2022 年度京都大学微分積分学（演義）A（中安淳担当）第 4 回（2022 年 6 月 8 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の x を変数とする関数の導関数を計算せよ。

(1) $(x^2+1)^3$.
(2) $\dfrac{2-4x^2}{3x^2-1}$.
(3) $x+\sqrt{x^2+1}$.
(4) $(x^3+x^2+x+1)e^x$.

解答

(1) 合成関数の微分より、

$$\frac{d}{dx}((x^2+1)^3) = 3(x^2+1)^2\frac{d}{dx}(x^2+1) = 3(x^2+1)^2\cdot 2x = 6x(x^2+1)^2.$$

別解 展開してから微分すると、$(x^2+1)^3 = x^6+3x^4+3x^2+1$ より

$$\frac{d}{dx}((x^2+1)^3) = 6x^5+12x^3+6x.$$

(2) 商の微分より、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2-4x^2}{3x^2-1}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(2-4x^2)(3x^2-1)-(2-4x^2)\frac{d}{dx}(3x^2-1)}{(3x^2-1)^2} = \frac{-8x(3x^2-1)-(2-4x^2)\cdot 6x}{(3x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(3x^2-1)^2}.$$

別解 $\frac{2-4x^2}{3x^2-1} = -\frac{4}{3}+\frac{2}{3}(3x^2-1)^{-1}$ と変形できるので、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2-4x^2}{3x^2-1}\right) = -\frac{2}{3}(3x^2-1)^{-2}\cdot 6x = \frac{-4x}{(3x^2-1)^2}.$$

(3) 合成関数の微分より、

$$\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+1}) = 1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^2+1) = 1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(4) 積の微分より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((x^3+x^2+x+1)e^x) &= \frac{d}{dx}(x^3+x^2+x+1)\cdot e^x+(x^3+x^2+x+1)\frac{d}{dx}(e^x)\\ &= (3x^2+2x+1)e^x+(x^3+x^2+x+1)e^x = (x^3+4x^2+3x+2)e^x.\end{aligned}$$

問題 $\boxed{2}$

次の $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めて、$f'(x)$ も連続関数であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

ヒント：$f'(0)$ や $\lim_{x \to 0} f'(x)$ の計算ではロピタルの定理を使うとよい。

解答　$x \neq 0$ での導関数について、

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(\sin x) \cdot x - \sin x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

$x = 0$ においては微分係数の定義より

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h - h}{h^2}.$$

ここでロピタルの定理より極限 $\lim_{h \to 0} \frac{\frac{d}{dh}(\sin h - h)}{\frac{d}{dh}(h^2)}$ が存在すれば、

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{d}{dh}(\sin h - h)}{\frac{d}{dh}(h^2)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{2h}.$$

さらにもう一度ロピタルの定理より、

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{d}{dh}(\cos h - 1)}{\frac{d}{dh}(2h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin h}{2} = 0.$$

よって最終的に $f'(0) = 0$ が得られて、導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

である。

　次に f' が連続関数であることを示す。$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ においては連続なので 0 で連続つまり $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$ を示せばよい。実際ロピタルの定理より

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \sin x = 0 = f'(0)$$

なので、f' は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である。

注意　$f'(0)$ の計算で解答例ではロピタルの定理を正確に適用するため少し回りくどい説明になっていますが、次のような答案が書けていたら十分です。

> ロピタルの定理より
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin h}{2} = 0.$$