2021 年度京都大学線形代数学（演義）A（中安淳担当）第 3 回（2021 年 5 月 19 日）問題解答例

**問題 1**

次の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 2x+4y=26. \end{cases}$$

(1) この連立一次方程式を行列とベクトルを使って次のように書き下した時の行列 $A$ とベクトル $b$ を求めよ。

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b.$$

(2) (1) で得た行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ。

(3) 解 $(x, y)$ を求めよ。

**解説** 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc \neq 0$ の時、逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を持つのでした。

**解答**

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \end{pmatrix}$.

(2) $A^{-1} = \frac{1}{4-2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$ に左から $A^{-1}$ をかけることで、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 32-26 \\ -16+26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

よって解は $(x, y) = (3, 5)$。

**問題 2**

$n$ 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ が零行列であるための必要十分条件は、任意の $n$ 次ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立つことであることを示せ。

**解説** 「『任意の $x$ に対して何々』ならば『何々』」ということを示すときには具体的な $x$ を考えてみるといいです。

**解答** $A$ が零行列の時、常に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので、必要条件であることはすぐわかる。

十分条件であること、つまり任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $A$ は零行列を示す。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を考えると、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって、$a_{11} = \cdots = a_{n1} = 0$。同様にして $\boldsymbol{x}$ として第 $i$ 成分が 1 でそれ以外がすべて 0 のベクトルを考える $(i = 1, \cdots, n)$ と、

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって、$a_{1i} = \cdots = a_{ni} = 0$。これにより全ての $i, j = 1, \cdots, n$ に対して $a_{ji} = 0$ が言えたので、$A$ は零行列である。