离散极小曲面算法简介及思考

刘贤雨 [1]

（[1]北京大学 地球与空间科学学院 100871）

摘要：本文介绍了极小曲面及其应用，讨论了数学严格算法的局限性与离散算法的优越性。介绍了一种曲面初始化的方法和几种典型的离散极小曲面逼近算法，并思考了算法的思维方式。

关键词：极小曲面；CAGD；算法；逼近；等温参数；思维方式

极小曲面属于微分流形中的极小子流形[1]，在一般生活实际中，它可指在曲面的边界给定时面积最小的曲面。极小曲面问题最初始于肥皂膜问题。液体理论表明，给定闭合曲线中所形成的肥皂膜形状即为极小曲面[2]。随后的数百年间，极小曲面曾对微分几何、微分拓扑领域起到了一定推动作用。极小曲面不仅是数学中的热门问题，它在工程、造型设计等实际应用方面也有十分广泛的应用[3]。举例来讲，建筑学中极小曲面的应用便可以节省多余的经费，同时满足美学的要求；在近数十年中，其它各方面的设计师也开始大量采用极小曲面的形态，达到了极好的美学效果[4]。

因此，极小曲面的求解对实际应用具有重要的价值。然而，数学的严格求解并不能满足实际中的需要。为阐明这一点，我们先介绍极小曲面的数学严格求解法，再介绍实际需要中采用的离散算法。

1 极小曲面的数学严格算法与离散算法

1.1 极小曲面的数学严格算法及其局限性

数学上，其最基本的求解方法是微分方程的求解。微分几何证明[5]，极小曲面应满足其上平均曲率处处为零，即：

$$H=\frac{g_{11}b_{22}-2g_{12}b_{12}+g_{22}b_{11}}{2g}\equiv 0$$

上式中$g_{ij}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^j}$为曲面参数网的度规，其中$\boldsymbol{r}$为径矢，$u_i$为曲面坐标，同时$g=det\left(g_{ij}\right)$；$b_{ij}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^j}\cdot\boldsymbol{n}$为曲面第二类基本量，其中$\boldsymbol{n}$为单位法向量；两类基本量间满足：

$$\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}}{\partial u^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}}{\partial u^{\beta}}+\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\gamma}^{\delta}-\Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\beta}^{\delta}=b_{\alpha\beta}b_{\gamma}^{\delta}-b_{\alpha\gamma}b_{\beta}^{\delta}$$

其中$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}=\frac{1}{2}g^{\delta\zeta}\left(\frac{\partial g_{\beta\zeta}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\zeta}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\zeta}}\right)$为联络。

极小曲面的求解问题，即为上述微分方程组在给定边界条件下的求解。此方程组的求解十分困难，一般情况下仅能证明解的存在性，而难以给出具体的形式。方程形式的复杂性启发我们以逼近的手段近似描述极小曲面，而非由完全严格的手段描述。当然，不可否认的是数学工具在极小曲面的研究历程中一直起到极为关键的作用。例如，Enneper 和 Weierstrass 曾给出极小曲面通解表达式[6]，这在离散极小曲面求解研究中曾起到了重要的作用。

1.2 离散极小曲面与计算机辅助几何设计

为有效描述极小曲面，我们需要离散、近似化的描述工具。CAGD，即计算机辅助几何设计是一种基于计算几何，利用计算机处理几何的技术方法，它在极小曲面研究过程中起到了重要作用[7]。CAGD 技术能够将极小曲面离散化为若干空间点，并利用插值、逼近的方法近似研究极小曲面的形状。基于 CAGD 技术，研究人员曾利用各种不同的算法逼近极小曲面的形状，并在过去数十年间产生了丰富的研究成果。下文我们开始介绍具体的离散极小曲面逼近算法。

2 离散极小曲面算法

在多年的研究历程中，离散极小曲面算法方面产生了丰富的研究成果。本处我们选择几个典型的算法予以讨论。

2.1 曲面的初始化算法

为了能从某一非极小曲面开始逐步逼近极小曲面，我们需要初始化一个曲面。为方便起见，我们以单曲线边界的情况为例讨论。在此情况中，一个常用的方法是在边界曲线上均匀选取多个样本点，并计算这些样本点的质心。随后，将质心与各个样本点间相连，以连线所形成的参数族即可生成初始化的曲面。此方法在大多数情况下效果较好，并可以通过数学方法推广至复杂的边界情形。

