2022年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第6回（2022年6月29日）問題と宿題（2022年7月5日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{1}$

不定積分の式

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

を次の3つの方法で示せ。

(1) 右辺を微分することで示せ。

(2) 左辺で $\sqrt{x^2+1} = t - x$ とおくことで示せ。

(3) 左辺で $x = \sinh\theta$ とおくことで示せ。

2022 年度京都大学微分積分学(演義)A(中安淳担当)第 6 回(2022 年 6 月 29 日)問題と宿題(2022 年 7 月 5 日締め切り)

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　評価：

問題 $\boxed{2}$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して、

$$I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$$

とおく。

(1) $I_4$ を計算せよ。

(2) 数列 $\{I_n\}$ は単調減少であることを示せ。

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

2022年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第6回（2022年6月29日）問題と宿題（2022年7月5日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{3}$

次の不定積分を計算せよ。

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}dx.$$

2022年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第6回（2022年6月29日）問題と宿題（2022年7月5日締め切り）

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　評価：

宿題 $\boxed{4}$

(1) $f(x)$, $g(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とする。任意の実数 $t$ に対して $\int_a^b (f(x)t + g(x))^2 dx \geq 0$ が成り立つことから、コーシー・シュワルツの不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

を示せ。

(2) 不等式

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

を示せ。