

学籍番号：

氏名：

評価：

問題 1

次の集合 E の境界 ∂E を求めて、 E は開集合かどうか閉集合かどうかそして有界かどうかそれぞれ答えよ（答えのみでよい）。

- (1) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (2) $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (3) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y = 1\}$.
- (4) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$.

学籍番号：

氏名：

評価：

問題 2

- (1) 平面上の 2 つの集合 E, F がともに開集合のとき、合併 $E \cup F$ も開集合であることを示せ。
- (2) 平面上の 2 つの集合 E, F がともに開集合のとき、共通部分 $E \cap F$ も開集合であることを示せ。

ただし、平面上の集合 E が開集合であるとは、 E の任意の点 P が E の内点である、つまり十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在して P の ε 近傍 $U_\varepsilon(P)$ が E に含まれることをいう。

学籍番号：

氏名：

評価：

宿題 3

\mathbb{R} 上で定義された次の関数 f は C^∞ 級であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

ヒント：整級数。

学籍番号：

氏名：

評価：

宿題 4

(1) 円周率 π について次の等式を示せ。

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{(2n+1)3^n}.$$

ヒント：逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の整級数による表示（テーラー展開・マクローリン展開）を考える。

(2) $\pi > 3.1$ を示せ。

ヒント：(1) の級数で $n = 2$ まで正確に計算して、それ以降は下から評価する。