2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第5回宿題解答例

中安淳

2023年6月6日

宿題 $\boxed{21}$

3次正方行列 A, B が

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$$

を満たす時、

$$A^2-B^2$$

を求めよ。

与えられた式を

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}30&24&18\\84&69&54\\138&114&90\end{pmatrix}$$

とするのは誤りです。行列の積は交換法則が成り立たないので、$(A+B)(A-B)=A^2-B^2-AB+BA$ となってしまうことに注意が必要です。

解答　まず、A, B を計算すると

$$A=\frac{1}{2}((A+B)+(A-B))=\begin{pmatrix}5&5&5\\5&5&5\\5&5&5\end{pmatrix},$$

$$B=(A+B)-A=\begin{pmatrix}-4&-3&-2\\-1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}.$$

よって、

$$\begin{aligned}A^2-B^2&=\begin{pmatrix}5&5&5\\5&5&5\\5&5&5\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}-4&-3&-2\\-1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}^2\\&=\begin{pmatrix}75&75&75\\75&75&75\\75&75&75\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15&6&-3\\6&6&6\\-3&6&15\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}60&69&78\\69&69&69\\78&69&60\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって答えは $\begin{pmatrix}60&69&78\\69&69&69\\78&69&60\end{pmatrix}$ である。

宿題 $\boxed{22}$

正方行列 N がある $n=1,2,3,\cdots$ で $N^n=O$ を満たす時、N はべき零行列という。べき零行列 N に対して、$E-N$ は正則行列であることを示せ。

逆行列を予測するとよいです。

解答　計算すると

$$(E-N)(E+N+N^2+\cdots+N^{n-1})=E-N^n=E$$

より、$E-N$ は逆行列 $E+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$ を持つので、正則行列である。

$E+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$ がどうしても思いつかない場合は、以下のようにして証明することもできます。

別解　$A=E-N$ とおくと、$N^n=O$ であることから、

$$(E-A)^n=E-{}_nC_1A+{}_nC_2A^2-\cdots+(-1)^n{}_nC_nA^n=O.$$

よって、$A({}_nC_1E-{}_nC_2A+\cdots-(-1)^n{}_nC_nA^{n-1})=E$ なので、$A=E-N$ は逆行列は ${}_nC_1E-{}_nC_2A+\cdots-(-1)^n{}_nC_nA^{n-1}$ を持つので、正則行列である。

注意　ちなみにがんばって計算すれば、${}_nC_1E-{}_nC_2A+\cdots-(-1)^n{}_nC_nA^{n-1}$ は $E+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$ に他ならないことがわかります。