2021 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 5 回（2021 年 12 月 15 日）問題解答例

問題 1

方程式

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$$

で表される xy 平面上の図形についてその上の点 $(x,y)=(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ での接線の方程式を求めよ。ここで $f(x,y)=0$ の点 (a,b) での接線とは、(a,b) の近くで $y=\varphi(x)$ と陰関数表示されたときの $y=\varphi(x)$ の $x=a$ での接線のことである。

問題の図形 $x^3+y^3-3xy=0$ はデカルトの正葉線（葉形）と呼ばれます（教科書例 5.5.2 3)）。

解答　$f(x,y)$ の 1 階偏導関数は

$$f_x(x,y)=3x^2-3y,\quad f_y(x,y)=3y^2-3x.$$

点 $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ においては、

$$f_x\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3},\quad f_y\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-4=-\frac{8}{3}.$$

ここで $f_y(\frac{4}{3},\frac{2}{3})\neq 0$ であるから陰関数定理（教科書定理 5.4.2）より $f(x,y)=0$ は $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ の近くで $y=\varphi(x)$ $(\varphi(\frac{4}{3})=\frac{2}{3})$ と解くことができ、

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

を満たす。特に

$$\varphi'\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{5}{4}$$

であるから、求める接線の方程式は

$$y=\varphi'\left(\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)+\varphi\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{4}x-1.$$

問題 2

実数 x,y が $px+qy=m$, $x>0$, $y>0$ を満たしながら動くとき、次の関数 $f(x,y)$ はある点において最大となる。ここではその最大が存在することを仮定して、最大となる点を Lagrange の未定乗数法を使って求めよ。

$$f(x,y)=x^ay^b.$$

ただし、p,q,m,a,b は正の定数である。

解答　まず、条件 $px+qy=m$ を $g(x,y)=px+qy-m=0$ と表すと $g_x(x,y)=p>0$, $g_y(x,y)=q>0$ より、$g(x,y)$ に特異点はないことに注意する。よって、

$$F(x,y,\alpha)=f(x,y)-\alpha g(x,y)=x^ay^b-\alpha(px+qy-m)$$

とおくと、Lagrange の未定乗数法（教科書定理 5.6.2）より最大となる点で次が満たされる。

$$F_x(x,y,\alpha)=ax^{a-1}y^b-\alpha p=0,\quad F_y(x,y,\alpha)=bx^ay^{b-1}-\alpha q=0,\quad F_\alpha(x,y,\alpha)=-(px+qy-m)=0.$$

ここで第 1 式と第 2 式から α を消去すると

$$\alpha=\frac{ax^{a-1}y^b}{p}=\frac{bx^ay^{b-1}}{q}$$

つまり $aqy=bpx$ を得る。よって第 3 式とあわせて解いて

$$x=\frac{am}{(a+b)p},\quad y=\frac{bm}{(a+b)q}.$$

これは $x>0$, $y>0$ も満たしているので、この点 $(\frac{am}{(a+b)p},\frac{bm}{(a+b)q})$ において最大である。

注意　ちなみに最大の存在は、今回は (x,y) の範囲が有界なので次のようにして示せます。つまり、x,y の動く範囲を拡張して $D=\{(x,y)\mid px+qy=m, x\geq 0, y\geq 0\}$ とした時、D は有界閉集合で $f(x,y)$ は D 上の連続関数なので最大値の定理（教科書定理 5.7.9）より最大と最小を持ち、拡張した点 $(x,y)=(0,m/q),(m/p,0)$ では $f(x,y)=0$ でそれ以外の点では $f(x,y)>0$ なので最大にはならない、つまり最大は $x>0,y>0$ の範囲に存在する。