2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 3 回（2022 年 5 月 25 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

ヒント：倍角の公式 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ を使って、自然対数の極限の公式 $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ に帰着させる。

解答　極限を取りたい数列の自然対数を取ったものは

$$n^2\log\left(\cos\frac{1}{n}\right) = n^2\log\left(1-2\sin^2\frac{1}{2n}\right) = -\left(\sqrt{2}n\sin\frac{1}{2n}\right)^2\frac{\log\left(1-2\sin^2\frac{1}{2n}\right)}{-2\sin^2\frac{1}{2n}}$$

と変形でき、$n\to\infty$ とすると $-2\sin^2\frac{1}{2n}\to 0$ なので、$\frac{\log\left(1-2\sin^2\frac{1}{2n}\right)}{-2\sin^2\frac{1}{2n}}\to 1$ である。あとは

$$\sqrt{2}n\sin\frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}$$

なので、

$$n^2\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)\to -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

より求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

宿題 $\boxed{4}$

方程式

$$e^x = 3x$$

は実数解を少なくとも 2 つ持つことを示せ。ただし、e は $2 < e < 3$ を満たす定数である。

　中間値の定理を使って方程式の解の存在をいう問題です。

解答　$f(x) = e^x - 3x$ とおくとこれは $\mathbb{R}$ 上の連続関数である。ここで、

- $f(0) = 1 > 0.$
- $f(1) = e - 3 < 0.$
- $f(4) = e^4 - 12 > 16 - 12 > 0.$

よって、方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ に 1 つの解をもち、$1 < x < 4$ にもう 1 つ解をもつ。したがって 2 つの実数解を得た。