2.2 网格模拟张力算法

前文提到，极小曲面问题始于肥皂膜形状的研究，肥皂膜在稳定状态下的形状即为极小曲面。由牛顿定律可知，当肥皂膜的形状稳定时，其上任意一小块所受周围液体施加的表面张力之合力应为零。曾利用物理上的关系，可以将原先难以在离散化情况下计算的平均曲率，转化为了易于计算的合力。在文献[8]中，Coppin 和 Greenspan 曾利用网格模拟张力的方法，对曲面极小曲面进行逼近。

在离散化的过程中，平均曲率的表达式依赖于某一点周围较大邻域范围内各点的坐标。如果其邻域内点的密度较少，或其排布难以形成近似的正则曲线，则平均密度的表达式将出现较大的不确定度。相反，在网格模拟张力算法中，张力表达式对邻域内各点排布的要求并不高，只要点在各个方向上较均匀分布，且密度上满足一定的要求，即可以较高精度模拟张力。利用逼近的方法不断修正点的位置，并以合力为零确定最终状态，即可以此模拟极小曲面的形状。此种算法可以解决平均曲率误差较大的问题，或对其它算法的结果进行修正。

2.3 等温参数的 Dirichlet 能量函数算法

在 1.2 中我们提到了极小曲面满足的数学方程。如果从参数曲面的角度出发设计算法，首先可以使用的技巧是参数网格的等温化。通过等温化过程，可以使曲面第一类基本量中的交叉项变为零，并化简方程中的复杂参数，从而对问题进行了一定的化简。

Dirichlet 能量函数算法运用泛函中的面积变分原理进行求解。在等温参数网格下，Dirichlet 能量函数定义为[6]

$$D(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\iint(\|\boldsymbol{r}_u\|^2+\|\boldsymbol{r}_v\|^2)dudv$$

从数值上，上式正比于曲面的面积。上式的定义类似于力学中的拉格朗日量。由于极小曲面满足面积最小原理，故可以在离散的情况下使用拉格朗日方程，对于初始化的参数进行修正，逐次逼近结果。

2.4 等温条件下的多项式极小曲面

虽然我们难以求出一般极小曲面的解析式，但通过多项式极小曲面的近似，也可以取得较好的结果。在等温参数选取下，我们可以假设曲面的空间坐标是等温参数的多项式函数，并在各个次数下研究其极小曲面的性质。Enneper 曾对三次极小曲面进行了研究；徐岗和汪国昭曾研究过 5、6 次极小曲面；郝永霞曾对 6、7、8、9 次等温极小曲面进行了构造[6]。

诚然，多项式极小曲面难以完全拟合真实的极小曲面，毕竟越是复杂的边界条件就越需要更高次的多项式极小曲面构造；不过，多项式极小曲面也具有光滑性高的优点，这是其他大多数方法难以具备的。

3 离散极小曲面算法的思考

个人认为，离散极小曲面算法的多样性是其背后思维方式的结果。物理的思维方式，使得人们得以跳出形式复杂的微分方程组的限制，从物理实际与理论的角度出发，寻求极小曲面的其他表述方式。无数成功的实践也证明，人们能够从多个角度思考极小曲面的算法。

从本人的观点来看，极小曲面算法中，物理思维方式可能源自于库仑定律的验证实验。数百年前，库仑定曾运用扭秤验证电力的平方反比率，但由于实验直接测量力与距离，故精度实难以提高。而卡文迪许与麦克斯韦各自的实验，都将反比率的验证转化为了空腔内无电场的验证，突破了原有复杂思路的验证，最终取得了极佳的效果[9]。在算法中，视角的变化也同样起到了关键的作用，常常能使人们跳出复杂的数学构架。这一类思维方式值得人们进行深刻的反思。

参考文献：

[1]王庆．极小子流形的相关研究[J].长春大学学报,2013,23(10):1283-1285.

[2]陈维桓. 极小曲面[M]. 大连:大连理工出版社,2011.

[3]朱亚光. 复杂极小曲面的几何造型方法研究[D].杭州电子科技大学,2017.

[4]薛闪. 多边界极小曲面的逼近算法[D].大连理工大学,2018.

[5]陈维桓. 微分几何初步[M]. 北京:北京大学出版社,1990.

[6]杨森. 离散极小曲面的逼近算法[D].大连理工大学,2017.

[7]陈伯雄. CAGD[J].CAD/CAM 与制造业信息化,2012(06):17.

[8]A contribution to the particle modeling of soap films. C. Coppin, D. Greenspan. Journal of Applied Mathematics . 1988

[9]陈熙谋. 电力平方反比律的实验验证[J]. 大学物理,1982,1(1)