2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2021 年 4 月 28 日）宿題解答例

宿題 1

次の行列の積を行列のブロック分割（長方形分割）を使って計算せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、求めたい積は次のように計算できる。

$$\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & E \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC+EO & AE+ED \\ OC+BO & OE+BD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & A+D \\ O & BD \end{pmatrix}.$$

ここで、

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 1-4 \\ -1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A+D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+20 & 1+10 \\ 0+4 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

なので、答えは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

宿題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の n 乗 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

解答 $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$

解説 計算すれば

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

なので、上記の通り答えの予想ができ数学的帰納法で予想が正しいことを証明できる。実際、$n = 1$ の時は成立していて、$n = k$ で成立つまり $A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ と仮定する時、

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となるので $n = k+1$ でも成立する。よって解答を得る。

別解としては、$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$A = aE + X$ で $X^2 = O$ なので、二項定理から

$$A^n = (aE+X)^n = a^n E + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} X = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

を得る。