

## 宿題 1

行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$  はべき零行列である、つまり  $A^n = O$  となる  $n = 1, 2, 3, \dots$  が存在することを示せ。

解答 計算すると、

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4-9 & 8+12-21 & -6-8+15 \\ 2+3-6 & 4+9-14 & -3-6+10 \\ 6+7-15 & 12+21-35 & -9-14+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4+6 & -2-4+6 & 2+4-6 \\ -1-3+4 & -1-3+4 & 1+3-4 \\ -3-7+10 & -3-7+10 & 3+7-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって  $A^3 = O$  なので  $A$  はべき零行列である。

## 宿題 2

行列  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$  について以下の問いに答えよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}$  を満たす実数  $a, b, c, d, e, f$  を一組見つけよ。

(2) (1) で見つけた  $a, b, c, d, e, f$  について内積  $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$  を求めよ。

(3)  $A^{100}$  を求めよ。

解答

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} \text{ なので、} (a, b, c, d, e, f) = (1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32.$$

(3)

$$\begin{aligned} A^{100} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} 32^{99} \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \\ &= 32^{99} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

解説 (3) は  $A^2 = 32A$  を示して、それを使う方がわかりやすいかもしれません。