2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 5 回（2021 年 6 月 16 日）宿題解答例

宿題 1

a, b を実数のパラメータとして、4 つの実数の未知数 x, y, z, w に関する次の連立一次方程式のすべての解を求めよ。

$$\begin{cases} 2y + 4z + 2w = 2, \\ -x + y + 3z + 2w = 2, \\ x + 2y + 3z + w = b, \\ -2x - y + aw = 1. \end{cases}$$

a, b の値によって、拡大係数行列の簡約形が変わり、状況が大きく変わってきます。

解答　拡大係数行列は次になり、行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ -2 & -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行を -1 倍したうえで第 1 行と入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ -2 & -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

$(1, 1)$ 成分を中心に掃き出して、

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+2 \\ 0 & -3 & -6 & a-4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$(2, 2)$ 成分を中心に掃き出して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで第 3 行が表す方程式は $0 = b - 1$ となるので、$b \neq 1$ の時は方程式は解を持たない。

以下では $b = 1$ の場合を考える。この時、第 3 行と第 4 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで $a = 1$ の時、この行列は以下になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって方程式は $x = z + w - 1,\ y = -2z - w + 1$ と同値で、解は s, t を実数として $(x, y, z, w) = (s + t - 1, -2s - t + 1, s, t)$。

$a \neq 1$ の時は $(3, 4)$ 成分を中心に掃き出して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって方程式は $x = z - 1,\ y = -2z + 1,\ w = 0$ と同値で、解は s を実数として $(x, y, z, w) = (s - 1, -2s + 1, s, 0)$。

以上より方程式の解は

- $b \neq 1$ の時解なし、
- $b = 1, a = 1$ の時 $(x, y, z, w) = (s + t - 1, -2s - t + 1, s, t)$ $(s, t \in \mathbb{R})$、
- $b = 1, a \neq 1$ の時 $(x, y, z, w) = (s - 1, -2s + 1, s, 0)$ $(s \in \mathbb{R})$。

2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 5 回（2021 年 6 月 16 日）宿題解答例

宿題 2

2×1 行列 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対して 2 つの行基本変形

- 1 つの行を何倍か（$\neq 0$ 倍）する
- 1 つの行に他の行の何倍かを加える

を何度か用いることで $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ に変形される、つまり行基本変形

- 2 つの行を入れ替える

は他の 2 つの行基本変形を使って実現できることを示せ。

解答　行列 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の下の行に上の行を足して、

$$\begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}.$$

上の行から下の行を引いて、

$$\begin{pmatrix} -b \\ a+b \end{pmatrix}.$$

下の行に上の行を足して、

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

上の行を -1 倍して、

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

これで上の行と下の行を入れ替えるという行基本変形を他の 2 つの行基本変形で実現できた。

注意　この問題は設定が甘く、例えば $a \neq 0, b \neq 0$ の時、上の行を b/a 倍、下の行を a/b 倍しても行の入れ替えができてしまいます。列数が 2 以上つまり a と b がベクトルの場合は解答例のようにする必要があります。