2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 6 回問題解答例

中安淳

2023 年 6 月 30 日

問題 $\boxed{23}$

r, θ, ϕ を実数として、次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$.

この行列式は微分積分学で重積分を極座標に変数変換する時に出てきます。

解答

(1) サラスの公式に基づいて計算すると

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\cdot\sin\theta$$
$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

よって答えは r である。

(2) サラスの公式に基づいて計算すると

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + r\cos\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi\cdot\cos\theta \\
&\quad + (-r\sin\theta\sin\phi)\cdot\sin\theta\sin\phi\cdot(-r\sin\theta) \\
&\quad - 0 - \sin\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi\cdot(-r\sin\theta) \\
&\quad - (-r\sin\theta\sin\phi)\cdot r\cos\theta\sin\phi\cdot\cos\theta \\
&= r^2(\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\theta + \sin^3\theta\sin^2\phi \\
&\qquad + \sin^3\theta\cos^2\phi + \sin\theta\sin^2\phi\cos^2\theta) \\
&= r^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta) \\
&= r^2\sin\theta.
\end{aligned}$$

よって答えは $r^2\sin\theta$ である。

問題 $\boxed{24}$

次の 4 次正方行列の階数（a に依存する）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

主成分の候補になる成分が 0 になる場合を注意しましょう。

解答　与えられた行列を基本変形していく。まず、第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の a 倍を引き、第 3 行から第 1 行を引き、第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

ここで、$a=1$ の時、この行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので、階数は 1 である。

以下では $a \neq 1$ の時を考える。第 2 行と第 3 行と第 4 行を $1-a \neq 0$ で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 2 行の $1+a$ 倍を引き、第 4 行から第 2 行を引

いて、

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & a+2 & 1\end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行の $a+2$ 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+3\end{pmatrix}.$$

よって、$a+3=0$ の時は階数は 3 で、そうでない場合は 4 である。

以上より求める階数は、$a=1$ の時 1 で、$a=-3$ の時 3 で、どちらでもない場合は 4 である。

この問題には別解として「全ての行を足し合わせる」という以下の解法が知られています。

別解　第 1 行に他の行を足して、

$$\begin{pmatrix}a+3 & a+3 & a+3 & a+3\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

ここで $a+3=0$ の時つまり $a=-3$ の時を考えると、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 2 行を引き、第 4 行から第 2 行を引いて、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行を 4 で割って、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行を引いて、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

よって、階数は 3 である。

一方で $a+3\neq 0$ の時は、第 1 行を $a+3$ で割って、

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

第 2 行、第 3 行、第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}.$$

よって、$a-1=0$ の時は階数は 1 で、そうでない場合は 4 である。

以上より求める階数は、$a=-3$ の時 3 で、$a=1$ の時 1 で、どちらでもない場合は 4 である。

注意　この問題は 4 次から n 次正方行列

$$\begin{pmatrix}a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & a\end{pmatrix}.$$

に一般化することができ $(n=2,3,\cdots)$、階数は $a=1$ の時 1、$a=1-n$ の時 $n-1$、それら以外の時 n となります。