2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 1 回（2022 年 10 月 5 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

(1) 極限 $\lim_{x\to 0+0}(\log(\arcsin x)-\log(\sin x))$ を求めよ。

(2) 極限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ を求めよ。

解答

(1) まず、

$$\log(\arcsin x)-\log(\sin x)=\log\frac{\arcsin x}{\sin x}$$

で、$y=\arcsin x$ と置換することで $x\to 0+0$ は $y\to 0+0$ に対応し $x=\sin y$ であることから、

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\arcsin x}{\sin x}=\lim_{y\to 0+0}\frac{y}{\sin(\sin y)}=\lim_{y\to 0+0}\frac{\sin y}{\sin(\sin y)}\frac{y}{\sin y}=1.$$

よって答えは $\log 1=0$。

(2) 漸近展開 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ $(x\to 0)$ より、

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{1+\frac{1}{2}x+o(x)-1}{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+\frac{1}{2}x+o(x)}\to\frac{1}{2}.$$

よって答えは $\frac{1}{2}$。

宿題 $\boxed{4}$

$0\le a\le 1$ に対して

$$g(a)=\int_0^1\left|\sqrt{1-x^2}-a\right|dx$$

を考える。

(1) $g(a)$ を計算せよ。

(2) $0<a<1$ に対して導関数 $g'(a)$ を計算せよ。

(3) 関数 $g(a)$ を最小にする $0\le a\le 1$ を求めよ。

解答

(1) 絶対値の中身の符号を考えると $\sqrt{1-x^2}-a=0$ となるのは $x=\sqrt{1-a^2}$ より、

$$g(a)=\int_0^{\sqrt{1-a^2}}\left(\sqrt{1-x^2}-a\right)dx-\int_{\sqrt{1-a^2}}^1\left(\sqrt{1-x^2}-a\right)dx.$$

ここで $x=\sin\theta$ と置換すると

$$\int\left(\sqrt{1-x^2}-a\right)dx=\int\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta-ax=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta-ax=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta-ax=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-ax$$

なので、

$$\begin{aligned}g(a)&=\left[\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-ax\right]_0^{\sqrt{1-a^2}}-\left[\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-ax\right]_{\sqrt{1-a^2}}^1\\&=\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-a^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}\cdot a-a\sqrt{1-a^2}-\frac{\pi}{4}+a+\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-a^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}\cdot a-a\sqrt{1-a^2}\\&=\arcsin\sqrt{1-a^2}-a\sqrt{1-a^2}-\frac{\pi}{4}+a.\end{aligned}$$

(2) 微分して、

$$g'(a)=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}^2}}\cdot\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}-\sqrt{1-a^2}-a\cdot\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}+1=-2\sqrt{1-a^2}+1.$$

(3) (2) より、$a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ で $g'(a)<0$ で $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$ で $g'(a)>0$ なので、$g(a)$ は $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小になる。