2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 6 回（2021 年 6 月 30 日）問題解答例

問題 1

次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

解答　次の行列を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の 3 倍を引き、第 3 行から第 1 行の 2 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行を引き、第 3 行に第 2 行の 3 倍を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

第 3 行を -1 倍して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 3 行の 3 倍を引き、第 2 行に第 1 行を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -24 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

これにより求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -24 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

注意　検算すると、

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -24 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -24 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、確かに逆行列になっていることがわかる。

問題 2

r, θ, ϕ を実数として、次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}.$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$

ここで、2 次行列と 3 次行列の行列式は以下で求められる（サラスの公式）。

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

解答

(1)

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta\cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\cdot\sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + r\cos\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi\cdot\cos\theta + (-r\sin\theta\sin\phi)\cdot\sin\theta\sin\phi\cdot(-r\sin\theta) \\
&\quad - 0 - \sin\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi\cdot(-r\sin\theta) - (-r\sin\theta\sin\phi)\cdot r\cos\theta\sin\phi\cdot\cos\theta \\
&= r^2(\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\theta + \sin^3\theta\sin^2\phi + \sin^3\theta\cos^2\phi + \sin\theta\sin^2\phi\cos^2\theta) \\
&= r^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta) \\
&= r^2\sin\theta.
\end{aligned}$$

解説　この行列式は微分積分学で重積分を極座標に変数変換する時に出てきます。