2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 6 回（2022 年 12 月 21 日）問題解答例

問題 1

次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_I (1+x+y+xy)dxdy \ (I=[1,2]\times[3,4])$.

(2) $\displaystyle\iint_I x^2ye^{xy^2}dxdy \ (I=[0,1]\times[0,1])$.

解説　x の積分を先に計算しても y の積分を先に計算しても結果は同じですが、計算量が変わることがあります。今回の問題の (2) では原始関数が求めやすい y の積分を先にすると楽です。

解答

(1) y で先に積分すると、

$$\begin{aligned}\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x+y+xy)dxdy &= \int_1^2\left\{\int_3^4(1+x+y+xy)dy\right\}dx = \int_1^2\left[y+xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}xy^2\right]_3^4 dx\\ &= \int_1^2\left(1+x+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}x\right)dx = \left[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{7}{4}x^2\right]_1^2\\ &= 1+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7\cdot 3}{4}=\frac{45}{4}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{45}{4}$。

(2) y で先に積分すると、

$$\int x^2ye^{xy^2}dy=\frac{1}{2}xe^{xy^2}+C$$

より、

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]}x^2ye^{xy^2}dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^1 x^2ye^{xy^2}dy\right\}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xe^{xy^2}\right]_0^1dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}x\right)dx.$$

ここで、

$$\int xe^xdx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C$$

より、

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]}x^2ye^{xy^2}dxdy=\left[\frac{1}{2}(xe^x-e^x)-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

よって答えは $\frac{1}{4}$。

注意　(1) は

$$\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x+y+xy)dxdy=\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x)(1+y)dxdy=\iint_{[2,3]\times[4,5]}xydxdy$$

と変形することでも計算をすることができます。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 6 回（2022 年 12 月 21 日）問題解答例

問題 $\boxed{2}$

xy 平面で原点を中心として半径 1 の円の周と内部からなる有界閉集合を B と表すことにする。このとき、重積分

$$\iint_B \log(1+x^2+y^2)dxdy$$

を計算せよ。

解説　積分領域が長方形でない場合は変数変換して長方形に直すとよいです。今回の問題のように円板の場合は多くの場合極座標変換します。

解答　極座標変換 $(x,y)=T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ をすると、まず xy 座標で B に対応する $r\theta$ 座標での領域は $E=[0,1]\times[0,2\pi]$ であり（つまり $T(E)=B$ が成り立っている）、ヤコビ行列式は

$$\det T'(r,\theta)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r.$$

ここで T は C^1 級変換で、E の境界を除いた部分 $(0,1)\times(0,2\pi)$ で単射かつ $\det T'(r,\theta)\neq 0$ なので、重積分の変数変換（講義ノート第 10 回ページ 4）より

$$\begin{aligned}\iint_B \log(1+x^2+y^2)dxdy &= \iint_E \log(1+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)|r|drd\theta=\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r\log(1+r^2)drd\theta\\ &=\int_0^1\left\{\int_0^{2\pi} r\log(1+r^2)d\theta\right\}dr=2\pi\int_0^1 r\log(1+r^2)dr.\end{aligned}$$

ここで、$t=r^2$ と変数変換すると、r が 0 から 1 を動くとき t は 0 から 1 を動き、$\frac{dt}{dr}=2r$ より、

$$2\pi\int_0^1 r\log(1+r^2)dr=\pi\int_0^1\log(1+t)dt.$$

部分積分により

$$\int\log(1+t)dt=\int(1+t)'\log(1+t)dt=(1+t)\log(1+t)-\int dt=(1+t)\log(1+t)-t+C$$

なので、

$$\iint_B \log(1+x^2+y^2)dxdy=\pi\int_0^1\log(1+t)dt=\pi\left[(1+t)\log(1+t)-t\right]_0^1=\pi(2\log 2-1).$$

よって答えは $\pi(2\log 2-1)$。