2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 4 回（2022 年 11 月 16 日）問題解答例

問題 1

2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\quad (x\in\mathbb{R}, y>0)$$

の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を計算せよ。

解答　$f(x,y)=y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ の偏導関数を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-2x}{4y}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}=-\frac{1}{2}xy^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}}+y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{4y^2}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}=\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x^2y^{-\frac{5}{2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}}-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-2x}{4y}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}=\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x^2y^{-\frac{5}{2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

注意　結果として、f は y についての 1 階偏導関数と x についての 2 階偏導関数が等しい、つまり $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を満たす特別な関数であることがわかります。この $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ は熱伝導の方程式や熱方程式、拡散方程式などと呼ばれ、$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ のことをその基本解と言います。

問題 2

x,y が実数全体を動くとき、次の関数 $f(x,y)$ の極大・極小を答えよ。

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$$

関数の極大・極小は、まず 1 階偏導関数が 0 になるという連立方程式を解き極大点・極小点の候補を見つけ、さらにその点でのヘッセ行列を調べるとだいたいのことがわかるのでした。

解答　$f(x,y)$ の 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y)=3x^2-3y,\quad f_y(x,y)=3y^2-3x.$$

ここから (a,b) を極大・極小となる点とすると

$$f_x(a,b)=3a^2-3b=0,\quad f_y(a,b)=3b^2-3a=0,$$

つまり $a^2=b$ と $b^2=a$ を満たす。この連立方程式を解くと、$a^4=a$ より $a=0,1$ で $(a,b)=(0,0),(1,1)$。

$f(x,y)$ の 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x,y)=6x,\quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-3,\quad f_{yy}(x,y)=6y.$$

よって、$(a,b)=(0,0)$ でのヘッセ行列は

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0\end{pmatrix}.$$

この行列の行列式の値は $0\cdot 0-3\cdot 3=-9<0$ なので、$(0,0)$ は鞍点である。また、$(a,b)=(1,1)$ でのヘッセ行列は

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6\end{pmatrix}.$$

この行列の行列式の値は $6\cdot 6-3\cdot 3=27>0$ で、$1,1$ 成分 $f_{xx}(a,b)=6$ も正なので、$(1,1)$ は極小点である。

以上より $f(x,y)$ は $(x,y)=(1,1)$ で極小となりその値は $f(1,1)=-1$ で、極大はない。