2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 5 回（2022 年 12 月 13 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

半径 1 の円の内部 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で関数

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

は全微分可能であることを示し、そのグラフ $z = f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ $((a,b) \in D)$ での接平面の方程式を求めよ。

与えられた曲面は xyz 空間の原点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球面の一部です。全微分可能は直接確かめるよりもより強い条件である C^1 級の方が示しやすいことが多いです。

解答　偏導関数を計算すると、

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

これらは D 上の連続関数なので f は C^1 級であり特に全微分可能である。ここで $\varphi(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ の (a,b,c) での接平面の方程式は教科書第 6 章 175 ページより

$$\varphi_x(a,b,c)(x-a) + \varphi_y(a,b,c)(y-b) + \varphi_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

なので、$c = f(a,b) = \sqrt{1-a^2-b^2}$ に注意して計算すると

$$z = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}(x-a) + \frac{-b}{\sqrt{1-a^2-b^2}}(y-b) + \sqrt{1-a^2-b^2}. \tag{1}$$

よって

$$z = \frac{1-ax-by}{\sqrt{1-a^2-b^2}}.$$

注意　教科書第 6 章問 26 の知識を使えば直ちに z について解かれた式が得られます。

注意　$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ は整理すれば、$x^2+y^2+z^2 = 1$ なのでここからも同じ接平面の方程式を得ることができます。

問題 $\boxed{2}$

曲線

$$F(x,y) = x^2 - xy^2 + 2y = 0$$

の $(x,y) = (-1,-1)$ 以外の点での陰関数 $y = y(x)$ の極大・極小を求めよ。

解答　偏導関数を計算すると

$$F_x(x,y) = 2x - y^2, \quad F_y(x,y) = -2xy + 2.$$

よって、$F_y(x,y) \neq 0$ つまり $xy \neq 1$ の点の近くでは陰関数定理（教科書第 6 章定理 11）により $F(x,y) = 0$ は $y = y(x)$ と解くことができ、

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = \frac{2x-y^2}{2xy-2}.$$

ここで $y = y(x)$ が極大・極小となる点では $y' = 0$ である必要があるので、$2x - y^2 = 0$. これを曲線の方程式 $x^2 - xy^2 + 2y = 0$ と連立させて解くと、x を消去して $y^4 = 8y$ を得るので、$y = 0, 2$ つまり $(x,y) = (0,0), (2,2)$ である。極大・極小を判定するために y の 2 階微分を計算すると、y は x の関数であることに注意して、

$$y'' = \frac{(2-2yy')(2xy-2) - (2x-y^2)(2y+2xy')}{(2xy-2)^2}. \tag{2}$$

点 $(x,y) = (0,0)$ において $y' = 0$ より $y'' = \frac{2\cdot(-2)-0}{(-2)^2} = -1 < 0$. よって極大である。点 $(x,y) = (2,2)$ において $y' = 0$ より $y'' = \frac{2\cdot(8-2)}{(8-2)^2} = \frac{1}{3} > 0$. よって極小である。

また、$xy = 1$ の点は $x^2 - xy^2 + 2y = 0$ と連立させて解くと $(x,y) = (-1,-1)$ より問題文で除外されている点である。以上より、$x^2 - xy^2 + 2y = 0$ の $(x,y) = (0,0)$ の近くでの陰関数 $y = y(x)$ は $x = 0$ で極大値 0 を取り、$(x,y) = (2,2)$ の近くでの陰関数 $y = y(x)$ は $x = 2$ で極小値 2 を取る。

注意　除外された点 $(x,y) = (-1,-1)$ は陰関数定理が適用できない点ですが、x について解いたときに極小となっており、y については（一価の）関数として解けません。