2023年度京都大学線形代数学（演義）A
第6回問題解答例

中安淳

2023年6月20日

問題 23

(m,n) 行列が次の条件を満たす時、階段行列と呼ぶことにする。

> 各行（第 i 行）に対して成分が非零である一番左の列を第 $j(i)$ 列として（ただし全ての成分が零の時は $j(i)=\infty$ とする）、$j(i)$ は単調増加かつ第 $j(i)$ 列は第 i 行だけが 1（主成分という）でそれ以外はすべて零である。

任意の (m,n) 行列は行に関する基本変形のみを使って (m,n) 階段行列に変形でき、得られる階段行列は一意であることが知られている（中安淳、線形代数学、`https://ankys.github.io/notes/linat.pdf`、定理 3.3.2 あたり参照）。
ここで次の形の行列は階段行列であることを示し、その階数を求めて主成分の個数に等しいことを確認せよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解答　与えられた $(4,6)$ 行列について $j(i)$ を求めると、

$$j(1)=2,\quad j(2)=3,\quad j(3)=5,\quad j(4)=\infty$$

で単調増加である。また、主成分の第 $(1,2),(2,3),(3,5)$ 成分を見るとその上下の成分はすべて 0 であるので、この行列は階段行列である。

主成分の第 $(1,2),(2,3),(3,5)$ 成分をかなめとしてその行を掃き出して列の並びを整えると、この行列は次の標準形に変形される。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって階数は 3 であり、これは主成分の個数に等しい。

問題 24

次の 4 次正方行列の階数（a に依存する）を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

主成分の候補になる成分が 0 になる場合を注意しましょう。

解答　与えられた行列を基本変形していく。まず、第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の a 倍を引き、第 3 行から第 1 行を引き、第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

ここで、$a=1$ の時、この行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので、階数は 1 である。

以下では $a\neq 1$ の時を考える。第 2 行と第 3 行と第 4 行を $1-a\neq 0$ で割って、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 2 行の $1+a$ 倍を引き、第 4 行から第 2 行を引

いて、

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & a+2 & 1\end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行の $a+2$ 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+3\end{pmatrix}.$$

よって、$a+3=0$ の時は階数は 3 で、そうでない場合は 4 である。

以上より求める階数は、$a=1$ の時 1 で、$a=-3$ の時 3 で、どちらでもない場合は 4 である。

この問題には別解として「全ての行を足し合わせる」という以下の解法が知られています。

別解　第 1 行に他の行を足して、

$$\begin{pmatrix}a+3 & a+3 & a+3 & a+3\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

ここで $a+3=0$ の時つまり $a=-3$ の時を考えると、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

第 3 行から第 2 行を引き、第 4 行から第 2 行を引いて、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行を 4 で割って、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

第 4 行から第 3 行を引いて、

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

よって、階数は 3 である。

一方で $a+3\neq 0$ の時は、第 1 行を $a+3$ で割って、

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

第 2 行、第 3 行、第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}.$$

よって、$a-1=0$ の時は階数は 1 で、そうでない場合は 4 である。

以上より求める階数は、$a=-3$ の時 3 で、$a=1$ の時 1 で、どちらでもない場合は 4 である。

注意　この問題は 4 次から n 次正方行列

$$\begin{pmatrix}a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & a\end{pmatrix}.$$

に一般化することができ $(n=2,3,\cdots)$、階数は $a=1$ の時 1、$a=1-n$ の時 $n-1$、それら以外の時 n となります。