2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2022 年 10 月 25 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $n \to \infty$ としたときに与えられた区間 $I$ 上である関数 $f(x)$ に各点収束する。その関数 $f(x)$ を求めて、収束が一様収束であるかどうか答えよ。

(1) $f_n(x) = x^n$, $x \in I = [0, 1)$.

(2) $f_n(x) = n \sin \dfrac{1}{nx}$, $x \in I = [1, \infty)$.

(3) $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$, $x \in I = \mathbb{R}$.

(4) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+(k-1)x)(1+kx)}$, $x \in I = (0, \infty)$.

$x \in I$ を固定するごとに $f_n(x) \to f(x)$ の時各点収束、上限を取って $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ の時一様収束と言うのでした。

**解答**

(1) $0 \le x < 1$ の時 $f_n(x) = x^n \to 0$ なので、

$$f(x) = 0.$$

また、

$$f_n(x) - f(x) = x^n$$

なので、1 に近い $x$ を考えて、

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1.$$

したがって、一様収束ではない。

(2) 計算すると

$$f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}}.$$

$n \to \infty$ で $\frac{1}{nx} \to 0$ より、$f_n(x) \to \frac{1}{x}$。よって、$f(x) = \frac{1}{x}$。また、

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{x} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left( \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} - 1 \right).$$

ここで、不等式 $y - \frac{1}{6}y^3 \le \sin y \le y$ $(y \ge 0)$ を用いる（この不等式の証明は微分を 3 回行えばよい）と $-\frac{1}{6}y^2 \le \frac{\sin y}{y} - 1 \le 0$ $(y > 0)$ より、

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in[1,\infty)} \frac{1}{x} \frac{1}{6} \frac{1}{n^2 x^2} = \frac{1}{6} \frac{1}{n^2} \to 0.$$

よってはさみうちの原理より $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ なので、一様収束である。

(3) $\frac{x^2}{n} \ge 0$ より、

$$0 \le f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

よって、$f(x) = 0$ であり、上の式において $\frac{1}{\sqrt{n}}$ は $x$ に依らないので、一様収束も言えた。

(4) 計算すると

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+(k-1)x)(1+kx)} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{1+(k-1)x} - \frac{1}{1+kx} \right) = 1 - \frac{1}{1+nx}.$$

これは $x > 0$ の時 1 に収束するので、

$$f(x) = 1.$$

また、

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx}$$

であり、$x \in (0, \infty)$ での上限を考えると、0 に近い $x$ を考えて、$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 1$。したがって、一様収束ではない。

問題 $\boxed{2}$

次の極限を計算せよ。ただし、$n$ は非負の整数を動くものとする。

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^e \frac{n}{\sin x + nx}dx.$$

極限と積分の順序交換をしたいときには、まず各点収束先（極限関数）を計算し、次いで一様収束であることを示して、順序交換するという流れを意識しましょう。

**解答**　$x \in [1, e]$ に対して、$\sin x \geq \sin e > 0$ であることに注意する。

$f_n(x) = \frac{n}{\sin x + nx}$ とおくと、各 $x \in [1, e]$ に対して

$$f_n(x) = \frac{1}{n^{-1}\sin x + x} \to \frac{1}{x}$$

より、$\{f_n(x)\}$ は $f(x) = \frac{1}{x}$ に各点収束する。

次に $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[1, e]$ 上一様収束することを示す。

$$f_n(x) - f(x) = \frac{n}{\sin x + nx} - \frac{1}{x} = \frac{-\sin x}{x(\sin x + nx)}$$

なので、

$$\sup_{x\in[1,e]}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,e]}\frac{\sin x}{x(\sin x + nx)} \leq \frac{1}{\sin e + n}.$$

$n \to \infty$ とすると最右辺は 0 に収束するので、はさみうちの原理より $\sup_{x\in[1,e]}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ であり、$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[1, e]$ 上一様収束する。

したがって、極限と積分の順序交換（教科書第 5 章定理 10）ができて、

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^e \frac{n}{\sin x + nx}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\log x]_1^e = 1.$$