2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 2 回（2022 年 10 月 19 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

(1) 対数関数のべき級数表示

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

において、右辺のべき級数の収束半径を求めよ。

(2) $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ が成り立つことを示せ。

解答

(1) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ とおくと、$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+n^{-1}} \to 1 \quad (n \to \infty)$. よって、収束半径はその逆数で 1。

(2) (1) のべき級数表示において $x = -\frac{1}{2} \in (-1,1)$ を代入することで、

$$\log \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$\log \frac{1}{2} = -\log 2$ より整理して、問題文の等式を得る。

注意　本質的には同じですが問題 $\boxed{2}$ の問題文の最後のべき級数に $x = \frac{1}{2}$ を代入しても同じ等式が得られます。

注意　$x = 1$ をあてはめた $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$（要アーベルの連続性定理）より今回の問題文の級数の方が収束が速く $\log 2$ の値の計算に向いています。一般に収束半径に近いところよりも中心（今回は $x = 0$）に近いところを考えた方が収束が速いです。

宿題 $\boxed{4}$

以下の級数は絶対収束か条件収束か発散かそれぞれ答えてそのことを示せ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{n}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$.

ただし、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するが、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することは事実として使ってよいこととする。

解答

(1) この級数は発散する。なぜなら収束したとすると、数列 $\{(-1)^n\}$ は 0 に収束しなければならないが、この数列は発散するからである。

(2) この級数は絶対収束する。$n = 1, 2, 3, \cdots$ で $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ より、対応する正項級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ となる。ここで一般に $x \geq 0$ で不等式 $\sin x \leq x$ が成り立つので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

右辺の級数は収束するので問題の級数は絶対収束することがわかる。

(3) この級数は条件収束する。まず、$\sin x$ は $x \in [0,1]$ で単調増加より、$\sin \frac{1}{n}$ は n が大きくなると単調減少し、0 に収束する。よって交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ は収束することがわかる。一方で絶対収束はしないことを示す。対応する正項級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ である。ここで $x \in [0,1]$ において $\sin x$ は上に凸より $\sin x \geq (\sin 1)x$ なので（講義ノート第 6 回参照）、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} (\sin 1) \frac{1}{n}.$$

右辺の級数は発散するので左辺の級数も発散し、問題の級数は条件収束であることがわかる。