2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2022 年 10 月 19 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の正項級数は収束するか発散するか答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$.

ただし、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するが、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することは事実として使ってよいこととする。

解答

(1) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ とおくと、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \frac{(1+n^{-1})^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \quad (n \to \infty).$$

よってダランベールの判定法より、この正項級数は収束する。

(2) $a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$ とおくと、

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\log n} \to 0 < 1 \quad (n \to \infty).$$

よってコーシーの判定法より、この正項級数は収束する。

(3) 第 N 項までの部分和を計算して $N \to \infty$ とすると、

$$\sum_{n=1}^{N} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} (\log(n+1) - \log n) = \log(N+1) \to \infty.$$

よってこの正項級数は発散する。

(4) $n \geq 9$ で $\log n \geq \log 9 > \log_3 9 = 2$ より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}} = \sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^{\log n}} + \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}} \leq \sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^{\log n}} + \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

ここで問題文の注意書きにあるように $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するので比較判定法から問題の正項級数は収束する。

問題 $\boxed{2}$

べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n$$

を計算せよ。次のべき級数の公式を用いてよい。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x).$$

なお、これら 4 つのべき級数の収束半径はいずれも 1 である。

解答　計算するべき級数の係数を部分分数分解すると、

$$\frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} = n - \frac{2n}{(n+1)(n+2)} = n + \frac{2}{n+1} - \frac{4}{n+2}.$$

よって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{2}{n+1} - \frac{4}{n+2} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n.$$

ここで、第 1 項は問題文の 2 番目の公式より $\frac{x}{(1-x)^2}$ である。3 番目の公式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} = -\log(1-x) - x.$$

よって、(x が 0 でない場合は）それぞれ x, x^2 で割ることで、求めるべき級数の計算結果は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n = \begin{cases} \frac{x}{(1-x)^2} - 2\frac{\log(1-x)}{x} + 4\frac{\log(1-x)+x}{x^2} & 0 < |x| < 1 \text{ の時、} \\ 0 & x = 0 \text{ の時。} \end{cases}$$

注意　ちなみに 3 つの公式の導出は以下の通りです。1 つめは等比級数にほかならず、収束する条件は $|x| < 1$ です。2 つめは等比級数を項別微分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

で両辺に x をかけることで得られます。3 つめは等比級数を項別積分して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log(1-x)$$

です。