2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 1 回（2022 年 4 月 20 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

一般項が

$$a_n = \frac{n+2}{3n+4} \quad (n \text{ は自然数 } (n = 1, 2, 3, \cdots))$$

で表される数列 (a_n) を考える。この数列は $n \to \infty$ としたときに収束することが知られている。

(1) 極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(2) $\varepsilon > 0$ に対して、次が成り立つような自然数 N_ε を答えよ。

「任意の N_ε 以上の自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である。」

解答

(1) 変形して $a_n = \dfrac{1+2n^{-1}}{3+4n^{-1}}$ であり、$n \to \infty$ で $n^{-1} \to 0$ あることと教科書命題 1.1.9 (1), (4) を使えば、

$$a_n = \frac{1+2n^{-1}}{3+4n^{-1}} \to \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

がわかる。よって、極限は $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$。

(2) $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を変形すると、

$$\left| \frac{n+2}{3n+4} - \frac{1}{3} \right| = \frac{\frac{2}{3}}{3n+4} < \varepsilon.$$

よって、この条件は以下と同値である。

$$n > \frac{2-12\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

したがって、N_ε として $\dfrac{2-12\varepsilon}{9\varepsilon}$ より大きい自然数としておけばよい。

問題 $\boxed{2}$

次の漸化式によって定義される数列 (a_n) を考える。

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

(1) この数列 (a_n) は各 n に対して $0 < a_n < 2$ を満たすことを示せ。

(2) この数列 (a_n) は単調増加であることを示せ。

(3) この数列 (a_n) は収束することを示し、極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答

(1) $n = 1$ の時、$0 < a_1 = \sqrt{2} < 2$ なので、条件が成立する。$n = 1, 2, 3, \cdots$ で成立するつまり $0 < a_n < 2$ の時、$a_{n+1} > \sqrt{2+0} > 0$ かつ $a_{n+1} < \sqrt{2+2} = 2$ なので、$n+1$ でも成立する。以上より数学的帰納法から、各 n に対して $0 < a_n < 2$ が成立する。

(2) 各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $a_{n+1} \geq a_n$ を示せばよく、(1) より $a_n > 0$ なので $a_{n+1}^2 \geq a_n^2$ と同値でつまり $2 + a_n \geq a_n^2$ を示せばよい。ここで (1) より $0 < a_n < 2$ なので、$a_n^2 - a_n - 2 = (a_n+1)(a_n-2) < 0$ なので、上の不等式は確かに成り立つ。以上より数列 (a_n) は単調増加である。

(3) (2) より数列 (a_n) は単調増加で (1) より上に有界でもあるので、実数の完備性（教科書公理 1.2.6）より何らかの実数 α に収束する。ここで $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので漸化式から、

$$\alpha = \sqrt{2+\alpha}.$$

両辺を二乗してこれを解くと、$\alpha = -1, 2$ が必要で、$\alpha = \sqrt{2+\alpha} \geq 0$ なので、解は $\alpha = 2$ のみである。したがって、数列 (a_n) は α に収束してその α は 2 以外ありえないので、極限は $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$。