

問題 1

- (1) $\iint_D (1+x+y+xy)dxdy$ ($D = [1, 2] \times [3, 4]$).
- (2) $\iint_D x^2ye^{xy^2}dxdy$ ($D = [0, 1] \times [0, 1]$).

x の積分を先に計算しても y の積分を先に計算しても結果は同じですが、計算量が変わることがあります。今回の問題の (2) では原始関数が求めやすい y の積分を先にすると楽です。

解答

(1) y で先に積分すると、

$$\begin{aligned}\iint_{[1,2] \times [3,4]} (1+x+y+xy)dxdy &= \int_1^2 \left\{ \int_3^4 (1+x+y+xy)dy \right\} dx = \int_1^2 \left[y+xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}xy^2 \right]_3^4 dx \\ &= \int_1^2 \left(1+x + \frac{7}{2} + \frac{7}{2}x \right) dx = \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{7}{4}x^2 \right]_1^2 \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{7 \cdot 3}{4} = \frac{45}{4}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{45}{4}$ 。

(2) y で先に積分すると、

$$\int x^2ye^{xy^2}dy = \frac{1}{2}xe^{xy^2} + C$$

より、

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} x^2ye^{xy^2}dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 x^2ye^{xy^2}dy \right\} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xe^{xy^2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}x \right) dx.$$

ここで、

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

より、

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} x^2ye^{xy^2}dxdy = \left[\frac{1}{2}(xe^x - e^x) - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

よって答えは $\frac{1}{4}$ 。

問題 2

積分

$$\int_0^1 \left\{ \int_x^1 e^{-y^2} dy \right\} dx$$

を計算せよ。

e^{-y^2} はガウス関数と呼ばれ不定積分を計算するのは困難なので、 x で先に積分しましょう。解答例では式でさらっと書いていますが、積分領域は図にするとわかりやすいです。

解答 y で先に積分することを考えると、重積分としての積分領域は

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

なので、

$$\int_0^1 \left\{ \int_x^1 e^{-y^2} dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^y e^{-y^2} dx \right\} dy = \int_0^1 ye^{-y^2} dy = \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

よって答えは $\frac{e-1}{2e}$ 。