2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 3 回（2022 年 11 月 2 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の関数 $f(x,y)$ は平面全体で C^1 級であることを示せ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0)).\end{cases}$$

解答　$f(x,y)$ の原点以外での偏導関数は

$$f_x(x,y)=\frac{2xy^2(x^2+y^2)-x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{2x^2y(x^2+y^2)-x^2y^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$f(x,y)$ の原点での偏導関数の値は

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0.$$

$f(x,y)$ が C^1 級であることを示すには上記の偏導関数 f_x,f_y が両方とも原点で連続であることを示せばよい。$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおいて $r\to 0$ の極限をとると、

$$|f_x(x,y)-f_x(0,0)|=\frac{|2r^5\cos\theta\sin^4\theta|}{r^4}\leq 2r\to 0,\quad |f_y(x,y)-f_y(0,0)|=\frac{|2r^5\cos^4\theta\sin\theta|}{r^4}\leq 2r\to 0.$$

よって、偏導関数 f_x,f_y が両方とも連続なので、$f(x,y)$ は C^1 級関数である。

宿題 $\boxed{4}$

平面上の実数値関数 f を次で定義する。

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\|\boldsymbol{x}\|-1 & (\|\boldsymbol{x}\|>1),\\ 0 & (\|\boldsymbol{x}\|\leq 1).\end{cases}$$

つまり f は二変数関数として表すと次のようになっている。

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-1 & (\sqrt{x^2+y^2}>1),\\ 0 & (\sqrt{x^2+y^2}\leq 1).\end{cases}$$

このとき f は連続関数であることを示せ。
ヒント：$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|\leq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$ を示す。

解答　ノルムの関数 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ は連続関数であることに注意する。
　f は単位円の内側 ($\|\boldsymbol{x}\|<1$) と外側 ($\|\boldsymbol{x}\|>1$) で連続だから周上の点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ ($\|\boldsymbol{a}\|=1$) で連続を示せばよい。ここで、

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|=f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\|\boldsymbol{x}\|-1 & (\|\boldsymbol{x}\|>1),\\ 0 & (\|\boldsymbol{x}\|\leq 1).\end{cases}$$

- $\|\boldsymbol{x}\|>1$ の場合、三角不等式より

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|=\|\boldsymbol{x}\|-1\leq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{a}\|-1=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|.$$

- $\|\boldsymbol{x}\|\leq 1$ の場合、$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|=0\leq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$ である。

よっていずれの場合でも $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|\leq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$ を得て、ここから f は $\boldsymbol{a}$ で連続であることがわかる。したがって、f は平面上の連続関数である。
　このような場合分けで定義される関数は多くの場合、最大最小を用いて書くことができ、さらには絶対値で表すことができるので連続がすぐにわかります。
別解　関数 f は次のようにしても書ける。

$$f(\boldsymbol{x})=\max\{\|\boldsymbol{x}\|-1,0\}=\frac{\|\boldsymbol{x}\|-1}{2}+\frac{|\|\boldsymbol{x}\|-1|}{2}.$$

これは連続関数の合成なので連続関数である。