2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 5 回（2022 年 12 月 13 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

c を正の定数として、$f(u,v)$ を C^2 級関数とする。ここで 2 変数関数 $z=f(u,v)$ に対して $u=x+ct,\ v=x-ct$ をするとき、

$$c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=4c^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

が成り立つことを示せ。

解答　$z=f(x+ct,x-ct)$ なので偏導関数を計算すると、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u(x+ct,x-ct)+f_v(x+ct,x-ct),\quad \frac{\partial z}{\partial t}=cf_u(x+ct,x-ct)-cf_v(x+ct,x-ct),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{uu}(x+ct,x-ct)+f_{uv}(x+ct,x-ct)+f_{vu}(x+ct,x-ct)+f_{vv}(x+ct,x-ct),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2f_{uu}(x+ct,x-ct)-c^2f_{uv}(x+ct,x-ct)-c^2f_{vu}(x+ct,x-ct)+c^2f_{vv}(x+ct,x-ct).$$

よって、$f_{uv}=f_{vu}$ に注意して、

$$c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=4c^2f_{uv}(x+ct,x-ct)=4c^2f_{uv}(u,v).$$

示すべき等式を得る。

宿題 $\boxed{4}$

曲線

$$F(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}=0,\quad (x>0)$$

の陰関数定理が適用できる点での陰関数 $y=y(x)$ の極大・極小を求めよ。ただし、$\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数であり、$-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ の間の値を取るとする。

与えられた曲線は対数らせんと呼ばれるもので極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を使うと $r=e^\theta$ と表現されます。しかしながら、今回の問題は xy 座標での極大・極小なので xy 座標で考える方が楽です。

解答　$F(x,y)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)-\tan^{-1}\frac{y}{x}$ より、偏導関数を計算すると

$$F_x(x,y)=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2},\quad F_y(x,y)=\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

よって、$F_y(x,y)\neq 0$ つまり $y\neq x$ の点の近くでは陰関数定理（教科書第 6 章定理 11）により $F(x,y)=0$ は $y=y(x)$ と解くことができ、

$$y'=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\frac{x+y}{x-y}.$$

ここで $y=y(x)$ が極大・極小となる点では $y'=0$ である必要があるので、$x+y=0$. これを曲線の方程式 $\log\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}=0$ と連立させて解くと、$y=-x$ より $\log\sqrt{2}x=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ なので、$x=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}, y=-x$ である。極大・極小を判定するために y の 2 階微分を計算すると、y は x の関数であることに注意して、

$$y''=\frac{(1-y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}.$$

点 $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}},-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}})$ において $x+y=0$ かつ $y'=0$ より $y''=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}>0$. よって極小である。

以上より、$\log\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}=0$ の点 $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}},-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}})$ の近くでの陰関数 $y=y(x)$ は $x=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$ で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$ を取る。