2023 年度京都大学微分積分学（講義・演義）B 期末試験解説

中安淳

2024 年 2 月 5 日

問題 $\boxed{1}$

次の級数の和を答えよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

演義問題 $\boxed{2}$ の類題ですが、n が 2 ずれているので注意が必要です。

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+2}) = b_1 + b_2 - b_{n+1} - b_{n+2}$$

となります。

解答　変形

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

により、部分和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

となる。これを $n \to \infty$ とすることで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

よって答えは $\frac{3}{4}$ である。

問題 $\boxed{2}$

次の級数は「絶対収束する」か「条件収束する（絶対収束しないが収束する）」か「発散する（収束しない）」か答えよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{n}.$$

演義問題 $\boxed{9}$(2) そのままです。

解答　答えは「絶対収束する」である。対応する正項級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ となる。ここで $n \to \infty$ で、

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 \to 1$$

より比較判定法から、$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の収束・発散は一致する。後者の級数は収束するので問題の級数は絶対収束することがわかる。

問題 $\boxed{3}$

次の二変数関数は平面上で「C^∞ 級である」か「C^∞ 級でないが C^2 級である」か「C^2 級でないが C^1 級である」か「C^1 級でないが連続である」か「連続でない」か答えよ。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

演義には対応する問題はありませんが、講義で似たような例題を紹介しました。感覚的には分子が 4 次式で分母が 2 次式なので、f は 2 次式相当のため C^1 級は言えるが C^2 級ではないという問題です。C^2 級でないことを示すのは一般には大変ですが、C^2 級なら偏微分の交換ができるはずなのでそこから示すことができます。

解答　答えは「C^2 級でないが C^1 級である」である。まず、偏微分を計算すると $(x, y) \neq (0, 0)$ においては $f(x, y)$ は C^∞ 級であることに注意して

$$f_x(x, y) = \frac{3x^2 y(x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^3 (x^2 + y^2) - x^3 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$(x, y) = (0, 0)$ においては偏微分の定義より

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

$f_x(x, y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ での連続性を考えると、極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により $r \to 0$ で

$$\begin{aligned}|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| &= \frac{|x^2 y(x^2 + 3y^2)|}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= r|\cos^2\theta \sin\theta(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)| \\ &\leq 4r \to 0\end{aligned}$$

より f_x は平面全体で連続である。同様にして f_y も平面全体で連続であることがわかるので、f は C^1 級である。他方、f は

C^2 級でないことを二回偏微分について $(x,y)=(0,0)$ において $f_{xy}(x,y)\neq f_{yx}(x,y)$ となることをもとに示す。計算すると

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1.$$

よって、$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ なので、シュワルツの定理より f は C^2 級でない。

問題 $\boxed{4}$

次の平面上の二変数関数の最大値を答えよ。

$$f(x,y)=\cos x+\cos y-\cos(x+y).$$

演義問題 $\boxed{21}$ の関数の定義域を平面全体にしたものですが、答えは同じです。

解答　まずこの関数は x と y それぞれについて 2π の周期をもつことに注意する。そのため、$0\leq x<2\pi, 0\leq y<2\pi$ のみ考えればよい。また、有界閉集合 $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ 上の最大・最小が存在し、それらがそのまま平面上の最大・最小となることにも注意する。偏微分を計算すると

$$f_x(x,y)=-\sin x+\sin(x+y),\quad f_y(x,y)=-\sin y+\sin(x+y).$$

最大・最小となる点はこれらがともに 0 となるので次の連立方程式を満たす。

$$\sin x=\sin y=\sin(x+y).$$

このうち $\sin x=\sin y$ から $0\leq x<2\pi, 0\leq y<2\pi$ に注意して次のいずれかが成り立つことがわかる。

$$x=y,\quad x=\pi-y,\quad x=3\pi-y.$$

- $x=y$ のとき、残りの方程式は $\sin x=\sin 2x=2\sin x\cos x$ より、$\sin x=0$ または $\cos x=\frac{1}{2}$、つまり $x=0,\pi,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$ を得る。
- $x=\pi-y$ のとき、$\sin x=\sin\pi=0$ より、つまり $x=0,\pi$ を得る。
- $x=3\pi-y$ のとき、$\sin x=0$ だが、$0\leq x<2\pi, 0\leq y<2\pi$ の範囲では解はない。

