2022年度京都大学微分積分学(演義)A(中安淳担当)第2回(2022年5月11日)問題と宿題(2022年5月17日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{1}$

次の集合の最大値、最小値、上限、下限を（あったら）求めよ。

(1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 < 0\}$.

(2) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$. （$\mathbb{Q}$ は有理数の集合であることに注意。）

(3) $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\}$.

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 5 月 11 日）問題と宿題（2022 年 5 月 17 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{2}$

次の級数はともに絶対収束することを示し、その和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc^n \ (|c| < 1).$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}.$

2022年度京都大学微分積分学(演義)A(中安淳担当)第2回(2022年5月11日)問題と宿題(2022年5月17日締め切り)

学籍番号： 氏名： 評価：

宿題 $\boxed{3}$

教科書注意 1.4.19 にあるように、複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は（絶対）収束し e^z とおくと、オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が成り立つ。ここではこれを三角関数の定義とする、つまり e^{ix} の実部を $\cos x$、虚部を $\sin x$ とすることにより、等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

が成立することを示せ。ただし、指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w \ (z, w \in \mathbb{C})$ が成立することは認めてよい。

2022 年度京都大学微分積分学(演義)A(中安淳担当)第 2 回(2022 年 5 月 11 日)問題と宿題(2022 年 5 月 17 日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{4}$

実数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が単調減少であり $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすとする。この時、教科書定理 1.4.13 にあるように交代級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

は収束するが、さらに各 $N = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$\left| S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} a_n \right| \leq a_{N+1}$$

が成り立つことを示せ。