2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 7 回（2023 年 1 月 24 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D (1+x+y+xy)dxdy \ (D=[1,2]\times[3,4])$.

(2) $\displaystyle\iint_D x^2ye^{xy^2}dxdy \ (D=[0,1]\times[0,1])$.

x の積分を先に計算しても y の積分を先に計算しても結果は同じですが、計算量が変わることがあります。今回の問題の (2) では原始関数が求めやすい y の積分を先にすると楽です。

解答

(1) y で先に積分すると、

$$\begin{aligned}\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x+y+xy)dxdy &= \int_1^2\left\{\int_3^4(1+x+y+xy)dy\right\}dx = \int_1^2\left[y+xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}xy^2\right]_3^4 dx\\ &= \int_1^2\left(1+x+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}x\right)dx = \left[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{7}{4}x^2\right]_1^2\\ &= 1+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7\cdot 3}{4} = \frac{45}{4}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{45}{4}$。

(2) y で先に積分すると、

$$\int x^2ye^{xy^2}dy = \frac{1}{2}xe^{xy^2}+C$$

より、

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]}x^2ye^{xy^2}dxdy = \int_0^1\left\{\int_0^1 x^2ye^{xy^2}dy\right\}dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}xe^{xy^2}\right]_0^1 dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}x\right)dx.$$

ここで、

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

より、

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]}x^2ye^{xy^2}dxdy = \left[\frac{1}{2}(xe^x-e^x)-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = 0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

よって答えは $\frac{1}{4}$。

問題 $\boxed{2}$

積分

$$\int_0^1\left\{\int_x^1 e^{-y^2}dy\right\}dx$$

を計算せよ。

e^{-y^2} はガウス関数と呼ばれ不定積分を計算するのは困難なので、x で先に積分しましょう。解答例では式でさらっと書いていますが、積分領域は図にするとわかりやすいです。

解答　y で先に積分することを考えると、重積分としての積分領域は

$$\{(x,y) \mid 0\le x\le 1, x\le y\le 1\} = \{(x,y) \mid 0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$$

なので、

$$\int_0^1\left\{\int_x^1 e^{-y^2}dy\right\}dx = \int_0^1\left\{\int_0^y e^{-y^2}dx\right\}dy = \int_0^1 ye^{-y^2}dy = \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}$$

よって答えは $\frac{e-1}{2e}$。