2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 7 回問題解答例

中安淳

2023 年 7 月 14 日

問題 $\boxed{27}$

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について行列式

$$\det(P^{-1}AP)$$

の値を求めよ。逆行列 P^{-1} の存在は認めてよい。

行列の積や逆行列を計算する前にある程度式変形しましょう。

解答 積の行列式より

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

なので、A の行列式を計算すればよい。サラスの公式より計算すると

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 8 - 6 + 9 + 4 + 8 = 1.$$

よって答えは 1 である。

注意 ちなみにがんばって計算すると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

がわかります。

問題 $\boxed{28}$

対角成分が全て 2 で、その隣の成分が全て 1 で、その他の成分が全て 0 である、次の n 次正方行列の行列式の値 d_n を求めよ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)。

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

解答 第 1 行に関する余因子展開をして、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

さらに一番後ろの行列を第 1 列について余因子展開して、

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

以上により、漸化式

$$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

を得る。この漸化式を解くことを考えると、まず $d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2}$ と変形でき、$d_n - d_{n-1} = d_2 - d_1$ を得る。ここで、$d_1 = 2$, $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ なので、

$$d_n - d_{n-1} = 1$$

である。よって、d_n は初項が $d_1 = 2$ で公差が 1 の等差数列なので

$$d_n = n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。