2019 年度応用数理 D 第 9 回レポート問題（12 月 18 日出題）

■締め切り　2020 年 1 月 8 日 16:30

■提出先　J 棟 6 階 J613 数理事務室のレポートボックス

■注意　レポートには A4 サイズの用紙を使用し、先頭に「2019 年度応用数理 D 第 9 回レポート」と書き、続けて学籍番号と氏名を明記すること。また、複数枚の用紙を使用する場合はホッチキス等でまとめること。

問題 1

正方形領域 $(0,1)\times(0,1)$ 上でラプラス方程式

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

を境界条件

$$u(0,y)=0,\quad u(1,y)=1-3y^2,\quad (0\le y\le 1),$$
$$u(x,0)=x^3,\quad u(x,1)=x^3-3x,\quad (0\le x\le 1),$$

のもとで考える。ステップ幅は $h=1/3$ とした場合の差分方程式について以下の問いに答えよ。ただし、$x=x_i=ih$, $y=y_j=jh$ における近似解の値を $u_{i,j}$ と表す。

(1) 上の境界条件のもとで $(u_{i,j})_{i,j=1,2}=(u_{1,1},u_{1,2},u_{2,1},u_{2,2})$ に関する連立方程式を求めよ。

(2) 初期値 $u_{i,j}^{(0)}=0$ から始めてガウス・ザイデル法により近似解の列 $(u_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,2}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ を構成する。$n=1$ から $n=5$ までの近似解の値をすべて答えよ。

(3) 各 $n=1,2,3,4,5$ に対して $(u_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,2}$ と厳密解 $u(x,y)=x^3-3y^2x$ との誤差を求めよ。ただし、ここでの誤差は $\epsilon^{(n)}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}|u(x_i,y_j)-u_{i,j}^{(n)}|$ とする。

問題は以上である。