2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 4 月 27 日）問題と宿題（2022 年 5 月 10 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ が実数 α に数列 $\{b_n\}$ が実数 β にそれぞれ収束するとする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は有界である、つまりある実数 $M > 0$ が存在して全ての n に対して $|a_n| \leq M$ となることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n b_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束することを示せ。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 4 月 27 日）問題と宿題（2022 年 5 月 10 日締め切り）

学籍番号： 氏名： 評価：

問題 $\boxed{2}$

次の漸化式によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

(1) この数列 $\{a_n\}$ は各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $a_n \geq \sqrt{2}$ を満たすことを示せ。ヒント：相加・相乗平均の関係式。

(2) この数列 $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ。

(3) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し、極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

2022 年度京都大学微分積分学(演義)A(中安淳担当)第 2 回(2022 年 4 月 27 日)問題と宿題(2022 年 5 月 10 日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{3}$

次の集合の最大元、最小元、上限、下限を（あったら）求めよ。

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin \frac{\pi}{3} x$ で定めるときの、像 $f(\mathbb{Z})$。

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めるときの、区間の逆像 $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1))$。

(2) $\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$.

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 4 月 27 日）問題と宿題（2022 年 5 月 10 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{4}$

実数列 $\{a_n\}$ と実数列 $\{b_n\}$ から実数列 $\{c_n\}$ を各 n に対して $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ で定める。ここで数列 $\{a_n\}$ が実数 α に数列 $\{b_n\}$ が実数 β にそれぞれ収束する時、数列 $\{c_n\}$ は $\max\{\alpha, \beta\}$ に収束することを示せ。
つまり、$a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta$ の時、$\max\{a_n, b_n\} \to \max\{\alpha, \beta\}$ を示せ。