2022年度京都大学微分積分学(演義)A(中安淳担当)第1回(2022年4月20日)問題と宿題(2022年4月26日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{1}$

一般項が

$$a_n = \frac{n+2}{3n+4} \quad (n \text{ は自然数 } (n = 1, 2, 3, \cdots))$$

で表される数列 (a_n) を考える。この数列は $n \to \infty$ としたときに収束することが知られている。

(1) 極限 $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

(2) $\varepsilon > 0$ に対して、次が成り立つような自然数 N_ε を答えよ。

「任意の N_ε 以上の自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である。」

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{2}$

次の漸化式によって定義される数列 (a_n) を考える。

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

(1) この数列 (a_n) は各 n に対して $0 < a_n < 2$ を満たすことを示せ。

(2) この数列 (a_n) は単調増加であることを示せ。

(3) この数列 (a_n) は収束することを示し、極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 1 回（2022 年 4 月 20 日）問題と宿題（2022 年 4 月 26 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{3}$

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ の値をネイピア数 $e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を用いて表せ。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 1 回（2022 年 4 月 20 日）問題と宿題（2022 年 4 月 26 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{4}$

各 n に対して $a_n \geq 0$ を満たす数列 (a_n) が $\alpha \geq 0$ に収束しているとする。この時、数列 $(\sqrt{a_n})$ が $\sqrt{\alpha}$ に収束することを極限の定義に基づいて証明せよ。