2023 年度京都大学線形代数学（演義）A
第 7 回宿題解答例

中安淳

2023 年 7 月 14 日

宿題 $\boxed{29}$

奇数次の交代行列は正則でないことを示せ。

行列式に注目しましょう。

解答 A を奇数 n 次の交代行列とすると、交代行列の定義から

$$ {}^tA = -A. $$

この行列式を考えると行列式の多重線形性より、

$$ \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A). $$

ここで転置の行列式は $\det({}^tA) = \det(A)$ が成り立つので、

$$ \det(A) = 0 $$

がわかる。したがって A は正則ではない。

注意 n が偶数の時は、

$$ \det(-A) = (-1)^n \det(A) = \det(A) $$

となり、今回の結論は導くことができません。実際、2 次の交代行列は $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ の形をしていて、$b = 0$ でない限り正則です。

宿題 $\boxed{30}$

x を複素数として、次の行列式 D を求めよ。

$$ D = \begin{vmatrix} x-1 & i & 1 & -i \\ i & x+1 & -i & -1 \\ 1 & -i & x-1 & i \\ -i & -1 & i & x+1 \end{vmatrix}. $$

解法はいろいろ考えられると思いますが、解答例では掃き出し法で計算しています。

解答 与えられた行列を基本変形する。第 1 行と第 3 行を入れ替えて、

$$ D = -\begin{vmatrix} 1 & -i & x-1 & i \\ i & x+1 & -i & -1 \\ x-1 & i & 1 & -i \\ -i & -1 & i & x+1 \end{vmatrix}. $$

第 2 行から第 1 行の i 倍を引き、第 3 行から第 1 行の $x-1$ 倍を引き、第 4 行から第 1 行の i 倍を足すことで、

$$ D = -\begin{vmatrix} 1 & -i & x-1 & i \\ 0 & x & -ix & 0 \\ 0 & ix & 1-(x-1)^2 & -ix \\ 0 & 0 & ix & x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & -ix & 0 \\ ix & 2x-x^2 & -ix \\ 0 & ix & x \end{vmatrix}. $$

よって各行から共通因子をくくりだして、

$$ D = -x^3 \begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2-x & -i \\ 0 & i & 1 \end{vmatrix}. $$

第 2 行から第 1 行の i 倍を引いて、

$$ D = -x^3 \begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1-x & -i \\ 0 & i & 1 \end{vmatrix} = -x^3 \begin{vmatrix} 1-x & -i \\ i & 1 \end{vmatrix}. $$

したがって、

$$ D = -x^3((1-x) + i^2) = x^4. $$

よって答えは x^4 である。