2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 5 回（2022 年 6 月 22 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の関数にテイラーの定理を適用し、x^4 の項までのマクローリン展開をラグランジュの剰余項付きで答えよ。

(1) $\cosh x$.
(2) e^{x^2}.

解答

(1) $f(x) = \cosh x$ を 5 回導関数まで計算すると、

$$f(x) = \cosh x, \quad f'(x) = \sinh x, \quad f''(x) = \cosh x, \quad f^{(3)}(x) = \sinh x, \quad f^{(4)}(x) = \cosh x, \quad f^{(5)}(x) = \sinh x.$$

ここから $x = 0$ において、$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1, \quad f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1$. よって、マクローリン展開は、ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$\begin{aligned}\cosh x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{\sinh \theta x}{120}x^5.\end{aligned}$$

(2) $f(x) = e^{x^2}$ を 5 回導関数まで計算すると、

$$f(x) = e^{x^2}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = (12x + 8x^3)e^{x^2},$$
$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}, \quad f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5)e^{x^2}.$$

ここから $x = 0$ において、$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 12$. よって、マクローリン展開は、ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$\begin{aligned}e^{x^2} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + (\theta x + \frac{4}{3}(\theta x)^3 + \frac{4}{15}(\theta x)^5)e^{(\theta x)^2}x^5.\end{aligned}$$

問題 $\boxed{2}$

$\sin x$ の漸近展開を用いて、次の極限の値を計算せよ。

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

解答　まず、

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

に注意する。ここで、分母の $\sin x$ に漸近展開 $\sin x = x + o(x)$ $(x \to 0)$ を、分子の $\sin x$ に漸近展開 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ をそれぞれ適用することで、$x \to 0$ において、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2}{x^2(x + o(x))^2} = \frac{x^2 - (x^2 + \frac{1}{36}x^6 + o(x^6) - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) + o(x^6))}{x^2(x^2 + o(x^2) + o(x^2))} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \to \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{1}{3}$。

注意　この解答例の漸近展開は答えが求まるぎりぎりの次数になっていて、これより低い次数だと答えが求まらず、高い次数だと計算が面倒になるだけで同じ答えが出るはずです。また、解答例のように分母分子で違う次数でも（少なくとも今回の問題では）大丈夫です。どの次数を選択するべきかは勘と経験と試行錯誤で得ます。