2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 6 回（2022 年 6 月 29 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の不定積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx.$$

一次式の累乗根を含む積分はそれを別の文字で置換するのでした。

解答　$t = \sqrt[3]{x}$ とおくと、$x = t^3$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2$ より、

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx = \int \frac{t}{t^3-1} \cdot 3t^2 dt = \int \frac{3t^3}{t^3-1}dt.$$

ここで $\frac{3t^3}{t^3-1}$ を部分分数分解して

$$\frac{3t^3}{t^3-1} = 3 + \frac{3}{(t-1)(t^2+t+1)} = 3 + \frac{A}{t-1} + \frac{B(2t+1)}{t^2+t+1} + \frac{C}{t^2+t+1}$$

となったとすると、$A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$ である。また、

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{\frac{4}{3}}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

なので、

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx &= \int \left(3 + \frac{A}{t-1} + \frac{B(2t+1)}{t^2+t+1} + \frac{C}{t^2+t+1}\right)dt \\ &= 3t + A\log|t-1| + B\log(t^2+t+1) + C\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= 3\sqrt[3]{x} + \log|\sqrt[3]{x}-1| - \frac{1}{2}\log(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) - \sqrt{3}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 6 回（2022 年 6 月 29 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{4}$

(1) $f(x)$, $g(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とする。任意の実数 t に対して $\int_a^b (f(x)t + g(x))^2 dx \geq 0$ が成り立つことから、コーシー・シュワルツの不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

を示せ。

(2) 不等式

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

を示せ。

解答

(1) 任意の実数 t に対して

$$\int_a^b (f(x)t + g(x))^2 dx = \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)t^2 + 2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)t + \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right) \geq 0$$

なので、t^2 の係数が正の場合は二次式の判別式が正でないことから

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

が成立する。t^2 の係数が 0 の場合は t の係数も 0 でないとならないのでやはり成立する。

(2) コーシー・シュワルツの不等式で $[a, b] = [0, 1]$、$f(x) = \sqrt{1-x^4}$、$g(x) = 1$ とすることで

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx \leq \sqrt{\int_0^1 (1-x^4)dx} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

を得る。