 つ）として取ると、

$$\iint_{D_n} f(x,y)dxdy = \int_{n^{-1}}^{1} \left\{ \int_0^{x-n^{-1}} (x-y)^{-\frac{1}{2}} dy \right\} dx + \int_0^{1-n^{-1}} \left\{ \int_{x+n^{-1}}^{1} (y-x)^{-\frac{1}{2}} dy \right\} dx$$

ここで第 1 項は

$$\begin{aligned}\int_{n^{-1}}^{1} \left\{ \int_0^{x-n^{-1}} (x-y)^{-\frac{1}{2}} dy \right\} dx &= \int_{n^{-1}}^{1} \left[-2(x-y)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{x-n^{-1}} dx = \int_{n^{-1}}^{1} \left(2x^{\frac{1}{2}} - 2(n^{-1})^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2(n^{-1})^{\frac{1}{2}} x \right]_{n^{-1}}^{1} = \frac{4}{3}(1 - (n^{-1})^{\frac{3}{2}}) - 2(n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1 - n^{-1}).\end{aligned}$$

第 2 項も同様にして

$$\begin{aligned}\int_0^{1-n^{-1}} \left\{ \int_{x+n^{-1}}^{1} (y-x)^{-\frac{1}{2}} dy \right\} dx &= \int_0^{1-n^{-1}} \left[2(y-x)^{\frac{1}{2}} \right]_{x+n^{-1}}^{1} dx = \int_0^{1-n^{-1}} \left(2(1-x)^{\frac{1}{2}} - 2(n^{-1})^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \left[-\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(n^{-1})^{\frac{1}{2}} x \right]_0^{1-n^{-1}} = \frac{4}{3}(1 - (n^{-1})^{\frac{3}{2}}) - 2(n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1 - n^{-1}).\end{aligned}$$

よって

$$\iint_{D_n} f(x,y)dxdy = \frac{8}{3}(1 - (n^{-1})^{\frac{3}{2}}) - 4(n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1 - n^{-1})$$

であり、$n \to \infty$ でこれは $\frac{8}{3}$ に収束するので、問題の広義重積分は収束しその値は $\frac{8}{3}$ である。

問題 $\boxed{2}$

次の広義重積分を計算せよ。

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

ただし、$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ は認めてよいこととする。

計算の手順は $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ の場合とほぼ同じです。

解答　$D = \mathbb{R}^2$ の近似列を $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le n^2\}$（円板）として取ると、極座標変換 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ によりヤコビアンは r なので、

$$\iint_{D_n} (x-y)^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^n \left\{ \int_0^{2\pi} r^2 (\cos\theta - \sin\theta)^2 e^{-r^2} r d\theta \right\} dr$$

ここで

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \sin 2\theta) d\theta = 2\pi$$

であり、r での積分は $t = r^2$ と置換すると

$$\iint_{D_n} (x-y)^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy = 2\pi \int_0^n r^3 e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{n^2} te^{-t} dt$$

部分積分により

$$\int te^{-t} dt = \int t(-e^{-t})' dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -(1+t)e^{-t} + C$$

なので、

$$\iint_{D_n} (x-y)^2 e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi \int_0^{n^2} te^{-t} dt = \pi \left[-(1+t)e^{-t} \right]_0^{n^2} = \pi(1 - (1+n^2)e^{-n^2}).$$

$n \to \infty$ でこれは π に収束するので、問題の広義重積分は収束しその値は π である。