2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 6 回（2022 年 7 月 6 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して、

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$$

とおく。

(1) 数列 (I_n) は漸化式 $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$ $(n \geq 2)$ を満たすことを示せ。

(2) 数列 (I_n) は単調減少であることを示せ。

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

解答

(1) $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = (\tan x)' - 1$ より、$n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)'(\tan x)^{n-2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n-2} dx \\ &= \left[\frac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n-2} dx \\ &= \frac{1}{n-1} - I_{n-2}. \end{aligned}$$

よって、ほしかった漸化式は成り立つ。

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において、$0 \leq \tan x \leq 1$ より、$(\tan x)^{n+1} \leq (\tan x)^n$ であるため $I_{n+1} \leq I_n$ である。よって数列 (I_n) は単調減少である。

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において、$0 \leq (\tan x)^n$ より $I_n \geq 0$ である。したがって (2) と合わせて数列 (I_n) は収束し、極限を α とおくと (1) の漸化式を $n \to \infty$ とすると

$$\alpha = -\alpha$$

つまり $\alpha = 0$ がわかる。よって答えは $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$。

宿題 $\boxed{4}$

次の不定積分を計算せよ。

$$\int \frac{x}{(x^3-1)(x^3+1)}dx.$$

解説　このまま被積分関数を部分分数分解しても答えが出ますが6次式の部分分数分解となり大変です。この問題では $y=x^2$ という置換ができます。

解答　まず、$\frac{x}{(x^3-1)(x^3+1)}=\frac{x}{x^6-1}$ より、$y=x^2$ という置換をすると $\frac{dy}{dx}=2x$ より

$$\int \frac{x}{(x^3-1)(x^3+1)}dx=\int \frac{x}{x^6-1}dx=\int \frac{\frac{1}{2}}{y^3-1}dy$$

ここで $y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$ より、

$$\frac{\frac{1}{2}}{y^3-1}=\frac{A}{y-1}+\frac{B(2y+1)}{y^2+y+1}+\frac{C}{y^2+y+1}$$

と部分分数分解されたとすると $A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{12}, C=-\frac{1}{4}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^3-1)(x^3+1)}dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{y-1}-\frac{\frac{1}{12}(2y+1)}{y^2+y+1}-\frac{\frac{1}{4}}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)dy \\ &= \frac{1}{6}\log|y-1|-\frac{1}{12}\log(y^2+y+1)-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}\arctan\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C \\ &= \frac{1}{6}\log|x^2-1|-\frac{1}{12}\log(x^4+x^2+1)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right)+C\end{aligned}$$

である。

注意　置換積分せずに $\frac{x}{(x^3-1)(x^3+1)}$ をそのまま部分分数分解したら答えは次のようになるはずです。

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^3-1)(x^3+1)}dx =& \frac{1}{6}\log|x-1|-\frac{1}{12}\log(x^2+x+1)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \\ &+\frac{1}{6}\log|x+1|-\frac{1}{12}\log(x^2-x+1)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.\end{aligned}$$

一見すると解答例と異なるようですが、log をまとめて、arctan の加法定理と逆数の公式

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),\quad \arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x\quad(x>0)$$

を使えば同じものであることがわかります。