以上より最大・最小となる点の候補は

$$(x,y)=(0,0),(\pi,\pi),(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}),(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}),(0,\pi),(\pi,0)$$

となる。それぞれ $f(x,y)$ の値を計算すると、

$$1,-3,\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,1$$

なので、答えの最大値は $\frac{3}{2}$ である。

注意　最小値は -3 です。

問題 $\boxed{5}$

x,y が次の条件を満たす時、y の最大値を答えよ。

$$x^2+xy+y^2=1.$$

ラグランジュの未定乗数法を適用すればよいです。

解答　この問題は

$$\varphi(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$$

の条件のもとで関数

$$f(x,y)=y$$

を最大を考える問題である。有界閉集合上の連続関数の問題と考えられるので最大・最小が存在することに注意する。また、$x^2+xy+y^2=1$ に特異点はないことに注意する。ラグランジュの未定乗数法より最大となる (x,y) において

$$f_x(x,y)-\lambda\varphi_x(x,y)=0-\lambda(2x+y)=0,$$

$$f_y(x,y)-\lambda\varphi_y(x,y)=1-\lambda(x+2y)=0,$$

$$\varphi(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$$

となる。ここで一つ目の式より $\lambda=0$ または $2x+y=0$ だが、$\lambda=0$ は二つ目の式が $1=0$ となり不適である。したがって、$2x+y=0$ であり、三つ目の式と連立させて解く。$y=-2x$ なので、$3x^2=1$ より $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のため

$$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}),(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}).$$

以上より最大・最小の候補は $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ なので、答えの最大値は $\frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

問題 $\boxed{6}$

次の累次積分の値を答えよ。

$$\int_0^1\left(\int_x^1 e^{-y^2}dy\right)dx.$$

演義問題 $\boxed{24}$ そのままです。

解答　y で先に積分することを考えると、重積分としての積分領域は

$$\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1, x\leq y\leq 1\}=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1, 0\leq x\leq y\}$$

なので、

$$\int_0^1\left(\int_x^1 e^{-y^2}dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^y e^{-y^2}dx\right)dy=\int_0^1 ye^{-y^2}dy$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}.$$

よって答えは $\frac{e-1}{2e}$ である。

問題 $\boxed{7}$

$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ として次の重積分の値を答えよ。

$$\iint_D (x^4 - 2x^2y^2 + y^4)dxdy.$$

演義問題 $\boxed{27}$ の形を少し変えただけで同じ問題です。

解答　被積分関数は

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x+y)^2(x-y)^2$$

であることに注意する。一次変換 $u = x + y$, $v = x - y$ をすると、$x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ なのでヤコビアンは

$$\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

である。さらに積分領域 D は xy 平面の $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ を頂点とする正方形で、それぞれ uv 平面の $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$ に移るので、移した先の積分領域は正方形 $[-1,1]^2$ である。したがって

$$\begin{aligned}\iint_D (x^4 - 2x^2y^2 + y^4)dxdy &= \iint_{[-1,1]^2} u^2v^2\frac{1}{2}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^2du \int_{-1}^{1} v^2dv \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{2}{9}$ である。

問題 $\boxed{8}$

次の広義積分の値を答えよ。

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx.$$

演義問題 $\boxed{28}$ と同じ問題ですが、積分区間が半分になっています。

解答　問題の広義積分は収束することに注意すれば、その値を I とおくと

$$I^2 = \iint_{[0,\infty)^2} x^2y^2e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

