2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 7 回（2023 年 1 月 11 日）宿題解答例

宿題 $\boxed{3}$

a を正の定数として、次の 3 重積分を計算せよ。

$$\iiint_D 2\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}dxdydz \quad (D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le a^2\}).$$

4 次元球の 4 次元体積を求める問題です。

解答　極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$ をすると、D は $E=\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\le r\le a, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi\}$ に対応し、ヤコビアンは $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$ なので（講義ノート第 11 回 4 ページ参照)、

$$I=\iiint_D 2\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}dxdydz=\int_0^a\left\{\int_0^\pi\left\{\int_0^{2\pi}2\sqrt{a^2-r^2}r^2\sin\theta d\varphi\right\}d\theta\right\}dr=8\pi\int_0^a r^2\sqrt{a^2-r^2}dr.$$

さらに $r=at$ と置換することで、

$$I=8\pi\int_0^1 a^2t^2\sqrt{a^2-a^2t^2}adt=8\pi a^4\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt.$$

ここで $t=\sin\theta$ と置換することで、

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)d\theta\\&=\left[\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{32}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

以上より答えは $I=\frac{1}{2}\pi^2a^4$ である。

注意　ベータ関数・ガンマ関数を用いると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2!}=\frac{\pi}{16}$$

とも計算できます。

宿題 $\boxed{4}$

変数変換

$$x=\frac{\sin u}{\cos v},\quad y=\frac{\sin v}{\cos u}$$

を使って次の広義重積分を計算せよ。

$$\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy.$$

解答　関数 $f(x,y)=\frac{1}{1-x^2y^2}$ は $(x,y)=(1,1)$ で値が定義されていないことに注意する。$(x,y)\in[0,1]^2$ を u,v で書き直すと

$$0\le\sin u\le\cos v=\sin(\frac{\pi}{2}-v),\quad 0\le\sin v\le\cos u=\sin(\frac{\pi}{2}-u)$$

なので、$0\le u\le\frac{\pi}{2}-v, 0\le v\le\frac{\pi}{2}-u$ つまり $D=\{(u,v)\mid u,v\ge 0, u+v\le\frac{\pi}{2}\}$（直角二等辺三角形）として取れば問題文の変換 T で $[0,1]^2$ に移る。また、値が定義されていない点 $(x,y)=(1,1)$ は $u+v=\frac{\pi}{2}$ が対応することがわかるので、D の近似列として $D_n=\{(u,v)\mid u,v\ge 0, u+v\le\frac{\pi}{2}-n^{-1}\}$ を取る。このとき、$T(D_n)$ は $[0,1]^2$ の近似列になっている。また、T のヤコビアンは

$$\det T'(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u\sin v}{\cos^2 v}\\ \frac{\sin v\sin u}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u}\end{pmatrix}=1-\tan^2 u\tan^2 v$$

であるから、

$$\iint_{T(D_n)}f(x,y)dxdy=\iint_{D_n}\frac{1}{1-\tan^2 u\tan^2 v}(1-\tan^2 u\tan^2 v)dudv=\iint_{D_n}dudv=\mu(D_n)=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-n^{-1})^2.$$

ただし、$\mu(D_n)$ は直角二等辺三角形 D_n の面積である。これは $n\to\infty$ で $\frac{\pi^2}{8}$ に収束するので、問題の広義重積分は収束しその値は $\frac{\pi^2}{8}$ である。

注意　この積分は平方数の逆数の和 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$（バーゼル問題）と関係があります。