2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 4 回（2021 年 12 月 1 日）宿題解答例

宿題 1

x, y がそれぞれ区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ を動くとき、次の関数 $f(x,y)$ の極大・極小を答えよ。

$$f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y).$$

解答　$f(x,y)$ の 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y) = -\sin x + \sin(x+y), \quad f_y(x,y) = -\sin y + \sin(x+y).$$

ここから $(a,b) \in (0, \frac{\pi}{2})^2$ を極大・極小となる点とすると

$$f_x(a,b) = -\sin a + \sin(a+b) = 0, \quad f_y(a,b) = -\sin b + \sin(a+b) = 0 \tag{1}$$

を満たす。ここから $\sin a = \sin b = \sin(a+b)$ であり、$0 < a, b < \frac{\pi}{2}$ なので、$a = b$。よって、$\sin a = \sin 2a = 2\sin a \cos a$ であり、やはり $0 < a < \frac{\pi}{2}$ なので $\sin a \neq 0$ で、$\cos a = \frac{1}{2}$ つまり $a = \frac{\pi}{3}$。以上より極大・極小となる点の候補は $(a,b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ のみである。

$f(x,y)$ の 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = -\cos x + \cos(x+y), \quad f_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \cos(x+y), \quad f_{yy}(x,y) = -\cos y + \cos(x+y).$$

よって、$(a,b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ でのヘッセ行列は

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式の値は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$ で、$1,1$ 成分 $f_{xx}(a,b) = -1$ は負なので、$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ は極大点である。

以上より $f(x,y)$ は $(x,y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ で極大となりその値は $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$ で、極小はない。

注意　方程式 (1) は三角関数の和積公式を使って、

$$-\sin a + \sin(a+b) = 2\cos\left(a + \frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2} = 0, \quad -\sin b + \sin(a+b) = 2\cos\left(b + \frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2} = 0$$

と変形することでも解くことができます。

宿題 2

次の関数 $f(x,y)$ は平面全体で C^1 級であるが C^2 級でない。このことを示せ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0)).\end{cases}$$

解説　高階偏微分の特徴的な性質として C^2 級であれば偏微分の順序を入れ替えられるということがありそれを題材にした問題です。

解答　まず、関数 $f(x,y)$ は原点を除けば十分なめらか特に C^2 級であることに注意する。

$f(x,y)$ の原点以外での 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-\frac{x^3y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}-\frac{x^3y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$f(x,y)$ の原点での 1 階偏導関数の値は

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$$

$f(x,y)$ が C^1 級であることを示すには上記の 1 階偏導関数 f_x, f_y が両方とも原点で連続であることを示せばよい。$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおいて $r\to 0$ の極限をとると、

$$|f_x(x,y)-f_x(0,0)|=\frac{|r^5\cos^4\theta\sin\theta+3r^5\cos^2\theta\sin^3\theta|}{r^4}=r|\cos^4\theta\sin\theta+3\cos^2\theta\sin^3\theta|\leq 4r\to 0,$$

$$|f_y(x,y)-f_y(0,0)|=\frac{|r^5\cos^5\theta-r^5\cos^3\theta\sin^2\theta|}{r^4}=r|\cos^5\theta-\cos^3\theta\sin^2\theta|\leq 2r\to 0.$$

よって、1 階偏導関数 f_x, f_y が両方とも連続なので、$f(x,y)$ は C^1 級関数である。

$f(x,y)$ が C^2 級でないことを示すために、原点において 2 階偏導関数の等式 $f_{xy}=f_{yx}$ が満たされないことを示す。

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0,\quad f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

で、$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ なので、$f(x,y)$ は C^2 級関数でない。

注意　なお、C^2 級の定義に従って次のようにして示すこともできます。$f(x,y)$ の原点以外での 2 階偏導関数を計算すると、

$$f_{xx}(x,y)=\frac{8x^3y^3+6xy^5}{(x^2+y^2)^3},\quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{x^6+6x^4y^2-3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3},\quad f_{yy}(x,y)=\frac{-6x^5y+2x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

これらが原点で連続かどうかを調べるために $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、

$$f_{xx}=8\cos^3\theta\sin^3\theta+6\cos\theta\sin^5\theta,\quad f_{xy}=f_{yx}=\cos^6\theta+6\cos^4\theta\sin^2\theta-3\cos^2\theta\sin^4\theta,\quad f_{yy}=-6\cos^5\theta\sin\theta+2\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

どの関数も θ の値によって $r\to 0$ での極限が変わるので連続ではない、よって $f(x,y)$ は C^2 級関数でないことがわかる。（実際に答案に書くときは 2 階偏導関数のうち一つについて書けばいいですが、どの θ とどの θ で極限が異なるか書いてください）

こちらの証明法は原点以外での 2 階偏導関数を計算する分だけ手間がかかりますが、世の中には C^2 級でないが $f_{xy}=f_{yx}$ を満たす関数なども存在したりする（例：$x^2y^2/(x^2+y^2)$）ので、この定義に従った方法のほうが確実に証明できる利点があります。