2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2022 年 10 月 11 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の級数は収束することを示せ。ただし、k, a, x は n によらない数であり、k は 0 以上の整数、a は 1 より大きい実数、x は実数とする。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

解答　ダランベールの判定法（教科書第 5 章系 2）により示す。

(1) $a_n = \frac{n^k}{a^n}$ とおくと、$n \to \infty$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \frac{(1+n^{-1})^k}{a} \to \frac{1}{a} < 1.$$

よって、ダランベールの判定法よりこの正項級数は収束する。

(2) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ とおくと、$n \to \infty$ で

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1.$$

よって、ダランベールの判定法よりこの級数は絶対収束するので特に収束する。

(3) $a_n = \frac{n!}{n^n} \geq 0$ とおくと、$n \to \infty$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1} < 1.$$

よって、ダランベールの判定法よりこの正項級数は収束する。

問題 $\boxed{2}$

区間 $[1, \infty)$ 上の正値関数 f が単調減少のとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ と広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ の収束・発散は一致する（教科書第 4 章定理 8）。この事実を使って、級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

は収束するか発散するか答えよ。

解答　関数 $f(x) = \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}$ は $[1, \infty)$ 上で正値かつ単調減少より、級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ と広義積分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\log(x+1)} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx$ の収束・発散は一致する。そこで極限

$$\lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{x \log x} dx$$

の収束・発散を調べればよい。定積分の部分を $y = \log x$ と置換すると、$x = e^y$、$\frac{dx}{dy} = e^y$ なので、

$$\int_2^t \frac{1}{x \log x} dx = \int_{\log 2}^{\log t} \frac{e^y}{e^y y} dy = \int_{\log 2}^{\log t} \frac{1}{y} dy = [\log y]_{\log 2}^{\log t} = \log(\log t) - \log(\log 2).$$

$t \to \infty$ とすると、これは無限大に発散するので、問題の級数は発散する。