2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 4 月 27 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の集合の最大元、最小元、上限、下限を（あったら）求めよ。

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$ で定めるときの、像 $f(\mathbb{Z})$。
(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定めるときの、区間の逆像 $f^{-1}([\frac{1}{2},1))$。
(2) $\{\frac{1}{n}\mid n=1,2,3,\cdots\}$.

最大元も上限も一意的（あれば一つ）で最大元があればそれは自動的に上限になることと上限は（無限大を含めれば）常に存在するので、最大元か上限がわかればもう片方もすぐにわかります。最小元、下限についても同様です。

解答

(1) $f(x)$ は 6 の周期を持つ関数なので、k を整数として、
  - $x=6k$ の時、$f(x)=\sin 0=0$。
  - $x=6k+1$ の時、$f(x)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。
  - $x=6k+2$ の時、$f(x)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。
  - $x=6k+3$ の時、$f(x)=\sin\pi=0$。
  - $x=6k+4$ の時、$f(x)=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$。
  - $x=6k+5$ の時、$f(x)=\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$。

  よって、$f(\mathbb{Z})=\{0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ である。$-\frac{\sqrt{3}}{2}<0<\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、この集合の最大元は $\frac{\sqrt{3}}{2}$、最小元は $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ で上限は $\frac{\sqrt{3}}{2}$、下限は $-\frac{\sqrt{3}}{2}$。

(2) 逆像を計算すると

$$f^{-1}([\frac{1}{2},1))=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in[\frac{1}{2},1)\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{2}\le x^2<1\}.$$

  $x^2<1$ を解くと $-1<x<1$ で、$\frac{1}{2}\le x^2$ を解くと $x\le-\frac{1}{\sqrt{2}},x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ なので、

$$f^{-1}([\frac{1}{2},1))=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x\le-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\le x<1\}=(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},1)$$

  である。
  ここから $A=f^{-1}([\frac{1}{2},1))=(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ の上限 a を求める。まず任意の $x\in A$ に対して $x\le 1$ なので上限は $a\le 1$ である。次に $a<1$ として矛盾を導く。この時上限の定義より、全ての $x\in A$ は $x\le a<1$ を満たすが、$x=\max\{\frac{1+a}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ としておけば $a<x<1$ であるし $x\in A$ であるので $x\le a$ と矛盾する。よって、$a\ge 1$ なので上限は 1 である。さらに $1\notin A$ なので最大元はない。同様の議論をすることで下限は -1 で最小元はないことがわかる（詳細省略）。

(3) まず、全ての $n=1,2,3,\cdots$ に対して $\frac{1}{n}\le 1$ であり、$n=1$ の時等号が成り立つので、最大元は 1 であり、上限も 1 である。あとは下限 a が 0 であることを示す。まず、任意の $n=1,2,3,\cdots$ に対して $\frac{1}{n}>0$ なので、$a\ge 0$ である。次に $a>0$ として矛盾を導く。この時下限の定義より、全ての $n=1,2,3,\cdots$ は $\frac{1}{n}\ge a$ つまり $n\le\frac{1}{a}$ を満たすが、これはアルキメデスの原理や講義ノート定理 2.17 に反する。よって、$a>0$ ではないので下限は 0 である。さらに $\frac{1}{n}=0$ とはならないので最小元はない。

注意

- (2) において、$x=\max\{\frac{1+a}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ としたのは $a<1$ が小さく $\frac{1+a}{2}$ が A の外にはみ出してしまう場合を処理するためです。
- 解答例では細かく書きましたが、(2) は集合が 2 つの区間の和集合になっていることを示したらすぐにその端点を上限、下限としたので問題ありません。

宿題 $\boxed{4}$

実数列 $\{a_n\}$ と実数列 $\{b_n\}$ から実数列 $\{c_n\}$ を各 n に対して $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ で定める。ここで数列 $\{a_n\}$ が実数 α に数列 $\{b_n\}$ が実数 β にそれぞれ収束する時、数列 $\{c_n\}$ は $\max\{\alpha, \beta\}$ に収束することを示せ。
つまり、$a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta$ の時、$\max\{a_n, b_n\} \to \max\{\alpha, \beta\}$ を示せ。

解答　まず、$a_n \to \alpha$ の定義は

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

で $b_n \to \beta$ の定義は

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N \implies |b_n - \beta| < \varepsilon$$

であることを思い出す。以下では $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{\alpha, \beta\}$ について、α と β の大小によって、3 つの場合に分けて証明する。

- $\alpha > \beta$ の場合、$\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ である。$a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta$ で ε として $\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ とすることで、ある自然数 $N_a,\ N_b$ が存在して N_a より大きい自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$ で N_b より大きい自然数 n に対して $|b_n - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$ であり、$N_0 = \max\{N_a, N_b\}$ より大きい自然数 n に対して $a_n > \frac{\alpha+\beta}{2} > b_n$ なので、$\max\{a_n, b_n\} = a_n$ である。
  あとは $\varepsilon > 0$ に対して、$a_n \to \alpha$ であることから自然数 N が存在して、自然数 $n \geq \max\{N, N_0\}$ に対して
  $$|\max\{a_n, b_n\} - \max\{\alpha, \beta\}| = |a_n - \alpha| < \varepsilon$$
  なので、$\max\{a_n, b_n\} \to \max\{\alpha, \beta\}$ が示された。
- $\alpha < \beta$ の場合は $\alpha > \beta$ の場合で a_n と b_n を入れ替えることで同じ議論で証明できる（詳細省略）。
- $\alpha = \beta$ の場合、$\max\{\alpha, \beta\} = \alpha = \beta$ である。$\varepsilon > 0$ に対して $a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta$ の定義から自然数 $N_a,\ N_b$ が存在するが $N = \max\{N_a, N_b\}$ とおくことで任意の自然数 $n \geq N$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon,\ |b_n - \beta| < \varepsilon$ であり、各 n に対して
  - $a_n \geq b_n$ の時は $|\max\{a_n, b_n\} - \max\{\alpha, \beta\}| = |a_n - \alpha| < \varepsilon$、
  - $a_n \leq b_n$ の時は $|\max\{a_n, b_n\} - \max\{\alpha, \beta\}| = |b_n - \beta| < \varepsilon$ なので、

  どちらでも $|\max\{a_n, b_n\} - \max\{\alpha, \beta\}| < \varepsilon$ がわかる。以上より $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{\alpha, \beta\}$ である。

よって $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{\alpha, \beta\}$ が示された。