2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2021 年 10 月 27 日）問題

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　評価：

問題 1

整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n$$

を計算せよ。次の整級数の公式を用いてよい。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

なお、これら 4 つの整級数の収束半径はいずれも 1 である。

2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2021 年 10 月 27 日）問題

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

問題 2

ネイピア数 e を底とする指数関数 e^x は次の整級数による表示（テーラー展開・マクローリン展開）が知られている。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots .$$

ここではこの整級数を e^x の定義として、以下のことを証明せよ。

(1) 収束半径は ∞ である。

(2) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $e^0 = 1$.

(3) 任意の x に対して、$e^x e^{-x} = 1$。

(4) 任意の実数 x に対して、$e^x > 0$。

(5) 任意の x, y に対して、指数法則 $e^{x+y} = e^x e^y$ が成り立つ。