2019年度応用数理D第8回レポート解答例

中安淳

2019年12月10日

問題1

熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 \le x \le 1, t \ge 0), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & (t \ge 0), \\ u(x,0) = 2x(1-x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$$

に対するクランク・ニコルソン法を考える。

$N = 4$ とし、格子幅を $h = 1/N = 0.25$、時間ステップ幅を $k = h^2 = 0.0625$ とする。つまり、$r = k/h^2 = 1$ とする。$x = x_n = nh$ $(0 \le n \le N)$, $t = t_m = mk$ $(m \ge 0)$ における解 $u(x,t)$ の近似値を $u_{n,m}$ と書く。この時、以下の問いに答えよ。

(1) クランク・ニコルソン法の6項間漸化式

$$Au_{n-1,m+1} + Bu_{n,m+1} + Cu_{n+1,m+1} = Du_{n-1,m} + Eu_{n,m} + Fu_{n+1,m}$$

の係数 A, B, C, D, E, F を求めよ。

(2) 対称性 $u_{n,m} = u_{N-n,m}$ を仮定することにより、次の式が成り立つことを示せ。

$$\begin{cases} 4u_{1,m+1} - u_{2,m+1} = u_{2,m}, \\ -2u_{1,m+1} + 4u_{2,m+1} = 2u_{1,m}. \end{cases}$$

(3) (2) を利用して $u_{n,m}$ を $m = 2$ まで計算し、計算結果 $(u_{n,1})_{0 \le n \le N}$ と $(u_{n,2})_{0 \le n \le N}$ を求めよ。計算結果は小数点以下6桁に丸めて答えること。

問題 1 の解答

(1) クランク・ニコルソン法の式は

$$-ru_{n-1,m+1}+(2+2r)u_{n,m+1}-ru_{n+1,m+1}=ru_{n-1,m}+(2-2r)u_{n,m}+ru_{n+1,m}$$

より、$r=1$ なので、

$$-u_{n-1,m+1}+4u_{n,m+1}-u_{n+1,m+1}=u_{n-1,m}+u_{n+1,m}.$$

つまり、$A=-1,\ B=4,\ C=-1,\ D=1,\ E=0,\ F=1$。

(2) $n=1$ の時の式は、

$$-u_{0,m+1}+4u_{1,m+1}-u_{2,m+1}=u_{0,m}+u_{2,m}$$

であり、境界条件 $u_{0,m}=0$ より、

$$4u_{1,m+1}-u_{2,m+1}=u_{2,m}.$$

$n=2$ の時の式は、

$$-u_{1,m+1}+4u_{2,m+1}-u_{3,m+1}=u_{1,m}+u_{3,m}$$

であり、対称性 $u_{1,m}=u_{3,m}$ より、

$$-2u_{1,m+1}+4u_{2,m+1}=2u_{1,m}.$$

よって問題の式が成立することがわかった。

(3) (2) より

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{1,m+1}\\ u_{2,m+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{2,m}\\ 2u_{1,m}\end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{pmatrix}u_{1,m+1}\\ u_{2,m+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{2,m}\\ 2u_{1,m}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}u_{1,m}+2u_{2,m}\\ 4u_{1,m}+u_{2,m}\end{pmatrix}$$

である。

ここで初期条件から

$$(u_{1,0},u_{2,0})=(3/8,1/2)$$

なので、順番に計算すると

$$(u_{1,1},u_{2,1})=\frac{1}{7}(11/8,2),$$

$$(u_{1,2}, u_{2,2}) = \frac{1}{49}(43/8, 15/2).$$

従って求める値は

$$\begin{aligned}
(u_{n,1})_{0 \le n \le N} &= (0.000000, 0.196429, 0.285714, 0.196429, 0.000000), \\
(u_{n,2})_{0 \le n \le N} &= (0.000000, 0.109694, 0.153061, 0.109694, 0.000000).
\end{aligned}$$