

2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

第 4 回問題解答例

中安淳

2023 年 6 月 2 日

問題 15

\vec{u}, \vec{v} を \mathbb{R}^n の 1 次独立なベクトルとする時、 $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ も 1 次独立であることを示せ。

1 次独立の定義に従って解答を作成すると連立一次方程式の問題になります。

解答 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を使って、

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$$

となったとして、 $\alpha = \beta = 0$ を示す。

$$(\alpha + \beta)\vec{u} + (\alpha - \beta)\vec{v} = \vec{0}$$

なので、 \vec{u}, \vec{v} が 1 次独立であることから、

$$\alpha + \beta = \alpha - \beta = 0$$

である。これを解くと $\alpha = \beta = 0$ なので、 $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ は 1 次独立である。

問題 16

次の行列に行に関する基本変形をして階段行列にせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

解答 第 2 行から第 1 行の 5 倍を引き、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 1 行の 9 倍を引き、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}.$$

第 2 行を -4 で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行の 2 倍を引き、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}.$$

第 3 行に第 2 行の 8 倍を足し、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これが与えられた行列に対する階段行列である。