2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 6 回（2022 年 12 月 27 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

$f(x,y)$ を長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上定義された連続関数であり $(a<b,\ c<d)$、任意の $(x,y)\in R$ に対して

$$f(x,y)\geq 0$$

を満たすとする。ここで重積分について

$$\iint_R f(x,y)dxdy=0$$

が成り立つとき、$f(x,y)$ は R 上恒等的に 0 であることを示せ。

解答　「$f(x,y)$ が R 上恒等的に 0」ではないとするとある $(x_0,y_0)\in R$ が存在して $f(x_0,y_0)\neq 0$ であり、仮定より $f(x,y)$ は非負値なので $f(x_0,y_0)>0$ である。ここで $f(x,y)$ は連続関数なので (x_0,y_0) の近くで $f(x,y)\geq\frac{1}{2}f(x_0,y_0)$、より正確にはある半径 $r>0$ が存在して $D=\{(x,y)\in R\mid d((x_0,y_0),(x,y))\leq r\}$ 上で $f(x,y)\geq\frac{1}{2}f(x_0,y_0)$ とできる。よって、$f(x,y)$ を D 上では $\frac{1}{2}f(x_0,y_0)$ でその外側では 0 で下から抑えることで、

$$\iint_R f(x,y)dxdy\geq\iint_D\frac{1}{2}f(x_0,y_0)dxdy=\frac{1}{2}f(x_0,y_0)|D|>0$$

が成り立つが、これは仮定に反する。よって、$f(x,y)$ が R 上恒等的に 0 である。

宿題 $\boxed{4}$

x,y がそれぞれ区間 $(0,\frac{\pi}{2})$ を動くとき、次の関数 $f(x,y)$ の極大・極小を答えよ。

$$f(x,y)=\cos x+\cos y-\cos(x+y).$$

解答　$f(x,y)$ の 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y)=-\sin x+\sin(x+y),\quad f_y(x,y)=-\sin y+\sin(x+y).$$

ここから $(a,b)\in(0,\frac{\pi}{2})^2$ を極大・極小となる点とすると

$$f_x(a,b)=-\sin a+\sin(a+b)=0,\quad f_y(a,b)=-\sin b+\sin(a+b)=0 \tag{1}$$

を満たす。ここから $\sin a=\sin b=\sin(a+b)$ であり、$0<a,b<\frac{\pi}{2}$ なので、$a=b$。よって、$\sin a=\sin 2a=2\sin a\cos a$ であり、やはり $0<a<\frac{\pi}{2}$ なので $\sin a\neq 0$ で、$\cos a=\frac{1}{2}$ つまり $a=\frac{\pi}{3}$。以上より極大・極小となる点の候補は $(a,b)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ のみである。

$f(x,y)$ の 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x,y)=-\cos x+\cos(x+y),\quad f_{xy}(x,y)=f_{xy}(x,y)=\cos(x+y),\quad f_{yy}(x,y)=-\cos y+\cos(x+y).$$

よって、$(a,b)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ において

$$f_{xx}(x,y)=-1,\quad f_{xy}(x,y)=f_{xy}(x,y)=-\frac{1}{2},\quad f_{yy}(x,y)=-1.$$

ここで教科書第 6 章定理 14 を使うことを考えると、

$$D=f_{xy}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)=-\frac{3}{4}<0$$

かつ $f_{xx}(a,b)=-1<0$ なので、$(a,b)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ は極大点である。

以上より $f(x,y)$ は $(x,y)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ で極大となりその値は $f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$ で、極小はない。

注意　方程式 (1) は三角関数の和積公式を使って、

$$-\sin a+\sin(a+b)=2\cos\left(a+\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2}=0,\quad -\sin b+\sin(a+b)=2\cos\left(b+\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}=0$$

と変形することでも解くことができます。