2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2022 年 7 月 20 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

次の広義積分は収束するか発散するか答えよ。

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

答えは発散する、でどうやって被積分関数を下から評価するかがポイントです。

解答　$x \geq 1$ において

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}x}$$

であり、教科書例題 3.5.2 より $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2}x}dx = \infty$ なので、広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ は発散する。したがって $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ も発散する。

実はこの積分は計算できる積分なので次のようにしても証明できます。

別解　$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ に注意して $x = \sinh\theta$ と置換すると $\frac{dx}{d\theta} = \sinh\theta$ なので、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\cosh\theta}\cosh\theta d\theta = \int d\theta = \theta + C = \sinh^{-1}x + C.$$

したがって、

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \lim_{t\to\infty}\sinh^{-1}t = \infty.$$

よって、この広義積分は発散する。

2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 7 回（2022 年 7 月 20 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{4}$

(1) 次の定積分の値を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy.$$

(2) 次の極限の値を計算せよ。ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$ である。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x}{1+\sin^2 2\pi nx}dx.$$

(1) は $\sin^2 2\pi y$ の積分なので $t = \tan 2\pi y$ と置換するのがセオリーですが、tan の不連続性に注意してください。

解答

(1) 計算する積分を I とおくと、y を $y - \frac{1}{2}$ で置換して

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 2\pi(y-\frac{1}{2})}dy = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy.$$

さらに

$$I = 2\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy + 2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy = 2\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy.$$

ここで $t = \tan 2\pi y$ と置換すると、$\frac{dt}{dy} = \frac{2\pi}{\cos^2 2\pi y} = 2\pi(\tan^2 2\pi y + 1) = 2\pi(t^2+1)$ で $\sin^2 2\pi y = \tan^2 2\pi y \cos^2 2\pi y = \frac{t^2}{t^2+1}$ より、

$$I = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{t^2}{t^2+1}}\frac{1}{2\pi(t^2+1)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t^2+2)}dt = \left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(2) 各 n に対して $y = nx$ と置換すると

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\sin^2 2\pi nx}dx = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{\frac{y}{n}}{1+\sin^2 2\pi y}dy = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{\frac{y}{n}}{1+\sin^2 2\pi y}dy = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\frac{y+k-1}{n}}{1+\sin^2 2\pi y}dy.$$

ここで $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2 2\pi y}dy$, $I_2 = \int_0^1 \frac{y}{1+\sin^2 2\pi y}dy$ とおくとこれらは n, k によらない定積分なので実数定数で、

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\sin^2 2\pi nx}dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}I_2 + \frac{k-1}{n}I_1 = \frac{1}{n}\left(I_2 + \frac{1}{2}(n-1)I_1\right) \to \frac{1}{2}I_1 \quad (n\to\infty).$$

よって、(1) より $I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であることから問題の答えは $\frac{1}{2\sqrt{2}}$。