2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 5 回（2022 年 12 月 7 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

曲線
$$\varphi(x,y)=x^2-xy^2+2y=0$$
の $(x,y)=(-1,-1)$ 以外の点での陰関数 $y=y(x)$ の極大・極小を求めよ。

解答　偏微分導関数を計算すると
$$\varphi_x(x,y)=2x-y^2,\quad \varphi_y(x,y)=-2xy+2.$$
よって、$\varphi_y(x,y)\neq 0$ つまり $xy\neq 1$ の点のちかくでは陰関数定理（講義ノート第 7 回ページ 2）により $\varphi(x,y)=0$ は $y=y(x)$ と解くことができ、
$$y'=-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}=\frac{2x-y^2}{2xy-2}.$$
ここで $y=y(x)$ が極大・極小となる点では $y'=0$ である必要があるので、$2x-y^2=0$. これを曲線の方程式 $x^2-xy^2+2y=0$ と連立させて解くと、x を消去して $y^4=8y$ を得るので、$y=0,2$ つまり $(x,y)=(0,0),(2,2)$ である。極大・極小を判定するために y の 2 階微分を計算すると、y は x の関数であることに注意して、
$$y''=\frac{(2-2yy')(2xy-2)-(2x-y^2)(2y+2xy')}{(2xy-2)^2}. \tag{1}$$
点 $(x,y)=(0,0)$ において $y'=0$ より $y''=\frac{2\cdot(-2)-0}{(-2)^2}=-1<0$. よって極大である。点 $(x,y)=(2,2)$ において $y'=0$ より $y''=\frac{2\cdot(8-2)}{(8-2)^2}=\frac{1}{3}>0$. よって極小である。

また、$xy=1$ の点は $x^2-xy^2+2y=0$ と連立させて解くと $(x,y)=(-1,-1)$ より問題文で除外されている点である。以上より、$x^2-xy^2+2y=0$ の $(x,y)=(0,0)$ の近くでの陰関数 $y=y(x)$ は $x=0$ で極大値 0 を取り、$(x,y)=(2,2)$ の近くでの陰関数 $y=y(x)$ は $x=2$ で極小値 2 を取る。

注意　除外された点 $(x,y)=(-1,-1)$ は陰関数定理が適用できない点ですが、x について解いたときに極小となっており、y については（一価の）関数として解けません。

注意　$(x,y)=(0,0)$ においても $(x,y)=(2,2)$ においても $y'=0$ であり、さらに (1) の分子の後ろの項が 0 になっていることが宿題 $\boxed{4}$ を解く上でのヒントです。

問題 $\boxed{2}$

x,y が曲線
$$x^2+xy+y^2=1$$
を満たしながら動くとき、関数
$$f(x,y)=2x+y$$
の最大・最小をラグランジュの未定乗数法（講義ノート第 8 回ページ 2）を用いて計算せよ。

解答　最初に曲線 $x^2+xy+y^2=1$ は有界閉集合で $f(x,y)$ は連続関数なので最大と最小があることに注意する。$\varphi(x,y)=x^2+xy+y^2-1$ とおくと、偏微分導関数は
$$\varphi_x(x,y)=2x+y,\quad \varphi_y(x,y)=x+2y.$$
ここで、$\varphi_x(x,y)=\varphi_y(x,y)=0$ となる点は $(x,y)=(0,0)$ しかないが $\varphi(0,0)\neq 0$ より、曲線 $\varphi(x,y)=0$ 上の点は全て正則点である。

よって、未定乗数法より曲線 $\varphi(x,y)=0$ 上の点 (a,b) において $f(x,y)$ が極値を取るとすると、ある実数 λ が存在して、
$$f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b)=2-\lambda(2a+b)=0,\quad f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=1-\lambda(a+2b)=0.$$
これを曲線の方程式 $a^2+ab+b^2=1$ と連立させて解く。λ を消去すると、$2(a+2b)=1(2a+b)$、つまり $b=0$ なので、$(a,b)=(\pm1,0)$ である。ここで $f(1,0)=2,\ f(-1,0)=-2$ なので、$f(x,y)$ は $(x,y)=(1,0)$ において最大値 2 を取り、$(x,y)=(-1,0)$ において最小値 -2 を取る。