2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 6 回（2022 年 6 月 29 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

不定積分の式

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

を次の 3 つの方法で示せ。

(1) 右辺を微分することで示せ。
(2) 左辺で $\sqrt{x^2+1} = t - x$ とおくことで示せ。
(3) 左辺で $x = \sinh\theta$ とおくことで示せ。

解答

(1) 右辺を微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1}.\end{aligned}$$

よってほしかった式が示される。

(2) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ とおくと、$x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$, $\sqrt{x^2+1} = t - x = \frac{t^2+1}{2t}$ より、

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \int (\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t^{-1} + \frac{1}{4}t^{-3})dt = \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}\log t - \frac{1}{8}t^{-2}.$$

ここで $t = \sqrt{x^2+1}+x$, $t^{-1} = \sqrt{x^2+1}-x$ より、

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}).$$

(3) $x = \sinh\theta$ とおくと、$\frac{dx}{d\theta} = \cosh\theta$ で $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ と $\cosh^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2\theta$ に注意して、

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{\sinh^2\theta+1}\cosh\theta d\theta = \int \cosh^2\theta d\theta = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sinh 2\theta.$$

ここで $\theta = \sinh^{-1}x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ であることと、

$$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta = 2x\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2} = 2x\frac{(x+\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2+1}-x)}{2} = 2x\sqrt{x^2+1}$$

より、

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}).$$

問題 $\boxed{2}$

$n=0,1,2,3,\cdots$ に対して、

$$I_n=\int_1^e(\log x)^n dx$$

とおく。

(1) I_4 を計算せよ。
(2) 数列 $\{I_n\}$ は単調減少であることを示せ。
(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

解答

(1) $n=1,2,3,\cdots$ に対して、部分積分より

$$I_n=\int_1^e (x)'(\log x)^n dx=[x(\log x)^n]_1^e-\int_1^e nx(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}dx=e-nI_{n-1}.$$

ここで

$$I_0=\int_1^e dx=e-1$$

より、

$$I_1=e-1\cdot I_0=1,\quad I_2=e-2I_1=e-2,\quad I_3=e-3I_2=6-2e,\quad I_4=e-4I_3=9e-24.$$

よって答えは $I_4=9e-24$。

(2) $1\le x\le e$ において $0\le\log x\le 1$ より、$(\log x)^{n+1}\le(\log x)^n$ であるため $I_{n+1}\le I_n$ である。よって数列 $\{I_n\}$ は単調減少である。

(3) $1\le x\le e$ において $0\le(\log x)^n$ より $I_n\ge 0$ である。したがって (2) と合わせて数列 $\{I_n\}$ は収束し、極限を α とおくと (1) の漸化式を

$$\frac{I_n}{n}=\frac{e}{n}-I_{n-1}$$

と変形してから $n\to\infty$ とすると $\alpha=0$ がわかる。よって答えは $\lim_{n\to\infty} I_n=0$。