

2023 年度京都大学線形代数学（演義）A

第 5 回問題解答例

中安淳

2023 年 6 月 16 日

問題 19

3 つの実数の未知数 x, y, z に関する次の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + 2y + 3z = 3, \\ x + 5y + 9z = 6. \end{cases}$$

- (1) この連立一次方程式の拡大係数行列を答えよ。
- (2) (1) の拡大係数行列に行に関する基本変形をして階段行列にせよ。
- (3) 問題の連立一次方程式の全ての解を求めよ。

解答

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (2) 拡大係数行列の第 2 行と第 3 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行を引き、第 3 行から第 2 行の 4 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これが求める階段行列である。

- (3) 階段行列に対応する連立一次方程式は

$$x - z = 1, \quad y + 2z = 1$$

である。 z を a とおくことで解は

$$(x, y, z) = (1 + a, 1 - 2a, a) \quad (a \in \mathbb{R})$$

と表示される。

注意 解の表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

などとしても正解です。

問題 20

次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

解答 次の行列を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の 3 倍を引き、第 3 行から第 1 行の 2 倍を引いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行を引き、第 3 行に第 2 行の 3 倍を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

第 3 行を -1 倍して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

第 1 行から第 3 行の 3 倍を引き、第 2 行に第 1 行を足して、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -24 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

これにより求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -24 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$