关于无穷本身及从无穷开始的算法的认识

易佳怡 1900017835

【摘要】尝试将任何有穷与无穷的问题转化为基于有穷观点的能行方法的计算模型是近现代算法发展的重要环节。而对无穷的探讨是康托尔集合论中重要的部分，在构造著名的对角线方法时起了关键作用。后者的合法使用则必定涉及自指问题和反排中律，本质上和停机问题、罗素悖论乃至哥德尔不完备性定理是相同的。通过讨论这些数学史上重要的问题、寻找它们之间的共性，我们可以更好地了解计算机诞生发展的渊源，也可以尝试效仿，将近现代数学融入计算机科学之中，制作出更有趣的算法。

【关键词】无穷，反排中律，对角线方法，停机问题，罗素悖论，哥德尔不完备性定理

【正文】

零 “无穷”自身

“infinity”的词源来自于拉丁语”infinitas”，意指“没有边界的”。

关于无穷概念的最早使用是在神话书籍中。无穷的符号“∞”原本在神秘学中象征着人类的神性，书写此符号时通常使用的左小右大的方式则象征着人与神之间的不对等。笛卡尔曾经在《第一哲学沉思录》中提到，“上帝是无限者，拥有所有那些我不能触及、但却能在我的思想中触及的完善”。

而在思维科学如数学、自然科学如物理和计算机科学中，无穷则被赋予了更加简明同时也更加晦涩的定义。数学中通常认为有两种无穷：潜无穷和实无穷，二者的差别在于无穷构造的方法。构造一个潜无穷一般用的是递推，如每个自然数后面都会有下一个自然数，则自然数的个数是不可数的，即无穷多个。实无穷则已直接把无穷作为一个存在的实际对象、一个整体。物理中是否存在真正的无穷这点值得深究，因为我们的物理只是对现有世界一个误差足够小的模拟，我们既不能保证我们的体系中（由于量子化的存在）存在真正的无穷，也不能保证现实世界真的按照我们的理论去做。计算机科学中，由于计算上限的存在，大于某个具体数值的数会被判定为溢出，即，计算机中的无穷是以某个足够大的数为下界的开区间，和数学上的无穷还有较大差别。

一 对角线方法：以无穷为基底的一一对应

对角线方法由康托尔在 1874 年首次给出。为了证明实数集的不可数性，对角线方法的基本思想是反证法：假设实数集的子集(0, 1)可数，并列出所有这些实数。此后设置一个新的数字，它的十分位与第一个数字的十分位不同、百分位与第二个数字的百分位不同、……、第 n 位数字与第 n 个数字小数点后第 n 个数字不同。这样就可以构造一个不属于这个可数的列表的实数。但列表本身包含了所有实数，与我们得出的结论矛盾。由此前提假设不成立，实数集的子集不可数，实数集本身也不可数。

这个证明过程中至少有一步不是显然可得的，那就是“列出”这些实数的方法。由于我们假设了它（实际上是错误）的可数性，也就是默认了存在某种算法能够将这些实数“列出”，才能得到用来构造对角线证明的数表。似乎在这里，假定存在一种未知的算法是可行的。

但在另一个证明中，“列出”数表的方法成为了证明的核心错误。如果考虑可计算数的可数性，对角线证明给出的结果（不可数）和直觉的正确结果（可数）恰好相反。其问题在于，可计算数“可计算”的特质要求存在这样一种列出数表的算法。这和关于实数的证明中

假设前提要求的存在性不同：前者是等待被证否的命题，后者除去待证否的命题之外，也是判断用对角线方法构造出来的新数字是否满足可计算数的条件的方法。在这里，判断的条件同时也是划定参与判断的数字主体是否满足参与判断条件的条件。

二 停机问题：迭代/递归

停机问题的实质也是将自己放进了自己判定的对象中。

停机问题的描述和证明是：假设存在一台可以判定任何程序在任何输入上能否停机的图灵机 H，并且将所有的图灵机和所有可能的输入列成一张表，就像对角线方法所做的那样。同样我们也构造另一个在对角线上的输出与其他图灵机不一样的新图灵机 P。由于 H 可以判定所有图灵机在任意输入上是否会停机，因此这样的 P 可以成立；同时，P 本身也是图灵机，不妨假设它是第 k 个。考察图灵机 P 在输入 k 上的停机问题。但由于 P 本身的构造方式，它输入 k 的输出结果不等于它输入 k 的输出结果，而一个输入显然是只能有一个输出的。因此我们不能够构造这样的 P，即对构造 P 来说至关重要的 H 是不存在的。

数学上我们一般把将经过运算得到的因变量再带回函数本身当作自变量的操作称为迭代（或者将在计算机中函数自调用的操作称为递归更合适）。上述两个例子则显示出，如果某种判断把自己的判断过程放置到自己的判断对象中去，就会出现一个“反排中律”的问题。即，对某个命题 P 的声明内涵了 P 和非 P 均不能在系统中得到证明的事实。

三 罗素悖论：逻辑主义和直觉主义

反排中律是哥德尔不完备性定理的核心内容和重要特点。简要来说，哥德尔证明了如何构造一个算术论断 G，G 的定义中含有某些“说明了 G 不能被证明的特征”。而如果 G 可以被证明，那么根据 G 的定义它为假；如果 G 不可证明，则正如它所说的那样，它是真的。因此，当且仅当 G 不可证明时，G 为一个真命题。但它的真（根据它自己声明的内容）既不能证明也不能证伪，某种程度上确实是反排中律的体现。

