2019 年度応用数理 D 第 9 回レポート解答例

中安淳

2019 年 12 月 17 日

問題 1

正方形領域 $(0,1)\times(0,1)$ 上でラプラス方程式

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

を境界条件

$$u(0,y)=0,\quad u(1,y)=1-3y^2,\quad (0\le y\le 1),$$

$$u(x,0)=x^3,\quad u(x,1)=x^3-3x,\quad (0\le x\le 1),$$

のもとで考える。ステップ幅は $h=1/3$ とした場合の差分方程式について以下の問いに答えよ。ただし、$x=x_i=ih$, $y=y_j=jh$ における近似解の値を $u_{i,j}$ と表す。

(1) 上の境界条件のもとで $(u_{i,j})_{i,j=1,2}=(u_{1,1},u_{1,2},u_{2,1},u_{2,2})$ に関する連立方程式を求めよ。

(2) 初期値 $u_{i,j}^{(0)}=0$ から始めてガウス・ザイデル法により近似解の列 $(u_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,2}$ $(n=1,2,3,\dots)$ を構成する。$n=1$ から $n=5$ までの近似解の値をすべて答えよ。

(3) 各 $n=1,2,3,4,5$ に対して $(u_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,2}$ と厳密解 $u(x,y)=x^3-3y^2x$ との誤差を求めよ。ただし、ここでの誤差は $\epsilon^{(n)}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}|u(x_i,y_j)-u_{i,j}^{(n)}|$ とする。

問題 1 の解答

(1) 差分方程式は

$$4u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=0$$

より、$(i,j)=(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$ を代入して、

$$\begin{cases} 4u_{1,1}-u_{0,1}-u_{2,1}-u_{1,0}-u_{1,2}=0, \\ 4u_{1,2}-u_{0,2}-u_{2,2}-u_{1,1}-u_{1,3}=0, \\ 4u_{2,1}-u_{1,1}-u_{3,1}-u_{2,0}-u_{2,2}=0, \\ 4u_{2,2}-u_{1,2}-u_{3,2}-u_{2,1}-u_{2,3}=0. \end{cases}$$

ここで境界条件より

$$u_{0,1}=0, \quad u_{0,2}=0, \quad u_{3,1}=\frac{2}{3}, \quad u_{3,2}=-\frac{1}{3},$$
$$u_{1,0}=\frac{1}{27}, \quad u_{2,0}=\frac{8}{27}, \quad u_{1,3}=-\frac{26}{27}, \quad u_{2,3}=-\frac{46}{27}$$

なので、求める連立方程式は

$$\begin{cases} 4u_{1,1}-u_{2,1}-u_{1,2}=\frac{1}{27}, \\ 4u_{1,2}-u_{2,2}-u_{1,1}=-\frac{26}{27}, \\ 4u_{2,1}-u_{1,1}-u_{2,2}=\frac{26}{27}, \\ 4u_{2,2}-u_{1,2}-u_{2,1}=-\frac{55}{27}. \end{cases}$$

(2) ガウス・ザイデル法では

$$\begin{aligned} u_{1,1}^{(n+1)} &= \frac{1}{108}+\frac{1}{4}u_{2,1}^{(n)}+\frac{1}{4}u_{1,2}^{(n)}, \\ u_{1,2}^{(n+1)} &= -\frac{26}{108}+\frac{1}{4}u_{2,2}^{(n)}+\frac{1}{4}u_{1,1}^{(n+1)}, \\ u_{2,1}^{(n+1)} &= \frac{26}{108}+\frac{1}{4}u_{1,1}^{(n+1)}+\frac{1}{4}u_{2,2}^{(n)}, \\ u_{2,2}^{(n+1)} &= -\frac{55}{108}+\frac{1}{4}u_{1,2}^{(n+1)}+\frac{1}{4}u_{2,1}^{(n+1)} \end{aligned}$$

となるので、順番に計算することで

$$
\begin{aligned}
u_{1,1}^{(1)} &= 0.009259259259259259,\\
u_{1,2}^{(1)} &= -0.2384259259259259,\\
u_{2,1}^{(1)} &= 0.24305555555555555,\\
u_{2,2}^{(1)} &= -0.508101851851852,\\
u_{1,1}^{(2)} &= 0.010416666666666664,\\
u_{1,2}^{(2)} &= -0.36516203703703703,\\
u_{2,1}^{(2)} &= 0.11631944444444439,\\
u_{2,2}^{(2)} &= -0.5714699074074076,\\
u_{1,1}^{(3)} &= -0.0529513888888889,\\
u_{1,2}^{(3)} &= -0.3968460648148148,\\
u_{2,1}^{(3)} &= 0.0846354166666666,\\
u_{2,2}^{(3)} &= -0.5873119212962964,\\
u_{1,1}^{(4)} &= -0.06879340277777779,\\
u_{1,2}^{(4)} &= -0.4047670717592593,\\
u_{2,1}^{(4)} &= 0.07671440972222218,\\
u_{2,2}^{(4)} &= -0.5912724247685186,\\
u_{1,1}^{(5)} &= -0.07275390625000003,\\
u_{1,2}^{(5)} &= -0.40674732349537035,\\
u_{2,1}^{(5)} &= 0.07473415798611108,\\
u_{2,2}^{(5)} &= -0.5922625506365741.
\end{aligned}
$$

(3) 厳密解の値は

$$
\begin{aligned}
u(x_1, y_1) &= -\frac{2}{27}, \\
u(x_1, y_2) &= -\frac{11}{27}, \\
u(x_2, y_1) &= \frac{2}{27}, \\
u(x_2, y_2) &= -\frac{16}{27},
\end{aligned}
$$

より、誤差を計算すると

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{(1)} &= 0.5057870370370369, \\
\epsilon^{(2)} &= 0.1901041666666664, \\
\epsilon^{(3)} &= 0.04752604166666643, \\
\epsilon^{(4)} &= 0.011881510416666435, \\
\epsilon^{(5)} &= 0.002970377604166574.
\end{aligned}
$$

なお、近似解や誤差の計算では以下の Python コードを繰り返し実行した。

```
>>> a = 1/108+c/4+b/4
>>> b = -26/108+d/4+a/4
>>> c = 26/108+a/4+d/4
>>> d = -55/108+b/4+c/4
>>> e = abs(a+2/27)+abs(b+11/27)+abs(c-2/27)+abs(d+16/27)
>>> a,b,c,d,e
```