2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2021 年 4 月 28 日）問題解答例

問題 1

次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解説　定義に従って計算します。行列の和は成分ごと、積は横かける縦と覚えましょう。和は交換則が成り立つのに対し、積は交換則が一般には成り立たないのがポイントです。

解答

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$.

問題 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ と可換な、つまり $AB = BA$ を満たす 2 次実正方行列 B を全て求めよ。また、どの B も適当な実数 p, q を用いて、$B = pA + qE$ と表せることを示せ。ここで E は単位行列である。

解答　$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、

$$AB = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} a+3b & -a+5d \\ c+3d & -c+5d \end{pmatrix}$$

より

$$a-c = a+3b, \quad b-d = -a+5d, \quad 3a+5c = c+3d, \quad 3b+5d = -c+5d. \tag{1}$$

ここで、1 つめの式と 4 つめの式は $c = -3b$ と同値である。これを 3 つめの式に代入することにより、2 つめの式と 3 つめの式は $d = a-4b$ と同値である。よって、(1) は $c = -3b, d = a-4b$ と同値なので、

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a-4b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

さらに $pA + qE = \begin{pmatrix} p+q & -p \\ 3p & 5p+q \end{pmatrix}$ が B と等しい条件は

$$p+q = a, \quad -p = b, \quad 3p = -3b, \quad 5p+q = a-4b$$

で解くと $p = -b, q = a+b$。よって、$B = -bA + (a+b)E$ と表される。