2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 6 回宿題解答例

中安淳

2023 年 6 月 30 日

宿題 25

空間ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。

解答　ベクトルの外積の表示より

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}.$$

よって $\vec{a}$ との内積は

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

一方、行列式 $\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ はサラスの公式より

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

よって、

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

宿題 26

a, b, c, x, y, z を実数として、行列式に関する次の恒等式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = 0.$$

（多重）線形性を使った解答　$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、与えられた行列式は $\begin{vmatrix} \vec{u}+x\vec{v} & \vec{u}+y\vec{v} & \vec{u}+z\vec{v} \end{vmatrix}$ と表され、多重線形性と同じ列があると行列式は 0 であるという事実から、

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \vec{u}+x\vec{v} & \vec{u}+y\vec{v} & \vec{u}+z\vec{v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{u} & \vec{u} \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{u} & \vec{v} \end{vmatrix} \\
&\quad + y \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{u} \end{vmatrix} + yz \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{v} \end{vmatrix} \\
&\quad + x \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{u} & \vec{u} \end{vmatrix} + xz \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{u} & \vec{v} \end{vmatrix} \\
&\quad + xy \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{v} & \vec{u} \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{v} & \vec{v} \end{vmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

基本変形を使った解答　与えられた行列の第 2 行から第 1 行を引き、第 3 行から第 1 行を引くことで、

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b-a & b-a & b-a \\ c-a & c-a & c-a \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

最後の等式は第 2 行と第 3 行が等しいことによる。

注意　サラスの公式をもとに計算しても示すことができますが、項数がとても多くなります。その場合は余因子展開をすると見通しよく計算することができます。