2022年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第5回（2022年6月15日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して、関数

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

を定義すると $P_n(x)$ は n 次の多項式である。この時、以下の問いに答えよ。

(1) $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を計算せよ。

(2) $y = (x^2-1)^n$ とおくと、$(x^2-1)y' = 2nxy$ が成り立つことを示せ。

(3) (2) の等式を $n+1$ 回微分することで、次の等式が成り立つことを示せ。

$$-(x^2-1)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

問題の多項式 $H_n(x)$ のことを n 次のルジャンドル多項式といいます。

解答

(1) 計算すると、

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}(x^2-1)' = \frac{1}{2}2x = x.$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}((x^2-1)^2)'' = \frac{1}{8}(x^4-2x^2+1)'' = \frac{1}{8}(4\cdot 3x^2 - 2\cdot 2) = \frac{1}{2}(3x^2-1).$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 3!}((x^2-1)^3)''' = \frac{1}{48}(x^6-3x^4+3x^2-1)''' = \frac{1}{48}(6\cdot 5\cdot 4x^3 - 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

(2) $n \geq 1$ のときは $y' = nx(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x = 2nx(x^2-1)^{n-1}$ より、$(x^2-1)y' = 2nx(x^2-1)^n = 2nxy$ である。$n=0$ のときは両辺ともに 0 になるのでやはり成立する。

(3) $(x^2-1)y' = 2nxy$ の両辺を $n+1$ 回微分することを考える。ライプニッツの公式（講義ノート 8 定理 3.58）と $(x^2-1)' = 2x$, $(x^2-1)'' = 2$, $(x^2-1)''' = 0$ より、

$$((x^2-1)y')^{(n+1)} = {}_{n+1}C_0(x^2-1)y^{(n+2)} + {}_{n+1}C_1\cdot 2xy^{(n+1)} + {}_{n+1}C_2\cdot 2y^{(n)} = (x^2-1)y^{(n+2)} + 2(n+1)xy^{(n+1)} + (n+1)ny^{(n)}.$$

同様にライプニッツの公式（講義ノート 8 定理 3.58）と $(x)' = 1$, $(x)'' = 0$ より、

$$(2nxy)^{(n+1)} = {}_{n+1}C_0 2nxy^{(n+1)} + {}_{n+1}C_1\cdot 2ny^{(n)} = 2nxy^{(n+1)} + 2n(n+1)y^{(n)}.$$

よって、

$$-(x^2-1)y^{(n+2)} - 2xy^{(n+1)} + n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

つまり、

$$-(x^2-1)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 5 回（2022 年 6 月 15 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{4}$

$e^\pi > 23$ を示せ。ここで、e はネピアの定数、π は円周率であり、$3.14 < \pi < 3.15$ は認めてよい。電卓は有理数の四則演算に限って使ってよいこととする。ヒント：$e^\pi = e^3 e^{\pi-3}$ と考える。

　e^π はゲルフォントの定数と呼ばれ $e^\pi = 23.1406926327\cdots$ です。この手の近似値の計算において具体的な値を考えるのは最後までしないようにしましょう。

解答　e^x のマクローリン展開から、ある $0 < \theta < 1$ が存在して、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

なので $x > 0$ に対して、

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

が成り立つことに注意する。$x = \pi - 3 > 0$ と $n = 2$ とすれば、$e^{\pi-3} > 1 + (\pi - 3) + \frac{1}{2}(\pi - 3)^2$ より、

$$e^\pi = e^3 e^{\pi-3} > e^3 \left(1 + (\pi - 3) + \frac{1}{2}(\pi - 3)^2\right) > e^3 \left(1 + 0.14 + \frac{1}{2}0.14^2\right)$$

であり、マクローリン展開で $x = 1$ と $n = 5$ とすれば $e > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$ である。以上より

$$e^\pi > \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}\right)^3 \left(1 + 0.14 + \frac{1}{2}0.14^2\right)$$

であり、電卓を使えば右辺は 23 より大きいことがわかるので $e^\pi > 23$ が示された。

解説　e^x のマクローリン展開で直接 e^π を評価しようとすると

$$e^\pi > 1 + \pi + \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{6}\pi^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\pi^n$$

でこの右辺が初めて 23 を超えるのは $n = 8$ の時になります。ただし、π^n の計算は有理数の計算ではないので $\pi > 3.14$ を使って

$$e^\pi > 1 + 3.14 + \frac{1}{2}3.14^2 + \frac{1}{6}3.14^3 + \cdots + \frac{1}{n!}3.14^n$$

とすると 23 より大きいことがわかるのは $n = 9$ となります。

　この方法でも正解ですが、いずれにせよ n がある程度大きく取る必要があり、その原因は π や 3.14 が 1 より大きくて剰余項がなかなか小さくならないためです。そこで解答例では $\pi - 3$ に取りかえることで剰余項がすぐに小さくなるように工夫しています（ただしその場合 e の評価が必要になります）。