2019 年度応用数理 D 第 6 回レポート解答例

中安淳

2019 年 11 月 19 日

問題 1

微分方程式

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

を $x \in [0, 1]$ の範囲で数値的に解くことを考える。なお、厳密解は $y(x) = e^x - x - 1$ である。

(1) ステップ幅を $h = 0.2$ としてルンゲ・クッタ法を適用すると、y_n は

$$y_{n+1} = 1.2214 y_n + 0.04428 n + 0.0214$$

で与えられることを確かめよ。

(2) (1) の方法で y_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ を求め、厳密解との誤差を計算せよ。計算結果は小数点以下 6 桁に丸めて答えること。

問題 1 の解答

(1) $x_n = x_0 + hn = 0.2n$ に注意して、

$$k_1 = h(x_n + y_n) = 0.2 y_n + 0.04 n,$$

$$k_2 = h\left(x_n + \frac{1}{2}h + y_n + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.22 y_n + 0.044 n + 0.02,$$

$$k_3 = h\left(x_n + \frac{1}{2}h + y_n + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.222 y_n + 0.0444 n + 0.022,$$

$$k_4 = h\left(x_n + h + y_n + k_3\right) = 0.2444 y_n + 0.04888 n + 0.0444.$$

従って、

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.2214y_n + 0.04888n + 0.0214.$$

(2) $y_0 = 0$ に注意して計算すると、

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.0214, \\ y_2 &= 0.09181796, \\ y_3 &= 0.22210645634400003\cdots, \\ y_4 &= 0.42552082577856165\cdots, \\ y_5 &= 0.7182511366059351\cdots, \end{aligned}$$

また、厳密解の値は

$$\begin{aligned} y(x_1) &= 0.0214027581601699\cdots, \\ y(x_2) &= 0.09182469764127044\cdots, \\ y(x_3) &= 0.22211880039050902\cdots, \\ y(x_4) &= 0.42554092849246783\cdots, \\ y(x_5) &= 0.7182818284590451\cdots, \end{aligned}$$

よって小数点以下 6 桁に丸めて、

- y_1 の値は 0.021400 で誤差は 0.000003。
- y_2 の値は 0.091818 で誤差は 0.000007。
- y_3 の値は 0.222106 で誤差は 0.000012。
- y_4 の値は 0.425521 で誤差は 0.000020。
- y_5 の値は 0.718251 で誤差は 0.000031。