粘性解の安定性の応用と一般化

Application and generalization of stability of viscosity solutions

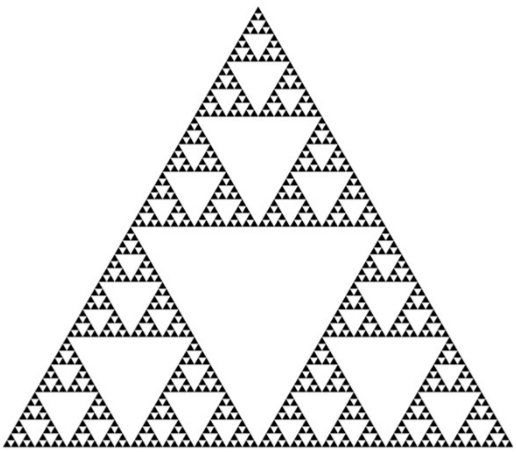
中安淳（数学教室）

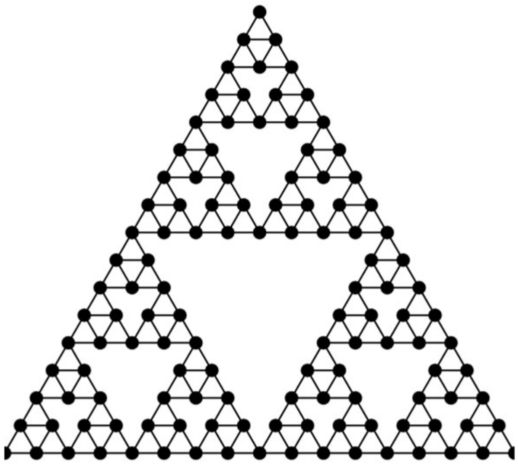
導入

- 問題：シェルピンスキーのガスケット(X, d)と前フラクタル(X_n, d_n)について、(X_n, d_n)上のハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解u_nが(X, d)上の方程式の距離粘性解uに収束するか
- 応用上の意義：フラクタルのような複雑な系を模した空間上の（偏微分）方程式をより計算可能な空間上の方程式で近似する

背景

- 近年の粘性解の理論の発展により非ユークリッド空間上の（ハミルトン・ヤコビ）方程式を考えられるようになった
- 自然な流れとして安定性を空間に関して示す
- 従来の方法では定義域が変形される時は変数変換して空間を整えることが多かったが、本研究ではそれでは対処できない問題について考える





$u + H(x, |\nabla u|) = 0 \text{ in } (X, d)$ $\quad u^n + H_n(x, |\nabla u^n|) = 0 \text{ in } (X_n, d_n)$

現状

- 最初の問題は解決：
- $(X, d), (X_n, d_n)$をコンパクトな測地的距離空間として、集合X_nがXにハウスドルフ収束し、距離構造d_nがdに一様収束に近い収束になっている時、解u^nがuに一様収束する
- シェルピンスキーのガスケットのネットワーク近似は仮定を満たす

今後

- 新しい応用例を模索：
  - 平面を格子線で近似
  - ネットワーク（グラフの頂点と辺）をふくらませる形の近似
- 時間発展方程式への応用
- コンパクトでない場合への一般化
- グロモフ・ハウスドルフ収束への一般化
- など