

浅谈 Gale-Shapley 婚姻稳定匹配算法

作者：卢诗钰 学号：1700015433 指导老师：陈斌

【内容摘要】 Gale-Shapley 婚姻稳定匹配算法也称为延迟接受算法，是盖尔和沙普利为了寻找一个稳定匹配而设计出的市场机制。本文介绍了 Gale-Shapley 算法的思路，并通过婚配市场的案例展现了算法的具体实现过程，然后简单总结了稳定匹配算法的特点，同时也对 Gale-Shapley 的应用市场和发展前景进行展望。

【关键词】 稳定匹配算法；延迟接受算法

一、背景说明

经济学认为，生活中存在一种“集权化”的市场，即在供给和需求之间存在一个“清算中心”，通过这个中心才能让供求双方实现匹配。这种集权化市场存在的基础是，交易对象是不同质的，当 x 喜欢 y 时， w 是无法替代 y 的。而且必须是互相同步匹配， x 想匹配到 y ，必须是 y 也想匹配到 x ，否则不能匹配成功。

而婚配市场就是集权化市场的一个典型例子。在婚配市场上，男女双方互相匹配，通常需要一个中介。这就相当于一个“清算中心”，这个中心可以是婚姻介绍所，也可以是北京中山公园里的一个父母亲为子女婚配而展开信息交流的场所，还可以是一个网络平台。这个市场里匹配成功与否与金钱有关系，但是并不是一个简单的金钱买卖过程。

在这个匹配市场里，人才是交易的对象，交易关系是以生命、前途、终身幸福等为交易目标而发生的，而不是以人以外的物为交易对象。因此，匹配市场的交易往往就无法以钱搞定。但虽然交易不是主要依靠价格机制来决定匹配结果，匹配仍必须依靠以双方的意愿或者偏好为基础。只是由于这种偏好关系现在不是通过生成价格信号来实现交易，而是由偏好序直接导致选择行为来完成匹配过程。

二、 Gale-Shapley 算法的执行过程

我们用一个案例来说明 Gale-Shapley 算法的具体操作流程。

首先，我们假设在男女双方偏好序都是严格偏好关系的条件下，由男方主动向女方表白，由女方来采取“接受”或“拒绝”的回应，女方不能不表态，也不能含糊其辞。具体步骤如下：

第一步：每一位男士向作为自己的第一选择对象的女士表白。每位女士接到男士们的表白名单(可能不止一位)后，首先删去不可接受的男士；然后从剩下的可接受的候选人里只接受自己最喜爱的男士作为候选人，而拒绝其他可接受的男士；

在 $k \geq 2$ 步，任何在 $(k-1)$ 步(上一步)被拒绝的男士会继续想自己的次优对象表白，每位女士首先会拒绝不可接受的男士，然后会从最新更新的表白名单(新名单加上在 $(k-1)$ 轮选择结束时留下的男士候选人)里找出自己最偏好的男士留下作为品牌候选人，同时拒绝其他所有的可接受男士。即，在第 k 步，每一个女士都可以更新男士候选人。

.....

在有穷步之后，当男士方没有新的表白时，延缓接受算法程序就结束。

每个女士都与她自己在最后一步所接受(即经过最后更新过程后)的男士相匹配。任何从未试探性地接受过男士表白的女士，与任何被自己可接受的女士全部拒绝的男士，就成了剩女、剩男。

假设社群由 5 位男士 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 、 m_5 和 4 位女士 w_1 、 w_2 、 w_3 、 w_4 组成，且他们的偏好关系如下：

男士	偏好	女士	偏好
m_1	$w_1 > w_2 > w_3 > w_4$	w_1	$m_2 > m_3 > m_1 > m_4 > m_5$
m_2	$w_4 > w_2 > w_3 > w_1$	w_2	$m_3 > m_1 > m_2 > m_4 > m_5$
m_3	$w_4 > w_3 > w_1 > w_2$	w_3	$m_5 > m_4 > m_1 > m_2 > m_3$
m_4	$w_1 > w_4 > w_3 > w_2$	w_4	$m_1 > m_4 > m_5 > m_2 > m_3$
m_5	$w_1 > w_2 > w_4 > \text{单身}$		

