2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 1 回（2022 年 4 月 20 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

極限 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ の値をネイピア数 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を用いて表せ。

解説　1 より小さい $1-\frac{1}{n}$ からどうやって 1 より大きい数 $1+x$ の形をひねり出すかが重要です。

解答　式変形して、

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n}=\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}.$$

$n\to\infty$ とすると、ネイピア数 e を使って、

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to e^{-1}\cdot(1+0)^{-1}=e^{-1}.$$

よって、極限は $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$ である。

宿題 $\boxed{4}$

各 n に対して $a_n\geq 0$ を満たす数列 (a_n) が $\alpha\geq 0$ に収束しているとする。この時、数列 $(\sqrt{a_n})$ が $\sqrt{\alpha}$ に収束することを極限の定義に基づいて証明せよ。

解説　$|\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha}|$ をいかに $|a_n-\alpha|$ で抑えるかが重要です。解答例のように分子の有理化をすると $\alpha=0$ は例外的な場合になるので注意してください。

解答　(a_n) が α に収束しているので、“$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall n\in\mathbb{N}\ n\geq N \implies |a_n-\alpha|<\varepsilon$” である。$\alpha>0$ の時は、$\sqrt{a_n}\geq 0$ に注意して、

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha}|=\left|\frac{a_n-\alpha}{\sqrt{a_n}+\sqrt{\alpha}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|a_n-\alpha|$$

とできるので、$\varepsilon>0$ に対して、(a_n) が α に収束の定義で ε を $\sqrt{\alpha}\varepsilon>0$ として取れば自然数 N が存在して自然数 $n\geq N$ に対して、

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha}|<\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}\varepsilon=\varepsilon.$$

よって、$(\sqrt{a_n})$ は $\sqrt{\alpha}$ に収束する。

　$\alpha=0$ の時は、極限の定義の式は “$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall n\in\mathbb{N}\ n\geq N \implies a_n<\varepsilon$” となり、$\varepsilon$ のところを $\varepsilon^2>0$ として取れば、自然数 N が存在して自然数 $n\geq N$ に対して、

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha}|=\sqrt{a_n}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon.$$

よって、$(\sqrt{a_n})$ は $\sqrt{\alpha}=0$ に収束し、いずれの場合でも $(\sqrt{a_n})$ は $\sqrt{\alpha}$ に収束することがわかった。

注意　$\alpha>0$ の時は $|\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha}|\leq\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|a_n-\alpha|$ が得られた時点で、はさみうちの原理（教科書命題 1.1.10）から $|\sqrt{a_n}-\sqrt{\alpha}|\to 0$ を結論付けることができます。ただし、$\alpha=0$ の場合に同じことをしようとすると $\sqrt{a_n}\to\sqrt{\alpha}$ を示すために平方根関数 $\sqrt{x}$ の連続性を使うという循環論法になってしまうので、解答例のようにする必要があります。