2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 2 回（2022 年 5 月 11 日）問題解答例

問題$\boxed{1}$

次の集合の最大値、最小値、上限、下限を（あったら）求めよ。

(1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 < 0\}$.
(2) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$. （$\mathbb{Q}$ は有理数の集合であることに注意。）
(3) $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\}$.

解答

(1) 二次不等式 $x^2 - 7x + 10 < 0$ を解くと、$2 < x < 5$ より、与えられた集合は開区間 $(2, 5)$ である。よって、最大値はなく、最小値もなく、上限は 5 で、下限は 2 である。

(2) この集合は閉区間 $[0, \sqrt{2}]$ のうち有理数の部分である。0 は有理数なので、最小値は 0 で下限も 0 である。一方で $\sqrt{2}$ は無理数なので $\sqrt{2}$ は最大値にならないが、有理数の稠密性から上限は $\sqrt{2}$ であることを示す。
実際、問題の集合の元はすべて $\sqrt{2}$ 以下であり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$a = \frac{\max\{0, \sqrt{2}-\varepsilon\} + \sqrt{2}}{2}$ で ε を $\sqrt{2} - a$ として教科書注意 1.3.8（有理数の稠密性）を用いると $|b - a| < \sqrt{2} - a$ となる有理数 b が存在する。ここから $0 < b < \sqrt{2}$ と $\sqrt{2} - \varepsilon < b$ が従うので、教科書定義 1.3.6 より上限は $\sqrt{2}$ である。一方で上で述べた通り $\sqrt{2}$ は最大値にならないので、最大値はない。

(3) $a_n = \frac{n-1}{n}$ とおくと問題の集合は $\{a_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ である。この時、数列 (a_n) は単調増加であることに注意する。そのため、最小値は初項の 0 であり、下限も 0 である。次に上限が極限の 1 であることを示す。まず、各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $a_n = \frac{n-1}{n} < 1$ である。極限の定義より任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 N が存在して任意の自然数 $n \geq N$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ である。特に $1 - \varepsilon < a_N$ なので、教科書定義 1.3.6 より上限は 1 である。一方で $\frac{n-1}{n} < 1$ より 1 は最大値にならないので、最大値はない。

注意　(2) の解答において a の取り方で max を使っているのは、本当は $\sqrt{2} - \varepsilon$ にしたいが今回の集合が下限 0 のあるものになっていてはみ出る可能性があるためです。なお、有理数の稠密性は

任意の実数 $a < b$ に対して、$a < x < b$ となる有理数 x が存在する。

と言い換えることができ、こちらの定式化だと a として $\max\{0, \sqrt{2} - \varepsilon\}$、$b$ として $\sqrt{2}$ と取ればよく、解答が読みやすいかもしれません。

問題 $\boxed{2}$

次の級数はともに絶対収束することを示し、その和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc^n \ (|c| < 1)$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$.

解答

(1) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n|c|^n$ の部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n|c|^n$ を考える $(N = 1, 2, 3, \cdots)$。ここで、

$$S_N = |c| + 2|c|^2 + \cdots + (N-1)|c|^{N-1} + N|c|^N,$$
$$|c|S_N = |c|^2 + 2|c|^3 + \cdots + (N-1)|c|^N + N|c|^{N+1}$$

より引くことで

$$(1-|c|)S_N = |c| + |c|^2 + \cdots + |c|^N - N|c|^{N+1} = \frac{|c| - |c|^{N+1}}{1-|c|} - N|c|^{N+1}.$$

よって、

$$S_N = \frac{|c| - |c|^{N+1}}{(1-|c|)^2} - \frac{N|c|^{N+1}}{1-|c|} < \frac{|c|}{(1-|c|)^2}$$

したがって、正項級数の部分和 S_N が上に有界より収束するのでもとの級数は絶対収束する。その和は同様の計算をすることにより

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc^n = \lim_{N\to\infty} \frac{c - c^{N+1}}{(1-c)^2} - \frac{Nc^{N+1}}{1-c} = \frac{c}{(1-c)^2}.$$

(2) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ の部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$ を考える $(N = 1, 2, 3, \cdots)$。部分分数分解 $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$ により、

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

よって、正項級数の部分和 S_N が有界より収束するのでもとの級数は絶対収束する。その和は奇数番目の項と偶数番目の項を分けて同様の計算をすることにより、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+2)} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2K+1}\right) - \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2K+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$