2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第2回宿題解答例

中安淳

2023年4月28日

宿題 $\boxed{9}$

θ を実数とする。平面上の点を、x 軸を原点中心に θ 回転して得られる直線について折り返す（鏡映）変換を考える。これはまず原点中心に $-\theta$ 回転して、x 軸について折り返し、原点中心に θ 回転させることで同じものが得られるので、この変換を表す行列は次で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

この行列を計算せよ。

解答　行列の積を順番に計算すると、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって答えは $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ である。

宿題 $\boxed{10}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ の n 乗 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ つまり n 個の A の積 A^n を求めよ。

解答　計算すると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で A^3 は単位行列 E である。したがって n が 3 で割って 1 余る数 $n = 3k + 1$ の時は

$$A^n = (A^3)^k A = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

n が 3 で割って 2 余る数 $n = 3k + 2$ の時は

$$A^n = (A^3)^k A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

n が 3 の倍数 $n = 3k$ の時は

$$A^n = (A^3)^k = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。