2019 年度応用数理 D 第 7 回レポート解答例

中安淳

2019 年 11 月 25 日

問題 1

熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 \le x \le 1, t \ge 0), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & (t \ge 0), \\ u(x,0) = f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$$

を考える。ただし、初期値 $f(x)$ は

$$f(x) = 2x(1-x) \quad (0 \le x \le 1)$$

とする。

N を 1 以上の整数とし、格子幅を $h = 1/N$ とおく。時間ステップ幅を $k > 0$ とする。$x = x_n = nh$ $(0 \le n \le N)$, $t = t_m = mk$ $(m \ge 0)$ における解 $u(x,t)$ の近似値を $u_{n,m}$ と書く。このとき陽的差分法によると、$u_{n,m}$ は $r = k/h^2$ として、

$$\begin{cases} u_{n,m+1} = ru_{n-1,m} + (1-2r)u_{n,m} + ru_{n+1,m} & (1 \le n \le N-1, m \ge 0), \\ u_{0,m+1} = u_{N,m+1} = 0 & (m \ge 0) \end{cases}$$

で与えられる。

ここでは、$h = 0.25$ $(N = 4)$, $k = 0.03$ として、r の値を求めよ。さらに $u_{n,m}$ を $m = 3$ まで計算し、計算結果 $(u_{n,3})_{0 \le n \le N}$ を求めよ。計算結果は小数点以下 6 桁に丸めて答えること。

問題 1 の解答

まず、$r = k/h^2 = kN^2 = 0.03 \times 4^2 = 0.48$ である。

よって、陽的差分法の計算式は

$$\begin{cases} u_{n,m+1} = 0.48u_{n-1,m} + 0.04u_{n,m} + 0.48u_{n+1,m} & (1 \leq n \leq 3, m \geq 0), \\ u_{0,m+1} = u_{N,m+1} = 0 & (m \geq 0) \end{cases}$$

であり、初期値は

$$\begin{aligned} u_{0,0} &= f(0) = 0, \\ u_{1,0} &= f(0.25) = 0.375, \\ u_{2,0} &= f(0.50) = 0.5, \\ u_{3,0} &= f(0.75) = 0.375, \\ u_{4,0} &= f(1) = 0, \end{aligned}$$

なので、順番に計算して、

$$u_{0,1} = 0, \quad u_{1,1} = 0.255, \quad u_{2,1} = 0.38, \quad u_{3,1} = 0.255, \quad u_{4,1} = 0,$$

$$u_{0,2} = 0, \quad u_{1,2} = 0.1926, \quad u_{2,2} = 0.26, \quad u_{3,2} = 0.1926, \quad u_{4,2} = 0,$$

$$u_{0,3} = 0, \quad u_{1,3} = 0.132504, \quad u_{2,3} = 0.195296, \quad u_{3,3} = 0.132504, \quad u_{4,3} = 0.$$

従って求める値は

$$(u_{n,3})_{0 \leq n \leq N} = (0.000000, 0.132504, 0.195296, 0.132504, 0.000000)$$

である。

問題 1 の別解

以下のプログラムを実行する。

```
# u_t = u_{xx} in [0, 1], u(0, t) = u(1, t) = 0, u(x, 0) = 2 x(1-x)
# h = 0.25, k = 0.03

import numpy as np

N = 4
h = 1/N
k = 0.03
M = 3
```

```
r = k/h**2
u = np.zeros((N+1, M+1))
# 初期値の設定
for n in range(N+1):
  x = h*n
  u[n, 0] = 2*x*(1-x)
# 解の計算
for m in range(M):
  u[0, m+1] = 0
  for n in range(1, N):
    u[n, m+1] = r*u[n-1, m]+(1-2*r)*u[n, m]+r*u[n+1, m]
  u[N, m+1] = 0
# 解の出力
for n in range(N+1):
  print(u[n, M])
```

出力は以下になる。

```
0.0
0.132504
0.19529600000000003
0.132504
0.0
```

よって、

$$(u_{n,3})_{0\le n\le N} = (0.000000, 0.132504, 0.195296, 0.132504, 0.000000)$$

を得る。