2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2021 年 10 月 27 日）宿題解答例

宿題 1

次の関数列 $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ は $n \to \infty$ としたときに与えられた区間 I 上である関数 $f(x)$ に各点収束する。その関数 $f(x)$ を求めて、収束が一様収束であるかどうか答えよ。

(1) $f_n(x) = x^n$, $x \in I = [0, 1]$.
(2) $f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}$, $x \in I = [1, \infty)$.
(3) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$, $x \in I = \mathbb{R}$.
(4) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+(k-1)x)(1+kx)}$, $x \in I = [0, \infty)$.

$x \in I$ を固定するごとに $f_n(x) \to f(x)$ の時各点収束、ノルムを使って $\|f_n - f\| = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ の時一様収束と言うのでした。

解答

(1) $0 \leq x < 1$ の時 $f_n(x) \to 0$、$x = 1$ の時 $f_n(x) = 1$ なので、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0, 1)), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

また、

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & (x \in [0, 1)), \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

なので、1 より小さく 1 に近い x を考えて、$\|f_n - f\| = 1$。したがって、一様収束ではない。

(2)

$$f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}}.$$

$n \to \infty$ で $\frac{1}{nx} \to 0$ より、$f_n(x) \to \frac{1}{x}$。よって、$f(x) = \frac{1}{x}$。また、

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{x} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} - 1 \right).$$

ここで、不等式 $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ $(x \geq 0)$ を用いる（この不等式の証明は微分を 3 回行えばよい）と、$-\frac{1}{6}x^2 \leq \frac{\sin x}{x} - 1 \leq 0$ $(x > 0)$ より、$x \geq 1$ において、

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{x} \frac{1}{6} \frac{1}{n^2 x^2} \leq \frac{1}{6} \frac{1}{n^2} \to 0.$$

よって、一様収束である。

(3) $\frac{x^2}{n} \geq 0$ より、

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

よって、$f(x) \equiv 0$ であり、上の式において $\frac{1}{\sqrt{n}}$ は x に依らないので、一様収束も言えた。

(4)（1 月 15 日解答の間違いを修正しました）

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+(k-1)x)(1+kx)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+(k-1)x} - \frac{1}{1+kx} \right) = 1 - \frac{1}{1+nx}.$$

これは $x = 0$ の時 0 であり、$x > 0$ の時 1 に収束するので、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

また、

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{1+nx} & (x > 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

であり、$x \in [0, \infty)$ での上限を考えると、0 に近い正の x を考えて、$\|f_n - f\| = 1$。したがって、一様収束ではない。

宿題 2

(1) 円周率 π について次の等式を示せ。

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{(2n+1)3^n}.$$

ヒント：逆正接関数 $\arctan x$ の整級数による表示（テーラー展開・マクローリン展開）を考える。

(2) $\pi > 3.1$ を示せ。

ヒント：(1) の級数で $n=2$ まで正確に計算して、それ以降は下から評価する。

解答

(1) まず、逆正接関数 $\arctan x$ の整級数による表示

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad |x| < 1 \tag{1}$$

を示す。公比が $-x^2$ の等比級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

を項別積分して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x.$$

よって、(1) が示された。この式 (1) に $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\sqrt{3}^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n\sqrt{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

よって、両辺に 6 をかけて、求める等式を得る。

(2) 小問 (1) の式

$$\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot 3^4} - \frac{2\sqrt{3}}{11 \cdot 3^5} + \cdots$$

で第 4 項以降を奇数番目の項を 0 で抑え偶数番目の項の $2n+1$ の部分を 7 で抑えることで、

$$\pi > 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^5} - \cdots = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{82\sqrt{3}}{45} - \frac{\sqrt{3}}{84}.$$

電卓で計算すると右辺の値は $3.13556\cdots$ より、$\pi > 3.1$ がわかる。

注意　電卓で小数の割り算や平方根を計算すると誤差が生じてしまう恐れがあります。厳密な証明を書くならば、示すべき式 $\frac{82\sqrt{3}}{45} - \frac{\sqrt{3}}{84} > 3.1$ の分母を払い 2 乗するなどして、整数の大小関係の式に同値変形してそれを示すのがよいでしょう。