2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 6 回（2021 年 1 月 5 日）宿題解答例

宿題 1

関数 $f(x,y) = 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2 \le R^2)$ の積分について以下の問いに答えよ。ただし R は正の定数である。

(1) 各 $-R \le x \le R$ に対して、

$$g(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$$

を計算せよ。

(2) (1) で得た $g(x)$ について、

$$\int_{-R}^{R} g(x)dx$$

を計算せよ。

半径 R の球の体積を求める問題です。

解答

(1) まず、

$$g(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dy$$

で、$y = \sqrt{R^2-x^2}\sin\theta$ と変数変換すると y が $-\sqrt{R^2-x^2}$ から $\sqrt{R^2-x^2}$ を動くことは θ が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ を動くことに対応し、

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{R^2-x^2}\cos\theta$$

なので、

$$g(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(R^2-x^2)\cos^2\theta dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2-x^2)(1+\cos 2\theta)dy = \left[(R^2-x^2)(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy = \pi(R^2-x^2).$$

(2)

$$\int_{-R}^{R} g(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)dx = \left[\pi\left(R^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

宿題 2

重積分

$$\iint_E x^2 y e^{xy^2} dxdy \quad (E = [0,1]\times[0,1])$$

を計算せよ。

解説　x の積分を先に計算しても y の積分を先に計算しても結果は同じですが、計算量が変わることがあります。今回の問題では y の積分を先にすると楽です。

解答　y で先に積分することを考えて $t = y^2$ と変数変換して、

$$\int_0^1 x^2 y e^{xy^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 e^{xt}dt = \left[\frac{1}{2}xe^{xt}\right]_0^1 = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}x.$$

よって、

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^2 y e^{xy^2} dxdy = \int_0^1 \left\{\int_0^1 x^2 y e^{xy^2} dy\right\} dx. = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}x\right) dx.$$

ここで、

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

より、

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^2 y e^{xy^2} dxdy = \left[\frac{1}{2}(xe^x - e^x) - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$