2022年度京都大学微分積分学(演義)B(中安淳担当)第1回(2022年10月11日)問題と宿題(2022年10月18日締め切り)

学籍番号： 氏名： 評価：

問題 $\boxed{1}$

次の級数は収束することを示せ。ただし、k, a, x は n によらない数であり、k は 0 以上の整数、a は 1 より大きい実数、x は実数とする。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

2022年度京都大学微分積分学(演義)B(中安淳担当)第1回(2022年10月11日)問題と宿題(2022年10月18日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

問題$\boxed{2}$

区間 $[1,\infty)$ 上の正値関数 f が単調減少のとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ と広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ の収束・発散は一致する（教科書第4章定理8)。この事実を使って、級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$$

は収束するか発散するか答えよ。

2022 年度京都大学微分積分学(演義)B(中安淳担当)第 1 回(2022 年 10 月 11 日)問題と宿題(2022 年 10 月 18 日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{3}$

数列 $\{a_n\}$ は各項 a_n が非零であるとする。このとき、2 つの級数 $\sum a_n$ と $\sum a_n^{-1}$ のうち片方は発散することを示せ。

2022年度京都大学微分積分学(演義)B(中安淳担当)第1回(2022年10月11日)問題と宿題(2022年10月18日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題$\boxed{4}$

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+1} = \frac{e^{a_n} - 1}{e - 1}, \quad a_1 = a, \quad 0 < a < 1$$

で定義する。ただし、e は自然対数の底である。このとき、各項 a_n は正であることが知られている。

(1) 一般に任意の $0 < x < 1$ に対して不等式 $e^x < 1 + (e-1)x$ が成り立つことを示せ。

(2) $n \to \infty$ で $a_n \to 0$ であることを示せ。

(3) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するか発散するか答えよ。