2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 4 回（2022 年 11 月 29 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の極限を答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - x - y^2 + y}{x - y}$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2}$.

(3) のヒント：極限を取る関数（の絶対値）を $\sqrt{x^2+y^2}$ の関数で抑える。

解答

(1) 計算すると

$$\frac{x^2 - x - y^2 + y}{x - y} = x + y - 1$$

で $x + y - 1$ は原点でも連続でその値は -1 なので、問題の極限は -1 である。

(2) m を実数として $y = mx$ に沿った極限を考えると、

$$\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1 + m}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

この値は m によって変わってしまう、つまり $m = 0$ だと 1 だが $m = 1$ だと $\sqrt{2}$ なので、問題の極限は存在しない。

(3) m を実数として $y = mx$ に沿った極限を考えると、

$$\frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} = \frac{m(1 + m)}{1 + m + m^2}x \to 0 \quad (x \to 0).$$

よって極限値は 0 と予想できる。ここで

$$\left|\frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} - 0\right| \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}^3}{x^2 - |x||y| + y^2} \leq 2\frac{1}{1 - \frac{|x||y|}{x^2+y^2}}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

相加平均相乗平均の関係より

$$\frac{x^2 + y^2}{|x||y|} = \frac{|x|}{|y|} + \frac{|y|}{|x|} \geq 2$$

なので、

$$\left|\frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} - 0\right| \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}^3}{x^2 - |x||y| + y^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} \to 0 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \to 0).$$

よって問題の極限は 0 である。

実は極座標を使えば、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = l$ であることは

$$\lim_{r\to0} \sup_{\theta} |f(r \cos\theta, r \sin\theta) - l| = 0$$

であることと同値です。なので (3) は以下のようにしても答えることができます。

(3) の別解　極座標 $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ によって各 θ に対して

$$\frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} = \frac{\cos\theta \sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{1 + \cos\theta \sin\theta} r \to 0 \quad (r \to 0).$$

よって極限値は 0 と予想でき、

$$\left|\frac{xy(x + y)}{x^2 + xy + y^2} - 0\right| = \frac{|\cos\theta||\sin\theta||\cos\theta + \sin\theta|}{1 + \cos\theta \sin\theta} r \leq \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta} r \leq 4r \to 0 \quad (r \to 0).$$

よって極限は 0 である。

問題 $\boxed{2}$

2 変数関数

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (x \in \mathbb{R}, y > 0)$$

の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を計算せよ。

解答　$f(x,y) = y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ の偏導関数を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-2x}{4y} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}} = -\frac{1}{2} x y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} + y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{4y^2} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}} = \left(-\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^2 y^{-\frac{5}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} - \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{-2x}{4y} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}} = \left(-\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^2 y^{-\frac{5}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

注意　結果として、f は y についての 1 階偏導関数と x についての 2 階偏導関数が等しい、つまり $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を満たす特別な関数であることがわかります。この $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ は熱伝導の方程式や熱方程式、拡散方程式などと呼ばれ、$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ のことをその基本解と言います。