关于“四色定理”计算机证明的报告

郭洋帆 物理学院 1800061303

【摘要】“只需要四种颜色为地图着色。”看似通俗而简单的四色定理(Four Color Theorem)却作为“世界三大数学猜想”之一，困扰世界顶尖数学家百余年(1852-1976)，同时其作为第一个在数学逻辑基础上借助计算机进行证明的定理，也使其充满开创性与争议。本篇报告将在叙述四色问题的提出以及计算机证明前取得的部分成果基础上，分析四色问题计算机证明算法与实现过程，最后将简要阐释四色定理的争议应用意义与个人对计算机证明数学定理的思考。

【关键词】 四色问题；放电法；图论；不可避免构形集；枚举算法

一、四色问题的提出与计算机证明前的研究背景

1852 年，毕业于伦敦大学学院(UCL)的弗兰西斯·古德里(Francis Guthrie)在绘制地图时无意间发现其绘制的地图几乎全部只需四种颜色就可以保证相邻区域颜色不同，猜想是否“只需要四种颜色就可以为地图着色”[1]，古德里将其想法通过其弟传达于奥古斯塔斯·德摩根(Augustus De Morgan)，通过德摩根的推动，数学界逐步关注“四色问题”，开始了对其长达百余年的研究。

其中比较重要并为 1976 年计算机证明提供重要基础的研究成果首先是阿尔弗雷德·肯普(Alfred Kempe) [2]。肯普通过归纳法**看似**对四色问题进行证明，但后来被推翻，成为“可能是最有名的四色问题的错误证明”。不过其证明了四色问题可以被简化为相邻多边形构成的普通平面地图的填色问题，其中三个多边形对应一个结点，通过图论中欧拉公式，他得到如下方程：

$$4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 = \sum_{k=7}^{k_{max}} (k-6)p_k + 12 \tag{1.1}$$

其中p_i为与i个多边形相邻多边形的个数，k_{max}为地图中最大的i值[2]。此后在此数学基础上他引入了肯普链(Kempe Chain)方法进行地图换色，将 4 或 5 个个邻国进行约化。这些结论为后续计算机研究提供了部分理论基础，并于 1977 年论文中起始部分被进一步介绍[2]。肯普证明被推翻后数学家们又进行了大量的尝试，哈肯和阿佩尔 1977 年计算机证明论文将这些研究归为两类：“尝试修复肯普工作漏洞”与“寻找不同方法来解决四色问题”[2]，但这些研究并未能

解决问题与甚至接近问题解答。而算法思维与计算机的出现为解决问题提供了另一种思路。

二、四色问题计算机证明与实现过程

问题的解决首先起始于不可避免的可约构形集的寻找，肯普说明任一地图中必然存在以下四种构形：2 邻国国家、3 邻国国家、4 邻国国家和 5 邻国国家(如下图)；然后证明每种构形都是可约构形，而这正是其理论的漏洞。

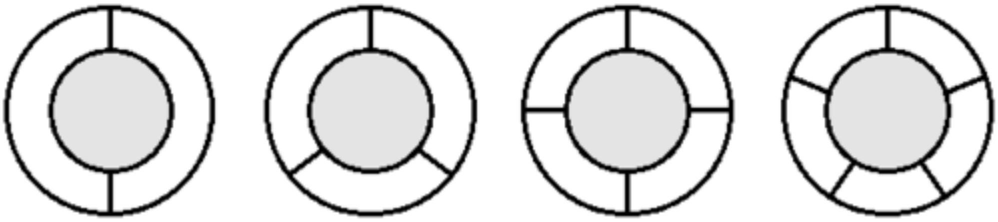

Fig.1 肯普使用的不可避免构形集：邻国有 2、3、4、5 个的国家

美国数学家伯克霍夫等人首先将肯普的方法进行延续化与系统化，证明必然存在国家数最小的“极小五色地图”(five-chromatic map)。这个地图必然是“不可约的”(irreducible)[3]，而这就证明问题证明所需研究的个数是有限的，同时就为之后计算机证明**“能行可计算”所必须的“有限”条件**提供了理论基础。

