

# 2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

## 第 6 回問題と宿題 \*

中安淳

2023 年 6 月 20 日

### 問題 23

$(m, n)$  行列が次の条件を満たす時、階段行列と呼ぶことにする。

各行（第  $i$  行）に対して成分が非零である一番左の列を第  $j(i)$  列として（ただし全ての成分が零の時は  $j(i) = \infty$  とする）、 $j(i)$  は単調増加かつ第  $j(i)$  列は第  $i$  行だけが 1（主成分という）でそれ以外はすべて零である。

任意の  $(m, n)$  行列は行に関する基本変形のみを使って  $(m, n)$  階段行列に変形でき、得られる階段行列は一意であることが知られている（中安淳、線形代数学、<https://ankys.github.io/notes/linat.pdf>、定理 3.3.2 あたり参照）。

ここで次の形の行列は階段行列であることを示し、その階数を求めて主成分の個数に等しいことを確認せよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 問題 24

次の 4 次正方行列の階数（ $a$  に依存する）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

### 宿題 25

次の 4 次正方行列の階数（ $a$  に依存する）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

### 宿題 26

行に関する基本変形

- 第  $i$  行と第  $j$  行を入れかえる

は実は他の二つの行に関する基本変形

- 第  $i$  行を  $c$  倍する ( $c \neq 0$ ) と
- 第  $i$  行に第  $j$  行の  $c$  倍を加える ( $i \neq j$ )

のみを用いることでも実現できる。このことを踏まえて、基本行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を他の基本行列

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

の積として表せ。