

2023 年度京都大学微分積分学（演義）B

第 5 回問題解答例

中安淳

2023 年 11 月 28 日

問題 19

x, y が実数全体を動くとき、次の関数 $f(x, y)$ の極大・極小を答えよ。

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x + 4y - 1.$$

関数の極大・極小は、まず 1 階偏導関数が 0 になるという連立方程式を解き極大点・極小点の候補を見つけ、さらにその点での 2 階偏微分係数を調べるとだいたいのことがわかるのでした。

解答 $f(x, y)$ の一階偏導関数は

$$f_x(x, y) = 2x + 2y - 6, \quad f_y(x, y) = 2x + 4y + 4.$$

ここから (a, b) を極大・極小となる点とすると

$$f_x(a, b) = 2a + 2b - 6 = 0, \quad f_y(a, b) = 2a + 4b + 4 = 0$$

を満たす。この連立方程式を解いて、 $(a, b) = (8, -5)$ 。

$f(x, y)$ の二階偏導関数は

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 4.$$

よって、 $(a, b) = (8, -5)$ での二階の偏微分係数は

$$f_{xx}(a, b) = 2, \quad f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) = 2, \quad f_{yy}(a, b) = 4.$$

ここで教科書第 6 章 5 節定理 14 を使うことを考えると、

$$D = f_{xy}(a, b)^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -4 < 0$$

かつ $f_{xx}(a, b) = 2 > 0$ なので、 $(a, b) = (8, -5)$ は極小点である。

以上より $f(x, y)$ は $(x, y) = (8, -5)$ で極小となりその値は $f(8, -5) = -35$ で、極大はない。

問題 20

直角三角形で 3 辺の長さの和が一定の値 $l > 0$ であるもののうち面積が最大になるものが存在する（認めてよい）。その三角形を求めてその時の面積も答えよ。

答えは直角二等辺三角形の時だと予想はつきますが、どうやって示すのが重要です。

解答 直角をはさむ 2 辺の長さを x と y とおくと ($x > 0$, $y > 0$)、斜辺の長さは $\sqrt{x^2 + y^2}$ なので 3 辺の長さの和は $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ で三角形の面積は $\frac{1}{2}xy$ である。よってこの問題は $x > 0$, $y > 0$ が条件

$$\varphi(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} - l = 0$$

を満たしながら動くときの $f(x, y) = \frac{1}{2}xy$ の最大を求める問題に他ならない。

ここで $\varphi_x(x, y) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} > 1$, $\varphi_y(x, y) = 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} > 1$ より、 $\varphi(x, y) = 0$ の点はすべて正則点であることに注意する。よって、ラグランジュの未定乗数法（教科書第 6 章 5 節定理 15）より最大となる点で次が満たされる。

$$f_x(x, y) - \lambda \varphi_x(x, y) = \frac{1}{2}y - \lambda \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0,$$

$$f_y(x, y) - \lambda \varphi_y(x, y) = \frac{1}{2}x - \lambda \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

ここから $x = y$ になることを示す。第 1 式と第 2 式から λ を消去すると

$$\lambda = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{2(x + \sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{2(y + \sqrt{x^2 + y^2})}$$

よって、

$$y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}.$$

ここから $x = y$ または $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ を得るが、 $x > 0$, $y > 0$ なので後者はありえない。よって $x = y$ であり、 $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = l$ から $x = y = \frac{l}{2 + \sqrt{2}}$ を得る。

以上より面積が最大になるのは直角二等辺三角形の時で、その面積は

$$\frac{1}{2} \frac{l^2}{(2 + \sqrt{2})^2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} l^2$$

である。

根号の計算が面倒だと感じる場合は先にそれを払ってから計算しても同じ結果を得ることができます。

別解 条件 $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = l$, $x, y > 0$ を変形すると、 $x + y$ を移行して両辺を二乗することで

$$2xy - 2lx - 2ly + l^2 = 0, \quad x, y > 0, x + y < l$$

となる。

この左辺を $\varphi(x, y)$ とおくとラグランジュの未定乗数法より

$$f_x(x, y) - \lambda \varphi_x(x, y) = \frac{1}{2}y - \lambda(2y - 2l) = 0,$$

$$f_y(x, y) - \lambda \varphi_y(x, y) = \frac{1}{2}x - \lambda(2x - 2l) = 0.$$

ここで $l \neq 0$ より $\lambda \neq \frac{1}{4}$ で

$$x = y = \frac{4\lambda}{4\lambda - 1}l$$

となる。これを $\varphi(x, y) = 0$ に代入して

$$2x^2 - 4lx + l^2 = 0.$$

これを解くと $0 < x < \frac{l}{2}$ に注意して $x = y = \frac{2-\sqrt{2}}{2}l$ を得る。

以上より面積が最大になるのは直角二等辺三角形の時で、その面積は

$$\frac{1}{2} \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4} l^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} l^2$$

である。

注意 問題文では認めている最大の存在はいったん $x = 0$ または $y = 0$ の点つまり $(x, y) = (0, \frac{l}{2}), (\frac{l}{2}, 0)$ も考慮に入れると有界閉集合上の連続関数なので最大・最小の両方が存在して存在しそれらの点では最大を達成できない(最小になる)ことから示せます。