# 2019年度応用数理D第5回レポート解答例

中安淳

2019年11月12日

## 問題1

$A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 実対称行列とする $(n \geq 3)$。ベクトル $v = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)^T$ を

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \\ v_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|a_{12}|}{S}\right)}, \\ v_j &= \frac{a_{1j} \operatorname{sgn} a_{12}}{2v_2 S} \quad (j = 3, \cdots, n), \\ S &= \sqrt{a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2} \end{aligned}$$

により定めるとき、以下の問題に答えよ。ただし、$I$ は $n$ 次単位行列を、$A^T$ は $A$ の転置を表すものとする。

(1) ベクトル $v$ は $|v| = 1$ を満たすことを示せ。ただし、$|v| = \sqrt{v^T v}$ である。

(2) $P = I - 2vv^T$ で直交かつ対称な行列 $P$ を定めるとき、$P^{-1}AP = PAP$ の第 $1, 3$ 成分 $(PAP)_{13}$ は $0$ であることを示せ。

## 問題 1 の解答

(1) $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$ を計算すると、

$$
\begin{aligned}
|v|^2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|a_{12}|}{S}\right) + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}^2}{4v_2^2 S^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|a_{12}|}{S}\right) + \frac{S^2 - a_{12}^2}{2\left(1 + \frac{|a_{12}|}{S}\right) S^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{S + |a_{12}|}{S} + \frac{1}{2}\frac{S^2 - a_{12}^2}{(S + |a_{12}|)\, S} = \frac{1}{2}\frac{S + |a_{12}|}{S} + \frac{1}{2}\frac{S - |a_{12}|}{S} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

よって、$|v| = 1$。

(2)

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - 2v_2^2 & \cdots & -2v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -2v_n v_2 & \cdots & 1 - 2v_n^2 \end{pmatrix}
$$

であり、$(PAP$ の 1 行目$) = (PA$ の 1 行目$)P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} P$ より、

$$
\begin{aligned}
(PAP)_{13} &= -2a_{12}v_2v_3 + a_{13}(1 - 2v_3^2) - 2a_{14}v_4v_3 - \cdots - 2a_{1n}v_nv_3 \\
&= a_{13} - 2a_{12}v_2v_3 - 2v_3 \sum_{j=3}^{n} a_{1j}v_j \\
&= a_{13} - 2a_{12}v_2v_3 - 2v_3 \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}^2 \operatorname{sgn} a_{12}}{2v_2 S} \\
&= a_{13} - 2a_{12}v_2v_3 - 2 \operatorname{sgn} a_{12} v_3 \frac{S^2 - a_{12}^2}{2v_2 S} \\
&= a_{13} - 2\frac{\operatorname{sgn} a_{12} v_3}{2v_2 S}(2|a_{12}|v_2^2 S + (S^2 - a_{12}^2)) \\
&= a_{13} - \frac{a_{13}}{2v_2^2 S^2}(2|a_{12}|v_2^2 S + S^2 - a_{12}^2).
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
2v_2^2 S^2 = \left(1 + \frac{|a_{12}|}{S}\right) S^2 = (S + |a_{12}|)S,
$$

$$
\begin{aligned}
2|a_{12}|v_2^2 S + S^2 - a_{12}^2 &= |a_{12}|\left(1 + \frac{|a_{12}|}{S}\right) S + S^2 - a_{12}^2 \\
&= |a_{12}|(S + |a_{12}|) + S^2 - a_{12}^2 = (|a_{12}| + S)S
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
(PAP)_{13} &= a_{13} - \frac{a_{13}}{(S+|a_{12}|)S}(|a_{12}|+S)S \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

## 問題 2

次の実対称行列をハウスホルダ法により 3 重対角行列に変形せよ.

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

## 問題 2 の解答

$S = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ であり、

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 0, \\
v_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
v_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

よって、

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2v_2^2 & -2v_2v_3 \\ 0 & -2v_3v_2 & 1-2v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

これにより、求める 3 重対角行列は

$$
PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

である。