

# 2019 年度応用数理 D 第 8 回レポート問題 (12 月 11 日出題)

締め切り 2019 年 12 月 18 日 16:30

提出先 J 棟 6 階 J613 数理事務室のレポートボックス

注意 レポートには A4 サイズの用紙を使用し、先頭に「2019 年度応用数理 D 第 8 回レポート」と書き、続けて学籍番号と氏名を明記すること。また、複数枚の用紙を使用する場合はホッチキス等でまとめること。

## 問題 1

熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 \leq x \leq 1, t \geq 0), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & (t \geq 0), \\ u(x, 0) = 2x(1 - x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

に対するクラנק・ニコルソン法を考える。

$N = 4$  とし、格子幅を  $h = 1/N = 0.25$ 、時間ステップ幅を  $k = h^2 = 0.0625$  とする。つまり、 $r = k/h^2 = 1$  とする。 $x = x_n = nh$  ( $0 \leq n \leq N$ ),  $t = t_m = mk$  ( $m \geq 0$ ) における解  $u(x, t)$  の近似値を  $u_{n,m}$  と書く。この時、以下の問いに答えよ。

(1) クランク・ニコルソン法の 6 項間漸化式

$$Au_{n-1,m+1} + Bu_{n,m+1} + Cu_{n+1,m+1} = Du_{n-1,m} + Eu_{n,m} + Fu_{n+1,m}$$

の係数  $A, B, C, D, E, F$  を求めよ。

(2) 対称性  $u_{n,m} = u_{N-n,m}$  を仮定することにより、次の式が成り立つことを示せ。

$$\begin{cases} 4u_{1,m+1} - u_{2,m+1} = u_{2,m}, \\ -2u_{1,m+1} + 4u_{2,m+1} = 2u_{1,m}. \end{cases}$$

(3) (2) を利用して  $u_{n,m}$  を  $m = 2$  まで計算し、計算結果  $(u_{n,1})_{0 \leq n \leq N}$  と  $(u_{n,2})_{0 \leq n \leq N}$  を求めよ。計算結果は小数点以下 6 桁に丸めて答えること。

問題は以上である。