2022年度京都大学微分積分学(演義)B(中安淳担当)第2回(2022年10月25日)問題と宿題(2022年11月1日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{1}$

次の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $n \to \infty$ としたときに与えられた区間 I 上である関数 $f(x)$ に各点収束する。その関数 $f(x)$ を求めて、収束が一様収束であるかどうか答えよ。

(1) $f_n(x) = x^n$, $x \in I = [0,1)$.

(2) $f_n(x) = n \sin \dfrac{1}{nx}$, $x \in I = [1,\infty)$.

(3) $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$, $x \in I = \mathbb{R}$.

(4) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+(k-1)x)(1+kx)}$, $x \in I = (0,\infty)$.

2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2022 年 10 月 25 日）問題と宿題（2022 年 11 月 1 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{2}$

次の極限を計算せよ。ただし、n は非負の整数を動くものとする。

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^e \frac{n}{\sin x + nx}dx.$$

2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2022 年 10 月 25 日）問題と宿題（2022 年 11 月 1 日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{3}$

有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続な関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ がある連続な関数 $f(x)$ に $[a, b]$ 上一様収束するとする。このとき、不定積分 $F_n(x) = \int_a^x f_n(x)dx$ で定まる（連続な）関数の列 $\{F_n(x)\}_n$ も不定積分 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ に $[a, b]$ 上一様収束することを示せ。

2022 年度京都大学微分積分学(演義)B(中安淳担当)第 2 回(2022 年 10 月 25 日)問題と宿題(2022 年 11 月 1 日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{4}$

以下の級数は絶対収束か条件収束か発散かそれぞれ答えてそのことを示せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^2}$.