2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2022 年 10 月 11 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

数列 $\{a_n\}$ は各項 a_n が非零であるとする。このとき、2 つの級数 $\sum a_n$ と $\sum a_n^{-1}$ のうち片方は発散することを示せ。

各種判定法が基本的に収束の十分条件を提供するのに対し、今回の問題で必要なのは収束の必要条件です。

解答　級数 $\sum a_n$ と $\sum a_n^{-1}$ がともに収束するとして矛盾を導く。このとき、教科書第 1 章定理 7 の系より、極限を取ると $a_n \to 0$ かつ $a_n^{-1} \to 0$ となる必要がある。よって積 $a_n a_n^{-1}$ も 0 に収束するが、$a_n a_n^{-1}$ は常に 1 なので矛盾する。したがって背理法により級数 $\sum a_n$ と $\sum a_n^{-1}$ のうち片方は発散する。

宿題 $\boxed{4}$

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+1} = \frac{e^{a_n} - 1}{e - 1}, \quad a_1 = a, \quad 0 < a < 1$$

で定義する。ただし、e は自然対数の底である。このとき、各項 a_n は正であることが知られている。

(1) 一般に任意の $0 < x < 1$ に対して不等式 $e^x < 1 + (e-1)x$ が成り立つことを示せ。
(2) $n \to \infty$ で $a_n \to 0$ であることを示せ。
(3) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するか発散するか答えよ。

解答

(1) $f(x) = e^x - 1 - (e-1)x$ とおくと $f(0) = f(1) = 0$ で、微分は

$$f'(x) = e^x - (e-1), \quad f''(x) = e^x > 0.$$

よって関数 f は区間 $[0, \log(e-1)]$ で狭義単調減少し、区間 $[\log(e-1), 1]$ で狭義単調増加する。したがって、$0 < x < 1$ で $f(x) < 0$ が成り立ち問題の不等式が成り立つ。

(2) 各 $n = 1, \cdots$ に対して $a_{n+1} \le a_n \le a$ が成り立つことを示す。仮定より $a_1 = a$ であり、$a_n \le a$ と仮定すると、$a_n < 1$ なので (1) より

$$a_{n+1} = \frac{e^{a_n} - 1}{e - 1} < a_n$$

よって数学的帰納法により、数列 $\{a_n\}$ は単調減少であり、$0 < a_n \le a$ を満たす。特に教科書第 1 章定理 4 より数列 $\{a_n\}$ は収束しその極限を α とおくと、$0 \le \alpha \le a < 1$ で、漸化式で極限を取ることで α は $\alpha = \frac{e^\alpha - 1}{e-1}$ の解であることがわかる。ここで (1) より $0 < \alpha < 1$ に解はないので、解は $\alpha = 0$ のみである。したがって、$a_n \to 0$ であることがわかる。

(3) 比の極限を計算すると (2) より $a_n \to 0$ なので、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{a_n} - 1}{(e-1)a_n} \to \frac{1}{e-1} < 1.$$

よって、ダランベールの判定法（教科書第 5 章系 2）より正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

注意　(1) は狭義凸関数 f の基本的な不等式 $f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $(a < x < b)$ に他なりません（教科書第 2 章系 2 参照)。

解答例では抽象的な定理を使って極限の存在を言いましたが、より具体的な評価を示すことができます。

(2), (3) の別解　まず、凸関数の基本的な不等式で $e^x \le 1 + \frac{e^a - 1}{a}x$ $(0 \le x \le a)$ が成り立つことに注意する。この不等式と (1) から

$$a_{n+1} \le \frac{e^a - 1}{(e-1)a} a_n, \quad \frac{e^a - 1}{(e-1)a} < 1$$

ここから数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束し、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することがわかる。

注意　最初の解答例で $a_{n+1} < a_n$ を示しましたが、そこから直ちに数列が 0 に収束することや級数が収束することは言えません。