

2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

第 4 回問題と宿題 *

中安淳

2023 年 5 月 23 日

問題 15

\mathbb{R}^2 の任意の元は次の 2 つのベクトルの線形結合として表されることを示せ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

宿題 17

a, b を $(a, b) \neq (0, 0)$ を満たす実数として、平面上の原点を通る直線 $\ell : ax + by = 0$ を考える。平面上の点 (x, y) から ℓ へ引いた垂線と ℓ の交点を (s, t) とする時、 (x, y) を (s, t) に対応させる写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は線形写像であることを示し、 f を表現する行列 A を求めよ。

問題 16

次の数ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の部分集合はいずれも \mathbb{R}^3 の和とスカラー倍について線形空間になっていないことを示せ。

- (1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.
- (2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z^2\}$.
- (3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 = z^2\}$.
- (4) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

宿題 18

複素数 $z = x + yi$ に対して複素共役 $\bar{z} = x - yi$ を対応させる写像 f は、複素数の集合を \mathbb{R} 上の線形空間 \mathbb{R}^2 と見た時は線形写像であるが、 \mathbb{C} 上の線形空間 \mathbb{C}^1 と見た時は線形写像でないことを示せ。つまり、

$$f_{\mathbb{R}} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, -y) \in \mathbb{R}^2$$

は線形写像だが、

$$f_{\mathbb{C}} : z \in \mathbb{C}^1 \rightarrow \bar{z} \in \mathbb{C}^1$$

は線形写像でないことを示せ。