2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 2 回宿題解答例

中安淳

2023 年 4 月 25 日

宿題 $\boxed{9}$

θ を実数とする。平面上の点を、x 軸を原点中心に θ 回転して得られる直線について折り返す（鏡映）変換を考える。これはまず原点中心に $-\theta$ 回転して、x 軸について折り返し、原点中心に θ 回転させることで同じものが得られるので、この変換を表す行列は次で与えられる。

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}$$

この行列を計算せよ。

解答　行列の積を順番に計算すると、

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix}\cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta\end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって答えは $\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$ である。

宿題 $\boxed{10}$

行列 $A = \begin{pmatrix}2 & -1 \\ 3 & -2\end{pmatrix}$ の n 乗 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ つまり n 個の A の積 A^n を求めよ。

解答　計算すると

$$A^2 = \begin{pmatrix}2 & -1 \\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 \\ 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

でこれは単位行列 E である。したがって n が奇数 $n = 2k + 1$ の時は

$$A^n = (A^2)^k A = A = \begin{pmatrix}2 & -1 \\ 3 & -2\end{pmatrix},$$

n が偶数 $n = 2k$ の時は

$$A^n = (A^2)^k = E = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$