

2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

第 1 回宿題解答例

中安淳

2023 年 4 月 14 日

宿題 5

「任意の複素数 z, w に対して、 $z^2 + w^2 = 0$ ならば $z = w = 0$ 」という命題は正しいか正しくないか理由をつけて答えよ。

実数でなく複素数であることに注意してください。

解答 この命題は正しくないことを示すために、反例を作る。
 $z = 1, w = i$ とおくと、 $z^2 + w^2 = 1 - 1 = 0$ であるが、 $z = w = 0$ ではない。よって、命題は正しくない。

注意

- 複素数のところが実数だったら命題は正しいです。
- または、 $z^2 + w^2 = 0$ の部分を複素共役を使って $\bar{z}z + \bar{w}w = 0$ ならばに置き換えると命題は正しいです。
- この問題は複素数での内積は複素共役を使う必要があることを背景に作りました。

宿題 6

X は 0 以上 100 以下の実数を、 Y は 0 以上 30 以下の実数をそれぞれ動くとして次の問いに答えよ。

(1) 次の二つの集合を XY 平面に図示せよ。

$$\text{講} = \{(X, Y) \mid \frac{7}{10}X + Y \leq X\},$$

$$\text{演} = \{(X, Y) \mid \frac{7}{10}X + Y \geq X\}.$$

(2) 次の集合を XY 平面に図示せよ。

$$\text{合} = \{(X, Y) \mid \max\{\frac{7}{10}X + Y, X\} \geq 60\}.$$

ただし、実数 a, b に対して $\max\{a, b\}$ で a と b の大きい方を表す。

と内部である（図は省略）。

(2) 場合分けすることにより

$$\text{合} = \{(X, Y) \in \text{講} \mid X \geq 60\} \cup \{(X, Y) \in \text{演} \mid \frac{7}{10}X + Y \geq 60\}.$$

ここで、 $\{(X, Y) \in \text{講} \mid X = 60\}$ は $(60, 0)$ と $(60, 18)$ を結ぶ線分で、 $\{(X, Y) \in \text{演} \mid \frac{7}{10}X + Y = 60\}$ は $(60, 18)$ と $(\frac{300}{7}, 30)$ を結ぶ線分なので、合は $(60, 0)$ と $(60, 18)$ と $(\frac{300}{7}, 30)$ と $(100, 30)$ と $(100, 0)$ を結んで得られる五角形の周と内部である（図は省略）。

解答

- (1) $\frac{7}{10}X + Y = X$ を考えると、 $Y = \frac{3}{10}X$ より、これは $(0, 0)$ と $(100, 30)$ を結ぶ線分である。よって 講 は $(0, 0)$ と $(100, 0)$ と $(100, 30)$ を結んで得られる三角形の周と内部で、演 は $(0, 0)$ と $(0, 30)$ と $(100, 30)$ を結んで得られる三角形の周