2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 5 回宿題解答例

中安淳

2023 年 6 月 16 日

宿題 $\boxed{21}$

6 つの実数の未知数 a, b, c, d, e, f に関する次の連立一次方程式のすべての解を求めよ。

$$\begin{cases} a+b+c=3, \\ b+c+d=3, \\ c+d+e=3, \\ d+e+f=3, \\ e+f+a=3, \\ f+a+b=3. \end{cases}$$

堂々巡りにならないように注意しながら基本変形するだけですが、解答例では基本変形の順序を工夫しています。

解答　拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

第 4 行に第 1 行を足し、第 5 行に第 2 行を足し、第 6 行に第 3 行を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

第 5 行と第 6 行から第 4 行を引き、第 4 行から第 1 行を引くことで、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以降では下 2 行を省略することにする。第 1 行から第 2 行を引き、第 2 行から第 3 行を引き、第 3 行から第 4 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

第 1 行に第 4 行を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

これは階段行列であり、対応する連立一次方程式は

$$\begin{cases} a+e+f=3, \\ b-e=0, \\ c-f=0, \\ d+e+f=3. \end{cases}$$

e を s、f を t とおくことで、解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

注意　$(3, 0, 0, 3, 0, 0)$ の他にも $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ なども解です。解が一つでも見つかれば定数項を無視した同次方程式さえ解ければいいので、基本変形が少し簡単になります。

宿題 $\boxed{22}$

n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ を各成分 a_{ij} が正の実数であって各 $i = 1, \cdots, n$ に対して

$$a_{i1} + \cdots + a_{in} = 1$$

が成り立つものとする。実数 λ に対して同次連立一次方程式

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

の零ベクトルでない解 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ について考える。

(1) $\lambda = 1$ の時、そのような解 $\vec{x}$ が存在することを示せ。

(2) そのような解 $\vec{x}$ が存在するならば、$|\lambda| \leq 1$ であることを示せ。
ヒント：$\vec{x}$ の成分の中で絶対値が最大のものを考える。

この問題文の設定の行列 A はしばしば（右）確率行列と呼ばれます。λ を A の固有値、$\vec{x}$ をその固有ベクトルといい、今回の問題では確率行列の固有値の絶対値の最大値が 1 であるという性質を示しています。

解答

(1) 成分がすべて 1 であるベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ を考えると、

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

よって $A\vec{x} = \vec{x}$ の零ベクトルでない解が存在する。

(2) 解 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ の成分の中で絶対値が最大のものを x_k とすると $\vec{x}$ は零ベクトルでないので $|x_k| > 0$ である。ここで $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ の第 k 成分に注目すると、

$$a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = \lambda x_k$$

この絶対値を考えると三角不等式より

$$|\lambda||x_k| = |a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n| \leq a_{k1}|x_1| + \cdots + a_{kn}|x_n|.$$

ここで $|x_1|, \cdots, |x_n|$ のうち最大のものが $|x_k|$ だったので、

$$|\lambda||x_k| \leq a_{k1}|x_k| + \cdots + a_{kn}|x_k| = |x_k|.$$

よって $|\lambda| \leq 1$ を得る。

注意　(2) の内容は複素範囲で考える、つまり λ が複素数で $\vec{x}$ が複素ベクトルで考えても成り立ちますが、その場合でも A の各成分は正ないし非負です。