2022年度京都大学微分積分学(演義)B(中安淳担当)第1回(2022年10月5日)問題と宿題(2022年10月12日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{1}$

(1) $f(x)$ を有界でない区間 $[a, \infty)$ 上の連続関数とする（a は実数)。このとき広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が収束することの定義を答えよ。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^x dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ は収束するかどうか (1) の定義に従って答えよ。

学籍番号：　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{2}$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 2, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

で定義して（$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数)、次の漸化式によって定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = g(a_n)\ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

(1) $f'(x)$ と $g(x)$ を計算せよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ は各 n に対して $a_n > 0$ を満たすことを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限 α を予想せよ。答えのみでよい。

(4) 数列 $\{a_n\}$ は各 n に対して $a_n \geq \alpha$ を満たすことを示せ。

(5) 数列 $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ。

(6) 数列 $\{a_n\}$ は α に収束することを示せ。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2022 年 10 月 5 日）問題と宿題（2022 年 10 月 12 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{3}$

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(\log(\arcsin x) - \log(\sin x))$ を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ を求めよ。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2022 年 10 月 5 日）問題と宿題（2022 年 10 月 12 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{4}$

$0 \leq a \leq 1$ に対して

$$g(a) = \int_0^1 \left| \sqrt{1-x^2} - a \right| dx$$

を考える。

(1) $g(a)$ を計算せよ。

(2) $0 < a < 1$ に対して導関数 $g'(a)$ を計算せよ。

(3) 関数 $g(a)$ を最小にする $0 \leq a \leq 1$ を求めよ。