宿題 $\boxed{3}$

a を正の定数として円板 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$ 上の曲面 $z = f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ を考える。このとき、xy 平面と曲面 $z = f(x,y)$ で囲まれる体積

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

と曲面 $z = f(x,y)$ の表面積

$$\iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}dxdy$$

をそれぞれ計算せよ。

半径 a の球の半分の体積と表面積を求める問題です。今回の問題のように積分領域が円板の場合は多くの場合極座標変換が有効です。

解答　極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をすると、xy 座標で D に対応する $r\theta$ 座標での領域は $E = [0,a]\times[0,2\pi]$ であり、ヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r.$$

である。

このことからまず体積 V は

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = \int_0^a \left\{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-r^2}rd\theta\right\}dr = 2\pi\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr$$

ここで $t = r^2$ と置換すると

$$V = \pi\int_0^{a^2} \sqrt{a^2-t}dr = \pi\int_0^{a^2} (a^2-t)^{\frac{1}{2}}dr = \pi\left[-\frac{2}{3}(a^2-t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{a^2} = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

また、表面積 A について、偏導関数を計算すると

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

より、

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}dxdy = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = \int_0^a\left\{\int_0^{2\pi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}d\theta\right\}dr \\ &= 2\pi\int_0^a \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr = 2\pi\left[-a\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

以上より答えは体積が $\frac{2}{3}\pi a^3$ で表面積が $2\pi a^2$ である。

注意　厳密には表面積の被積分関数 $\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ は境界で発散しているので、$D_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a-n^{-1}\}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ などの D の近似列を取る必要があります。

宿題 $\boxed{4}$

円板 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ 上の曲面 $z = f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$ を考える。このとき、xy 平面と曲面 $z = f(x,y)$ で囲まれる体積

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

と曲面 $z = f(x,y)$ の表面積

$$\iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}dxdy$$

をそれぞれ計算せよ。ただし $(x,y) = (0,0)$ で $f(x,y)$ が定義されないのでこれらは広義重積分になっていることに注意する。

この問題の図形はガブリエルのラッパと呼ばれる（集合として有界でないと）体積は有限だが表面積は無限になることがあるという例です。表面積の積分は計算が難しい形になりますが、無限大に発散することを念頭に不等式で評価すると答案が楽に書けます。

解答　$f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で定義されていないので、D の近似列として $D_n = \{(x,y) \mid n^{-1} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ を考える $(n = 1,2,3,\cdots)$。

極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をすると、体積 V は

$$V = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{n^{-1}}^1\left\{\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r}-1\right)rd\theta\right\}dr$$
$$= \lim_{n\to\infty}2\pi\int_{n^{-1}}^1(1-r)dr = 2\pi\int_0^1(1-r)dr = 2\pi\left(1-\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

表面積 A は偏導関数を計算すると

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}^3},$$

$$\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^3}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2+1}}{x^2+y^2}$$

なので、

$$A = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2+1}}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{n^{-1}}^1\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{r^4+1}}{r}d\theta\right\}dr$$
$$= \lim_{n\to\infty}2\pi\int_{n^{-1}}^1\frac{\sqrt{r^4+1}}{r}dr.$$

ここで $\frac{\sqrt{r^4+1}}{r} \geq \frac{1}{r}$ で

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n^{-1}}^1\frac{1}{r}dr = \lim_{n\to\infty}[\log r]_{n^{-1}}^1 = \lim_{n\to\infty}\log n = +\infty$$

なので、$A = +\infty$ である。

以上より答えは体積が π で表面積が正の無限大に発散である。

注意　不定積分 $\int\frac{\sqrt{r^4+1}}{r}dr$ は計算できないわけではなくて、$t = r^4$ と置換したのち $s = \sqrt{t+1}$ とすれば

$$\int\frac{\sqrt{r^4+1}}{r}dr = \frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{t+1}}{t}dr = \frac{1}{2}\int\frac{s^2}{s^2-1}dr = \cdots = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r^4+1}-\tanh^{-1}\sqrt{r^4+1}\right)+C$$

と計算できるようです。