2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 6 回（2021 年 1 月 5 日）問題解答例

**問題 1**

(1) 平面上の 2 つの開集合 $A, B$ の和集合 $A \cup B$ も開集合であることを示せ。
(2) 平面上の 2 つの開集合 $A, B$ の共通部分 $A \cap B$ も開集合であることを示せ。

ただし、平面上の集合 $A$ が開集合であるとは、$A$ の任意の点 $x$ に対して十分小さな $r > 0$ が存在して $x$ を中心とする半径 $r$ の開円板 $D(x; r)$ が $A$ に含まれることをいう。

**解答**

(1) 任意の点 $x \in A \cup B$ を取る。
 - $x \in A$ の場合は、$A$ が開集合なので、$D(x; r_A) \subset A$ となる $r_A > 0$ が存在する。特に $D(x; r_A) \subset A \cup B$ である。
 - $x \in B$ の場合は、$B$ が開集合なので、$D(x; r_B) \subset B$ となる $r_B > 0$ が存在する。特に $D(x; r_B) \subset A \cup B$ である。

 よって、どちらの場合でも $D(x; r) \subset A \cup B$ となる $r > 0$ が存在しているので、$A \cup B$ は開集合である。

(2) 任意の点 $x \in A \cap B$ を取る。
 - $x \in A$ であり $A$ は開集合なので、$D(x; r_A) \subset A$ となる $r_A > 0$ が存在する。
 - $x \in B$ であり $B$ は開集合なので、$D(x; r_B) \subset B$ となる $r_B > 0$ が存在する。

 ここで $r > 0$ を $r_A$ と $r_B$ のうち小さい方として定めると、$D(x; r) \subset D(x; r_A) \subset A$ かつ $D(x; r) \subset D(x; r_B) \subset B$ なので、$D(x; r) \subset A \cap B$ つまり $A \cap B$ は開集合である。

**問題 2**

次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_E (1 + x + y + xy)dxdy$ $(E = [1, 2] \times [3, 4])$.
(2) $\displaystyle\iint_E \sin(x + y)dxdy$ $(E = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}])$.

**解答**

(1) $y$ で先に積分すると、

$$\begin{aligned}\iint_{[1,2]\times[3,4]} (1 + x + y + xy)dxdy &= \int_1^2 \left\{\int_3^4 (1 + x + y + xy)dy\right\} dx = \int_1^2 \left[y + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}xy^2\right]_3^4 dx \\ &= \int_1^2 \left(1 + x + \frac{7}{2} + \frac{7}{2}x\right) dx = \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{7}{4}x^2\right]_1^2 \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{4}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{45}{4}$。

(2) $y$ で先に積分すると、

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x + y)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + y)dy\right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos(x + y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx = \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 + 1 + 1 - 0 = 2.\end{aligned}$$

よって答えは 2。

**注意**　解答例では $y$ で先に積分しましたが、$x$ で先にしても同じ値になります。また、(1) は

$$\iint_{[1,2]\times[3,4]} (1 + x + y + xy)dxdy = \iint_{[1,2]\times[3,4]} (1 + x)(1 + y)dxdy = \iint_{[2,3]\times[4,5]} xydxdy$$

と変形することで計算を楽にすることができます。