2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2021 年 7 月 14 日）問題

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　評価：

問題 1

a, b, c, x, y, z を実数として、行列式に関する次の恒等式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = 0.$$

2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2021 年 7 月 14 日）問題

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　評価：

問題 2

(1) 線形独立な 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ が張る平行四辺形 $\{a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \mid 0 \le a, b \le 1\}$ の面積 A について、次の問いに答えよ。

(i) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ がなす角度を θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とおく時、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が張る三角形に対して余弦定理を適用することで、$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ が成立することを示せ。

(ii) $A^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$ を示せ。

(iii) 行列式を使って、$A^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2$ が成立することを示せ。

(2) 線形独立な 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ が張る平行六面体 $\{a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w} \mid 0 \le a, b, c \le 1\}$ の体積 V について、次の問いに答えよ。

(i) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の外積を $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ で定める時、$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に直交し、大きさが $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が張る平行四辺形の面積 A に等しいことを示せ。

(ii) $V = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|$ を示せ。

(iii) 行列式を使って、$V^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}^2$ が成立することを示せ。