2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第3回宿題解答例

中安淳

2023年5月9日

宿題 $\boxed{13}$

p を 0 より大きく 1 より小さい実数として、2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

を考える。

(1) λ に関する方程式

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

を解いて二つの解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ を求めよ。

(2) $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ に対して

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を満たす零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を一つずつ求めよ。

(3) (1) の λ_1, λ_2 と (2) の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対して、2 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$$

を定める時、

$$A = PDP^{-1}$$

が成り立つことを示せ。

解答

(1) 行列式を計算すると、

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 + p & -p \\ -p & \lambda - 1 + p \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1 + p)(\lambda - 1 + p) - p^2 \\ &= \lambda^2 - 2(1-p)\lambda + (1 - 2p) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1 + 2p) \end{aligned}$$

より、$\lambda_1 = 1$ と $\lambda_2 = 1 - 2p$ を得る。

(2) $\lambda = \lambda_1 = 1$ の時、$\lambda E - A = \begin{pmatrix} p & -p \\ -p & p \end{pmatrix}$ より、$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすればよい。$\lambda = \lambda_2 = 1 - 2p$ の時、$\lambda E - A = \begin{pmatrix} -p & -p \\ -p & -p \end{pmatrix}$ より、$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすればよい。

(3)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2p \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1-2p \\ 1 & 2p-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-2p & 2p \\ 2p & 2-2p \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

が成り立つ。

注意　λ_1 と λ_2 が入れ替わっていたり $\boldsymbol{x}_1$ や $\boldsymbol{x}_2$ が定数倍されていても (3) が成り立ちます。

宿題 $\boxed{14}$

A を 2 次正方行列として、$\boldsymbol{x}_0$ を平面ベクトルとし、平面ベクトル $\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ を定める $(n = 1, 2, 3, \cdots)$。ここで $\|\boldsymbol{x}_0\| = \|\boldsymbol{x}_1\| = \|\boldsymbol{x}_2\| = \|\boldsymbol{x}_3\| = 1$ である時、$\|\boldsymbol{x}_4\| = 1$ であることを示せ。ただし、$\|\boldsymbol{x}\|$ は平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）を表す。

京都大学の 2009 年入試問題の $\det A = 1$ という条件を取り払った問題です。入試問題では成分ごとの計算ができましたが、今回の問題では計算量を削減するための工夫が必要なはずです。

解答　$\boldsymbol{x}_1 = k\boldsymbol{x}_0$ と表される時、$\|\boldsymbol{x}_0\| = \|\boldsymbol{x}_1\| = 1$ なので、$k = \pm 1$ でいずれの場合でも $\boldsymbol{x}_n = (\pm 1)^n\boldsymbol{x}_0$ なので、$\|\boldsymbol{x}_4\| = 1$ である。

よって、以下では $\boldsymbol{x}_1 = k\boldsymbol{x}_0$ とならない場合を考えればよく、この時 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ は平面ベクトル全体を張るので、

$$\boldsymbol{x}_2 = a\boldsymbol{x}_0 + b\boldsymbol{x}_1$$

とできる。ここから $\|\boldsymbol{x}_0\|^2 = \|\boldsymbol{x}_1\|^2 = \|\boldsymbol{x}_2\|^2 = 1$ より、

$$\|\boldsymbol{x}_2\|^2 = a^2 + 2ab\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1 + b^2 = 1 \tag{1}$$

を得る。ただし、$\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1$ はベクトル $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ の内積である。

次に $\boldsymbol{x}_3$ について、

$$\boldsymbol{x}_3 = A\boldsymbol{x}_2 = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 = ab\boldsymbol{x}_0 + (a + b^2)\boldsymbol{x}_1$$

より、

$$\|\boldsymbol{x}_3\|^2 = a^2b^2 + 2ab(a + b^2)\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1 + (a + b^2)^2 = 1.$$

ここで (1) をもとに内積を消去して、

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_3\|^2 &= a^2b^2 + (a + b^2)(1 - a^2 - b^2) + (a + b^2)^2\\ &= a^2b^2 + (a + b^2)(1 + a - a^2)\\ &= (1 + a)b^2 + a + a^2 - a^3\end{aligned}$$