如何寻找不可避免构形集和验证构形可约性也成为了一关键问题，而亨利·希尔(Henry Hill)于 1969 年提出“放电法”（discharging method），：利用地图转换成图染色后成为平面图的特性，将其看作是平面的电网，并将每个节点按照度数（连出的边数）分类。“放电”的过程(dischar-ging procedure)指的是将这些电荷以特殊的规则进行重新分配，从而找出“电网”结构上的特性，创建不可避免集[4]。

放电法为寻找不可避免集给出了系统的方法，但人工寻找不可避免构形集和验证构形可约性可行性较小，而其总数有限性正适合计算机进行。哈肯于 1975 年找到了一种较好的放电过程，后与阿佩尔合作，先利用放电法得到由 1936 个构形组成的不可避免集，对应的放电过程由 487 条规则构成。在博士生约翰·科赫(John Koch)的协助下，他们利用计算机采用**枚举算法**将上面的所有不可避免构形集列出并验证其构形可约性[2][5]，从而证明了四色问题。

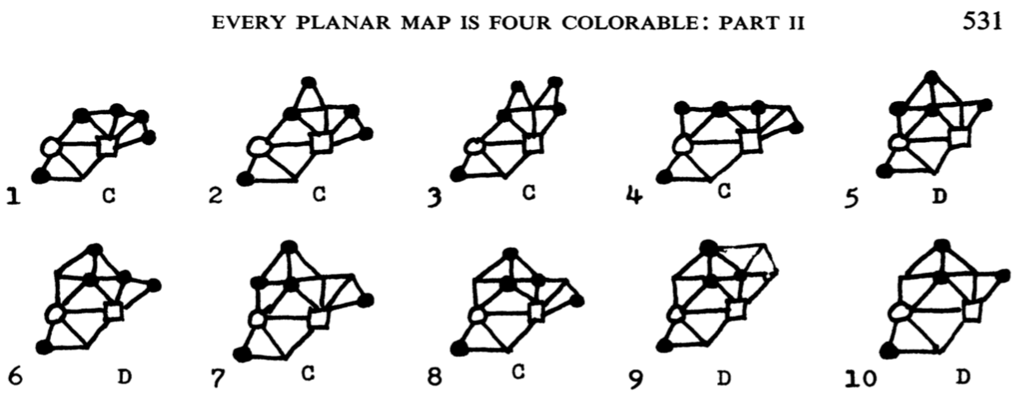

Fig.2 哈肯、阿佩尔 1977 年论文中不可避免构形集例子(部分)[5]

三、四色定理证明后的争议、应用与意义

四色定理虽然得到了证明，但在当时很多数学家对此证明拒绝接受，数学界部分数学家认为：一方面，计算机辅助下的证明无法由人力进行核查审阅，因为人无法重复计算机的所有运算步骤；另一方面，计算机辅助的证明无法形成逻辑上正则化的表述，因为其中的机器部分依赖于现实经验的反馈，无法转换为抽象的逻辑过程[1]。之后随着计算机的发展，不同数学家采用不同算法对此进行了验证:其结果均一致确认先前证明结果的正确性，此后争议逐渐平息。

“四色定理”虽然在实际应用却相当有限，主要由于实际地图中存在“飞地”(某个地理区划境内有一块隶属于他地的区域，如美国阿拉斯加州)，使得实际地图涂色往往采取更多颜色。但关于“四色定理”计算机证明更是标志着计算机成为现代数学的一个重要工具，衍生出了“计算数学” “数据科学”等新兴科研领域。

四、个人对“四色定理”证明的总结

通过“四色定理”这一经典问题的证明过程与算法设计，个人对能行方法与可计算性有了更深层次的认识。首先通过不可避免构形集的有限性而非无穷确保了“有限”，而通过计算机算法验证则确保了“机械”，后续不同的实现方法的验证则证明此算法的“精确”，而通过“放电法”的抽象描述则使得数据更容易进行处理。纵观之，“四色定理”的证明较为完全、经典地体现了数据结构与算法的思想核心，极具启发性。

参考文献

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

[2] K. Appel, W. Haken. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. Illinois Journal of Mathematics. 1977**(证明论文，本文主要参考 1)**

[3] Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, Robin J. Wilson. Graph Theory 1736-1936. Oxford University Press. 1999.

[4] Jeremy Preston Magee. Reducible Configurations and So On: The Final Years of the Four Color Theorem. ProQuest. 2008.

[5] K. Appel, W. Haken. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. Illinois Journal of Mathematics. 1977**(证明论文，本文主要参考 2)**