2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 4 回問題解答例

中安淳

2023 年 5 月 23 日

問題 $\boxed{15}$

$\mathbb{K}^2$ の任意の元は次の 2 つのベクトルの線形結合として表されることを示せ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解答　$\mathbb{K}^2$ の任意の元 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、次を満たす $a, b \in \mathbb{K}$ を見つければよい。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

これは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

で a, b についての連立一次方程式なので解いて、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

よって $a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x-y}{2}$ として取ればよいので、$\mathbb{K}^2$ の任意の元は問題文で与えられたつのベクトルの線形結合として表される。

問題 $\boxed{16}$

次の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合はいずれも $\mathbb{R}^3$ の和とスカラー倍について線形空間になっていないことを示せ。

(1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.
(2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z^2\}$.
(3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 = z^2\}$.
(4) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

線形空間でないことを示す問題は和またはスカラー倍において反例を見つけます。(4) はスカラー倍の範囲が全体空間 $\mathbb{R}^3$ の土台の集合（体）$\mathbb{R}$ であることが重要です。

解答

(1) $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ は $x + y + z = 1$ を満たすが、その $2 \in \mathbb{R}$ 倍 $(2, 0, 0)$ は満たさない。よって線形空間でない。
(2) $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ は $x = z^2$ を満たすが、その $2 \in \mathbb{R}$ 倍 $(2, 0, 2)$ は $x + y = 2$, $z^2 = 4$ より、満たさない。よって線形空間でない。
(3) $(x, y, z) = (1, 1, 1), (1, 1, -1)$ はともに $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ を満たすが、その和 $(2, 2, 0)$ は $x^2 = y^2 = 4$, $z^2 = 0$ より、満たさない。よって線形空間でない。
(4) $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ は $x, y, z \in \mathbb{Q}$ を満たすが、その $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ 倍 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ は $\sqrt{2}$ が無理数なので、満たさない。よって線形空間でない。