2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 5 回（2021 年 12 月 15 日）宿題解答例

宿題 1

**直角**三角形で 3 辺の長さの和が一定の値 $l > 0$ であるもののうち面積が最大になるものが存在する（認めてよい）。その三角形を求めて面積も求めよ。

答えは直角二等辺三角形の時だと予想はつきますが、どうやって示すのかが重要です。

**解答**　直角をはさむ 2 辺の長さを $x$ と $y$ とおくと $(x > 0,\ y > 0)$、斜辺の長さは $\sqrt{x^2+y^2}$ なので 3 辺の長さの和は $x + y + \sqrt{x^2+y^2}$ で三角形の面積は $\frac{1}{2}xy$ である。よってこの問題は $x > 0, y > 0$ が条件

$$g(x,y) = x + y + \sqrt{x^2+y^2} - l = 0$$

を満たしながら動くときの $f(x,y) = \frac{1}{2}xy$ の最大を求める問題に他ならない。

ここで $g_x(x,y) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} > 1$, $g_y(x,y) = 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} > 1$ より、$g(x,y)$ に特異点はないことに注意する。よって、

$$F(x,y,\alpha) = f(x,y) - \alpha g(x,y) = \frac{1}{2}xy - \alpha(x + y + \sqrt{x^2+y^2} - l)$$

とおくと、Lagrange の未定乗数法（教科書定理 5.6.2）より最大となる点で次が満たされる。

$$F_x(x,y,\alpha) = \frac{1}{2}y - \alpha\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0, \quad F_y(x,y,\alpha) = \frac{1}{2}x - \alpha\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

$$F_\alpha(x,y,\alpha) = -(x + y + \sqrt{x^2+y^2} - l) = 0.$$

ここから $x = y$ になることを示す。第 1 式と第 2 式から $\alpha$ を消去すると

$$\alpha = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2(x + \sqrt{x^2+y^2})} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{2(y + \sqrt{x^2+y^2})}$$

よって、

$$y^2 + y\sqrt{x^2+y^2} = x^2 + x\sqrt{x^2+y^2}.$$

ここから $x = y$ または $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 0$ を得るが、$x > 0, y > 0$ なので後者はありえない。よって $x = y$ であり、第 3 式から $x = y = \frac{l}{2+\sqrt{2}}$ を得る。

以上より面積が最大になるのは直角二等辺三角形の時で、その面積は

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2.$$

**注意**　最大の存在は問題 2 の注意と同様のことをすれば示せます。

**宿題 2**

$f(x,y)$ を $C^2$ 級関数として、次の条件をすべて満たす点 $(a,b)$ が存在するとする。

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0,\quad f_{xx}(a,b)>0,\quad f_{yy}(a,b)<0.$$

この時、$\delta>0$ を十分小さく取れば次が成り立つことを示せ。

$$\inf_{a-\delta<x<a+\delta}\sup_{b-\delta<y<b+\delta}f(x,y)=\sup_{b-\delta<y<b+\delta}\inf_{a-\delta<x<a+\delta}f(x,y)=f(a,b).$$

$f_{xx}(a,b)>0$, $f_{yy}(a,b)<0$ なのでヘッセ行列式が $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2<0$ で、教科書定理 5.3.5 3) より $f(x,y)$ はある方向で極小別の方向で極大ですが、今回のケースだともっと詳しいことがわかるという問題です。

厳密な証明を書こうと思うとかなり大変なのでここでは証明の大筋の流れだけ紹介します。

**解答**　$\inf_{a-\delta<x<a+\delta}\sup_{b-\delta<y<b+\delta}f(x,y)=f(a,b)$ を示す。まず $f_{xx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ は連続関数なので、$\delta$ を十分小さくとることで $a-\delta<x<a+\delta, b-\delta<y<b+\delta$ に対して $f_{xx}(x,y)>0$, $f_{yy}(x,y)<0$ であることに注意する。$f_y(a,b)=0$, $f_{yy}(a,b)<0$ より 1 階偏導関数 $f_y(x,y)$ に対して陰関数定理（教科書定理 5.4.2）を用いると $\delta$ を十分小さくとることで次を満たす $C^1$ 級関数 $\varphi:(a-\delta,a+\delta)\to\mathbb{R}$ が存在する。

$$\varphi(a)=b,\quad f_y(x,\varphi(x))=0,\quad \varphi'(x)=-\frac{f_{yx}(x,y)}{f_{yy}(x,y)}.$$

$a-\delta<x<a+\delta$ を固定するごとに、$f_y(x,\varphi(x))=0$ かつ $f_{yy}(x,\varphi(x))<0$ より、$y$ についての関数 $f(x,y)$ は $y=\varphi(x)$ で極大となる。さらに $f_{yy}(x,y)<0$ という条件から極大は実は最大であることがわかる。よって

$$\sup_{b-\delta<y<b+\delta}f(x,y)=f(x,\varphi(x))$$

であり、あとはこの関数 $h(x)=f(x,\varphi(x))$ が $x=a$ で最小になることを示せばよい。$f(x,y)$ が $C^2$ 級で $\varphi(x)$ が $C^1$ 級なのでまず $h(x)$ は $C^1$ 級であり、1 階導関数を計算すると

$$h'(x)=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x).$$

$f_y(x,\varphi(x))=0$ だったので $h'(x)=f_x(x,\varphi(x))$ で特に $h'(a)=f_x(a,b)=0$ で、また $h(x)$ はもう一回微分できて 2 階導関数は

$$h''(x)=f_{xx}(x,\varphi(x))+f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)=f_{xx}(x,\varphi(x))-\frac{f_{xy}(x,\varphi(x))^2}{f_{yy}(x,\varphi(x))}>0.$$

よって $h(x)$ は $x=a$ で極小であり $h''(x)>0$ なので実は最小である。以上より $\inf_{a-\delta<x<a+\delta}\sup_{b-\delta<y<b+\delta}f(x,y)=f(a,b)$ が示された。$\sup_{b-\delta<y<b+\delta}\inf_{a-\delta<x<a+\delta}f(x,y)=f(a,b)$ も同様にして証明できるので、説明は省略する。

**注意**　証明の途中で 2 回使っている極小（または極大）が実は最小（最大）であるというのは次の事実を使っています。

> 開区間上の $C^2$ 級関数 $f(x)$ が $f''(x)>0$ を満たすとき $f(x)$ の極小はあっても 1 点のみでそれは最小である。

証明は極小点が 2 つあったらその間に極大点がなくてはならず $f''(x)>0$ は極大点の存在を許さないということに矛盾するという論法でできます。