2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 3 回（2021 年 11 月 17 日）宿題解答例

宿題 1

2 変数関数

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (x \in \mathbb{R}, y > 0)$$

の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を計算せよ。

解答　$f(x,y) = y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ の偏導関数を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-2x}{4y} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}} = -\frac{1}{2} x y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} + y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{4y^2} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}} = \left(-\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^2 y^{-\frac{5}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} - \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{-2x}{4y} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}} = \left(-\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} x^2 y^{-\frac{5}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

注意　結果として、f は y についての 1 階偏導関数と x についての 2 階偏導関数が等しい、つまり $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を満たす特別な関数であることがわかります。この $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ は熱伝導の方程式や熱方程式、拡散方程式など呼ばれ、$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ のことをその基本解と言います。

宿題 2

2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は実は原点 $(0,0)$ で連続でない。このことについて次の問いに答えよ。

(1) 実数 θ を固定し、$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ として r を 0 に近づける時の $f(x,y)$ の極限を求めよ。
(2) $y = x^2$ を満たしながら (x,y) を $(0,0)$ に近づける時の $f(x,y)$ の極限を求めよ。

解答

(1) $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ の時を考えて、

$$f(x,y) = \frac{r^3 \cos^2\theta \sin\theta}{r^4 \cos^4\theta + r^2 \sin^2\theta} = \frac{r \cos^2\theta \sin\theta}{r^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta}.$$

ここで $\sin\theta = 0$ の時、$f(x,y) = 0$ である。$\sin\theta \neq 0$ の時、$r \to 0$ とすると分母は $r^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta \to \sin^2\theta \neq 0$ で分子は $r\cos^2\theta \sin\theta \to 0$ なので、$f(x,y) \to 0$ である。よって、θ によらず極限は 0 である。

(2) $y = x^2$ の時を考えて、

$$f(x,y) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

よって、極限は $\frac{1}{2}$ である。