更浅显的例子体现在罗素悖论上，这同时也是一个“自指悖论”。罗素悖论构造了一个包含所有不包含自身的集合的集合 S，然后询问 S 是否包含自身。显然不论哪个回答都只会徒劳地陷入困境，在讨论这个问题时，数学家们分成逻辑主义和直觉主义两派，分别试图从自己的角度化解悖论。逻辑主义引入了“类型论”，即，描述某个个体的命题“层次”高于被它描述的个体，不同层次间的事物不能被归为一类。因此按照罗素悖论的方式说明一个集合属于它自身在类型论中是不合法的，这个方法避免自指所产生的问题似乎也很有效。但类型论又对数学中原本的概念（如上下确界）等产生了影响，为了保证这些概念，逻辑主义不得不引入一些更新、也更有争议的公理，使整个公理系统变得复杂。直觉主义则认为逻辑给出的东西不一定为真，认为排中律“可能对上帝有效……而对于人的逻辑，这一点却是做不到的”（外尔）。直觉主义主张，一个命题有三种情况：可证明、可证伪、不可证。同时他们也（因为不直观的原因而）拒绝实无穷出现在数学中，只接受潜无穷的存在。在直觉主义那里，罗素悖论根本不应该被构造，这个悖论是逻辑主义的一个错误。

说句题外话，有观点认为哥德尔不完备性定理和海森堡不确定性原理在哲学上具有等价的意义。那么由此类推，将图灵机比作双缝干涉实验装置似乎比较合适。

四 “失败之作”

哥德尔不完备性定理宣称，任何一个能够被转换为算术系统的方法或者逻辑原理都不能证明自身的相容性。这一定理（由上述所说）在内涵上与停机问题和罗素悖论相似，都涉及自指和（反）排中律。实际上，关于公理系统和公理化的后续考察还有别的消极结果：以整数公理为例，虽然这组公理被建立起来描述整数，但从公理本身出发则不止能建立整数，其

他截然不同的模型也能够在同样一组公理下被建立起来。到此为止，对数学公理化的尝试似乎已经以失败告终了。

然而这次失败的尝试意义远不止于此。事实上，正是由于公理化的失败、停机问题的无解，最终才为算法的发展留下了足够的空间，某种意义上也是一个良好的开端。正是因为“无法从本质上找到一个确实的解”，才会有对现存的每个具体程序不同的设置和优化，某种意义上也才会有不同的算法。虽说“计算机是数学家一次失败思考的产物”，这一产物带来的意义肯定不如那个尝试成功能带来的东西意义大，但在我们如今所处的数据时代中，也没有人能够否认它的重要性。

五 数学自身

计算机诞生于数学的一次对无穷的思考，是一次试图在无穷中抓住有限的尝试。虽然数学上对更终极的“公理化”或者“完备性”的探求以失败告终，但计算机科学却的确抓住了有限，或者说是无穷中的有限（如可计算数）。逻辑是计算机科学与数学的交集，计算机科学从数学那里学到了逻辑、从物理学和实际世界那里学到了如何提出亟待解决的问题，从而越发发展为一门完善的科学。可以这么说：一切算法的诞生都不是为了它们自身，要么是为了数学，要么是为了物理世界。从这点出发考虑，计算机更偏向于技术而非（纯理论意义上的）科学。

但数学不同。时至今日人们依然为应该将数学定义为自然科学还是思维科学而困扰。如果是前者，数学却不能被某一自然现象证伪；如果是后者，解释数学为何可以如此恰当地用于描述物理世界则成为了同等的难题。逻辑不是数学的全部，但绝对是不可或缺的一部分。要如何在不完备性定理的“阴影”下，保证数学的学科独立性，同时大胆地将前沿数学在不甚牢靠的基础上发展，似乎是现代数学的一个“心理障碍”。

但数学一向是最能够造就伟业的学科。“一门学科初到他们（指数学家）手上时像一块粗糙的石头，丑陋不堪，而离开他们手中时已经是一块闪闪发光的宝石了。”17 世纪数学与物理的结合一手缔造了后世所有科学的思维渊源，也成就了物理学本身。20 世纪初，数学上的一次失败挑战也能够造就计算机这样的伟大发明。显然，即使数学的基础现在似乎还笼罩在疑云中，我们也不能对数学丧失信心。要说什么能够最好地象征人类的智慧，我觉得没有比数学更加适合这个称号的了。

【参考文献】

1. 计算机与计算模式(2) 何谓计算？ 程京德 2015.2.9
http://blog.sciencenet.cn/blog-2371919-866686.html
2. 康托尔、哥德尔、图灵——永恒的金色对角线 刘未鹏 2006.10.5
http://mindhacks.cn/2006/10/15/cantor-godel-turing-an-eternalgolden-diagonal/
3.对角线方法之后的故事
http://www.matrix67.com/blog/archives/4812
4.《数学：确定性的丧失》 [美]Morris·Kline 李宏魁译
中信出版集团 2019 年 3 月第一版