

問題 1

次の行列に行基本変形をして簡約な行列にせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

**解答** 第 2 行から第 1 行の 4 倍を引き、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 1 行の 7 倍を引き、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

第 2 行を  $-3$  で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行の 2 倍を引き、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

第 3 行に第 2 行の 6 倍を足し、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これが与えられた行列に対する簡約な行列である。

## 問題 2

次の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = 25, \\ 6x + y + 5z = 43, \\ 3x + 2y + 6z = 44. \end{cases}$$

- (1) この連立一次方程式の拡大係数行列を求めよ。  
 (2) 拡大係数行列に行基本変形をすることで解  $(x, y, z)$  を求めよ。

## 解答

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 25 \\ 6 & 1 & 5 & 43 \\ 3 & 2 & 6 & 44 \end{pmatrix}.$$

- (2) 第 2 行から第 1 行の 6 倍を引き、第 3 行から第 1 行の 3 倍を引くことで、

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & -29 & -13 & -107 \\ 0 & -13 & -3 & -31 \end{pmatrix}.$$

第 2 行を  $-29$  で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & \frac{13}{29} & \frac{107}{29} \\ 0 & -13 & -3 & -31 \end{pmatrix}.$$

第 3 行に第 2 行の 13 倍を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & \frac{13}{29} & \frac{107}{29} \\ 0 & 0 & -3 + \frac{169}{29} & -31 + \frac{107 \cdot 13}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & \frac{13}{29} & \frac{107}{29} \\ 0 & 0 & \frac{82}{29} & \frac{492}{29} \end{pmatrix}.$$

第 2 行を  $\frac{82}{29}$  で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & \frac{13}{29} & \frac{107}{29} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 3 行の 3 倍を引き、第 2 行から第 3 行の  $\frac{13}{29}$  倍を引くことで、

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行の 5 倍を引き、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

したがって解は  $(x, y, z) = (2, 1, 6)$ 。

**注意** 「第 3 行に第 2 行の 13 倍を足して」の時に同時に第 1 行から第 2 行の 5 倍を引いて  $(1, 2)$  成分を消去するのが順当かもしれませんが、計算が煩雑になるので後回しにしています。

**注意** この解答では「第 2 行を  $-29$  で割って」の所から分母が 29 の分数が出ていますが、かわりに第 3 行を  $-3$  で割って  $(3, 3)$  成分を中心に掃き出すと分母が 3 になって計算が少し楽になります。