宿題 $\boxed{3}$

$f(x,y)$ を $C^2$ 級関数として、2 変数関数 $z=f(x,y)$ を考える。ここで極座標変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ をしたとき、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを示せ。
ヒント：右辺を計算する。

$\theta$ で二回目の微分をする際に $\theta$ がいろいろなところにあることを忘れないようにしましょう。

**解答**　$z=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ なので合成関数の微分より、

$$\frac{\partial z}{\partial r}=f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta+f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos^2\theta+2f_{xy}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\sin\theta+f_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^2\theta.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=-f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta+f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=f_{xx}r^2\sin^2\theta-f_{xy}r^2\cos\theta\sin\theta-f_xr\cos\theta-f_{yx}r^2\cos\theta\sin\theta+f_{yy}r^2\cos^2\theta-f_yr\sin\theta.$$

示すべき式の右辺を計算すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\\
&=(f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta)+\frac{1}{r}(f_x\cos\theta+f_y\sin\theta)\\
&\quad+\frac{1}{r^2}(f_{xx}r^2\sin^2\theta-2f_{xy}r^2\cos\theta\sin\theta-f_xr\cos\theta+f_{yy}r^2\cos^2\theta-f_yr\sin\theta)\\
&=f_{xx}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+f_{yy}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\
&=f_{xx}+f_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

したがってほしかった式が示された。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 4 回（2022 年 11 月 16 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{4}$

三角形に対して 3 角を $x, y, z$ とおいたときの次の値 $w$ を考える。

$$w = \cos x + \cos y + \cos z.$$

鋭角三角形の中で $w$ の極大・極小を調べよ。

**解答**　$x, y, z$ は三角形の角をなすので、$z = \pi - x - y$ であり、$w = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$ となる。さらに鋭角三角形をなすので、$0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < \pi - x - y < \frac{\pi}{2}$ である。したがってこの問題は開集合 $A = \{(x, y) \in (0, \frac{\pi}{2})^2 \mid x + y > \frac{\pi}{2}\}$ で関数

$$f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$$

の極大・極小を求めるということとなる。

$f(x, y)$ の 1 階偏導関数は

$$f_x(x, y) = -\sin x + \sin(x+y), \quad f_y(x, y) = -\sin y + \sin(x+y).$$

ここから $(a, b) \in (0, \frac{\pi}{2})^2$ を極大・極小となる点とすると

$$f_x(a, b) = -\sin a + \sin(a+b) = 0, \quad f_y(a, b) = -\sin b + \sin(a+b) = 0 \tag{1}$$

を満たす。ここから $\sin a = \sin b = \sin(a+b)$ であり、$0 < a, b < \frac{\pi}{2}$ なので、$a = b$。よって、$\sin a = \sin 2a = 2\sin a \cos a$ であり、やはり $0 < a < \frac{\pi}{2}$ なので $\sin a \neq 0$ で、$\cos a = \frac{1}{2}$ つまり $a = \frac{\pi}{3}$。以上より極大・極小となる点の候補は $(a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ のみである。また、この点は $A$ の点である。

$f(x, y)$ の 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x, y) = -\cos x + \cos(x+y), \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \cos(x+y), \quad f_{yy}(x, y) = -\cos y + \cos(x+y).$$

よって、$(a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ でのヘッセ行列は

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式の値は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$ で、1, 1 成分 $f_{xx}(a, b) = -1$ は負なので、$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ は極大点である。

以上より $f(x, y)$ は $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ で極大となりその値は $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$ で、極小はない。元の問題に戻ると $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ で極大値 $\frac{3}{2}$ を取り、極小はない。

**注意**　方程式 (1) は三角関数の和積公式を使って、

$$-\sin a + \sin(a+b) = 2\cos\left(a + \frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2} = 0, \quad -\sin b + \sin(a+b) = 2\cos\left(b + \frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2} = 0$$

と変形することでも解くことができます。