ここで極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をするとそのヤコビアンは r なので、

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta e^{-r^2}rd\theta\right)dr \\ &= \int_0^\infty r^5e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta.\end{aligned}$$

あとは頑張ってこの二つの積分を計算する。まず

$$\begin{aligned}\int r^5e^{-r^2}dr &= -\frac{1}{2}\int r^4(e^{-r^2})'dr \\ &= -\frac{1}{2}r^4e^{-r^2} + 2\int r^3e^{-r^2}dr \\ &= -\frac{1}{2}r^4e^{-r^2} - \int r^2(e^{-r^2})'dr \\ &= -\frac{1}{2}r^4e^{-r^2} - r^2e^{-r^2} + 2\int re^{-r^2}dr \\ &= -\frac{1}{2}r^4e^{-r^2} - r^2e^{-r^2} - e^{-r^2}\end{aligned}$$

より

$$\int_0^\infty r^5e^{-r^2}dr = 1.$$

次に

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta = \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

よって $I^2 = 1\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$ なので、答えは $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ である。

別解　ガンマ関数

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}dt$$

に当てはめて考えると問題の積分は $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2})$ である。ここで

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

よって答えは $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ である。

問題 $\boxed{9}$

次の極限の値を答えよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^e \frac{n}{\sin x + nx}dx.$$

演義補充問題 $\boxed{31}$ の誘導をなくした問題です。試験では答えのみなので仮定をチェックせずに極限と積分の順序交換してもよいですが、各点収束、一様収束、順序交換という流れを意識しましょう。

解答　被積分関数は x を固定するごとに

$$f_n(x) = \frac{n}{\sin x + nx} = \frac{1}{n^{-1}\sin x + x} \to \frac{1}{x}$$

より、$\{f_n(x)\}$ は $f(x) = \frac{1}{x}$ に各点収束する。$x \in [1, e]$ に対して、$\sin x \geq \sin e > 0$ であることに注意して計算すると、

$$f_n(x) - f(x) = \frac{n}{\sin x + nx} - \frac{1}{x} = \frac{-\sin x}{x(\sin x + nx)}$$

なので、

$$\sup_{x\in[1,e]}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,e]}\frac{\sin x}{x(\sin x + nx)} \leq \frac{1}{\sin e + n}.$$

よって、$n \to \infty$ とすると最右辺は 0 に収束するので、はさみうちの原理より $\sup_{x\in[1,e]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ であり、$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[1, e]$ 上一様収束する。したがって以上より極限と積分の順序交換（教科書第 5 章定理 10）ができて、

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e f_n(x)dx = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\log x]_1^e = 1.$$

よって答えは 1 である。

問題 $\boxed{10}$

次の級数の和を答えよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

この問題は演義補充問題 $\boxed{34}$ を簡単にしたものです。補充問題の解答例では等比級数を項別積分して所望の整級数を得ましたが、ここでは整級数を項別微分して等比級数に帰着させます。

解答　この級数は収束半径が 1 の整級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

の $x = \frac{1}{2}$ での値である。これを項別微分すると、$|x| < 1$ に対して

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

と計算されるので、

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\log(1-x).$$

よって答えは $f(\frac{1}{2}) = \log 2$ である。

答えのまとめ

■**問題** $\boxed{1}$　$\frac{3}{4}$

■**問題** $\boxed{2}$　絶対収束する

■**問題** $\boxed{3}$　C^2 級でないが C^1 級である

■**問題** $\boxed{4}$　$\frac{3}{2}$

■**問題** $\boxed{5}$　$\frac{2}{\sqrt{3}}$

■**問題** $\boxed{6}$　$\frac{e-1}{2e}$

■**問題** $\boxed{7}$　$\frac{2}{9}$

■**問題** $\boxed{8}$　$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

■**問題** $\boxed{9}$　1

■**問題** $\boxed{10}$　$\log 2$