2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 4 回（2022 年 11 月 29 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

$\mathbb{R}^2$ 全体で定義された連続関数 $f(P)$ がすべての点 $P \in \mathbb{R}^2$ で

$$f(P) \neq 0$$

を満たすとき、$f(P)$ は定符号である、つまりすべての P で $f(P) > 0$ となるかすべての P で $f(P) < 0$ となることを示せ。

解答　背理法で示すために $f(P)$ は定符号でない、つまり $f(P) < 0$ である点 $P \in \mathbb{R}^2$ と $f(Q) > 0$ である点 $Q \in \mathbb{R}^2$ が存在したとする。このとき $\mathbb{R}^2$ は（弧状）連結で f はその上の連続関数であるので、中間値定理（教科書第 6 章 161 ページ）を適用することができ、f は $f(P) < 0$ と $f(Q) > 0$ の間の値をすべて取る。特に値が 0 になりうるので、$f(X) = 0$ となる点 $X \in \mathbb{R}^2$ が存在する。しかしながらこれは仮定に反する。したがって $f(P)$ は定符号であることが示された。

宿題 $\boxed{4}$

次の関数 $f(x, y)$ は平面全体で C^1 級であるが C^2 級でない。このことを示せ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

解説　高階偏微分の特徴的な性質として C^2 級であれば偏微分の順序を入れ替えられるということがありそれを題材にした問題です。

解答　まず、関数 $f(x, y)$ は原点を除けば十分なめらか特に C^2 級であることに注意する。

$f(x, y)$ の原点以外での 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2 y}{x^2+y^2} - \frac{x^3 y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} - \frac{x^3 y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$f(x, y)$ の原点での 1 階偏導関数の値は

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$f(x, y)$ が C^1 級であることを示すには上記の 1 階偏導関数 f_x, f_y が両方とも原点で連続であることを示せばよい。計算すると

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| \leq \frac{|x|^4|y| + 3|x|^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{4\sqrt{x^2+y^2}^5}{(x^2+y^2)^2} = 4\sqrt{x^2+y^2},$$

$$|f_y(x,y) - f_y(0,0)| \leq \frac{|x|^5 + |x|^3|y|^2}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}^5}{(x^2+y^2)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

よって、1 階偏導関数 f_x, f_y が両方とも連続なので、$f(x, y)$ は C^1 級関数である。

$f(x, y)$ が C^2 級でないことを示すために、原点において 2 階偏導関数の等式 $f_{xy} = f_{yx}$ が満たされないことを示す。

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \quad f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

で、$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ なので、$f(x, y)$ は C^2 級関数でない。

注意　なお、C^2 級の定義に従って次のようにして示すこともできます。$f(x, y)$ の原点以外での 2 階偏導関数を計算すると、

$$f_{xx}(x,y) = \frac{8x^3y^3 + 6xy^5}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{-6x^5y + 2x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

これらが原点で連続かどうかを調べるために $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと、

$$f_{xx} = 8\cos^3\theta\sin^3\theta + 6\cos\theta\sin^5\theta, \quad f_{xy} = f_{yx} = \cos^6\theta + 6\cos^4\theta\sin^2\theta - 3\cos^2\theta\sin^4\theta, \quad f_{yy} = -6\cos^5\theta\sin\theta + 2\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

どの関数も θ の値によって $r \to 0$ での極限が変わるので連続ではない、よって $f(x, y)$ は C^2 級関数でないことがわかる。（実際に答案に書くときは 2 階偏導関数のうち一つについて書けばいいですが、どの θ とどの θ で極限が異なるか書いてください）

こちらの証明法は原点以外での 2 階偏導関数を計算する分だけ手間がかかりますが、世の中には C^2 級でないが $f_{xy} = f_{yx}$ を満たす関数なども存在したりする（例：$x^2y^2/(x^2+y^2)$）ので、この定義に従った方法のほうが確実に証明できる利点があります。