2022年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第7回（2022年7月13日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の広義積分は収束するか発散するか答えよ。

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx.$$

この積分は正規分布や標準偏差とかかわりのある由緒正しい積分です。

解答　ある定数 C を使って $0 \leq x^2 e^{-x^2} \leq \frac{C}{x^2}$ となることを示す。そのためには関数 $x^4 e^{-x^2}$ が有界を示せばよく、$y \geq 0$ に対して関数 $g(y) = y^2 e^{-y}$ が有界を示せばよい。実際、微分を計算すると

$$g'(y) = 2ye^{-y} - y^2 e^{-y} = (2-y)ye^{-y}$$

より、$g(y)$ は $[0,2]$ で単調増加し $[2,\infty)$ で単調減少するので、$g(y) \leq g(2) = 4e^{-2}$。したがって $C = 4e^{-2}$ とすれば $0 \leq x^2 e^{-x^2} \leq \frac{C}{x^2}$ が成立する。ここで広義積分 $\int_1^\infty \frac{C}{x^2} dx$ は収束するので、広義積分 $\int_1^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ も収束する。残った $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ は有界閉区間上の連続関数の定積分である。以上より広義積分 $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ は収束することがわかった。

別解　関数 e^y にテイラーの定理を用いると $y \geq 0$ に対して $0 < \theta < 1$ が存在して

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{e^{\theta y}}{3!}y^3 > \frac{1}{2}y^2$$

よって $y = x^2$ として整理して、$x^2 e^{-x^2} \leq \frac{2}{x^2}$ を得る。以下は同様なので省略。

宿題 $\boxed{4}$

(1) 次の定積分の値を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + \sin 2\pi y} dy.$$

(2) 次の極限の値を計算せよ。ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{2 + \sin 2\pi nx} dx.$$

(1) は $\sin 2\pi y$ の積分なので $t = \tan \pi y$ と置換するのがセオリーですが、tan の不連続性に注意してください。

解答

(1) 計算する積分を I とおくと、

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2+\sin 2\pi y} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2+\sin 2\pi y} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2+\sin 2\pi y} dy + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{2+\sin 2\pi y} dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2+\sin 2\pi y} dy.$$

$t = \tan \pi y$ と置換すると、$\frac{dt}{dy} = \frac{\pi}{\cos^2 \pi y} = \pi(\tan^2 \pi y + 1) = \pi(t^2+1)$ で $\sin 2\pi y = 2\sin \pi y \cos \pi y = 2\tan \pi y \cos^2 \pi y = \frac{2t}{t^2+1}$ より、

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2 + \frac{2t}{t^2+1}} \frac{1}{\pi(t^2+1)} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi(t^2+t+1)} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi((t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})} dt \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1} \mathrm{Tan}^{-1} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right]_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(2) 各 n に対して $y = nx$ と置換すると

$$\int_0^1 \frac{x}{2+\sin 2\pi nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{\frac{y}{n}}{2+\sin 2\pi y} dy = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{\frac{y}{n}}{2+\sin 2\pi y} dy = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\frac{y+k-1}{n}}{2+\sin 2\pi y} dy.$$

ここで $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{2+\sin 2\pi y} dy$, $I_2 = \int_0^1 \frac{y}{2+\sin 2\pi y} dy$ とおくとこれらは n, k によらない定積分なので実数定数で、

$$\int_0^1 \frac{x}{2+\sin 2\pi nx} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} I_2 + \frac{k-1}{n} I_1 = \frac{1}{n} \left(I_2 + \frac{1}{2}(n-1) I_1 \right) \to \frac{1}{2} I_1 \quad (n \to \infty).$$

よって、(1) より $I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であることから問題の答えは $\frac{1}{2\sqrt{3}}$。