2021年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第1回（2021年4月14日）宿題解答例

**宿題 1**

$X, Y$ を集合、$f : X \to Y$ を $X$ から $Y$ への写像とする。$X$ の部分集合 $A$ に対して、$Y$ の部分集合 $f(A)$ を以下で定め $A$ の像と呼ぶ。

$$f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}.$$

この時、$X$ の任意の部分集合 $A, B$ について

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

が成り立つことを示せ。

**解答**　まず、$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ を示す。$y \in f(A \cup B)$ とすると、$y = f(x)$ となる $x \in A \cup B$ が存在する。ここで、$x \in A$ の時 $y \in f(A)$、$x \in B$ の時 $y \in f(B)$ なので、$y \in f(A) \cup f(B)$ である。以上より $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ が示された。

次に、$f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ を示す。$y \in f(A)$ とすると、$y = f(x)$ となる $x \in A$ が存在する。ここで $A \subset A \cup B$ より $x \in A \cup B$ なので $y \in f(A \cup B)$ である。同様にして、$y \in f(B)$ とすると、$y = f(x)$ となる $x \in B \subset A \cup B$ が存在するので、$y \in f(A \cup B)$ である。以上より $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ がわかる。

以上より $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ が示された。

**宿題 2**

$x$ を集合 $X$ の元として、$A, B$ を $X$ の部分集合とする。この時、「$x \in A$ ならば $x \in B$」という命題が真になるための $x$ についての必要十分条件を求めよ。

**解答**　$x \in A^c \cup B$.（ただし、$A^c$ は $A$ の補集合。）

**解説**　$x \in A \cap B$ ならば命題は真ですが、$x \notin A$ の時も命題の前提が成り立たないので命題自体は真です。