2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 5 回（2021 年 6 月 16 日）問題解答例

問題 1

6 つの実数の未知数 a, b, c, d, e, f に関する次の連立一次方程式のすべての解を求めよ。

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ a+c+e=0, \\ b+d+f=0, \\ d+e+f=0. \end{cases}$$

解答　係数行列は次になり、行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第 2 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行を -1 倍して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行と第 3 行から第 2 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第 4 行から第 3 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これにより与えられた方程式は次と同値である。

$$a=-c-e, \quad b=e, \quad d=-e-f.$$

よって解は $(a,b,c,d,e,f)=(-s-t,t,s,-t-u,t,u)$ $(s,t,u\in\mathbb{R})$。

注意　解の表示は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s,t,u\in\mathbb{R})$$

などとしても正解です。

問題 2

a を実数として、次の 4 次正方行列の階数（a に依存する）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

解答　与えられた行列の第 1 行から第 3 行を引き第 2 行から第 4 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

ここで $a = 0$ の場合、この行列は次になるので階数は 2 である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

以下では $a \neq 0$ の場合を考える。第 1 行と第 2 行を a で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 1 行を引き第 3 行から第 2 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

第 3 行を 2 で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行の a 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \frac{1}{2}a^2 \end{pmatrix}.$$

したがって、$2 - \frac{1}{2}a^2 = 0$ の時つまり $a = \pm 2$ の時階数は 3 で、そうでない場合階数は 4 である。

以上より求める階数は、$a = 0$ の時 2 で、$a = \pm 2$ の時 3 で、いずれでもない場合は 4 である。