2022 年度京都大学微分積分学（演義）B（中安淳担当）第 3 回（2022 年 11 月 8 日）問題解答例

問題 $\boxed{1}$

次の集合 E の境界 ∂E を求めて、E は開集合かどうか閉集合かどうかそして有界かどうかそれぞれ答えよ（答えのみでよい）。

(1) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.
(2) $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(3) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y = 1\}$.
(4) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$.

図形としては (1) は円の周と内部、(2) は平面から 1 点をくりぬいたもの、(3) は線分の端点を除いたもの、(4) はデカルトの正葉線（教科書第 6 章例 8）です。

解答

(1) 境界は $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ で、E は開集合でないが閉集合である。また、E は有界である。
(2) 境界は $\partial E = \{(0,0)\}$ で、E は開集合だが閉集合でない。また、E は有界でない。
(3) 境界は $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, x + y = 1\}$ で、E は開集合でも閉集合でもない。また、E は有界である。
(4) 境界は $\partial E = E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$ で、E は開集合でないが閉集合である。また、E は有界でない。

注意　開集合・閉集合をちゃんと判定しようとすると他はまだしも (4) がとても難しいですが、開集合・閉集合は連続関数の逆像として得られる（教科書第 6 章問 11）ことからわかります。つまり連続関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ に対して、閉区間の逆像 $f^{-1}(\{0\}) = E$ は閉集合です。

問題 $\boxed{2}$

(1) 平面上の 2 つの集合 E, F がともに開集合のとき、合併 $E \cup F$ も開集合であることを示せ。
(2) 平面上の 2 つの集合 E, F がともに開集合のとき、共通部分 $E \cap F$ も開集合であることを示せ。

ただし、平面上の集合 E が開集合であるとは、E の任意の点 P が E の内点である、つまり十分小さな $\varepsilon > 0$ が存在して P の ε 近傍 $U_\varepsilon(P)$ が E に含まれることをいう。

解答

(1) 任意の点 $P \in E \cup F$ を取る。
   - $P \in E$ の場合は、E が開集合なので、$U_{\varepsilon_E}(P) \subset E$ となる $\varepsilon_E > 0$ が存在する。特に $U_{\varepsilon_E}(P) \subset E \cup F$ である。
   - $P \in F$ の場合は、F が開集合なので、$U_{\varepsilon_F}(P) \subset F$ となる $\varepsilon_F > 0$ が存在する。特に $U_{\varepsilon_F}(P) \subset E \cup F$ である。

   よって、どちらの場合でも $U_\varepsilon(P) \subset E \cup F$ となる $\varepsilon > 0$ が存在しているので、$E \cup F$ は開集合である。
(2) 任意の点 $P \in E \cap F$ を取る。
   - $P \in E$ であり E は開集合なので、$U_{\varepsilon_E}(P) \subset E$ となる $\varepsilon_E > 0$ が存在する。
   - $P \in F$ であり F は開集合なので、$U_{\varepsilon_F}(P) \subset F$ となる $\varepsilon_F > 0$ が存在する。

   ここで $\varepsilon > 0$ を ε_E と ε_F のうち小さい方として定めると、$U_\varepsilon(P) \subset U_{\varepsilon_E}(P) \subset E$ かつ $U_\varepsilon(P) \subset U_{\varepsilon_F}(P) \subset F$ なので、$U_\varepsilon(P) \subset E \cap F$ つまり $E \cap F$ は開集合である。