对于以上案例，Gale-Shapley 婚姻匹配稳定算法的执行过程如下。

第一轮， m_1 、 m_4 、 m_5 都向 w_1 女士表白。根据 w_1 的偏好情况，她接受了 m_1 ，拒绝了 m_4 与 m_5 ，（虽然 w_1 最喜欢 m_2 ，但是 m_2 在没有在第一轮向 w_1 表白）。 m_2 、 m_3 向 w_4 表白， w_4 暂时接受了 m_2 ，拒绝了 m_3 。

这样，第一轮算法结束后，初步的匹配格局是：

w_1	w_2	w_3	w_4
m_1			m_2

第二轮， m_3 、 m_4 、 m_5 在第一轮被拒绝后，分别向 w_3 、 w_4 和 w_2 表白。 w_4 收到 m_4 的表白，就用 m_4 替代 m_2 （因为在她的偏好里， $m_4 > m_2$ ）。 m_5 对于 w_2 的表白，被暂时接受。 m_3 对 w_3 的表白，也被暂时接受。

这样，第二轮算法结束后，匹配的格局是：

w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	m_5	m_3	m_4

现在， m_2 需要继续表白。

在第三轮， m_2 按第二志愿向 w_2 表白。 w_2 在新表白者 m_2 与第二轮暂时选择的 m_5 之间进行比较后，会选择 m_2 ，拒绝 m_5 。

第三轮算法结束后，匹配的格局就变成：

w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	m_2	m_3	m_4

这样， m_5 需要继续表白。

到了第四轮， m_5 在分别被 w_1 和 w_2 被拒了以后，按照自己的第三志愿向 w_4 表白。 w_4 将 m_5 跟已选上的 m_4 进行比较后，认为还是 m_4 好，拒绝了 m_5 。

这样， m_5 在被自己的偏好序的三位可接受的女士（ w_1 、 w_2 、 w_4 ）表白后都遭到拒绝，就只能取单身状态。于是，最后的匹配格局是：

w_1	w_2	w_3	w_4	
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5

此时，搭配就达到稳定了。

三、 Gale-Shapley 算法的特点

首先，在算法执行过程中，有可能出现先前保留的邀约后来被拒绝的情况。比如 w_4 女士开始时 m_2 先生的邀约，但后来又拒绝他，转而接受 C 先生，体现了算法的延迟选择性。如果不允许延迟选择，必须当即拍板，则问题转化为秘书问题，与 Gale-Shapley 算法假设的情形不同；

如果把男女角色对调，由女士来表白，男士选择“接受”或“拒绝”，在本案例中得到的匹配结果也不会改变。这是因为本案例中只有一个稳定匹配。

四、 Gale-Shapley 算法的应用

与婚配市场相类似的，就业市场、高校录取过程中也同样存在匹配的情况。在就业市场上，一方面是求职者在找工作岗位，另一方面是有空置岗位的企业在寻找合适的人才。在高校录取过程里，一方面是考生提供自己的报考志愿，另一方面是学校再根据考生考试成绩和其他反映学生潜质的信息、根据考生志愿来录取学生。在这些市场中，都可以利用 Gale-Shapley 算法，从双方的偏好出发完成匹配的过程。

诺贝尔经济学奖评选委员会在声明中指出，沙普利采用合作博弈理论和比较不同匹配的方法进行研究，确保配置的稳定性，并在匹配过程中限制变量的影响，从而保证匹配的双方不会被对方干扰。沙普利和其研究团队的成果展现了一种特定方法的设计如何系统地有益于市场中的一方或另一方。而罗斯发现，沙普利的理论能够阐明一些重要市场在实践中的运作机制。通过一系列实验，他发现“稳定”是了解特定市场机制成功的关键因素。此外，他还重新设计了现有的体系以匹配医生和医院、学生和学校、患者和志愿者。这些新的发展都基于沙普利的匹配稳定理论，罗斯还就涉及道德限制和特定情况的方面进行了修正。

参考文献

- [1] 平新乔. 中级微观经济学课堂讲义第十八章. 2018.
- [2] 百度百科. 盖尔-沙普利算法