2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 7 回（2021 年 1 月 19 日）宿題解答例

宿題 1

xy 平面で原点を中心として半径 $R > 0$ の円の周と内部からなる有界閉集合を B_R と表すことにする。このとき、重積分

$$\iint_{B_1} \log(1+x^2+y^2)dxdy$$

を計算せよ。解答には $f(x,y)$ を連続関数として極座標変換の公式

$$\iint_{B_R} f(x,y)dxdy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

が成り立つことを用いてよい。

解答　公式を使えば、

$$\begin{aligned}\iint_{B_1} \log(1+x^2+y^2)dxdy &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \log(1+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)rdrd\theta = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r\log(1+r^2)drd\theta \\ &= \int_0^1 \left\{\int_0^{2\pi} r\log(1+r^2)d\theta\right\}dr = 2\pi\int_0^1 r\log(1+r^2)dr.\end{aligned}$$

ここで、$t=r^2$ と変数変換すると、r が 0 から 1 を動くとき t は 0 から 1 を動き、$\frac{dt}{dr}=2r$ より、

$$2\pi\int_0^1 r\log(1+r^2)dr = \pi\int_0^1 \log(1+t)dt.$$

部分積分により、

$$\begin{aligned}\pi\int_0^1 \log(1+t)dt &= \pi\int_0^1 (1+t)'\log(1+t)dt = \pi\left[(1+t)\log(1+t)\right]_0^1 - \pi\int_0^1 dt \\ &= \pi\left[(1+t)\log(1+t)-t\right]_0^1 = \pi(2\log 2-1).\end{aligned}$$

以上より、

$$\iint_{B_1} \log(1+x^2+y^2)dxdy = \pi(2\log 2-1).$$

注意　極座標変換の公式については教科書定理 6.4.3 辺りを参照してください。

問題 2

$L > 0$ を含んだ重積分

$$\iint_{[0,L]^2} e^{-xy}\sin x dxdy$$

を二通りに計算することで、広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx$$

の値を求めよ。

解説　重積分は x で先に積分しても y で先に積分しても同じ値が求まるということを使います。それによると、

$$\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx = \arctan L + \int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L + y\sin L}{1+y^2}dy$$

を得て、後ろ 2 つの積分が計算できませんが不等式で評価すれば $L\to\infty$ でともに 0 に収束することがわかります。

解答　先に y で積分することを考えると、

$$\int_0^L e^{-xy}\sin x dy = \left[-\frac{1}{x}e^{-xy}\sin x\right]_0^L = -\frac{1}{x}(e^{-Lx}-1)\sin x = (1-e^{-Lx})\frac{\sin x}{x}$$

より、

$$\iint_{[0,L]^2} e^{-xy}\sin x dxdy = \int_0^L \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx.$$

2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 7 回（2021 年 1 月 19 日）宿題解答例

先に x で積分することを考えると、

$$\int_0^L e^{-xy}\sin x dx = \int_0^L e^{-xy}(-\cos x)' dx = \left[-e^{-xy}\cos x\right]_0^L - y\int_0^L e^{-xy}\cos x dx = \left[-e^{-xy}\cos x\right]_0^L - y\int_0^L e^{-xy}(\sin x)' dx$$
$$= \left[-e^{-xy}\cos x - ye^{-xy}\sin x\right]_0^L - y^2\int_0^L e^{-xy}\sin x dx$$

より、

$$\int_0^L e^{-xy}\sin x dx = \frac{1}{1+y^2}\left[-e^{-xy}\cos x - ye^{-xy}\sin x\right]_0^L = \frac{1}{1+y^2}\left(-e^{-Ly}\cos L - ye^{-Ly}\sin L + 1\right)$$

で、

$$\iint_{[0,L]^2} e^{-xy}\sin x dxdy = \int_0^L \frac{1}{1+y^2}dy - \int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L + y\sin L}{1+y^2}dy.$$

ここで、

$$\int_0^L \frac{1}{1+y^2}dy = [\arctan y]_0^L = \arctan L$$

である。よって以上より

$$\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx = \arctan L + \int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L + y\sin L}{1+y^2}dy$$

である。あとは $L \to \infty$ とした時に後ろ 2 つの積分が 0 に収束することを示す。一つ目の積分は $x \geq 0$ で $-x \leq \sin x \leq x$ を使うことで、

$$\left|\int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \int_0^L e^{-Lx}\frac{|\sin x|}{x}dx \leq \int_0^L e^{-Lx}dx = \frac{1}{L}(1-e^{-L^2}) \to 0.$$

二つ目の積分も同様に

$$\left|\int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L + y\sin L}{1+y^2}dy\right| \leq \int_0^L e^{-Ly}\frac{|\cos L + y\sin L|}{1+y^2}dy \leq \int_0^L e^{-Ly}\frac{1+y}{1+y^2}dy.$$

ここで $1+y \leq 2(1+y^2)$ を使えば、

$$\left|\int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L + y\sin L}{1+y^2}dy\right| \leq 2\int_0^L e^{-Ly}dy = \frac{2}{L}(1-e^{-L^2}) \to 0.$$

以上より、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{L\to\infty}\arctan L = \frac{\pi}{2}.$$