2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 7 回（2021 年 1 月 19 日）問題解答例

問題 1

E を y 軸と直線 $y=1$ と直線 $y=x$ で囲まれた領域とするとき、重積分

$$\iint_E e^{-y^2}dxdy$$

を計算せよ。

e^{-y^2} はガウス関数と呼ばれ不定積分を計算するのは困難なので、x で先に積分しましょう。解答例では領域の定式化を式でさらっと書いていますが、図に書くとわかりやすいです。

解答　x で先に積分することを考えると、

$$E=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\le 1,\ y\ge x\}=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$$

なので、

$$\iint_E e^{-y^2}dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^y e^{-y^2}dx\right\}dy=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}=\frac{e-1}{2e}.$$

問題 2

重積分

$$\iint_{[0,1]^2}\max\{x^2,y\}dxdy$$

を計算せよ。ただし、$\max\{x^2,y\}$ は x^2 と y のうち値の大きいものを表す。

解答　まず領域 $[0,1]^2$ を $E_1=\{(x,y)\in[0,1]^2\mid y\le x^2\}$ と $E_2=\{(x,y)\in[0,1]^2\mid y\ge x^2\}$ に分けると、

$$\max\{x^2,y\}=\begin{cases}x^2 & ((x,y)\in E_1),\\ y & ((x,y)\in E_2)\end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}\max\{x^2,y\}dxdy&=\iint_{E_1}x^2dxdy+\iint_{E_2}ydxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{x^2}x^2dy\right\}dx+\int_0^1\left\{\int_{x^2}^1 ydy\right\}dx\\&=\int_0^1\left[x^2y\right]_0^{x^2}dx+\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^1dx=\int_0^1 x^4dx+\int_0^1\frac{1}{2}(1-x^4)dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1+x^4)dx\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

注意　（2022 年 1 月 24 日追記）ちなみに $y=x^2$ を $x=\sqrt{y}$ とみなせば、x で先に積分して次のように計算することも可能です。

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}\max\{x^2,y\}dxdy&=\iint_{E_1}x^2dxdy+\iint_{E_2}ydxdy=\int_0^1\left\{\int_{\sqrt{y}}^1 x^2dx\right\}dy+\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{y}}ydx\right\}dy\\&=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{y}}^1dy+\int_0^1\left[yx\right]_0^{\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{1}{3}\left(1-y^{\frac{3}{2}}\right)dy+\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy=\int_0^1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)dy\\&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$