2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第5回問題解答例

中安淳

2023年6月6日

問題 $\boxed{19}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の10乗つまり

$$A^{10} = AAAAAAAAAA$$

を求めよ。

とりあえず A^2 を計算して法則性を見つけましょう。

解答　計算すると

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9+12+9 & 18+24+18 & 27+36+27 \\ 6+8+6 & 12+16+12 & 18+24+18 \\ 3+4+3 & 6+8+6 & 9+12+9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 60 & 90 \\ 20 & 40 & 60 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} = 10A. \end{aligned}$$

よって、

$$A^{10} = 10A^9 = \cdots = 10^9 A.$$

従って答えは $A^{10} = 10^9 \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ である。

A の構造について次のことに気が付けば面倒な計算を避けることができます。

別解　行列 A について

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

が成り立つので、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3+4+3 = 10$$

に注意すれば、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 10A$$

である。以下は同様。

問題 $\boxed{20}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -8 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ を考える。

(1) $A^2 - 10A + 9E = O$ が成り立つことを示せ。
(2) A は正則行列であることを示し、逆行列 A^{-1} を求めよ。

解答

(1) 計算すると、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 81 & 40 & 80 \\ -80 & -39 & -80 \\ 40 & 20 & 41 \end{pmatrix}$$

なので、

$$A^2 - 10A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

よって $A^2 - 10A + 9E = O$ が成り立つ。

(2) (1) より、$\frac{1}{9}(10E - A)A = E$ なので、A は正則行列であり、逆行列は

$$\frac{1}{9}(10E - A) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 8 & 13 & 8 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

である。

今後、基本変形による逆行列の計算法を学んだら、誘導なしに解けるようになりましょう。