2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 3 回（2022 年 11 月 2 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の極限を答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - x - y^2 + y}{x - y}$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2}$.

解答

(1) 計算すると

$$\frac{x^2 - x - y^2 + y}{x - y} = x + y - 1$$

で $x + y - 1$ は原点でも連続でその値は -1 なので、問題の極限は -1 である。

(2) m を実数として $y = mx$ に沿った極限を考えると、

$$\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1 + m}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

この値は m によって変わってしまう、つまり $m = 0$ だと 1 だが $m = 1$ だと $\sqrt{2}$ なので、問題の極限は存在しない。

(3) m を実数として $y = mx$ に沿った極限を考えると、

$$\frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} = \frac{m(1 + m)}{1 + m + m^2} x \to 0 \quad (x \to 0).$$

よって極限値は 0 と予想できる。ここで

$$\left| \frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} - 0 \right| \le \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}^3}{x^2 - |x||y| + y^2} \le 2 \frac{1}{1 - \frac{|x||y|}{x^2 + y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

相加平均相乗平均の関係より

$$\frac{x^2 + y^2}{|x||y|} = \frac{|x|}{|y|} + \frac{|y|}{|x|} \ge 2$$

なので、

$$\left| \frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} - 0 \right| \le \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}^3}{x^2 - |x||y| + y^2} \le 4\sqrt{x^2 + y^2} \to 0 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \to 0).$$

よって問題の極限は 0 である。

講義ノート（2022/10/21、ページ 7）でも少し書いてある通り極座標を使えば、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = l$ であることは

$$\lim_{r\to 0} \sup_{\theta} |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| = 0$$

であることと同値です。なので (3) は以下のようにしても答えることができます。

(3) の別解　極座標 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって各 θ に対して

$$\frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} = \frac{\cos\theta\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{1 + \cos\theta\sin\theta} r \to 0 \quad (r \to 0).$$

よって極限値は 0 と予想でき、

$$\left| \frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} - 0 \right| = \frac{|\cos\theta||\sin\theta||\cos\theta + \sin\theta|}{1 + \cos\theta\sin\theta} r \le \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta} r \le 4r \to 0 \quad (r \to 0).$$

よって極限は 0 である。

問題 $\boxed{2}$

半径 1 の円の内部 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で関数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

は全微分可能であることを示し、そのグラフ $z = f(x, y)$ の点 $(a, b, f(a, b))$ $((a, b) \in D)$ での接平面の方程式を求めよ。

与えられた曲面は xyz 空間の原点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面の一部です。全微分可能は直接確かめるよりもより強い条件である C^1 級の方が示しやすいことが多いです。

解答　偏導関数を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

これらは D 上の連続関数なので f は C^1 級であり特に全微分可能である。ここで接平面の方程式は

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

なので、計算すると

$$\begin{aligned} z &= \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}(x - a) + \frac{-b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}(y - b) + \sqrt{1 - a^2 - b^2} \\ &= \frac{1 - ax - by}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

注意　高校で習っているはずの円 $x^2 + y^2 = 1$ の点 (a, b) での接線の方程式 $ax + by = 1$ の類推で、球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の点 (a, b, c) での接平面の方程式は $ax + by + cz = 1$ です。今回の問題では $c = \sqrt{1 - a^2 - b^2}$ なので、代入して z について解けば同じ式を得られていることがわかります。