2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 3 回宿題解答例

中安淳

2023 年 5 月 19 日

宿題 13

a, b を $(a,b) \neq (0,0)$ を満たす実数として、平面上の原点を通る直線 $\ell : ax + by = 0$ を考える。平面上の点 (x,y) から ℓ へ引いた垂線と ℓ の交点を (s,t) とする時、(x,y) を (s,t) に対応させる写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像であることを示し、f を表現する行列 A を求めよ。

解答　(s,t) を計算すると、ℓ 上の点なので

$$as + bt = 0.$$

また、(x,y) と (s,t) を通る直線がベクトル (a,b) と平行なので

$$b(x-s) = a(y-t).$$

以上より連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

を得てこれを解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ ay - bx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ay - bx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -aby + b^2x \\ a^2y - abx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって、f は線形写像でありそれを表現する行列は

$$A = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

注意　$\boldsymbol{a} = (a,b)$ とおくと、テンソル積 $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$ と内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2 + b^2$ を用いて、今回の行列 A は

$$A = I - \frac{\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

と表されます。高次元への一般化も容易で便利な公式です。

宿題 14

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 & -i \\ i & 2 & -i & -1 \\ 1 & -i & 0 & i \\ -i & -1 & i & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

解答　$X = I - A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \end{pmatrix}$ はべき零行列である。実際計算すると、

$$X^2 = O$$

がわかる。よって、第 5 回講義の最後の問にあるように $A = I - X$ は正則行列で、$A(I+X) = I - X^2 = I$ なので、$A^{-1} = I + X$ である。従って A の逆行列は $A^{-1} = I + X = \begin{pmatrix} 2 & -i & -1 & i \\ -i & 0 & i & 1 \\ -1 & i & 2 & -i \\ i & 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ である。

実際にはべき零行列 X を思いつくのは至難の業だと思います。そのような場合は n 次元のケーリー・ハミルトンの定理から逆行列は元の行列の高々 $n-1$ 次の多項式で表されるという事実があるので、A^2 などの計算から始めることが有効です。

別解　計算すると、

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2i & 2 & -2i \\ 2i & 3 & -2i & -2 \\ 2 & -2i & -1 & 2i \\ -2i & -2 & 2i & 3 \end{pmatrix} = 2A - I.$$

よって、$A(2I - A) = I$ なので、A は正則行列で逆行列は $A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & -i & -1 & i \\ -i & 0 & i & 1 \\ -1 & i & 2 & -i \\ i & 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ である。

それでも難しい場合は後に習う基本変形による逆行列の計算をするのが良いです。