2019年度応用数理D第3回レポート解答例

中安淳

2019年10月18日

問題1

連立一次方程式

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 5x_2 + x_3 &= 7 \\
-6x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= -26 \\
4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 17
\end{aligned}
$$

をガウス消去法により解け。

問題1の解答

拡大係数行列を考え、行基本変形を行う。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ -6 & 4 & 6 & -26 \\ 4 & 1 & 3 & 17 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -26 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{（第 1 行と第 2 行を入れ替え）} \\
&\to \begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -26 \\ 0 & 23/3 & 5 & -31/3 \\ 4 & 1 & 3 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{（第 2 行に第 1 行の 4/6 倍を足す）} \\
&\to \begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -26 \\ 0 & 23/3 & 5 & -31/3 \\ 0 & 11/3 & 7 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{（第 3 行に第 1 行の 4/6 倍を足す）} \\
&\to \begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -26 \\ 0 & 23/3 & 5 & -31/3 \\ 0 & 0 & 106/23 & 106/23 \end{pmatrix} \quad \text{（第 3 行から第 2 行の 11/23 倍を引く）}
\end{aligned}
$$

よって第 3 行より、

$$\frac{106}{23}x_3 = \frac{106}{23}, \quad \therefore x_3 = 1.$$

第 2 行より、

$$\frac{23}{3}x_2 + 5x_3 = -\frac{31}{3}, \quad \therefore x_2 = -2.$$

第 1 行より、

$$-6x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -26, \quad \therefore x_1 = 4.$$

以上より解は

$$(x_1, x_2, x_3) = (4, -2, 1)$$

である。

問題 2

行列

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 4 \\ 10 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

を LU 分解せよ。ただし、下三角行列 L の対角成分が 1 となるように分解すること。

問題 2 の解答

LU 分解を

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 4 \\ 10 & 13 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

とおく。

順番に計算すると、$u_{11} = 5,\ u_{12} = 4,\ u_{13} = 1$ で、$l_{21}u_{11} = 10$ より $l_{21} = 2$、$l_{21}u_{12} + u_{22} = 9$ より $u_{22} = 1$、$l_{21}u_{13} + u_{23} = 4$ より $l_{23} = 2$、$l_{31}u_{11} = 10$ より $l_{31} = 2$、$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 13$ より $l_{32} = 5$、$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 15$ より $u_{33} = 3$ がわかる。

よって、

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 10 & 9 & 4 \\ 10 & 13 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である。