

# 2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

## 第 1 回問題解答例

中安淳

2023 年 4 月 14 日

### 問題 1

次の式の値を計算せよ。

- (1)  $3 + 5$ .
- (2)  $12345 + 6789$ .
- (3)  $13 - 9$ .
- (4)  $3 - 5$ .
- (5)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1$ .
- (6)  $3 \times 5$ .
- (7)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ .
- (8)  $\frac{2 \times 4 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$ .
- (9)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)$ .
- (10)  $(i + 1)^2$ .

### 解答

- (1)  $3 + 5 = 8$ .
- (2)  $12345 + 6789 = 19134$ .
- (3)  $13 - 9 = 4$ .
- (4)  $3 - 5 = -2$ .
- (5)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 5$ .
- (6)  $3 \times 5 = 15$ .
- (7)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ .
- (8)  $\frac{2 \times 4 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{15}$ .
- (9)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) = (\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2 = 2 + 2\sqrt{3}$ .
- (10)  $(i + 1)^2 = i^2 + 2i + 1 = 2i$ .

### 問題 2

ツルとカメが合わせて 8 匹いて脚の数が合計して 26 本である時、ツルとカメはそれぞれ何匹いるか答えよ。ただし、1 匹のツルの脚の数は 2 本で、1 匹のカメの脚の数は 4 本である。

**解答** ツルを  $x$  匹、カメを  $y$  匹とおくと合わせて 8 匹なので  $x + y = 8$  が成り立つ。また脚の数に注目すると  $2x + 4y = 26$  である。したがって連立方程式  $x + y = 8, 2x + 4y = 26$  を解

けばいい。2 式目から 1 式目の 2 倍を引いて、 $2y = 10$ 。よって  $y = 5$  で  $x = 3$  であり、これは問題文に適する。答えはツルは 3 匹、カメは 5 匹である。

### 問題 3

命題  $P$  と  $Q$  に対して、命題  $\text{not}(P \Rightarrow Q)$  と命題  $\text{Pand}(\text{not}Q)$  は同値であることを真理値表を用いて示せ。

**解答** 真理値表は以下のようになる。

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$	$\text{not}(P \Rightarrow Q)$	$\text{not}Q$	$\text{Pand}(\text{not}Q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

よって  $\text{not}(P \Rightarrow Q)$  と  $\text{Pand}(\text{not}Q)$  は同値である。

### 問題 4

次の集合を計算せよ。

- (1)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2\}$ .
- (2)  $\{x \in \mathbb{C} \mid x^3 = 2\}$ .
- (3)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 = 2\}$ .

### 解答

- (1)  $x^3 = 2$  を実数範囲で解くと  $x = \sqrt[3]{2}$  より、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2\} = \{\sqrt[3]{2}\}$  である。
- (2)  $x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$  より、 $\{x \in \mathbb{C} \mid x^3 = 2\} = \{\sqrt[3]{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{2}\}$  である。
- (3)  $\sqrt[3]{2}$  は無理数のはずなので、空集合であることを示す。  
有理数  $x = \frac{q}{p}$  が  $x^3 = 2$  を満たしたとする。約分して  $p$  と  $q$  は互いに素な整数としてよい。 $q^3 = 2p^3$  なので、 $q$  は偶数であり  $q = 2q'$  とおくと、 $4(q')^3 = p^3$  なので、 $p$  は偶数である。そのため  $p$  と  $q$  は共通の因数 2 を持つので矛盾である。よって、 $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 = 2\} = \emptyset$  である。