よって、

$$\|\boldsymbol{x}_3\|^2 - 1 = (a + 1)(b^2 - (a - 1)^2) = 0$$

つまり $a = -1$ または $b = a - 1$ または $b = 1 - a$ である。

同様にして、$\boldsymbol{x}_4$ について、

$$\boldsymbol{x}_4 = A\boldsymbol{x}_3 = ab\boldsymbol{x}_1 + (a + b^2)\boldsymbol{x}_2 = (a + b^2)a\boldsymbol{x}_0 + (2a + b^2)b\boldsymbol{x}_1$$

より、

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_4\|^2 &= (a + b^2)^2a^2 + 2(a + b^2)a(2a + b^2)b\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1 + (2a + b^2)^2b^2\\ &= (a + b^2)^2a^2 + (a + b^2)(2a + b^2)(1 - a^2 - b^2) + (2a + b^2)^2b^2\\ &= (a + b^2)^2a^2 + (2a + b^2)((a + b^2)(1 - a^2) + ab^2)\\ &= (a + b^2)((a + b^2)a^2 + (2a + b^2)(1 - a^2)) + (2a + b^2)ab^2\\ &= (a + b^2)(b^2 + 2a - a^3) + (2a + b^2)ab^2\\ &= (1 + a)b^4 + (3a + 2a^2 - a^3)b^2 + a(2a - a^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_4\|^2 - 1 &= (1 + a)b^4 + (3a + 2a^2 - a^3)b^2 - (1 - 2a^2 + a^4)\\ &= (1 + a)(b^4 + (3a - a^2)b^2 - (1 + a)(1 - a)^2)\\ &= (1 + a)(b^2 - (a - 1)^2)(b^2 + (a + 1)) = 0\end{aligned}$$

従って欲しかった式が得られた。

注意　解答例では $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ が基底でない場合を分けていましたが、ケーリー・ハミルトンの定理より $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

を満たすので、場合分けする必要なく

$$\boldsymbol{x}_2 = (a + d)\boldsymbol{x}_1 - (ad - bc)\boldsymbol{x}_0$$

と表されます。

提出された答案を眺めていたら次の少し不思議な解答も成立することに気がつきました。

別解　ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 - tA + dE = O$ とできるので、

$$\boldsymbol{x}_2 = t\boldsymbol{x}_1 - d\boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}_3 = t\boldsymbol{x}_2 - d\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{x}_4 = t\boldsymbol{x}_3 - d\boldsymbol{x}_2$$

となる。よって、

$$\|\boldsymbol{x}_2\|^2 = t^2 + d^2 - 2td\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1, \quad \|\boldsymbol{x}_3\|^2 = t^2 + d^2 - 2td\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2,$$
$$\|\boldsymbol{x}_4\|^2 = t^2 + d^2 - 2td\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3$$

であり、$\|\boldsymbol{x}_2\|^2 = \|\boldsymbol{x}_3\|^2 = 1$ より

$$2td\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1 = 2td\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2$$

なので、$t = 0$ または $d = 0$ または $\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1$ である。$t = 0$ の時は $\|\boldsymbol{x}_4\|^2 = \|\boldsymbol{x}_3\|^2 = d^2$ がわかり、$d = 0$ の時は $\|\boldsymbol{x}_4\|^2 = \|\boldsymbol{x}_3\|^2 = t^2$ がわかるので、以下では $\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1$ の場合を考える。この時、$\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2$ を示す。実際、

$$\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2\cdot(t\boldsymbol{x}_2 - d\boldsymbol{x}_1) = t - d\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2 = t - d\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1,$$
$$\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1\cdot(t\boldsymbol{x}_1 - d\boldsymbol{x}_0) = t - d\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_1,$$

なので、$\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2$ が成立し、$\|\boldsymbol{x}_4\|^2 = \|\boldsymbol{x}_3\|^2 = 1$ である。

この解法は計算量が少ないもののトリッキーだと思います。ベクトルの基底はなるべく固定した方がいいという原則に立てば最初の解法の方が流れはわかりやすいかもしれません。