2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第6回宿題解答例

中安淳

2023年6月20日

宿題 $\boxed{25}$

次の4次正方行列の階数（a に依存する）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

解答　与えられた行列の第1行から第3行を引き第2行から第4行を引いて、

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

ここで $a=0$ の場合、この行列は次になるので階数は2である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

以下では $a \neq 0$ の場合を考える。第1行と第2行を a で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

第4行から第1行を引き第3行から第2行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

第3行と第4行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

第3行を2で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

第4行から第3行の a 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{1}{2}a^2 \end{pmatrix}.$$

したがって、$2-\frac{1}{2}a^2=0$ の時つまり $a=\pm 2$ の時階数は3で、そうでない場合階数は4である。

以上より求める階数は、$a=0$ の時2で、$a=\pm 2$ の時3で、いずれでもない場合は4である。

宿題 $\boxed{26}$

行に関する基本変形

- 第 i 行と第 j 行を入れかえる

は実は他の二つの行に関する基本変形

- 第 i 行を c 倍する $(c \neq 0)$ と
- 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える $(i \neq j)$

のみを用いることでも実現できる。このことを踏まえて、基本行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を他の基本行列

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

の積として表せ。

解答　行列 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の下の行に上の行を足して、上の行から下の行を引いて、上の行を -1 倍して、下の行から上の行を引けば、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -b \\ a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

で行の交換になる。これを基本行列で考えることで

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。