2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 3 回（2022 年 5 月 18 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の極限を計算せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-2^3}{x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^{-1}x}{x}$.

解答

(1) 計算すると、

$$\frac{(2+x)^3-2^3}{x}=\frac{8+12x+6x^2+x^3-8}{x}=12+6x+x^2\to 12\quad (x\to 0).$$

(2) 倍角の公式を使って計算すると、

$$\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}=2\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}=4\frac{\sin x}{x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{\sin x}{x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\to 1\quad (x\to 0).$$

(3) 分子の有理化をして計算すると、

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\to 0\quad (x\to\infty).$$

(4) 逆関数の定理（講義ノート 5 定理 2.60）より、$y=\sinh^{-1}x$ とおくと $x\to 0$ と $y\to 0$ が同値より $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sinh y}$。ここで、双曲線関数 $\sinh y$ の定義より

$$\frac{\sinh y}{y}=\frac{e^y-e^{-y}}{2y}=\frac{e^{2y}-1}{2y}e^{-y}\to 1\quad (y\to 0).$$

よって、$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^{-1}x}{x}=1$ である。

問題 $\boxed{2}$

次の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について、連続関数かまた有界な関数かそれぞれ答えよ。

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{1+x^2}$.
(2) $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4$.
(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$
(4) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$

解答　答えだけ書くと、

(1) 連続関数であり有界でもある。
(2) 連続関数であるが有界ではない。
(3) 連続関数でなく有界でもない。
(4) 連続関数でないが有界である。

解説　(1), (2) は連続関数の加減乗除や絶対値は連続関数であることを用いれば、連続関数であることがわかる。(3), (4) は $x=0$ で連続でないため連続関数でない。

有界性について、(1) は相加・相乗平均の関係式より

$$\frac{|x|}{1+x^2}=\frac{1}{|x|^{-1}+|x|}\leq\frac{1}{2\sqrt{|x|^{-1}\cdot|x|}}=\frac{1}{2}$$

なので有界である。(2) は $\lim_{x\to\pm\infty}(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)=\infty$ より有界でない。(3) は $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ より有界でない。(4) は $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ より有界である。

注意　この問題だけ見ると実数全体で連続関数であることと有界な関数であることは独立した内容に思えますが、以下の関係性があります。

関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で連続で $f(x)$ が $x\to\pm\infty$ でそれぞれ収束するならば、f は有界である。

証明は、$\lim_{x\to\infty}f(x)=l_+$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=l_-$ とすると、$\delta_+>0$ と $\delta_-<0$ が存在して任意の $x>\delta_+$ に対して $|f(x)-l_+|<1$ が任意の $x<\delta_-$ に対して $|f(x)-l_-|<1$ がそれぞれ成り立つ。ここで、$f(x)$ は有界閉区間 $[\delta_-,\delta_+]$ 上の連続関数より講義ノート 4 定理 2.55 から $[\delta_-,\delta_+]$ で最大値、最小値が存在する。したがって、$|f(x)|\leq\max\{\max_{x\in[\delta_-,\delta_+]}|f(x)|,|l_-|+1,|l_+|+1\}$ となり $f(x)$ は有界であることがわかる。

今回の問題では (1) が解答例では有界性を直接示しましたが、上記の議論によっても証明できます。