2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 4 回宿題解答例

中安淳

2023 年 5 月 23 日

宿題 $\boxed{17}$

a, b を $(a,b) \neq (0,0)$ を満たす実数として、平面上の原点を通る直線 $\ell : ax+by=0$ を考える。平面上の点 (x,y) から ℓ へ引いた垂線と ℓ の交点を (s,t) とする時、(x,y) を (s,t) に対応させる写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像であることを示し、f を表現する行列 A を求めよ。

解答　(s,t) を計算すると、ℓ 上の点なので

$$as+bt=0.$$

また、(x,y) と (s,t) を通る直線がベクトル (a,b) と平行なので

$$b(x-s)=a(y-t).$$

以上より連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ay-bx \end{pmatrix}$$

を得てこれを解くと

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ ay-bx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ ay-bx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -aby+b^2x \\ a^2y-abx \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって、f は線形写像でありそれを表現する行列は

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

注意　$\boldsymbol{a}=(a,b)$ とおくと、テンソル積 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$ と内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2+b^2$ を用いて、今回の行列 A は

$$A = E - \frac{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

と表されます。高次元への一般化も容易で便利な公式です。

宿題 $\boxed{18}$

複素数 $z=x+yi$ に対して複素共役 $\overline{z}=x-yi$ を対応させる写像 f は、複素数の集合を $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $\mathbb{R}^2$ と見た時は線形写像であるが、$\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}^1$ と見た時は線形写像でないことを示せ。つまり、

$$f_{\mathbb{R}} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x,-y) \in \mathbb{R}^2$$

は線形写像だが、

$$f_{\mathbb{C}} : z \in \mathbb{C}^1 \to \overline{z} \in \mathbb{C}^1$$

は線形写像でないことを示せ。

解答　$f_{\mathbb{R}}$ が線形写像であることを示す。

$$f_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なので、この写像は $\mathbb{R}$ の $(2,2)$ 行列を左からかけるものになっているので、線形写像である。

一方 $f_{\mathbb{C}}$ は線形写像でないことを示す。線形写像であるとするとスカラー倍について

$$f_{\mathbb{C}}(cz) = cf_{\mathbb{C}}(z)$$

つまり

$$\overline{cz} = c\overline{z}$$

が任意の $c \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$ に対して成立することになるが、$c=i$, $z=1$ の場合を考えると

$$\overline{cz} = \overline{i} = -i, \quad c\overline{z} = i$$

で矛盾する。よって $f_{\mathbb{C}}$ は線形写像でない。