

2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

第 1 回問題解答例

中安淳

2023 年 4 月 18 日

問題 1

次の式の値を計算せよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) $3 + 5$.
- (2) $12345 + 6789$.
- (3) $13 - 9$.
- (4) $3 - 5$.
- (5) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1$.
- (6) 3×5 .
- (7) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.
- (8) $\frac{2 \times 4 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$.
- (9) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)$.
- (10) $(i + 1)^2$.

解答

- (1) $3 + 5 = 8$.
- (2) $12345 + 6789 = 19134$.
- (3) $13 - 9 = 4$.
- (4) $3 - 5 = -2$.
- (5) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 5$.
- (6) $3 \times 5 = 15$.
- (7) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$.
- (8) $\frac{2 \times 4 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{15}$.
- (9) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) = (\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2 = 2 + 2\sqrt{3}$.
- (10) $(i + 1)^2 = i^2 + 2i + 1 = 2i$.

問題 2

ツルとカメが合わせて 8 匹いて脚の数が合計して 26 本である時、ツルとカメはそれぞれ何匹いるか答えよ。ただし、1 匹のツルの脚の数は 2 本で、1 匹のカメの脚の数は 4 本である。

解答 ツルを x 匹、カメを y 匹とおくと合わせて 8 匹なので $x + y = 8$ が成り立つ。また脚の数に注目すると $2x + 4y = 26$ である。したがって連立方程式 $x + y = 8$, $2x + 4y = 26$ を解

けばいい。2 式目から 1 式目の 2 倍を引いて、 $2y = 10$ 。よって $y = 5$ で $x = 3$ であり、これは問題文に適する。答えはツルは 3 匹、カメは 5 匹である。

問題 3

命題 P と Q に対して、命題「 P ならば Q 」と対偶「 Q でないならば P でない」は同値であることを、次の真理値表を完成させることで示せ。

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \implies \neg P$
T	T	T	F		
T	F	F	F		
F	T		T		
F	F		T		

解答 真理値表は以下のようになる。

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \implies \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T

よって $P \implies Q$ と $\neg Q \implies \neg P$ は同値である。

問題 4

次の集合を計算せよ。

- (1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2\}$.
- (2) $\{x \in \mathbb{C} \mid x^3 = 2\}$.
- (3) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 = 2\}$.

解答

- (1) $x^3 = 2$ を実数範囲で解くと $x = \sqrt[3]{2}$ より、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2\} = \{\sqrt[3]{2}\}$ である。
- (2) $x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$ より、 $\{x \in \mathbb{C} \mid x^3 = 2\} = \{\sqrt[3]{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{2}\}$ である。
- (3) $\sqrt[3]{2}$ は無理数のはずなので、空集合であることを示す。
有理数 $x = \frac{p}{q}$ が $x^3 = 2$ を満たしたとする。約分して p と q は互いに素な整数としてよい。 $q^3 = 2p^3$ なので、 q は偶数であり $q = 2q'$ とおくと、 $4(q')^3 = p^3$ なので、 p は偶数

である。そのため p と q は共通の因数 2 を持つので矛盾である。よって、 $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 = 2\} = \emptyset$ である。