2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2021 年 10 月 13 日）問題解答例

問題 1

数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ に対して、正項級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n^2$ と $\sum_{n=0}^\infty b_n^2$ がともに収束するとする。この時、級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ は絶対収束することを示せ。

解答　一般に 2 つの数 a, b に対して次の不等式が成り立つことに注意する。

$$|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

これを使えば部分和について

$$\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \leq \sum_{k=0}^n \frac{a_k^2+b_k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n b_k^2$$

が成り立つ。仮定より正項級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n^2$ と $\sum_{n=0}^\infty b_n^2$ がともに収束することから、

$$\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^\infty a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^\infty b_k^2$$

よって、正項級数 $\sum_{n=0}^\infty |a_n b_n|$ は収束する、つまり級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ は絶対収束する。

問題 2

実数 s に対して、正項級数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ が収束するか発散するか答えよ。

解説　教科書定理または典型例 4.1.16 にあるように、答えは $s > 1$ の時収束で $s \leq 1$ の時発散ですが、この事実は覚えるようにしましょう。以下に記す積分を使った証明法も重要です。なお、ダランベールの判定法やコーシーの判定法は極限が 1 になり使えません。

解答　$s \leq 0$ の時は $\frac{1}{n^s} \geq 1$ より発散するので、$s > 0$ の場合を考える。この時、関数 $f(x) = \frac{1}{x^s}$ は $x > 0$ で単調減少するので、部分和について、

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx$$

が成り立つ。ここで

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^s}dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^n = \frac{1}{1-s}n^{1-s} - \frac{1}{1-s} & s < 1 \text{ の時} \\ [\log x]_1^n = \log n & s = 1 \text{ の時} \\ \left[-\frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^n = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\frac{1}{n^{s-1}} & s > 1 \text{ の時} \end{cases}$$

となり、$n \to \infty$ とすると $s < 1$ の時と $s = 1$ の時は正の無限大に発散し、$s > 1$ の時は $\frac{1}{s-1}$ に収束する。よって、$s \leq 1$ の時、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \geq \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^s}dx \to \infty$$

なので左辺も発散する。$s > 1$ の時、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^s}dx \to 1 + \frac{1}{s-1}$$

なので、正項級数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ は収束する。以上をまとめると正項級数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ は $s > 1$ の時収束し $s \leq 1$ の時発散する。