

問題 1

次の集合を簡単な形にせよ。

- (1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$.
- (2) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 < 0\}$.
- (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 + x + 1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\}$.

ただし、円周率 π は $3 < \pi < 4$ を満たすことを認めてよい。

基本的には方程式、不等式の問題ですが、集合の記号で書いています。

解答

- (1) 二次方程式 $x^2 - 7x + 10 = 0$ を解くと、 $(x-2)(x-5) = 0$ と同値なので、解は $x = 2, 5$ 。よって、

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2, 5\} = \{2, 5\}.$$

- (2) 方程式 $\sin x = 0$ の実数解は n を整数として $x = \pi n$ なので、 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}$ 。また、二次不等式を解いて、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ である。ここで、 $0 < 2 < 3 < \pi < 4 < 5 < 2\pi$ であるから、求める答えは

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 < 0\} = \{\pi\}.$$

- (3) 三次方程式 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ を解くと $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$ より、解は $x = -1, \pm\sqrt{-1}$ 。このうち実数なのは -1 だけなので、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 + x + 1 = 0\} = \{-1\}$ 。ここで、 $-\pi < -3 < -1 < 0$ より $\sin(-1) < 0$ なので、 $-1 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\}$ である。よって答えは

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x^2 + x + 1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\} = \emptyset. \quad (\emptyset \text{ は空集合})$$

注意 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\}$ は不等式を解くと、

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \pi\}$$

とでき、しばしば $\{x \in \mathbb{R} \mid 2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \pi \quad (n \in \mathbb{Z})\}$ と略記されます。また、

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R} \mid 2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \pi\}$$

と表すこともできます。

問題 2

- (1) 「すべてのカラスは黒い」という命題の否定として最も適切なものを選び。
 - (i) すべてのカラスが白い。
 - (ii) 白いカラスがいる。
 - (iii) すべてのカラスが黒くない。
 - (iv) 黒くないカラスがいる。
- (2) 実数 x, y に対して「 $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = y = 0$ 」という命題を考える。この命題の対偶と真偽を答えよ。

解説 命題の否定を取ると、「任意の」と「存在する」、「ならば」の前後、「かつ」と「または」などが入れ替わるのでした。「黒い」の否定は「白い」ではなく「黒くはない」です。

解答

- (1) (iv) 黒くないカラスがいる。
- (2) 対偶は「 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ ならば $x^2 + y^2 \neq 0$ 」で、 $x \neq 0$ の時 $x^2 + y^2 \geq x^2 > 0$ で $y \neq 0$ の時 $x^2 + y^2 \geq y^2 > 0$ なので、対偶は真より、元の命題も真偽は「真」である。